درخت دانش

فصل اول

تابع

(۱۲ پیمانه)

مرجع کتاب درسی:
حسابان ۲ - فصل اول
صفحه‌های ۱ تا ۲۲

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

تابع

۶۰ سؤال امتحانی شناسنامه‌دار
۱۲ پیمانه‌ی ۵ سؤالی

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۱ تبدیل نمودار توابع

تعداد پیمانه: **۶ پیمانه** — **۳۰ سؤال**

۱	انتقال‌های عمودی و افقی
۲	انبساط و انقباض عمودی
۳	انبساط و انقباض افقی

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

تعداد پیمانه: **۶ پیمانه** — **۳۰ سؤال**

۱	تابع درجه سوم
۲	توابع صعودی و توابع نزولی
۳	تقسیم و بخش‌پذیری

درس و سؤال‌های طراحی شده‌ی این فصل: فرهاد حامی
گزینش و چیدمان سؤال‌ها: فرزانه دانایی

حسابان ۲ – صفحه‌های ۲ تا ۱۲

۱ تبدیل نمودار توابع

۱ انتقال‌های عمودی و افقی

۱ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ در اختیار باشد، آنگاه برای رسم نمودار تابع:

الف) $y = f(x) + k$، اگر $k > ۰$ باشد، نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای محور yها به بالا و برای $k < ۰$، $|k|$ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

ب) $y = f(x + k)$، اگر $k < ۰$ باشد، نمودار را $|k|$ واحد در راستای محور xها به راست و اگر $k > ۰$، k واحد به چپ انتقال می‌دهیم.

تیپ ۱ امتحانی رسم نمودار تابع $y = f(x + a) + b$: برای رسم نمودار این تابع به کمک نمودار تابع $y = f(x)$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

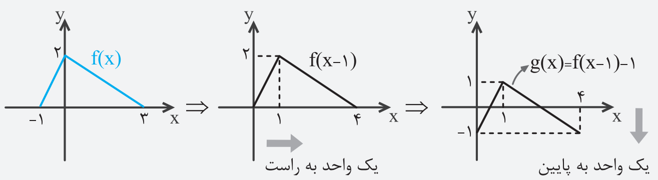
گام اول: انتقال افقی تا نمودار $f(x + a)$ به‌دست آید. (a واحد در راستای محور xها)

گام دوم: انتقال عمودی تا نمودار $f(x + a) + b$ به‌دست آید. (b واحد در راستای محور yها)

● مثال: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x) = f(x - ۱) - ۱$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

○ حل: برای رسم نمودار تابع g، کافی است نمودار تابع f را یک واحد به راست و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم.

با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $[۰ , ۴]$ و برد آن بازه‌ی $[-۱ , ۱]$ است.



سؤالات امتحانی

مرجع

۱. در عبارت‌های زیر، جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) برای رسم نمودار تابع $y = f(x - ۳)$، از روی تابع $y = f(x)$، کافی است نمودار تابع f را ۳ واحد در راستای محور .... به سمت .... انتقال دهیم.

ب) اگر $A(۲ , -۱)$ یک نقطه از تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه‌ی $A' = (... , ...)$ نقطه‌ی متناظر آن روی تابع $g(x) = f(x + ۱) - ۲$ است.

پ) اگر برد تابع $y = f(x)$ بازه‌ی $[۱ , +\infty)$ باشد، آنگاه برد تابع $y = f(x - ۱) + ۲$ بازه‌ی .... است.

مرجع: حسابان ۲– صفحه‌های ۲ و ۳– متن درس

۲. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر نقطه‌ی $A(x_۰ , y_۰)$ یک نقطه از تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'(x_۰ - ۱ , y_۰ + ۲)$ یک نقطه از تابع $y = f(x + ۱) + ۲$ است.

ب) برد تابع $y = |x - ۱| + ۳$ بازه‌ی $[۱ , +\infty)$ است.

پ) برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - ۳}$ از روی تابع $g(x) = \sqrt{x + ۱}$، کافی است نمودار تابع g را ۴ واحد در راستای محور xها به راست انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{۳})$ از روی تابع $f(x) = \sin x$، کافی است نمودار تابع f را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست انتقال دهیم.

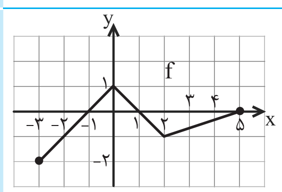
مرجع: حسابان ۲– صفحه‌های ۲ و ۳– متن درس

۳. مختصات تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $A(-۳ , ۲)$ روی تابع $y = f(x)$ را در توابع زیر بیابید.

الف) $y = f(x) - ۱$ ب) $y = f(x - ۳)$ پ) $y = ۱ + f(x + ۱)$

مرجع: حسابان ۲– صفحه‌های ۲ و ۳– متن درس

۴. اگر نمودار تابع f به صورت روبه‌رو باشد، نمودار تابع $y = f(x - ۲) + ۱$ را رسم نموده و دامنه و برد آن را بیابید.



مرجع: حسابان ۲– صفحه‌ی ۴– مشابه مثال

	مرجع
۵. نمودار توابع زیر را با استفاده از تابع داده شده رسم کنید. الف) تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۲}-۱$ به کمک انتقال تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$. ب) تابع $y=\log_{۰/۱}^{(x+۱)}+۱$ به کمک انتقال تابع $y=\log_{۰/۱}^{x}$.	حسابان ۲- صفحه‌ی ۵ کار در کلاس- مشابه ۲

۲ انبساط و انقباض عمودی

۱ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد و $k>۰$، آنگاه برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، کافی است عرض هر نقطه‌ی تابع f را k برابر کنیم، به عبارت دیگر اگر $(a\,,b)\in f$ باشد، آنگاه $(a\,,kb)\in kf$ است، در این حالت:

الف) اگر $k>۱$ باشد، نمودار در راستای محور yها کشیده‌تر (منبسط) می‌شود.

ب) اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار در راستای محور yها، فشرده‌تر (منقبض) می‌شود.

۲ برای رسم نمودار تابع $y=-f(x)$، کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

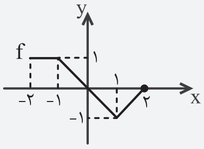
تیپ ۱ امتحانی رسم نمودار تابع $y=kf(x+a)+b$: برای رسم نمودار این تابع به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: انتقال افقی تا نمودار $f(x+a)$ به‌دست آید. (a واحد در راستای محور xها)

گام دوم: k برابر کردن عرض نقاط تا نمودار $kf(x+a)$ به‌دست آید.

گام سوم: انتقال عمودی نمودار تا نمودار $kf(x+a)+b$ به‌دست آید.

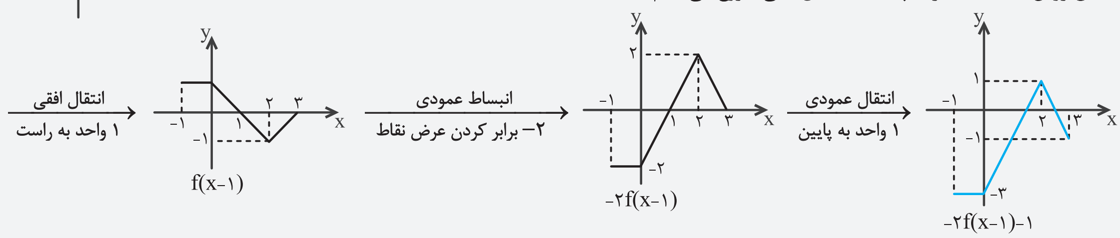
● مثال: نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل مقابل است:



الف) نمودار تابع $y=-۲f(x-۱)-۱$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع $y=-۲f(x-۱)-۱$ را بنویسید.

○ حل: الف) مطابق روش گفته شده در تیپ بالا، با انتقال افقی شروع می‌کنیم:



ب) با توجه به شکل دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D_y=[-۱\,,۳]$ و برد آن بازه‌ی $R_y=[-۳\,,۱]$ است.

● مثال: نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال داده و در انتها نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ضابطه‌ی نمودار را در هر مرحله بنویسید.

○ حل: با یک واحد انتقال به چپ، x به $x+۱$ تبدیل می‌شود و تابع $f(x+۱)$ به دست می‌آید: $f(x+۱)=\sqrt{x+۱}$

با ۲ واحد انتقال تابع به پایین، $f(x+۱)$ به $f(x+۱)-۲$ تبدیل می‌شود: $f(x+۱)-۲=\sqrt{x+۱}-۲$

با قرینه شدن نسبت به محور xها، $y\to -y$ یا کل ضابطه‌ی تابع قرینه می‌شود: $-(f(x+۱)-۲)=-(\sqrt{x+۱}-۲)=-\sqrt{x+۱}+۲$

سؤالات امتحانی

	مرجع
۶. درست یا نادرست بودن عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) برای رسم نمودار تابع $g(x)=-f(x)$ از روی نمودار تابع f کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم. ب) اگر نقطه‌ی $A(۱\,,۲)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه تبدیل یافته‌ی آن در تابع $y=-۲f(x)$ نقطه‌ی $A'(-۱\,,-۴)$ است. پ) برد تابع $f(x)=-۲\|x-۱\|$ بازه‌ی $(-\infty\,,۰]$ است. ت) محل‌های تلاقی نمودار توابع $f(x)$ و $kf(x)$ با محور xها یکی است.	حسابان ۲- صفحه‌های ۶ و ۷- متن درس

مرجع

۷. در عبارت‌های زیر، جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) نمودار تابع $y=-f(x)$، قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور .... است.

(امتحان نهایی – شهریور ۹۸)

ب) برای رسم نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}f(x)$ از روی نمودار تابع f، کافی است عرض هر نقطهٔ تابع f را .... برابر کنیم.

پ) اگر برد تابع f بازهٔ $[-۲\,,\,۳]$ باشد، آنگاه برد تابع $y=-۲f(x)$ بازهٔ .... است.

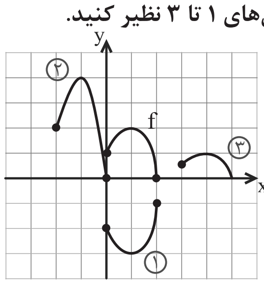
مرجع: حسابان ۲- صفحه‌های ۶ و ۷- متن درس

۸. نمودار تابع f در زیر رسم شده، هر یک از توابع (الف) تا (پ) را به شکل‌های ۱ تا ۳ نظیر کنید.

الف) $\frac{۱}{۲}f(x-۳)$

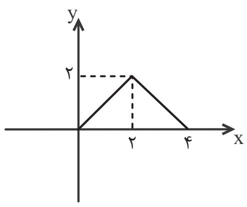
ب) $-f(x)-۱$

پ) $۲f(x+۲)$



مرجع: حسابان ۲- صفحهٔ ۱۱
مشابه و مکمل تمرین ۱

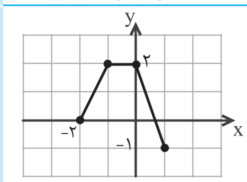
۹. نمودار تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار توابع $y=f(x+۲)$ و $y=-۲f(x)+۱$ را به کمک انتقال رسم نموده و دامنه و برد هر یک را بیابید.



(امتحان نهایی – شهریور ۸۳)

مرجع: حسابان ۲- صفحهٔ ۱۲- مشابه تمرین ۲

۱۰. نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



(امتحان نهایی – خرداد ۹۸)

مرجع: حسابان ۲- صفحهٔ ۱۲
مشابه تمرین ۲- ب

۱۱. ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده و سپس با استفاده از آن نمودار تابع $y=-۲f(x)-۱$ را رسم کنید.

(امتحان نهایی – خرداد ۹۲)

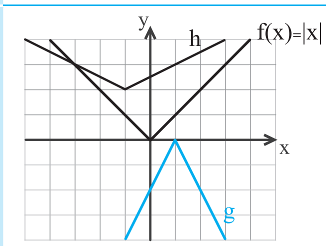
مرجع: حسابان ۲- صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۱

۱۲. نمودار تابع $f(x)=|x+۱|$ را در بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ رسم نموده و به کمک آن نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را بیابید.

الف) $y=-f(x)$ ب) $y=۲f(x)+۱$ پ) $y=\frac{-۱}{۲}f(x)$

مرجع: حسابان ۲- صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۱

۱۳. در هر یک از نمودارهای مقابل توضیح دهید که تابع‌های g و h، چگونه از روی تابع $f(x)=|x|$ ساخته می‌شوند و ضابطهٔ آنها را بیابید.



مرجع: حسابان ۲- صفحهٔ ۷
کار در کلاس- مشابه و مکمل ۲- پ

۱۴. به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi\,,\,۲\pi]$، نمودار توابع زیر را رسم کرده و برد آنها را بیابید.

الف) $y=۲\cos x$ ب) $y=\frac{۱}{۲}\cos x$ پ) $y=-۳\cos x$

مرجع: حسابان ۲- صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت

۳ انبساط و انقباض افقی

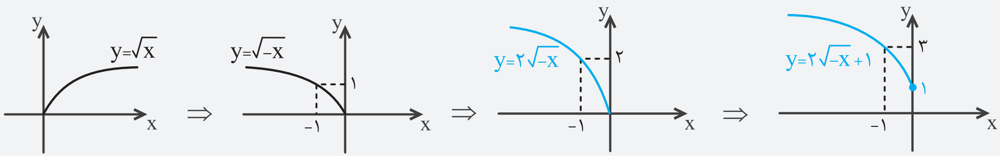
تیپ ۱ امتحانی رسم نمودار تابع $y=f(-x)$ و $y=-f(-x)$: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد، آنگاه:

الف) برای رسم نمودار تابع $y=f(-x)$، کافی است قرینه‌ی تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.

ب) برای رسم نمودار تابع $y=-f(-x)$، کافی است قرینه‌ی تابع $y=f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.

● مثال: نمودار تابع $f(x)=۲\sqrt{-x}+۱$ را به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

○ حل: ابتدا قرینه‌ی تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها رسم کرده تا $y=\sqrt{-x}$ به‌دست آید، سپس عرض هر نقطه‌ی تابع حاصل را ۲ برابر کرده و در انتها نمودار حاصل را ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم:



تیپ ۲ امتحانی رسم نمودار تابع $y=f(kx)$: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد، برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول هر نقطه‌ی تابع f را بر k تقسیم کنیم. به عبارت دیگر اگر نقطه‌ی $A(a\,,b)$ روی تابع f باشد، نقطه‌ی $A'(\frac{a}{k}\,,b)$ روی تابع $y=f(kx)$ است.

① اگر $k>۱$ باشد، تابع f در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منقبض (فشرده‌تر) می‌شود.

② اگر $۰<k<۱$ باشد، تابع f در راستای محور x ها با ضریب $\frac{۱}{k}$ منبسط (کشیده‌تر) می‌شود.

③ اگر $k<۰$ باشد، برای رسم تابع $y=f(kx)$، ابتدا نمودار را در حالت $k>۰$ رسم کرده و سپس قرینه‌ی تابع حاصل را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.

④ برای رسم نمودار $f(kx+b)$، ابتدا نمودار تابع $f(x+b)$ را رسم کرده و سپس طول نقاط را بر $|k|$ تقسیم می‌کنیم. اگر $k<۰$ باشد، نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.

● مثال: اگر نقطه‌ی $A(۲\,,-۳)$ روی تابع $y=f(x)$ باشد، مختصات تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی A را در تابع $y=\frac{۱}{۳}f(\frac{-x}{۲})$ بیابید.

○ حل: کافی است طول نقطه را بر $\frac{-۱}{۲}$ تقسیم کنیم و عرض آن را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب کنیم، پس:
$$A'(\frac{۲}{\frac{-۱}{۲}}\,,\frac{۱}{۳}(-۳))=(-۴\,,-۱)$$

● مثال: اگر دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ بازه‌ی $[-۲\,,۶]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)+۱$ را بیابید.

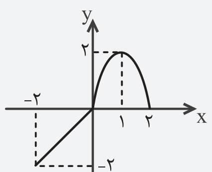
○ حل: انتقال عمودی و انبساط عمودی بر روی دامنه‌ی تابع بی‌تأثیرند، پس دامنه‌ی تابع خواسته شده با دامنه‌ی تابع $f(۲x)$ برابر است. در تابع $y=f(x)$، دامنه‌ی تابع (ورودی‌های تابع) بازه‌ی $[-۲\,,۶]$ است، پس: $-۲\le x\le ۶$

در تابع $y=f(۲x)$ باید $-۲\le ۲x\le ۶$ یا $-۱\le x\le ۳$ باشد، بنابراین:
$$D_{f(۲x)}=D_{\frac{۱}{۲}f(۲x)+۱}=[-۱\,,۳]$$

● مثال: اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

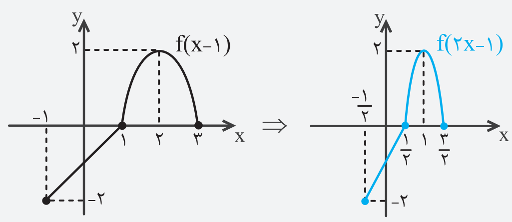
(۱) $y=f(۲x-۱)$

(۲) $y=f(\frac{-x}{۲})$

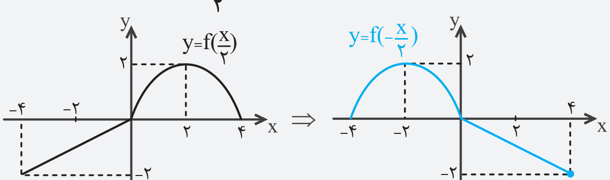


○ حل:

(۱) برای رسم نمودار تابع $y=f(۲x-۱)$، ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x-۱)$ به دست آید، سپس طول هر نقطه‌ی تابع $f(x-۱)$ را بر ۲ تقسیم کرده تا نمودار $y=f(۲x-۱)$ به‌دست آید.



(۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{-x}{۲})$، ابتدا طول هر نقطه‌ی تابع f را بر $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کرده (یا در عدد ۲ ضرب کرده) تا تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به‌دست آید و سپس قرینه‌ی نمودار حاصل را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم تا نمودار $y=f(\frac{-x}{۲})$ به دست آید.



سؤالات امتحانی

مرجع

۱۵. درست یا نادرست بودن عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-۱\,,\,۳]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=-۳f(۲x)$ بازه‌ی $[\frac{-۱}{۲}\,,\,\frac{۳}{۲}]$ است.

(امتحان نهایی - دی ۹۵)

ب) اگر نقطه‌ی $A(-۲\,,\,۴)$ روی تابع f باشد، نقطه‌ی $A'(-۴\,,\,۴)$ روی تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ است.

پ) اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید.

(امتحان نهایی – خرداد ۹۸)

حسابان ۲- صفحه‌های ۹ و ۱۰ متن درس

۱۶. الف) در رسم نمودار $y=f(ax)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، اگر $۰<a<۱$، کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را در امتداد محور xها .... کنیم.

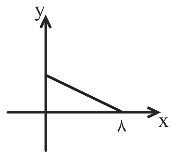
① منبسط ② منقبض

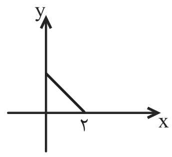
(امتحان نهایی - شهریور ۹۵)

ب) تابع $y=f(x)$ با دامنه‌ی $[-۲\,,\,۱]$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع $y=f(-۳x)$ بازه‌ی .... است.

① $[\frac{-۱}{۳}\,,\,\frac{۲}{۳}]$ ② $[-۳\,,\,۶]$

پ) اگر $f(x)=۴-x$ با دامنه‌ی $[۰\,,\,۴]$ باشد، آنگاه نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به کدام شکل زیر است؟

① 

② 

ت) اگر نقطه‌ی $A(۱\,,\,۲)$ بر روی تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطه‌ی A' متناظر آن روی تابع $y=f(۲x+۱)$ به مختصات .... است.

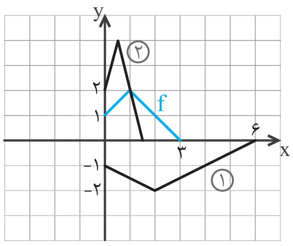
① $A'(۳\,,\,۲)$ ② $A'(۰\,,\,۲)$

حسابان ۲- صفحه‌های ۹ و ۱۰ متن درس

۱۷. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل روبه‌رو باشد، توابع (الف) و (ب) را به شکل‌های ① و ② نظیر کنید.

الف) $h(x)=۲f(۲x)$

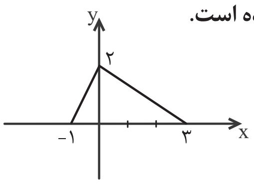
ب) $g(x)=-f(\frac{x}{۲})$



حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۰ کار در کلاس- مکمل ۲

۱۸. نمودار تابع f با دامنه‌ی $[-۱\,,\,۳]$ و برد $[۰\,,\,۲]$ در شکل روبه‌رو داده شده است.

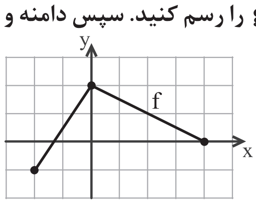
نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.



(امتحان نهایی - دی ۸۶)

حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۰ کار در کلاس- مکمل ۲

۱۹. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=-f(۲x)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



(امتحان نهایی – دی ۹۷)

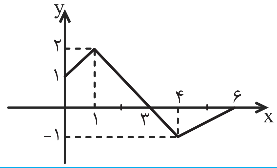
حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۲

مرجع

۲۰. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل مقابل باشد:

الف) نمودار تابع $y=۱-f(\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.

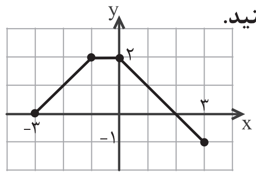
ب) دامنه و برد آن را بیابید.



حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۲

۲۱. نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.

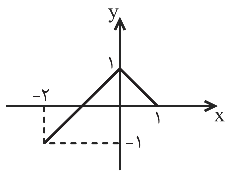
نمودار تابع $g(x)=f(۲x+۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



(امتحان نهایی – دی ۹۸)

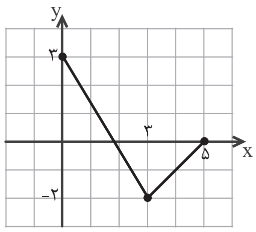
حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۰- مشابه مثال

۲۲. نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل روبه‌روست. به کمک این نمودار، نمودار تابع $g(x)=۱-f(-x)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.



حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۲

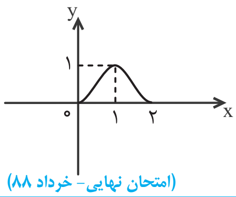
۲۳. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(۳-x)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.



(امتحان نهایی – شهریور ۹۸)

حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۲
مشابه تمرین ۲- ث

۲۴. نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=f(-۲x)$ را رسم کنید.



(امتحان نهایی- خرداد ۸۸)

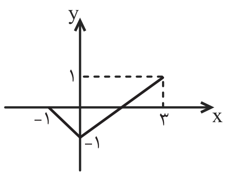
حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۲

۲۵. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد:

الف) توضیح دهید چگونه می‌توان نمودار تابع $y=f(۱-۲x)$ را به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ رسم نمود.

ب) نمودار تابع $y=f(۱-۲x)$ را رسم کنید.

پ) دامنه و برد تابع $y=-۲f(۱-۲x)$ را بیابید.



حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۲

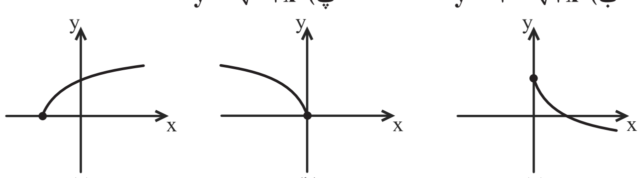
۲۶. ابتدا نمودار تابع $f(x)=|x-۳|$ را در بازه‌ی $[۲ , ۴]$ رسم نموده و سپس به کمک آن نمودار تابع $y=f(-x)$ را رسم کنید.

(امتحان نهایی- دی ۹۱)

حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۳

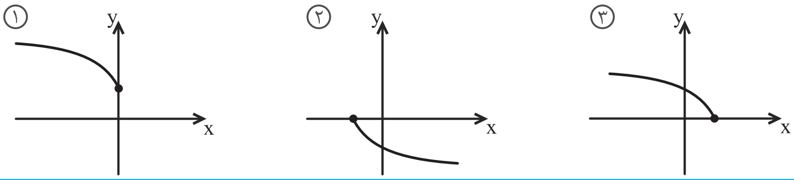
۲۷. هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته‌ی تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۴x+۲}$ ب) $y=۳-\sqrt{۴x}$ پ) $y=\sqrt{-۴x}$



(a) (b) (c)

حسابان ۲- صفحه‌ی ۱۱- مشابه تمرین ۱

	مرجع
۲۸. با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ هر تابع را به نمودارش نظیر کنید. الف) $y=\sqrt{1-x}$ ب) $y=1+\sqrt{-x}$ پ) $y=-\sqrt{x+1}$ 	حسابان ۲ ـ صفحهٔ ۱۱ ـ مکمل تمرین ۱
۲۹. با استفاده از نمودار تابع $y=\cos x$، نمودار توابع زیر را رسم کنید. الف) $y=\cos 2x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$ ب) $y=\cos\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-2\pi , 2\pi]$ پ) $y=-2\cos 2x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$	حسابان ۲ ـ صفحهٔ ۱۰ کار در کلاس ـ مکمل ۳
۳۰. نمودار دو تابع $y=-\sin x$ و $y=\sin 2x$ را در بازهٔ $[-2\pi , 2\pi]$ به کمک تابع $y=\sin x$ رسم کرده و تعیین کنید در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.	حسابان ۲ ـ صفحهٔ ۱۰ کار در کلاس ـ مکمل ۳

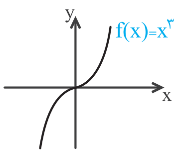
۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

حسابان ۲ ـ صفحه‌های ۱۳ تا ۲۲

۱ تابع درجه سوم

توابع چندجمله‌ای ◄ هر تابع به معادلهٔ $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...+k$ را که در آن a، b، c، ... و k اعداد حقیقی، n یک عدد صحیح نامنفی و $a\neq 0$ است، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامیم، به عنوان مثال:

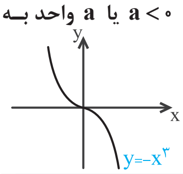
$$y=3 \quad ، \quad y=5x+1 \quad ، \quad y=\frac{1}{2}x^2+5x \quad ، \quad y=x^2-2x \quad ، \quad y=2x^6-5x^4$$



توجه دامنهٔ توابع چندجمله‌ای، مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

تابع درجهٔ سوم ◄ هر تابع به معادلهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$، $(a\neq 0)$ یک تابع درجهٔ سوم نامیده می‌شود. یک حالت خاص از آن $f(x)=x^3$ با نمودار روبه‌روست. در این تابع دامنه و برد، اعداد حقیقی است.

تیپ ۱ امتحانی رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x+a)^3+b$: با استفاده از خواص انتقال و تقارن می‌توانیم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x+a)^3+b$ را به کمک نمودار تابع $y=x^3$ رسم کنیم. برای رسم آن ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را $|a|$ واحد به راست برای $a<0$ یا a واحد به چپ برای $a>0$ و سپس b واحد به بالا برای $b>0$ و یا $|b|$ واحد به پایین برای $b<0$ انتقال می‌دهیم.

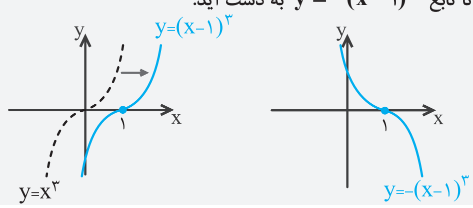


توجه نمودار تابع $y=-x^3$، قرینهٔ نمودار تابع $y=x^3$ نسبت به محور x هاست، پس نمودار آن به شکل مقابل است.

● **مثال:** به کمک نمودار تابع $y=x^3$، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

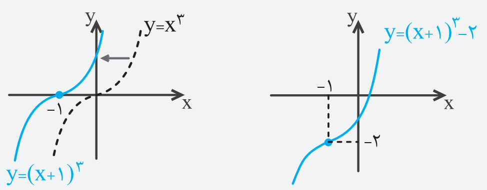
(b) $y=-(x-1)^3$

○ حل: ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به راست انتقال داده تا تابع $y=(x-1)^3$ به‌دست آید و سپس قرینهٔ آن را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم تا تابع $y=-(x-1)^3$ به دست آید.



(a) $y=(x+1)^3-2$

○ حل: کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.



توجه در مواردی لازم است ابتدا ضابطهٔ داده شده را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به شکل $y=\pm(x+a)^3+b$ تبدیل کنیم. به عنوان مثال تابع با ضابطهٔ $y=-x^3+3x^2-3x$ را به شکل مقابل بازنویسی می‌کنیم: $y=-(x^3-3x^2+3x)=-(x^3-3x^2+3x-1+1)=-(x-1)^3-1$

پاسخ تشریحی فصل اول

حسین حاجیلو

۱. الف) برای رسم نمودار تابع $y = f(x-۳)$، از روی تابع $y = f(x)$، کافی است نمودار تابع f را ۳ واحد در راستای محور xها به سمت راست انتقال دهیم.

ب) اگر $A(۲ , -۱)$ یک نقطه از تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'(۱ , -۳)$ نقطه‌ی متناظر آن در تابع $g(x) = f(x+۱) - ۲$ است.

برای رسم نمودار تابع $g(x) = f(x+۱) - ۲$ نمودار $y = f(x)$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم (پس نقطه‌ی $A(۲ , -۱)$ تبدیل به $A'_۱(۲-۱ , -۱) = (۱ , -۱)$ می‌شود)، سپس نمودار $y = f(x+۱)$ را دو واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا $g(x) = f(x+۱) - ۲$ به‌دست آید (پس نقطه‌ی $A'_۱(۱ , -۱)$ تبدیل به $A'(۱ , -۱-۲) = (۱ , -۳)$ می‌شود).

پ) اگر برد تابع $y = f(x)$ بازه‌ی $[۱ , +\infty)$ باشد، آنگاه برد تابع $y = f(x-۱) + ۲$ بازه‌ی $[۳ , +\infty)$ است.

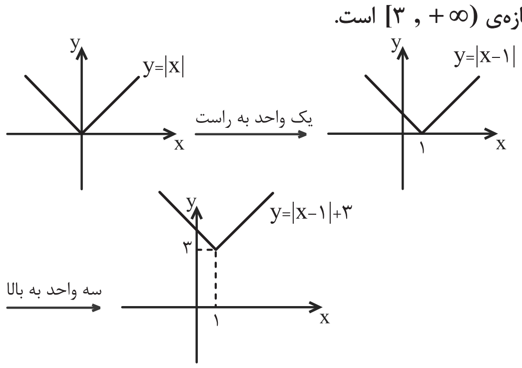
برای رسم نمودار $y = f(x-۱) + ۲$، نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا $y = f(x-۱)$ به‌دست آید که این انتقال تغییری در برد تابع ایجاد نمی‌کند؛ سپس $y = f(x-۱)$ را دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا $y = f(x-۱) + ۲$ به دست آید، این انتقال همه‌ی مقادیر تابع را دو واحد افزایش می‌دهد، پس برد این تابع برابر است با:

$$[۱+۲ , +\infty) = [۳ , +\infty)$$

---

۲. الف) درست است. برای رسم نمودار $y = f(x+۱) + ۲$، نمودار $y = f(x)$ را ابتدا یک واحد به چپ و سپس دو واحد به بالا منتقل می‌کنیم. انتقال اول، یک واحد از طول نقاط کم کرده و انتقال دوم، دو واحد به عرض نقاط می‌افزاید، پس نقطه‌ی $A(x_۰ , y_۰)$ تبدیل به $A'(x_۰ - ۱ , y_۰ + ۲)$ می‌شود.

ب) نادرست است. با توجه به نمودار تابع، برد آن بازه‌ی $[۳ , +\infty)$ است.



پ) درست است. داریم $g(x) = \sqrt{x+۱}$ و

$$f(x) = \sqrt{x-۳} = \sqrt{(x-۴)+۱} = g(x-۴)$$

پس برای رسم نمودار تابع f، نمودار g را ۴ واحد به راست منتقل می‌کنیم.

ت) درست است. اگر $f(x) = \sin x$، آنگاه:

$$g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{۳}) = f(x - \frac{\pi}{۳})$$

پس برای رسم نمودار g، نمودار f را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست منتقل می‌کنیم.

---

۳. ابتدا توجه کنید که:

$$A(-۳ , ۲) \in f \Rightarrow f(-۳) = ۲$$

الف) در نظر می‌گیریم $g(x) = f(x) - ۱$، داریم:

$$g(-۳) = f(-۳) - ۱ = ۲ - ۱ = ۱ \Rightarrow (-۳ , ۱) \in g$$

ب) در نظر می‌گیریم $h(x) = f(x-۳)$، پس به ازای $x = ۰$ داریم:

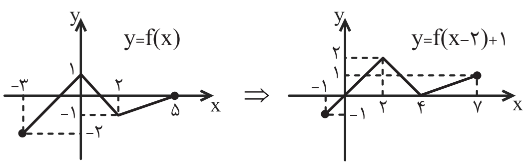
$$h(۰) = f(۰-۳) \Rightarrow h(۰) = f(-۳) = ۲$$
$$\Rightarrow (۰ , ۲) \in h$$

پ) در نظر می‌گیریم $k(x) = ۱ + f(x+۱)$، پس به ازای $x = -۴$ داریم:

$$k(-۴) = ۱ + f(-۴+۱)$$
$$\Rightarrow k(-۴) = ۱ + f(-۳) = ۱ + ۲ = ۳ \Rightarrow (-۴ , ۳) \in k$$

---

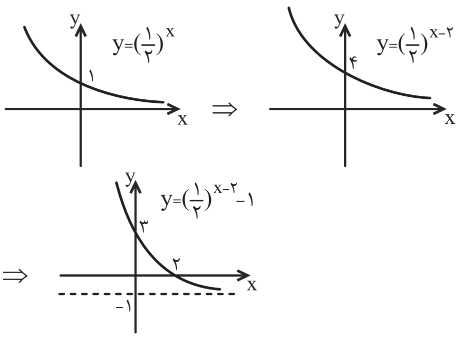
۴. برای رسم نمودار $y = f(x-۲) + ۱$، نمودار $y = f(x)$ را دو واحد به راست و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.



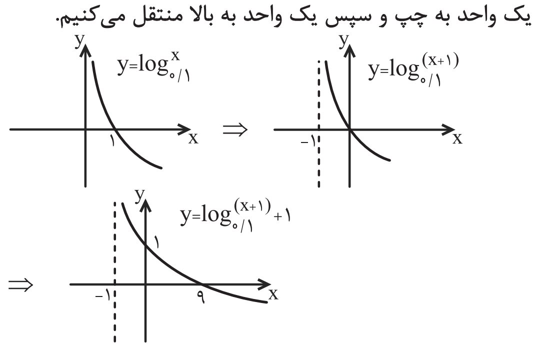
با توجه به نمودار، دامنه و برد تابع $y = f(x-۲) + ۱$ به ترتیب بازه‌های $[-۱ , ۷]$ و $[-۱ , ۲]$ است.

---

۵. الف) برای رسم نمودار $y = (\frac{۱}{۲})^{x-۲} - ۱$، نمودار $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را ابتدا دو واحد به راست و سپس یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



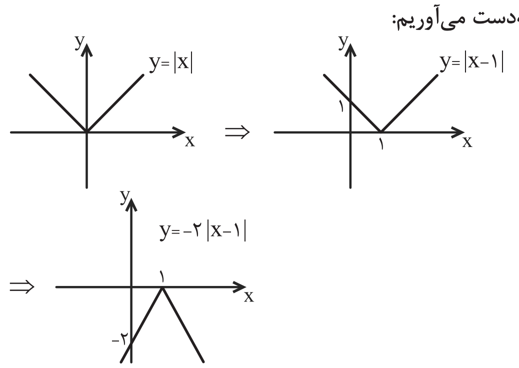
ب) برای رسم نمودار $y = \log_{0/1}^{(x+1)} + 1$، نمودار $y = \log_{0/1}^{x}$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.



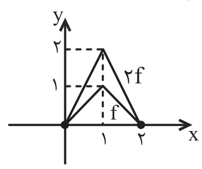
۶. الف) درست است. برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ باید نمودار تابع $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

ب) نادرست است. برای رسم نمودار $y = -2f(x)$ از روی نمودار $y = f(x)$، عرض تمام نقاط واقع بر $y = f(x)$ را دو برابر کرده، سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، پس در این فرایند، طول نقاط تغییری نمی‌کند، بنابراین نقطهٔ $(2 , 1)$ به نقطهٔ $(-4 , 1)$ تبدیل می‌شود.

پ) درست است. نمودار تابع f را رسم کرده، برد آن را به‌دست می‌آوریم:



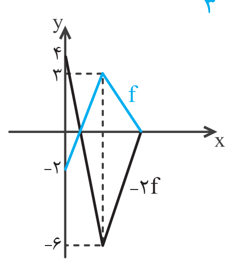
ت) درست است. مختصات محل‌های تلاقی تابع f با محور x ها به‌صورت $(a , 0)$ است و برای رسم نمودار تابع $kf(x)$ از روی نمودار تابع f، عرض نقاط واقع بر f را k برابر می‌کنیم، پس در مختصات این نقاط تغییری ایجاد نمی‌شود. به شکل روبه‌رو دقت کنید.



۷. الف) محور طول‌ها (یا x ها)

ب) برای رسم نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(x)$ از روی نمودار تابع f کافی است عرض هر نقطه‌ی تابع f را $\frac{1}{3}$ برابر کنیم.

پ) اگر برد تابع f بازه‌ی $[-2 , 3]$ باشد، آنگاه برد تابع $y = -2f(x)$ بازه‌ی $[-6 , 4]$ است. به شکل روبرو دقت کنید.

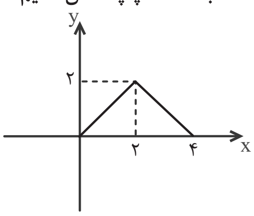


۸. ① : اگر نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کرده و سپس نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل کنیم، نمودار ① به‌دست می‌آید، پس نمودار ① مربوط به قسمت (ب)، یعنی تابع $-f(x) - 1$ است.

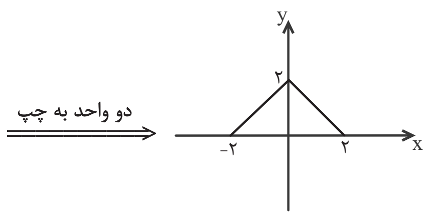
② : اگر نمودار تابع f را ابتدا دو واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس عرض نقاط واقع بر نمودار حاصل را دو برابر کنیم، نمودار ② به‌دست می‌آید، پس نمودار ② مربوط به قسمت (پ)، یعنی تابع $2f(x+2)$ است.

③ : اگر نمودار تابع f را ابتدا سه واحد به سمت راست منتقل کرده و سپس عرض نقاط واقع بر نمودار حاصل را نصف کنیم، نمودار ③ به‌دست می‌آید، پس نمودار ③ مربوط به قسمت (الف)، یعنی تابع $\frac{1}{2}f(x-3)$ است.

۹. برای رسم نمودار تابع $y = f(x+2)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است آن را دو واحد در راستای محور x ها به سمت چپ انتقال دهیم.



$y = f(x)$

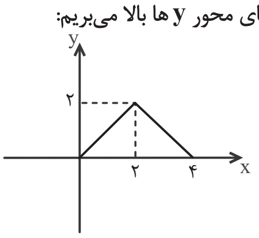


$y = f(x+2)$

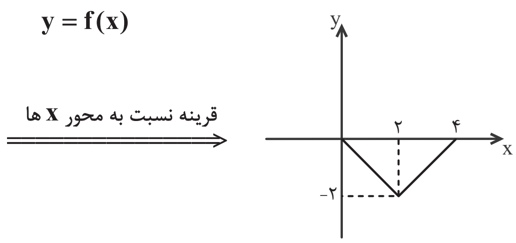
با توجه به نمودار، دامنه (D) و برد (R) این تابع برابر است با:

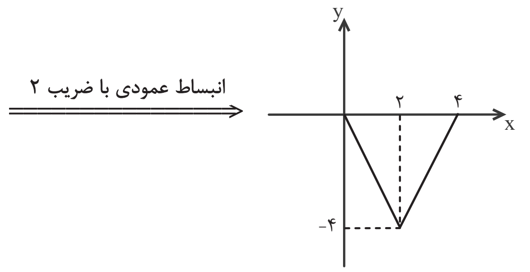
$D = [-2,2]$ و $R = [0,2]$

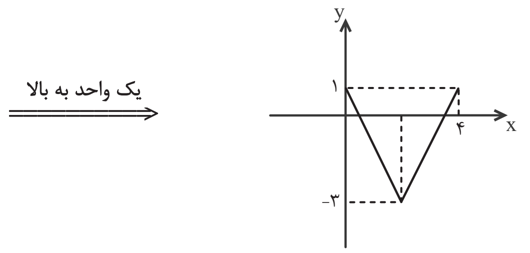
برای رسم نمودار $y = -2f(x) + 1$ از روی نمودار $y = f(x)$، ابتدا آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. سپس نمودار حاصل را در راستای محور y ها با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم و در آخر نمودار به دست آمده را یک واحد در راستای محور y ها بالا می‌بریم:



$y = f(x)$



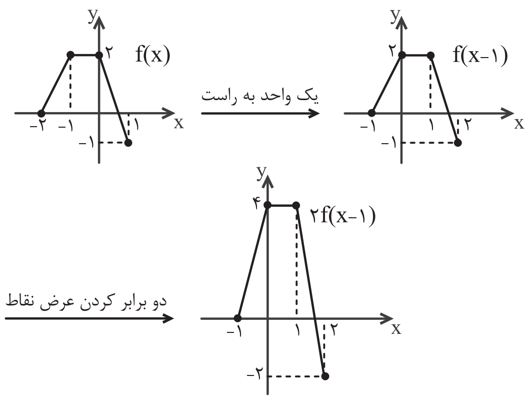




با توجه به نمودار داریم:

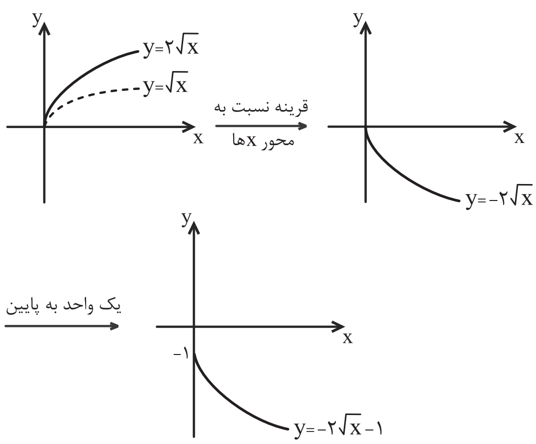
$$D=[۰,۴] \quad \text{و} \quad R=[-۳,۱]$$

۱۰.

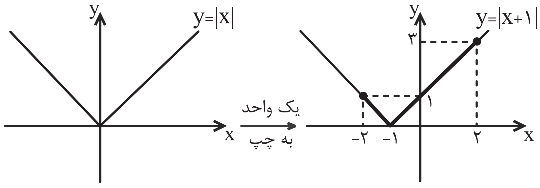


با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D_g=[-۱,۲]$ و برد تابع بازه‌ی $R_g=[-۲,۴]$ است.

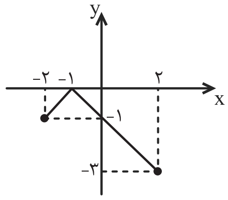
۱۱. ابتدا با دو برابر کردن عرض نقاط واقع بر نمودار $y=\sqrt{x}$، نمودار $y=۲\sqrt{x}$ را رسم کرده و به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



۱۲.

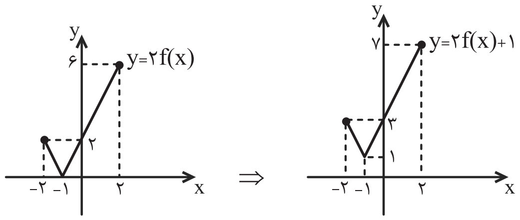


الف) برای رسم نمودار $y=-f(x)$، نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



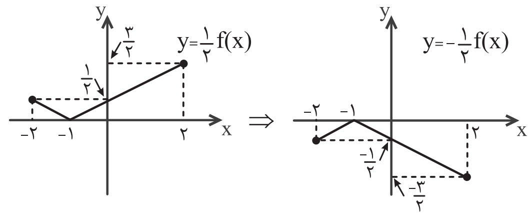
با توجه به نمودار، دامنه و برد تابع $y=-f(x)$ به ترتیب بازه‌ های $[-۲,۲]$ و $[-۳,۰]$ است.

ب) با دو برابر کردن عرض نقاط تابع $y=f(x)$، تابع $y=۲f(x)$ را به‌دست آورده و یک واحد آن را به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $y=۲f(x)+۱$ به‌دست آید.



با توجه به نمودار، دامنه و برد این تابع به ترتیب بازه‌های $[-۲,۲]$ و $[۱,۷]$ است.

پ) عرض نقاط واقع بر نمودار $y=f(x)$ را نصف کرده، سپس آن را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}f(x)$ به‌دست آید.



با توجه به نمودار، دامنه و برد تابع $y=\frac{-۱}{۲}f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[-۲,۲]$ و $[-\frac{۳}{۲},۰]$ است.

۱۳. برای ساخته شدن تابع g، ابتدا تابع f یک واحد به راست منتقل شده است $(f(x-۱))$. سپس عرض نقاط واقع بر نمودار حاصل دو برابر شده‌اند $(۲f(x-۱))$ و سپس نمودار نسبت به محور x ها قرینه شده است $(-۲f(x-۱))$، پس:

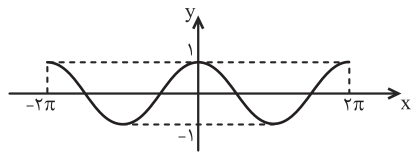
$$f(x)=|x| \Rightarrow g(x)=-۲|x-۱|$$

برای ساخته شدن تابع h، ابتدا تابع f یک واحد به چپ منتقل شده است $(f(x+۱))$. سپس عرض نقاط واقع بر نمودار حاصل

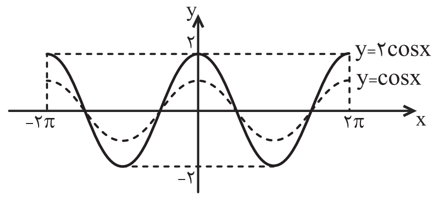
نصف شده‌اند $(\frac{۱}{۲}f(x+۱))$ و سپس نمودار دو واحد به بالا منتقل شده است $(\frac{۱}{۲}f(x+۱)+۲)$، پس:

$$f(x)=|x| \Rightarrow h(x)=\frac{۱}{۲}|x+۱|+۲$$

۱۴. نمودار تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi , ۲\pi]$ به‌صورت زیر است:

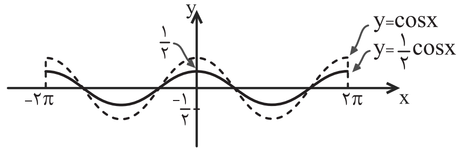


الف)



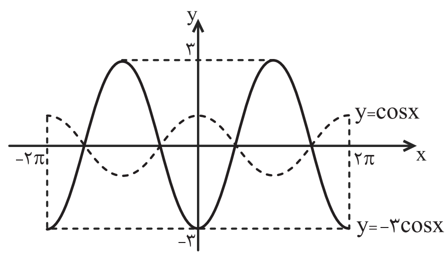
همانطور که در نمودار ملاحظه می‌کنید، برد این تابع بازهٔ $[-۲ , ۲]$ است.

ب)



همانطور که در نمودار ملاحظه می‌کنید، برد این تابع بازهٔ $[-\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۲}]$ است.

پ)



همانطور که در نمودار ملاحظه می‌کنید، برد این تابع بازهٔ $[-۳ , ۳]$ است.

۱۵. الف) درست است. اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[-۱ , ۳]$ باشد، یعنی $-۱\le x\le ۳$، پس برای تابع $y=-۳f(۲x)$ باید:

$$-۱\le ۲x\le ۳ \xrightarrow{\div ۲} -\frac{۱}{۲}\le x\le \frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow D_{-۳f(۲x)}=[-\frac{۱}{۲} , \frac{۳}{۲}]$$

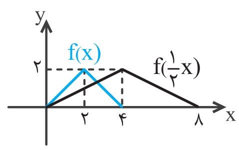
ب) درست است. برای رسم نمودار $y=f(\frac{x}{۲})$، طول همهٔ نقاط واقع بر نمودار تابع $f(x)$ دو برابر می‌شود، پس اگر $A(-۲ , ۴)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد، نقطهٔ $A'(۲\times(-۲) , ۴)=(-۴ , ۴)$ متناظر نقطهٔ A، روی نمودار $y=f(\frac{x}{۲})$ است.

پ) نادرست است. برای رسم نمودار $f(kx)$، طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ در $\frac{۱}{k}$ ضرب می‌شوند، پس وقتی $k>۱$، آنگاه $\frac{۱}{k}<۱$، پس انقباض افقی رخ می‌دهد.

۱۶. الف) گزینهٔ ۱ : منبسط

به عنوان مثال اگر بخواهیم نمودار تابع $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را از روی نمودار تابع $y=f(x)$ رسم کنیم، باید طول همهٔ نقاط واقع بر $y=f(x)$ را دو برابر کنیم.

شکل روبرو را ملاحظه کنید.



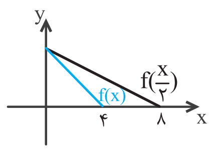
ب) گزینهٔ ۱ : $[\frac{-۱}{۳} , \frac{۲}{۳}]$

برای رسم نمودار تابع $y=f(-۳x)$ از روی نمودار تابع $y=f(x)$، باید طول همهٔ نقاط واقع بر $y=f(x)$ را بر (-۳) تقسیم کنیم.

پس اگر دامنهٔ $y=f(x)$ بازهٔ $[-۲ , ۱]$ باشد، دامنهٔ $y=f(-۳x)$ بازهٔ $[\frac{-۱}{۳} , \frac{۲}{۳}]$ است.

پ) گزینهٔ ۱

برای رسم نمودار تابع $y=f(\frac{x}{۲})$، طول نقاط واقع بر $f(x)$ را دو برابر می‌کنیم.



ت) گزینهٔ ۲ : $A'(۰ , ۲)$

$$A(۱ , ۲)\in f \Rightarrow f(۱)=۲$$

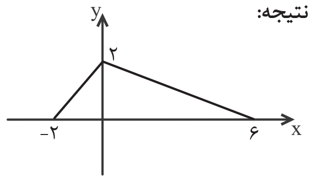
در نظر می‌گیریم $g(x)=f(۲x+۱)$ با جایگذاری $x=۰$ در این تساوی داریم:

$$g(۰)=f(۲\times ۰+۱) \Rightarrow g(۰)=۲ \Rightarrow A'(۰ , ۲)\in g$$

۱۷. الف) اگر طول نقاط واقع بر f را نصف کرده و در نمودار حاصل، عرض نقاط را دو برابر کنیم، نمودار ۲ به‌دست می‌آید. پس ضابطهٔ نمودار ۲ به صورت $y=۲f(۲x)$ است.

ب) اگر طول نقاط واقع بر f را دو برابر کرده و نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه کنیم، نمودار ۱ به‌دست می‌آید، پس ضابطهٔ نمودار ۱ به صورت $y=-f(\frac{x}{۲})$ است.

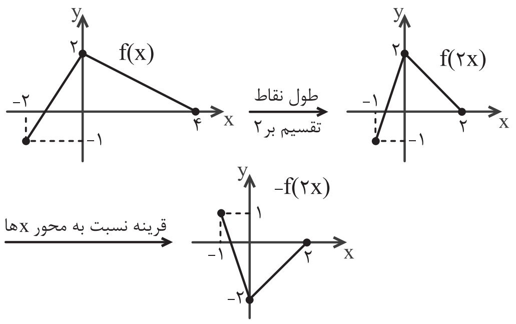
۱۸. برای رسم تابع $f(\frac{x}{۲})$، کافی است نمودار تابع f را در راستای محور xها با ضریب ۲ منبسط کنیم. پس نمودار $f(\frac{x}{۲})$ به صورت زیر خواهد بود و در نتیجه:



$$D_{f(\frac{x}{۲})}=[-۲\,,۶]$$

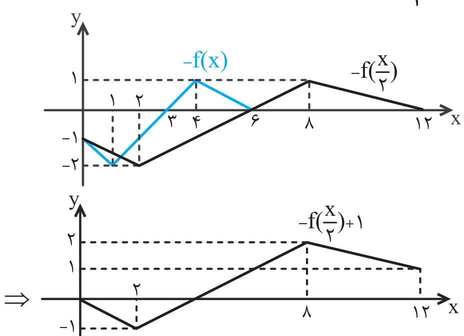
$$R_{f(\frac{x}{۲})}=[۰\,,۲]$$

۱۹.



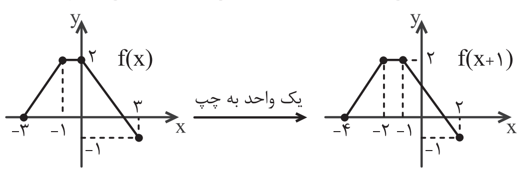
با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D_g=[-۱\,,۲]$ و برد تابع بازه‌ی $R_g=[-۲\,,۱]$ است.

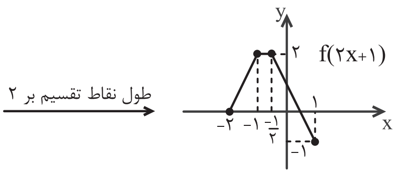
۲۰. الف) ابتدا نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-f(x)$ به‌دست آید، در نمودار حاصل طول تمام نقاط را دو برابر می‌کنیم تا نمودار $y=-f(\frac{x}{۲})$ به‌دست آید و با انتقال این نمودار به اندازه‌ی یک واحد به بالا، نمودار $y=-f(\frac{x}{۲})+۱$ به‌دست می‌آید.



ب) با توجه به نمودار، دامنه‌ی این تابع بازه‌ی $[۰\,,۱۲]$ و برد آن بازه‌ی $[-۱\,,۲]$ است.

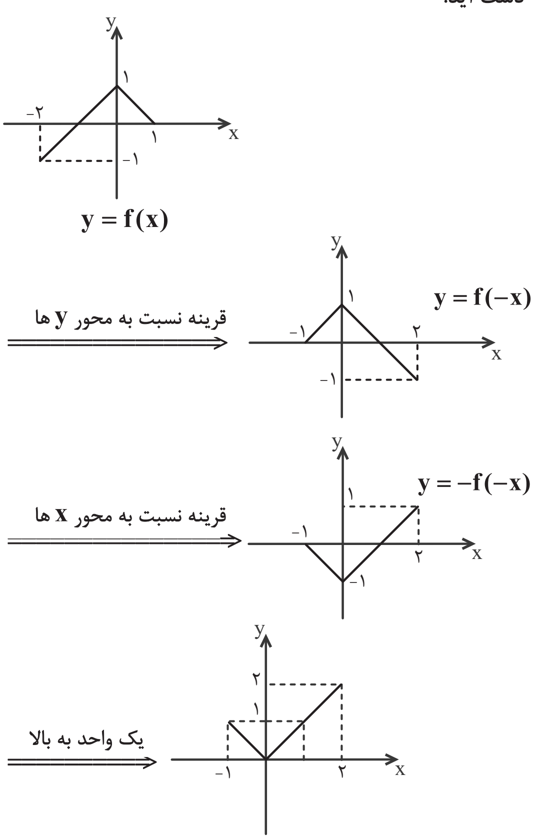
۲۱. ابتدا انتقال افقی و سپس انقباض افقی را اعمال می‌کنیم:





با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع، بازه‌ی $D_g=[-۲\,,۱]$ و برد تابع، بازه‌ی $R_g=[-۱\,,۲]$ است.

۲۲. برای رسم نمودار تابع $g(x)=۱-f(-x)$ از روی تابع $y=f(x)$، ابتدا نمودار اولیه را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا نمودار $f(-x)$ به دست آید. سپس نمودار به دست آمده را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $-f(-x)$ به دست آید و در آخر نمودار به دست آمده را یک واحد در راستای محور yها بالا می‌بریم تا نمودار $y=۱-f(-x)$ به دست آید.

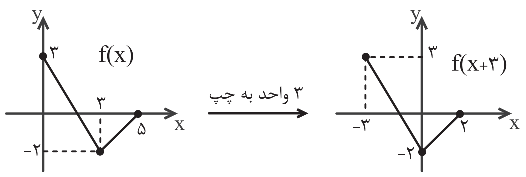


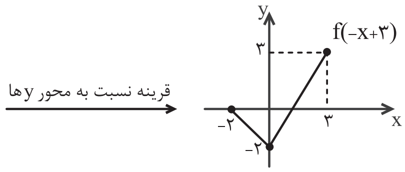
$g(x)=۱-f(-x)$

با توجه به نمودار تابع g داریم:

$D_g=[-۱,۲]$ و $R_g=[۰\,,۲]$

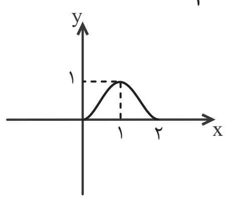
۲۳.



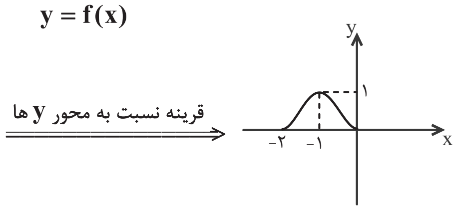


با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع، بازه‌ی $D_g = [-۲\,,\,۳]$ است.

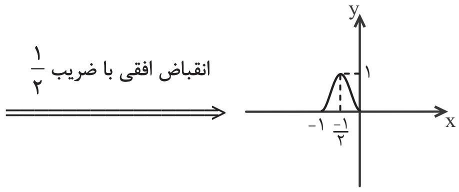
.۲۴ برای رسم نمودار $y = f(-۲x)$ از روی نمودار $y = f(x)$، ابتدا آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. سپس نمودار به دست آمده را در راستای محور xها با ضریب $\frac{۱}{۲}$ منقبض می‌کنیم.



$y = f(x)$



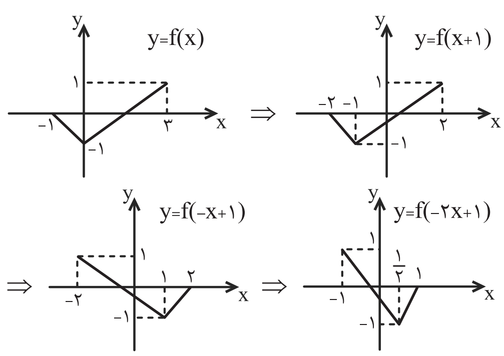
$y = f(-x)$



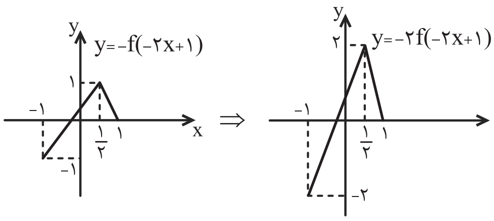
$y = f(-۲x)$

.۲۵ الف) نمودار $y = f(x)$ را در نظر گرفته، آن را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = f(x+۱)$ به‌دست آید. با قرینه کردن نمودار حاصل نسبت به محور yها، نمودار $y = f(-x+۱)$ را به‌دست می‌آوریم که با انقباض افقی نمودار $y = f(-x+۱)$ با ضریب $\frac{۱}{۲}$، نمودار $y = f(-۲x+۱)$ به‌دست می‌آید.

ب)

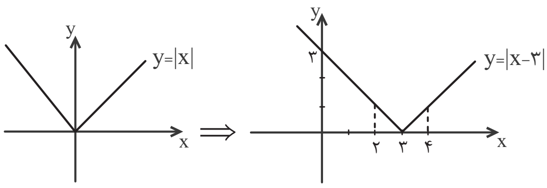


پ) نمودار $y = f(-۲x+۱)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -f(-۲x+۱)$ به‌دست آید، با دو برابر کردن عرض نقاط واقع بر نمودار حاصل، نمودار $y = -۲f(-۲x+۱)$ به‌دست می‌آید.

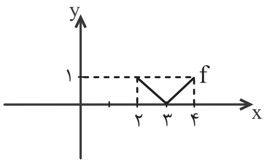


با توجه به نمودار، دامنه و برد تابع $y = -۲f(-۲x+۱)$ به ترتیب بازه‌های $[-۱\,,\,۱]$ و $[-۲\,,\,۲]$ است.

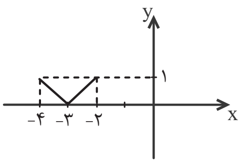
.۲۶ برای رسم نمودار $y = |x-۳|$، کافی است نمودار $y = |x|$ را ۳ واحد به راست انتقال دهیم.



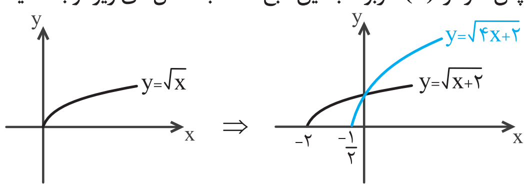
پس نمودار f در بازه‌ی $[۲\,,\,۴]$ به صورت زیر است:



برای یافتن $f(-x)$ کافی است نمودار f را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

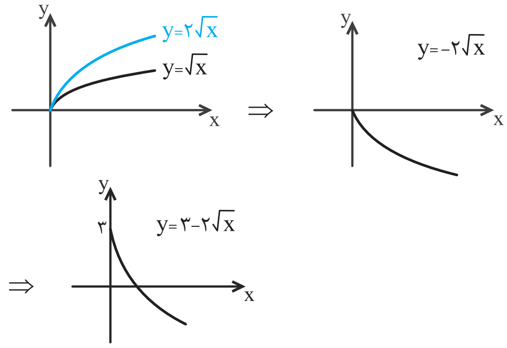


.۲۷ الف) اگر نمودار $y = \sqrt{x}$ را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم، نمودار $y = \sqrt{x+۲}$ و اگر در نمودار $y = \sqrt{x+۲}$ انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۴}$ انجام دهیم، نمودار $y = \sqrt{۴x+۲}$ به‌دست می‌آید. پس نمودار (a) مربوط به این تابع است. به شکل‌های زیر توجه کنید.

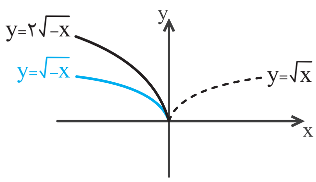


ب) داریم $\sqrt{۴x} = ۲\sqrt{x}$، پس باید نمودار $y = ۳ - ۲\sqrt{x}$ را رسم کنیم. برای این منظور ابتدا در نمودار $y = \sqrt{x}$ انبساط عمودی با ضریب ۲ انجام می‌دهیم تا نمودار $y = ۲\sqrt{x}$ به‌دست

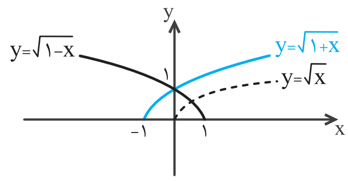
آید، سپس نمودار $y=2\sqrt{x}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-2\sqrt{x}$ به‌دست آید، اگر نمودار $y=-2\sqrt{x}$ را سه واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار $y=3-2\sqrt{x}$ به‌دست می‌آید، پس نمودار (c) مربوط به این تابع است، به شکل‌های زیر توجه کنید.



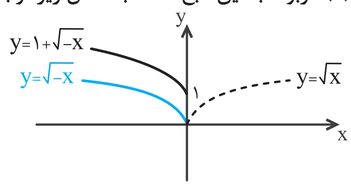
پ) داریم $\sqrt{-4x}=2\sqrt{-x}$، پس نمودار $y=2\sqrt{-x}$ را می‌خواهیم. برای این منظور، ابتدا نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=\sqrt{-x}$ به‌دست آید و با انبساط عمودی نمودار $y=\sqrt{-x}$ با ضریب ۲، نمودار $y=2\sqrt{-x}$ را به دست می‌آوریم، پس نمودار (b) مربوط به این تابع است. به شکل مقابل توجه کنید.



۲۸. الف) اگر نمودار $y=\sqrt{1+x}$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم، نمودار $y=\sqrt{1-x}$ به‌دست می‌آید.
پس نمودار (۳) مربوط به این قسمت است. به شکل زیر توجه کنید.

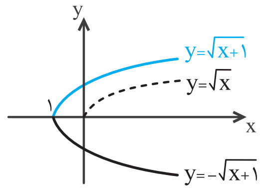


ب) اگر نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم، نمودار $y=\sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار $y=\sqrt{-x}$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار $y=1+\sqrt{-x}$ به‌دست می‌آید. پس نمودار (۱) مربوط به این تابع است، به شکل زیر توجه کنید.

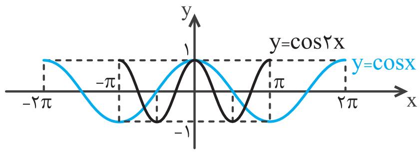


پ) اگر نمودار $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به سمت چپ منتقل کنیم، نمودار $y=\sqrt{x+1}$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار $y=\sqrt{x+1}$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم، نمودار $y=-\sqrt{x+1}$ به‌دست می‌آید.

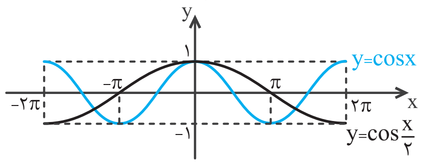
پس نمودار (۲) مربوط به این قسمت است. به شکل روبرو توجه کنید.



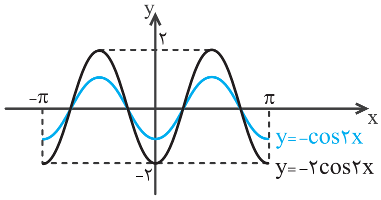
۲۹. الف) برای رسم نمودار $y=\cos 2x$، طول نقاط واقع بر نمودار $y=\cos x$ را نصف می‌کنیم.



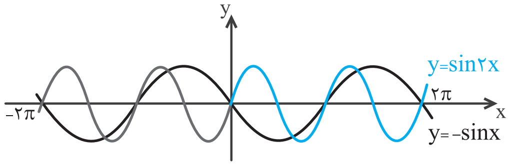
ب) برای رسم نمودار $y=\cos\frac{x}{2}$، طول نقاط واقع بر نمودار $y=\cos x$ را دو برابر می‌کنیم.



پ) برای رسم نمودار $y=-2\cos 2x$، ابتدا نمودار $y=\cos 2x$ را که در قسمت (الف) رسم کردیم نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-\cos 2x$ به‌دست آید، سپس عرض همه‌ی نقاط نمودار حاصل را دو برابر می‌کنیم.



۳۰. اگر نمودار $y=\sin x$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم، نمودار $y=-\sin x$ به‌دست می‌آید و اگر نمودار $y=\sin x$ را به‌طور افقی منقبض کنیم، به‌طوری که طول نقاط آن روی محور xها نصف شود، نمودار $y=\sin 2x$ به‌دست می‌آید.



همانطور که در نمودار بالا ملاحظه می‌کنید، دو تابع $y=-\sin x$ و $y=\sin 2x$ در بازه‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ همدیگر را در ۹ نقطه قطع می‌کنند.

۳۱.

الف) $f(x)=x^2(1-x)^5=x^2(1+\ldots-x^5)=-x^7+\ldots$

تابع از درجه‌ی ۷ است.