فصل اول

آمار و احتمال

(۲۰ پیمانه)

مؤلف شمارش و احتمال: حسین حاجیلو
مؤلف چرخهٔ آمار: ایمان چینی‌فروشان

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

آمار و احتمال

۱ شمارش
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۹ پیمانه – ۹۰ تست

1. اصل جمع و اصل ضرب
2. فاکتوریل
3. جایگشت
4. تبدیل
5. ترکیب

۲ احتمال
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۹ پیمانه – ۹۰ تست

1. فضای نمونه و پیشامد
2. اعمال روی پیشامدها
3. احتمال یک پیشامد (محاسبهٔ احتمال)
4. احتمال پیشامدهای ناسازگار و متمم

۳ چرخهٔ آمار
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۲ پیمانه – ۲۰ تست

1. چرخهٔ آمار در حل مسائل
2. نمودار میانگین – انحراف معیار

۲۰۰ سؤال شناسنامه‌دار
- ۷۲ سؤال تألیفی و طراحی شده از کتاب درسی
- ۶۹ سؤال از آزمون‌های کانون
- ۵۹ سؤال از کنکورهای سراسری

در درسنامه می‌بینید ۴۷ سؤال
- ۲۶ تست طراحی شده با نگاه به رویکرد کنکورهای جدید
- ۲۱ مثال برای ادراک و تثبیت

۱ شمارش

۱ اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع ◄ فرض کنید در یک دبیرستان متوسطهٔ دورهٔ دوم، ۸ دانش‌آموز کلاس دهم، ۶ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۵ دانش‌آموز کلاس دوازدهم معدل بالای ۱۸ کسب کرده‌اند و می‌خواهیم یک دانش‌آموز با معدل بالای ۱۸ از این دبیرستان انتخاب کنیم. با توجه به اینکه دانش‌آموز با معدل بالای ۱۸ کلاس دهمی «یا» کلاس یازدهمی «یا» کلاس دوازدهمی است، برای انتخاب او $۸+۶+۵=۱۹$ حالت امکان‌پذیر است. در حالت کلی:

تعریف اصل جمع

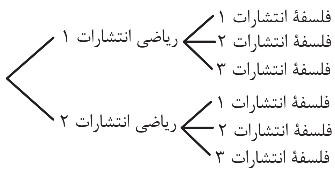
اگر بتوانیم کار اول را به m حالت، کار دوم را به n حالت، کار سوم را به p حالت و ... انجام دهیم (به شرط آنکه هیچ دو تایی از این کارها با هم قابل انجام نباشند)، در اینصورت به $m+n+p+...$ روش می‌توان کار اول «یا» کار دوم «یا» کار سوم «یا» ... را انجام داد.

تذکر ⏮ استفاده از اصل جمع متناظر با وجود عبارت «یا» بین چند کار است.

● **مثال:** فرض کنید منوی دسر یک رستوران شامل ۳ نوع ماست طعم‌دار و ۵ نوع ژله است و رستوران در صورت تمایل مشتری، یکی از این دسرها را به انتخاب او در کنار غذای جدید خود به رایگان سرو می‌کند. مشتری‌ای که این غذا را سفارش داده، چند راه برای انتخاب دسر دارد؟

○ **حل:** مشتری سه کار می‌تواند انجام دهد: ماست طعم‌دار را انتخاب کند، که ۳ حالت دارد «یا» ژله را انتخاب کند که ۵ حالت دارد «یا» اصلاً دسر انتخاب نکند که ۱ حالت دارد، پس بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با $۳+۵+۱=۹$.

اصل ضرب ◄ فرض کنید می‌خواهیم یک کتاب برای تمرین ریاضی «و» یک کتاب برای تمرین فلسفه خریداری کنیم. به کتاب‌فروشی رفته‌ایم و با ۲ کتاب ریاضی از دو انتشارات متفاوت و ۳ کتاب فلسفه از سه انتشارات متفاوت مواجه شده‌ایم. در این حالت برای خرید یک کتاب ریاضی «و» یک کتاب فلسفه، $۲\times۳=۶$ راه داریم، نمودار روبه‌رو به خوبی این مطلب را نشان می‌دهد. در حالت کلی:



تعریف اصل ضرب

اگر انجام کاری شامل چند مرحله باشد، یعنی برای انجام آن باید مرحلهٔ اول « و » مرحلهٔ دوم « و » مرحلهٔ سوم « و » ... انجام شود به طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش، برای انجام مرحلهٔ دوم n روش، برای انجام مرحلهٔ سوم p روش و ... امکان‌پذیر باشد، در این صورت انجام آن کار به $m\times n\times p\times ...$ حالت امکان‌پذیر باشد.

تذکر ⏮ استفاده از اصل ضرب، متناظر با وجود عبارت « و » بین مراحل انجام یک کار است.

● **مثال:** یک کارخانهٔ خودروسازی، یک خودروی تولیدی خود را در ۵ رنگ، ۳ حجم موتور و ۲ نوع گیربکس تولید می‌کند. خریداری که می‌خواهد این خودرو را از کارخانه خریداری کند، چند انتخاب دارد؟

○ **حل:** شرایط برای استفاده از اصل ضرب فراهم است:

انتخاب خودرو توسط خریدار، کاری است که از سه مرحله تشکیل شده است: خریدار باید رنگ خودرو «و» حجم موتور «و» نوع گیربکس آن را انتخاب کند.

برای انتخاب رنگ ۵ حالت، برای انتخاب حجم موتور ۳ حالت و برای انتخاب نوع گیربکس ۲ حالت امکان‌پذیر است، پس انتخاب خودرو به $۵\times۳\times۲=۳۰$ حالت امکان‌پذیر است.

تست می‌خواهیم با حروف a , e , i , o , u جدول زیر را به گونه‌ای پر کنیم که حروف هیچ دو خانهٔ مجاوری تکراری نباشد. به چند طریق این کار ممکن است؟

(آزمون کانون – ۳۱ تیر ۱۴۰۱)

۱) ۵۱۲۰ ۲) ۳۲۴۰ ۳) ۴۰۹۶ ۴) ۶۰۲۰

پاسخ گزینهٔ «۱» مراحل انجام کار را به ترتیب به این صورت تعریف می‌کنیم: پر کردن خانهٔ (۱)، پر کردن خانهٔ (۲)، ... و پر کردن خانهٔ (۶). برای خانهٔ (۱)، پنج حالت وجود دارد. (هر یک از حرف‌های a , e , i , o , u)، برای پر کردن خانهٔ (۲) چهار حالت وجود دارد (حرفی که در خانهٔ (۱) قرار گرفته، نمی‌تواند در خانهٔ (۲) قرار بگیرد)، به همین ترتیب برای پر کردن هرکدام از بقیهٔ خانه‌ها هم چهار حالت وجود دارد، پس طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های انجام این کار برابر است با:

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)
۵	۴	۴	۴	۴	۴

$$۵\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴=۵\times۴^۵=۵\times۲^{۱۰}=۵\times۱۰۲۴=۵۱۲۰$$

● **مثال:** با ارقام ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵، چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت به شرطی که:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.

○ **حل:** الف) در هرکدام از خانه‌های (۱)، (۲) و (۳) هر یک از پنج رقم (۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵) می‌توانند قرار بگیرند، پس طبق اصل ضرب، جواب برابر می‌شود با: $۵\times۵\times۵=۱۲۵$

(۱) صدگان	(۲) دهگان	(۳) یکان
۵	۵	۵

ب) برای پر کردن رقم صدگان ۵ حالت امکان‌پذیر است (هر یک از ارقام ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵). تکرار ارقام مجاز نیست، پس برای پر کردن رقم دهگان ۴ حالت امکان‌پذیر است (عددی که در صدگان استفاده شد، کنار گذاشته می‌شود.) و برای پر کردن رقم یکان ۳ حالت امکان‌پذیر است (دو عددی که در صدگان و دهگان استفاده شدند، کنار گذاشته می‌شوند.)، پس طبق اصل ضرب، جواب برابر است با: $۵\times۴\times۳=۶۰$

صدگان	دهگان	یکان
۵	۴	۳

نکته **در استفاده از اصل ضرب، همیشه باید مرحله‌ای از انجام کار را که محدودیت بیشتری دارد، در اولویت قرار دهیم، مثلاً دو محدودیتی که در سؤال‌ها بسیار با آن‌ها مواجه می‌شویم، عبارت‌اند از:**

الف) صفر نبودن رقم سمت چپ اعداد.

ب) زوج یا فرد بودن اعداد و یا مضرب ۵ بودن اعداد که روی رقم سمت راست آنها تأثیر می‌گذارند.

● **مثال:** **با استفاده از ارقام ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ و بدون تکرار ارقام چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟**

○ **حل:** الف) این کار سه مرحله دارد: پر کردن هر یک از رقم‌های یکان، دهگان و صدگان. فرض کنید در مرحلهٔ اول بخواهیم یکان را پر کنیم، ۶ حالت داریم (هر یک از ارقام ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵) و در مرحلهٔ دوم بخواهیم دهگان را پر کنیم ۵ حالت داریم (هریک از ۶ رقم داده شده، بجز آنکه در یکان قرار گرفته)، حال برای پر کردن صدگان به مشکل می‌خوریم، چون نباید ۰ را در صدگان قرار دهیم، اما نمی‌دانیم که ۰ را در یکان یا دهگان استفاده کرده‌ایم یا نه؛ به همین خاطر است که می‌گوییم باید مرحله‌ای را که دارای محدودیت است در اولویت قرار دهیم، پس در اینجا باید مرحلهٔ (۱) را پر کردن صدگان در نظر بگیریم که در این صورت:

در مرحلهٔ (۱) هریک از ارقام ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ قابل استفاده‌اند، مرحلهٔ (۲) را پر کردن دهگان در نظر می‌گیریم. هر یک از ارقام ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ به جز عددی که در مرحلهٔ (۱) استفاده شده، قابل استفاده است و به همین ترتیب در مرحلهٔ (۳) (پر کردن یکان)، ارقام ۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ به جز دو عددی که در مرحله‌های (۱) و (۲) استفاده شدند، قابل استفاده‌اند، پس بنا به اصل ضرب، داریم:

	صدگان	دهگان	یکان
شمارهٔ مرحله:	(۱)	(۲)	(۳)
تعداد حالت:	$\boxed{۵}$	$\boxed{۵}$	$\boxed{۴}$

$\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}$ تعداد اعداد مورد نظر $=۵\times۵\times۴=۱۰۰$

نکته **گاهی اوقات محاسبهٔ تعداد حالت‌های نامطلوب یک مسئله، راحت‌تر از محاسبهٔ تعداد حالت‌های مطلوب آن است. برای حل اینگونه مسائل، بهتر است تعداد حالت‌های نامطلوب را از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم.**

برای درک بهتر این نکته، به حل تست بعد توجه کنید.

تست **با ارقام ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ اعداد سه رقمی می‌سازیم. در چند تا از این اعداد، رقم تکراری وجود دارد؟**

۱) ۶۰ ۲) ۶۵ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

پاسخ گزینهٔ «۲» با استفاده از اصل ضرب، تعداد کل اعداد سه رقمی که می‌توانیم با ارقام ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ بسازیم، (یعنی با مجاز بودن تکرار ارقام) برابر است با $۵\times۵\times۵=۱۲۵$ و تعداد اعداد سه رقمی با ارقام متمایز برابر با $۵\times۴\times۳=۶۰$ است؛ پس:

تعداد اعداد سه رقمی دارای رقم تکراری $=$ (تعداد کل اعداد سه رقمی) $-$ (تعداد اعداد سه رقمی با ارقام متمایز)

$=۱۲۵-۶۰=۶۵$

سؤال‌های ترکیبی اصل جمع و اصل ضرب: ابتدا توجه کنید که در مورد تفاوت بین اصل ضرب و اصل جمع، می‌توان گفت زمانی از اصل جمع استفاده می‌کنیم که چند کار را بتوانیم به جای هم انجام دهیم، یعنی کار اول «یا» کار دوم «یا» ... ولی زمانی از اصل ضرب استفاده می‌شود که یک کار در چند مرحله انجام می‌شود، یعنی باید مرحلهٔ اول «و» مرحلهٔ دوم «و» ... انجام می‌شود تا بگوییم آن کار انجام شده است، به بیان خلاصه:

استفاده از اصل جمع، متناظر با وجود عبارت «یا» بین چند کار و استفاده از اصل ضرب متناظر با وجود عبارت «و» بین مراحل انجام یک کار است.

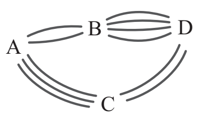
تست **رستورانی قصد دارد یکی از ۳ طعم ماست طعم‌دار یا یکی از ۵ ژلهٔ منوی دسر خود را به رایگان برای مشتریان سرو کند. اگر رستوران تصمیم بگیرد یکی از ۳ ماست طعم‌دار و یکی از ۵ ژله را به رایگان سرو کند، چند راه به راه‌های انتخاب دسر توسط مشتری افزوده می‌شود؟ (مشتری می‌تواند دسر را سفارش دهد یا سفارش ندهد.)**

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ گزینهٔ «۴» در حالت اول مشتری سه انتخاب دارد. یکی از ۳ طعم ماست طعم‌دار «یا» یکی از ۵ ژله «یا» هیچ‌کدام، پس بنا به اصل جمع به $۱+۵+۳=۹$ حالت می‌تواند دسر سفارش دهد. در حالت دوم یکی از ۳ ماست طعم‌دار یا هیچکدام آنها «و» یکی از ۵ ژله یا هیچکدام آنها امکان‌پذیر است، پس طبق اصل ضرب به $۴\times۶=۲۴$ حالت می‌تواند دسر خود را سفارش دهد، پس $۲۴-۹=۱۵$ حالت به راه‌های انتخاب دسر افزوده می‌شود.

تذکر **در حل بسیاری از سؤال‌های این فصل از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده می‌شود.**

● **مثال:** **شکل روبه‌رو نقشهٔ جاده‌های موجود بین شهرهای A , B , C , D را نشان می‌دهد. به چند روش می‌توان با عبور از B یا C، از A به D رفت؟**



○ **حل:** با توجه به نقشه، رفتن از A به D را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

(رفتن از A به B) و (رفتن از B به D) یا (رفتن از A به C) و (رفتن از C به D)

$۲ \times ۴ + ۳ \times ۲ =۸+۶=۱۴$

تست **هر یک از اعداد ۰ , ۲ , ۳ , ۵ , ۷ را روی یک کارت نوشته و با کنار هم قرار دادن این کارت‌ها، اعداد سه رقمی می‌سازیم. تعداد اعداد زوج ساخته شده کدام است؟**

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

پاسخ گزینهٔ «۲» می‌خواهیم عدد ساخته شده زوج باشد پس ۳ , ۵ , ۷ نمی‌توانند در یکان قرار بگیرند و یکان دارای بیشترین محدودیت است، ضمن آنکه رقم صدگان نباید صفر باشد و صدگان نیز دارای محدودیت است ولی دهگان محدودیتی ندارد، پس با اولویت دادن به مراحل دارای محدودیت باید: ابتدا یکان را پر کنیم که به

۲ حالت امکان‌پذیر است (۰ یا ۲)، سپس صدگان را پر کنیم؛ اگر ۰ را در یکان قرار داده باشیم، برای صدگان ۴ حالت داریم (۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷)، پس مسئله را به دو حالت تفکیک می‌کنیم:

حالت اول: یکان ۰ باشد که در این صورت طبق اصل ضرب $\boxed{4}\times\boxed{3}\times\boxed{1}=12$ عدد می‌توانیم بسازیم.
(۰)

حالت دوم: یکان ۰ نباشد که در این صورت طبق اصل ضرب $\boxed{3}\times\boxed{3}\times\boxed{1}=9$ عدد می‌توانیم بسازیم.
(۲)

پس با توجه به اصل جمع $21=9+12$ عدد زوج سه رقمی با ارقام ۰ , ۲ , ۳ , ۵ , ۷ می‌توان ساخت.

تذکر در حل سؤال‌هایی مانند تست قبل (ساختن عدد زوج با ارقام غیرتکراری به وسیلهٔ چند رقم که صفر هم یکی از آنهاست) مسئله را به دو حالت تفکیک کنید: حالت اول: یکان صفر باشد و حالت دوم: یکان صفر نباشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴ پیمانه — ۴۰ تست — **پیمانه‌های ۱ تا ۴**

۱ اصل جمع و اصل ضرب

(صفحه‌های ۱ تا ۱۱ ریاضی و آمار (۳))

۱. می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز کلاس دهم، ۴ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۵ دانش‌آموز کلاس دوازدهم، یک دانش‌آموز را انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟ (صفحهٔ ۱۰- مشابه تمرین ۱)

۱) ۱۲ ۲) ۲۸ ۳) ۴۴ ۴) ۶۰

۲. یک کارگاه پیراهن‌دوزی، در هر سایز پیراهن‌هایی در ۵ رنگ، ۳ جنس پارچه و ۲ نوع بسته‌بندی تولید می‌کند. شخصی که برای خرید یک پیراهن برای خود به این کارگاه مراجعه می‌کند، چند انتخاب دارد؟ (صفحهٔ ۱۱- مشابه تمرین ۱)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۴۰ ۴) ۳۰

۳. در لیگ برتر فوتبال ایران بین ۱۶ تیم، بازی‌های رفت و برگشت انجام می‌شود. در پایان فصل، چند مسابقهٔ فوتبال انجام شده است؟ (صفحهٔ ۱۱- مشابه تمرین ۴)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۴۰

۴. با ارقام طبیعی کمتر از ۵، چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت؟ (صفحهٔ ۶- مشابه کار در کلاس ۱)

۱) ۲۵۶ ۲) ۴۰۰ ۳) ۵۰۰ ۴) ۶۲۵

۵. چند عدد ۵ رقمی وجود دارد که تمام ارقام آن زوج غیر صفر است؟ (صفحهٔ ۶- مکمل کار در کلاس) (سراسری انسانی - ۸۸)

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۶۲۵ ۴) ۱۰۲۴

۶. بین شهرهای A و B چهار جادهٔ دو طرفه و بین شهرهای B و C سه جادهٔ دو طرفه موجود است. به چند طریق می‌توانیم با گذشتن از B، از شهر A به شهر C سفر رفت و برگشت انجام دهیم؟ (صفحهٔ ۱۰- مشابه تمرین ۲- ب)

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۴۹ ۴) ۱۴۴

۷. نسبت تعداد حالت‌های پاسخگویی به یک آزمون ۳ سؤالی که هر سؤال آن ۴ گزینه دارد به تعداد حالت‌های پاسخگویی به یک آزمون ۳ سؤالی که هر سؤال آن ۲ گزینه دارد، به شرطی که جواب دادن به همهٔ سؤال‌ها الزامی باشد، کدام است؟ (صفحهٔ ۳- پاراگراف آخر)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۸. یک دانش‌آموز در کنکور انسانی، به ۲۴۰ سؤال موجود در دفترچه‌ها به چند طریق می‌تواند پاسخ دهد؟ (پاسخگویی به همه سؤالات الزامی <u>نیست</u>) (صفحهٔ ۳- پاراگراف آخر)

۱) 4^{240} ۲) 240^{4} ۳) 5^{240} ۴) 240^{5}

۹. پلاک‌های سری «ق» تهران در سال ۱۴۰۲ به صورت | ایران ۵۰ | * * ق * * * | است که در آنها هر ستاره نمایش یک رقم غیرصفر است. چه تعداد از این سری پلاک‌ها رقم شروعشان عددی اول است و به یک رقم مضرب ۳ ختم می‌شوند؟ (صفحهٔ ۳- پاراگراف آخر)

۱) 3^{8} ۲) 4×3^{7} ۳) 2×3^{7} ۴) 5×3^{7}

۱۰. با حروف کلمهٔ FARSHID چند کلمهٔ ۳ حرفی بدون توجه به معنی می‌توان نوشت به طوری که حروف مجاور متمایز باشند؟ (صفحهٔ ۳- پاراگراف آخر) (آزمون کانون- ۲۷ مرداد ۱۴۰۲)

۱) ۲۱۰ ۲) ۵۰۴۰ ۳) ۳۴۳ ۴) ۲۵۲

۱۱. سعید طی سفر خود از ایران به آلمان از پنج کشور دیگر نیز عبور می‌کند که برای رفتن از هر کشور به کشور دیگر می‌تواند یکی از پنج نوع وسیلهٔ نقلیهٔ موجود را انتخاب کند. اگر او در هیچ دو سفر متوالی از یک کشور به کشور دیگر نتواند از وسیلهٔ نقلیهٔ تکراری استفاده کند، به چند طریق می‌تواند به آلمان سفر کند؟ (صفحهٔ ۳- پاراگراف آخر) (آزمون کانون- ۲۷ مرداد ۱۴۰۲)

۱) ۱۲۸۰ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۵۱۲۰ ۴) ۴۸۱۲

۱۲. خانواده‌ای ۳ فرزند دختر و ۴ فرزند پسر دارد. در نزدیکی خانهٔ آنها، ۴ مجتمع آموزشی دخترانه و ۵ مجتمع آموزشی پسرانه وجود دارد. این خانواده به چند طریق می‌تواند فرزندان خود را در مجتمع‌های آموزشی ثبت‌نام کند به طوری که هیچ دو دختری را در یک مجتمع آموزشی یکسان ثبت‌نام نکرده باشد؟ (صفحهٔ ۳- پاراگراف آخر) (آزمون کانون- ۲۵ شهریور ۱۴۰۱)

۱) $5^4 \times 4^3$ ۲) $4^5 \times 3^4$ ۳) $5^3 \times 6$ ۴) $5^3 \times 120$

۱۳. با ارقام ۱ , ۲ , ۶ , ۸ , ۹ چند عدد پنج رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت که رقم وسط آن فرد باشد؟ (صفحهٔ ۶- مکمل کار در کلاس ۲) (آزمون کانون- ۱۶ دی ۱۴۰۱)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۱۴. با استفاده از ارقام ۰ , ۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۹ چند عدد پنج رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟ (صفحهٔ ۶- مشابه کار در کلاس ۱)

۱) ۷۲۰ ۲) ۵۶۰ ۳) ۶۰۰ ۴) ۳۶۰

۱۵. با ارقام موجود در مجموعهٔ {۸ , ۷ , ۶ , ۴ , ۲ , ۱}، چند عدد پنج رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ (صفحهٔ ۶- مشابه کار در کلاس ۲) **(سراسری انسانی خارج از کشور – ۹۸)**

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۱۶. با اعداد اول یک رقمی و اعداد مربع کامل طبیعی یک رقمی، چند عدد ۳ رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟ (صفحهٔ ۶- مشابه کار در کلاس ۳) (آزمون کانون- ۳ تیر ۱۴۰۰)

۱) ۲۴ ۲) ۶۰ ۳) ۴۸ ۴) ۷۲

۱۷. چند عدد چهار رقمی وجود دارد که فقط رقم دهگان آن زوج باشد؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.) (صفحهٔ ۶- مشابه کار در کلاس ۳) (آزمون کانون- ۶ آبان ۱۴۰۱)

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۲۰۰

۱۸. با ارقام موجود در مجموعهٔ {۶ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱}، بدون تکرار ارقام، اعداد پنج رقمی می‌سازیم. باقیماندهٔ چه تعداد از این اعداد در تقسیم بر ۵ برابر با صفر است؟ (صفحهٔ ۶- مشابه کار در کلاس ۴)

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۴۰

۱۹. چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۰۰۰ با ارقام فرد می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.) (صفحهٔ ۱۱- مشابه تمرین ۶- ب) (آزمون کانون- ۲۷ مرداد ۱۴۰۲)

۱) ۸۴ ۲) ۹۶ ۳) ۱۸ ۴) ۶۴

۲۰. چند عدد سه رقمی با ارقام فرد متمایز می‌توان نوشت که هم بر ۵ بخش‌پذیر باشد و هم از ۳۰۰ بزرگتر باشد؟ (صفحهٔ ۶- مکمل تمرین ۶- ب) (آزمون کانون- ۳۱ تیر ۱۴۰۱)

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۲۱. با ارقام ۸ , ۲ , ۳ , ۹ , ۱ چند عدد چهار رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که مجموع رقم یکان و دهگان آنها بزرگتر از ۱۲ باشد؟ (صفحهٔ ۶- مکمل تمرین ۶- ب)

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۲۲. در چند عدد سه رقمی، رقم تکراری وجود دارد؟ (صفحهٔ ۶- مکمل کار در کلاس ۳)

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۵۲ ۳) ۴۰۰ ۴) ۴۵۰

۲۳. حمید برای رفتن از شهر A به شهر C از شهر B عبور می‌کند. از شهر A به شهر B، ۴ راه اصلی و ۳ راه فرعی و از شهر B به شهر C، ۵ راه اصلی و ۲ راه فرعی وجود دارد. اگر او حداقل در یکی از مسیرهای خود از شهری به شهر دیگر، از راه اصلی استفاده کند، این کار به چند طریق ممکن است؟ (صفحهٔ ۱۰- مکمل تمرین ۲)

۱) ۲۸ ۲) ۳۵ ۳) ۴۳ ۴) ۴۰

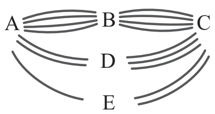
۲۴. از بین ۴ دانش‌آموز کلاس دهم، ۵ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۶ دانش‌آموز کلاس دوازدهم، به چند روش می‌توان یک گروه ۲ نفره تشکیل داد که این دو نفر هم‌کلاسی نباشند؟ (صفحهٔ ۱۰- مکمل تمرین ۱)

۱) ۷۰ ۲) ۷۲ ۳) ۷۴ ۴) ۷۶

۲۵. علی قصد دارد در تعطیلات زمستانی به یکی از سه شهر A، B و C سفر کند. او در هر شهر می‌خواهد رفتن به دقیقاً یک رستوران و انجام دقیقاً یک تفریح را برای خود برنامه‌ریزی کند. اگر هر شهر ۳ رستوران و ۳ نوع تفریح مختلف داشته باشد ولی در آخرین لحظات رفتن به شهر A و نیز یکی از رستوران‌های شهر B نامکن شود، او به چند طریق می‌تواند یک شهر انتخاب کند و سفر خود را تنظیم کند؟ (صفحهٔ ۴- کار در کلاس)

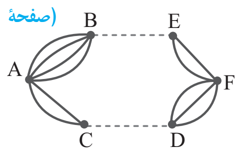
۱) ۲۷ ۲) ۹ ۳) ۱۸ ۴) ۱۵

۲۶. مطابق شکل بین شهرهای A , B , C , D , E راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. به x طریق می‌توان از A به C و به y طریق می‌توان از D بدون عبور از E به A مسافرت کرد. حاصل $|x-y|$ کدام است؟ (در هر سفر از هریک از شهرهای بین راه حداکثر یک بار عبور می‌کنیم.) (صفحهٔ ۱۰- مشابه تمرین ۲)



۱) ۲۶ ۲) ۲۴ ۳) ۲۲ ۴) ۲۰

۲۷. اگر تعداد راه‌ها از شهر C به D را با x و از B به E را با y نشان دهیم و شخصی به ۴۶ حالت مختلف بتواند از A به F سفر کند، به طوری که از هر شهر حداکثر یک بار عبور کند، حاصل $3x+4y$ کدام است؟ (صفحهٔ ۱۱- مشابه تمرین ۱۰) (آزمون کانون- ۳۰ تیر ۱۴۰۲)



۱) ۴۶ ۲) ۳۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۶

۲۸. رمز سه رقمی یک کیف، به گونه‌ای است که ارقام تکراری ندارد و عدد زوج و فرد کنار هم قرار نمی‌گیرند. چند حالت برای رمز این کیف وجود دارد؟
(صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت) **(سراسری انسانی – تیر ۱۴۰۱)**

۱) ۳۶ ۲) ۶۰ ۳) ۷۲ ۴) ۱۲۰

۲۹. با استفاده از ارقام ۲ , ۱ , ۰ چند عدد طبیعی که حداقل ۲ رقمی و حداکثر ۴ رقمی باشند، می‌توان نوشت؟
(صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت) (آزمون کانون- ۳۱ تیر ۱۴۰۱)

۱) ۸۱ ۲) ۷۸ ۳) ۷۲ ۴) ۶۸

۳۰. با ارقام ۵ , ۴ , ۳ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰ چند عدد چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۵، بدون تکرار رقم‌ها، می‌توان نوشت؟ (صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت) **(سراسری انسانی – ۹۸)**

۱) ۷۲ ۲) ۹۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۰

۳۱. با ارقام ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵، چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۳۰۰، بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟ (صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت)

۱) ۴۸ ۲) ۵۲ ۳) ۵۶ ۴) ۶۰

۳۲. با ارقام ۸ , ۷ , ۵ , ۴ , ۰ چند عدد زوج ۴ رقمی بزرگتر از ۵۰۰۰ با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟ (صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت) (آزمون کانون- ۲۵ شهریور ۱۴۰۱)

۱) ۳۲ ۲) ۴۸ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۸

۳۳. در چند سه رقمی، فقط یک رقم ۳ وجود دارد؟ (صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت)

۱) ۳۰۰ ۲) ۲۲۵ ۳) ۲۷۰ ۴) ۲۸۰

۳۴. در چند عدد سه رقمی، دقیقاً دو رقم ۳ وجود دارد؟ (صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت)

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۹

۳۵. با ارقام ۴ , ۳ , ۲ , ۱ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که در آنها رقم یکان از رقم صدگان کوچکتر باشد؟ (صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت)

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

۳۶. یک پارکینگ دارای ۴ درب است. وقتی از یک درب وارد می‌شوید باید از درب دیگری خارج شوید. به چند طریق حسن و علی می‌توانند از این پارکینگ استفاده کنند به طوری که آنها درب ورودی و درب خروجی یکسانی نداشته باشند؟ (صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت) **(سراسری انسانی – تیر ۱۴۰۲)**

۱) ۱۶۸ ۲) ۱۰۸ ۳) ۸۴ ۴) ۵۴

۳۷. یک فروشگاه دارای ۵ درب است. وقتی مشتری از یک درب وارد می‌شود باید از درب دیگری خارج شود. زهرا و نازنین به چند طریق می‌توانند از فروشگاه خرید کنند به طوری که آنها از درب ورودی و خروجی یکسانی استفاده نکرده باشند؟ (صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت) **(سراسری انسانی خارج از کشور – تیر ۱۴۰۲)**

۱) ۳۲۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۳۰

۳۸. به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۲ نفر تقسیم کرد به طوری که به هرکدام از افراد، حداقل یک کتاب برسد؟
(صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت) (آزمون کانون- ۳۱ تیر ۱۴۰۱)

۱) ۳۲ ۲) ۲۵ ۳) ۲۳ ۴) ۳۰

۳۹. با ارقام ۶ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که در آنها هم رقم زوج و هم رقم فرد وجود داشته باشد؟
(صفحهٔ ۶- مکمل فعالیت) (آزمون کانون- ۲۴ دی ۱۴۰۰)

۱) ۱۵۶ ۲) ۲۰۳ ۳) ۲۱۹ ۴) ۲۵۲

۴۰. در چند عدد طبیعی زوج سه رقمی، رقم تکراری وجود دارد؟ (صفحهٔ ۶- مکمل کار در کلاس)

۱) ۱۱۳ ۲) ۱۲۲ ۳) ۱۹۴ ۴) ۲۲۵

۱ شمارش

ریاضی و آمار (۳) – پایهٔ دوازدهم – فصل اول – صفحه‌های ۱ تا ۱۱

۲ فاکتوریل

فاکتوریل ◄ همانطور که برای n بار ضرب عددی مانند a در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم $(\underbrace{a\times a\times \dots \times a}_{n\ \text{مرتبه}}=a^n)$ برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچکتر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می‌کنیم، مثلاً داریم: $۴!=۴\times۳\times۲\times۱$.

تعریف فاکتوریل

اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از یک باشد، حاصلضرب تمام اعداد طبیعی از ۱ تا n را با نماد $n!$ نمایش می‌دهیم، یعنی: $n!=n\times(n-۱)\times\dots\times۲\times۱$ و قرارداد می‌کنیم که $۰!=۱!=۱$

تذکر ◄◄ ① فاکتوریل فقط برای اعداد حسابی تعریف می‌شود، یعنی عبارت‌هایی مثل $(-۳)!$، $(\frac{۳}{۵})!$ و $(\sqrt{۵})!$ تعریف نمی‌شوند (بی‌معنی هستند).

② بهتر است فاکتوریل اعداد ۰ تا ۵ را حفظ باشید:

$۰!=۱!=۱$

$۲!=۱\times۲=۲$

$۳!=۱\times۲\times۳=۶$

$۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$

$۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$

تست حاصل عبارت $3!\times 3!(2!)^2+((0!+0!+0!)!+)$ کدام است؟ (آزمون کانون - ۶ آبان ۱۴۰۱)

۱) ۱۴۷ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۶۲ ۴) ۱۸۰

پاسخ گزینهٔ «۲» می‌دانیم $1=0!$، $2=2!$، $6=3!$ و $24=4!$ پس عبارت مورد نظر سؤال برابر است با:

$$(1+1+1)!+(2^2)!\times 3!=3!+4!\times 3!=6+24\times 6=6+144=150$$

● **مثال:** حاصل عبارت $10\times 20\times 30\times ...\times 100$ را با استفاده از نماد فاکتوریل بنویسید.

○ **حل:** داریم:

$$10\times 20\times 30\times ...\times 100=(10\times 1)\times (10\times 2)\times (10\times 3)\times ...\times (10\times 10)$$

$$=\underbrace{(10\times 10\times ...\times 10)}_{\text{۱۰مرتبه}}\times \underbrace{(1\times 2\times 3\times ...\times 10)}_{10!}=10^{10}\times 10!$$

نکته **از تعریف فاکتوریل می‌توان نتیجه گرفت:**

$$\mathbf{n!=n(n-1)!=n\times (n-1)\times (n-2)!=n\times (n-1)\times (n-2)\times (n-3)!=...}$$

به عنوان مثال: $10!=10\times 9!=10\times 9\times 8!=10\times 9\times 8\times 7!=...$

از این خاصیت در ساده‌سازی بسیاری از عبارت‌های شامل فاکتوریل، استفاده می‌شود.

● **مثال:** حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $7!-5!$ ب) $\dfrac{7!}{5!}$

○ **حل:** داریم: $7!=7\times 6\times 5!$، پس:

الف) $7!-5!=7\times 6\times 5!-5!=(\underbrace{7\times 6}_{42}-1)\times \underbrace{5!}_{120}=41\times 120=4920$

ب) $\dfrac{7!}{5!}=\dfrac{7\times 6\times 5!}{5!}=7\times 6=42$

تست مقدار n از رابطهٔ $\dfrac{(n-1)!}{4}=\dfrac{(n-2)!}{2}$ کدام است؟ (آزمون کانون -۱۶ دی ۱۴۰۱)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ «۲» داریم $(n-1)!=(n-1)\times (n-2)!$، پس:

$$\frac{(n-2)!}{2}=\frac{(n-1)!}{4}\Rightarrow \frac{(n-2)!}{2}=\frac{(n-1)\times (n-2)!}{4}\xrightarrow{\text{را از دو طرف تساوی ساده می‌کنیم } (n-2)!}\frac{1}{2}=\frac{n-1}{4}\xrightarrow{\times 4}2=n-1\Rightarrow n=3$$

۳ جایگشت

تعریف جایگشت

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم.

فرض کنید می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های متمایز a , b , c را به دست آوریم. سه خانه به این صورت $\underset{(3)}{\square}\ \underset{(2)}{\square}\ \underset{(1)}{\square}$ در نظر می‌گیریم، برای خانهٔ (۱) ، ۳ حالت، برای خانهٔ (۲)، ۲ حالت و برای خانهٔ (۳)، ۱ حالت داریم، پس بنا به اصل ضرب، تعداد جایگشت‌های آنها برابر است با $3\times 2\times 1=3!=6$؛ این جایگشت‌ها عبارت‌اند از abc , acb , bca , bac , cab , cba.

نکته **تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر است با $n!$.**

● **مثال:** چهار مسافر به چند طریق می‌توانند در یک تاکسی با گنجایش چهار نفر بنشینند؟

۱	راننده
۴ ۳ ۲	

○ **حل:** در واقع تعداد جایگشت‌های ۴ نفر را در چهار خانهٔ $\boxed{1}$، $\boxed{2}$، $\boxed{3}$ و $\boxed{4}$ می‌خواهیم که برابر است با $4!$.

نکته **در حل بسیاری از سؤال‌های جایگشت، باید از اصل ضرب استفاده کنید. پس همانطور که قبلاً گفتیم، باید پُر کردن خانه‌های دارای محدودیت را در اولویت قرار دهید.**

● **مثال:** با حروف کلمهٔ «گیلان»، بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنا:

الف) چند کلمهٔ پنج حرفی می‌توان ساخت؟

ب) چند کلمهٔ پنج حرفی می‌توان ساخت که با «گ» شروع شود؟

پ) چند کلمهٔ پنج حرفی می‌توان ساخت که به یک حرف بی‌نقطه ختم شود؟

○ **حل:** الف) در واقع تعداد جایگشت‌های پنج حرف متمایز (گ ، ی ، ل ، ا ، ن) را در پنج خانه به صورت $\underset{(5)}{\square}\ \underset{(4)}{\square}\ \underset{(3)}{\square}\ \underset{(2)}{\square}\ \underset{(1)}{\square}$ می‌خواهیم که برابر است با $5!=120$.

ب) چون خانهٔ (۱) محدودیت دارد، پر کردن آن را در اولویت قرار می‌دهیم، اگر حرف «گ» را در خانهٔ (۱) قرار دهیم، چهار حرف باقی می‌ماند که تعداد جایگشت‌های آنها در چهار خانهٔ باقی‌مانده برابر است با !۴، پس بنا به اصل ضرب، پاسخ این قسمت می‌شود ۲۴ = !۴ = !۴×۱.

(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)
				گ

پ) خانهٔ (۵) دارای محدودیت است که در مرحلهٔ اول، می‌توانیم یکی از چهار حرف (گ ، ی ، ل ، ا) را در آن قرار دهیم. (دقت کنید که وقتی «یـ» در آخر کلمه قرار می‌گیرد، بی‌نقطه می‌شود.)

در مرحلهٔ دوم، چهار حرف باقی می‌ماند که تعداد جایگشت‌های آنها در چهار خانهٔ باقی‌مانده برابر است با !۴، پس بنا به اصل ضرب، پاسخ این قسمت برابر است با ۹۶ = ۲۴×۴ = !۴×۴.

(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)
۴				
(گ، ی، ل، ا)	!۴			

تست به چند طریق می‌توان حروف کلمهٔ MOHSEN را کنار هم قرار داد به طوری که M و N همزمان در ابتدا و انتها قرار نگیرند؟ (آزمون کانون - ۶ آبان ۱۴۰۱)

۱) ۴۸۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۱۶ ۴) ۶۷۲

پاسخ گزینهٔ «۴» ابتدا تعداد حالت‌های نامطلوب را به دست می‌آوریم: برای به دست‌آوردن تعداد حالت‌های نامطلوب، در مرحلهٔ اول M و N را در خانه‌های (۱) و (۶) قرار می‌دهیم. این دو حرف در این دو خانه، !۲ جایگشت دارند.

(۶)	(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)

!۴ ، !۲

در مرحلهٔ دوم چهار حرف (O , H , S , E) را داریم که در چهار خانهٔ باقی‌مانده !۴ جایگشت دارند. پس تعداد حالت‌های نامطلوب برابر است با !۴×!۲.

اما اگر محدودیتی نداشتیم شش حرف کلمهٔ MOHSEN در خانه‌های (۱) تا (۶)، !۶ جایگشت داشتند، پس پاسخ مسئله برابر است با:

تعداد کل حالت‌ها − حالت‌های نامطلوب = !۴×!۲−!۶ = ۲۴×۲−۱۲۰×۶ = ۶۷۲

نکته در محاسبهٔ تعداد جایگشت‌ها اگر بخواهیم تعدادی از اشیاء کنار هم قرار بگیرند، آنها را در کنار هم در یک بسته قرار می‌دهیم. توجه کنید که اگر اشیاء داخل بسته متمایز باشند، باید جایگشت آنها را هم درون بسته در نظر بگیرید.

تست به چند طریق می‌توان ۳ کتاب مختلف ریاضی و ۴ کتاب مختلف فلسفه را در یک قفسه کنار هم چید به طوری که کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های فلسفه نیز کنار هم باشند؟ (آزمون کانون - ۲۵ شهریور ۱۴۰۱)

۱) !۷ ۲) !۴+!۳ ۳) !۲×!۴×!۳ ۴) !۳×!۴

پاسخ گزینهٔ «۳» کتاب‌های ریاضی را در کنار هم یک بسته و کتاب‌های فلسفه را هم در کنار هم یک بسته در نظر می‌گیریم که این دو بسته کنار هم !۲ جایگشت دارند. اما دقت کنید که خودِ کتاب‌های فلسفه درون بستهٔ ۱، دارای !۴ جایگشت و کتاب‌های ریاضی درون بستهٔ ۲ دارای !۳ جایگشت هستند، پس بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با !۴×!۳×!۲.

$R_1\,R_2\,R_3$ بستهٔ ۲ ، $F_1\,F_2\,F_3\,F_4$ بستهٔ ۱

تست در چند جایگشت از حروف کلمهٔ « SAMAN »، دو حروف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) !۲×!۴ ۲) !۴ ۳) !۳ ۴) !۲×!۳

پاسخ گزینهٔ «۲» دو حرف A را در کنار هم، یک بسته در نظر می‌گیریم که با سه حرف N , M , S تشکیل چهار شیء می‌دهند و در کنار هم !۴ جایگشت دارند.

S (AA) MN
بسته

دقت کنید که برخلاف تست قبل، از آنجا که اشیاء درون بسته متمایز نیستند، جایگشتی ندارند.

نکته در محاسبهٔ تعداد جایگشت‌ها، اگر بخواهیم دو دسته از اشیاء به صورت یک در میان کنار هم قرار بگیرند، باید دقت کنیم که آیا تعداد اشیاء دو بسته با هم برابر است یا خیر.

● **مثال:** الف) در چند جایگشت از ارقام ۱۲۳۴۵، ارقام زوج و فرد به صورت یک در میان کنار هم قرار می‌گیرند؟

ب) در چند جایگشت از ارقام عدد ۱۲۳۴۵۶، ارقام زوج و فرد به صورت یک در میان کنار هم قرار می‌گیرند؟

○ **حل:** الف) سه رقم فرد (۱ , ۳ , ۵) و دو رقم زوج (۲ , ۴) داریم. پس اگر بخواهیم ارقام زوج و فرد یک در میان باشند، باید رقم‌های فرد در سه خانهٔ رنگی باشند که تعداد جایگشت‌های سه رقم فرد این سه خانه !۳ است و باید رقم‌های زوج در خانه‌های سفید باشند که تعداد جایگشت‌های دو رقم زوج این دو خانه !۲ است، پس بنا به اصل ضرب، پاسخ قسمت (الف) برابر است با ۱۲ = ۲×۶ = !۲×!۳.

ب) سه رقم فرد (۱ , ۳ , ۵) و سه رقم زوج (۲ , ۴ , ۶) داریم. پس اگر بخواهیم ارقام زوج و فرد یک در میان باشند، دو حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول: فرد زوج فرد زوج فرد زوج
!۳ × !۳
جایگشت‌های سه رقم فرد در خانه‌های سفید ، جایگشت‌های سه رقم زوج در خانه‌های رنگی

حالت دوم: زوج فرد زوج فرد زوج فرد
!۳ × !۳
جایگشت‌های سه رقم زوج در خانه‌های سفید ، جایگشت‌های سه رقم فرد در خانه‌های رنگی

پس بنا به اصل جمع، پاسخ قسمت (ب) می‌شود: $۳!\times۳!+۳!\times۳!=۲\times(۳!)^۲=۲\times۶^۲=۲\times۳۶=۷۲$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲ پیمانه | ۲۰ تست | پیمانه‌های ۵ و ۶

۲ فاکتوریل
صفحهٔ ۵ ریاضی و آمار (۳)

۴۱. چه تعداد از تساوی‌های زیر درست است؟ (صفحهٔ ۵- پاراگراف اول)

الف) $(\frac{۴}{۵})! = \frac{۴!}{۵!}$ ب) $(۳!)^۲ = ۹!$ پ) $۱۰! = ۹! \times ۱۰$ ت) $۲! = ۳! - ۵!$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۲. حاصل $۳۰ \times ۴۸ \times ۵۶$ برابر با کدام است؟ (صفحهٔ ۵- پاراگراف اول)

۱) $۸!$ ۲) $۸! \times ۲$ ۳) $۹!$ ۴) $۹! \times ۲$

۴۳. حاصل عبارت $\frac{(۰!+۲!)!}{۵!} \times \frac{۸!}{۴!}$ کدام است؟ (صفحهٔ ۵- پاراگراف اول) (آزمون کانون- ۲۶ شهریور ۱۴۰۲)

۱) ۴۸ ۲) ۴۲ ۳) ۸۴ ۴) ۹۶

۴۴. عبارت $\frac{۱۰}{۱۰!+۹!+۸!}$ برابر با کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ (صفحهٔ ۵- پاراگراف اول) (آزمون کانون- ۱۳ مرداد ۱۴۰۲)

۱) $\frac{۱}{۱۰!} - \frac{۱}{۱۱!}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰!} - \frac{۱}{۱۱!}$ ۳) $\frac{۱}{۹!} - \frac{۱}{۱۰!}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰!} - \frac{۱}{۹!}$

۴۵. اگر $\frac{(۲n+۱)!}{(۲n-۱)!} = ۶$، آنگاه حاصل $\frac{(n+۴)!}{(n+۲)!}$ کدم است؟ (صفحهٔ ۵- پاراگراف اول)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۲ ۴) ۵۶

۳ جایگشت
صفحه‌های ۵ تا ۱۱ ریاضی و آمار (۳)

۴۶. با جایگشت ارقام ۵ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱، چند عدد شش رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟ (صفحهٔ ۶- مشابه کار در کلاس ۴)

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۱۲۰

۴۷. در یک اتومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند، به طوری که ۳ نفر آنها، مجاز به رانندگی باشند؟
(صفحهٔ ۶- پاراگراف دوم) **(سراسری انسانی – ۹۹)**

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۴

۴۸. با حروف a , b , c , d , e چند کلمهٔ سه حرفی (بامعنی یا بی‌معنی) بدون تکرار حرف می‌توان نوشت به طوری که c و d هرکدام به کار رفته باشند؟
(صفحهٔ ۱۱- تمرین ۳) (آزمون کانون- ۱۳ مرداد ۱۴۰۲)

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

۴۹. با حروف کلمهٔ «جهانگرد»، بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنا، چند کلمهٔ هفت حرفی می‌توان نوشت که با «ج» شروع و به «د» ختم شود؟
(صفحهٔ ۱۱- مشابه تمرین ۳- ب)

۱) ۲۴۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۰۰

۵۰. با حروف کلمهٔ «تاریخ» بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنا، چند کلمهٔ پنج حرفی می‌توان نوشت که به یک حرف بی‌نقطه ختم شود؟
(صفحهٔ ۱۱- مشابه تمرین ۳- ب)

۱) ۷۲ ۲) ۴۸ ۳) ۳۶ ۴) ۶۰

۵۱. ۳ نفر به همراه علی و حسن قرار است در یک هتل، هرکدام در یک اتاق، اقامت کنند. هتل سه اتاق خالی کنار هم در یک طرف راهرو و دو اتاق دیگر در کنار هم، در طرف دیگر راهرو دارد. به چند طریق، این افراد در اتاق‌ها می‌توانند اقامت کنند، به طوری که علی و حسن در اتاق‌های کنار هم ساکن شوند؟ (صفحهٔ ۶- پاراگراف دوم) **(سراسری انسانی – دی ۱۴۰۱)**

۱) ۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۵۲. تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ DAMDARAN به شرط آنکه حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟
(صفحهٔ ۶- پاراگراف دوم) (سراسری انسانی- ۸۴)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۵۳. با حروف کلمهٔ «خودکار» چند کلمهٔ ۶ حرفی بدون توجه به معنی می‌توان ساخت به طوری که در همهٔ آنها عبارت «کار» به همین شکل موجود باشد؟ (تکرار حروف، مجاز نیست.) (صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون- ۱۹ فروردین ۱۴۰۱)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۲

۵۴. تعداد جایگشت‌های کلمهٔ computer که در آنها دو حرف t و r کنار هم باشند، کدام است؟ (صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون- ۱۰ شهریور ۱۴۰۲)

۱) $۷!$ ۲) $۵! \times ۲! \times ۲!$ ۳) $۷! \times ۲!$ ۴) $۶! \times ۲!$

۵۵. سه کتاب مبحث ریاضی و چهار کتاب مبحث تاریخ را در یک ردیف به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که همهٔ کتاب‌های هم‌مبحث کنار هم باشند؟ (صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون- ۳۱ تیر ۱۴۰۱)

۱) ۱۶۲۲ ۲) ۱۷۲۸ ۳) ۲۸۸ ۴) ۲۱۴۶

۵۶. اصغر، محمد، رضا، سهیل، کسری و حسن به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند، به طوری که رضا و محمد کنار هم نباشند؟
(صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون- ۲۲ مهر ۱۴۰۱)

۱) ۵۸۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۵۷. با حروف کلمهٔ point چند کلمه پنج حرفی بدون توجه به معنی می‌توان ساخت که در آنها حروف t و n کنار هم قرار گیرند و با حرف p آغاز نشود؟
(صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون- ۲۱ مهر ۱۴۰۲)

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۵۸. سه کتاب متمایز ریاضی و دو کتاب متمایز اقتصاد را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم چید، به طوری که از نظر موضوعی کتاب‌های چیده شده یک در میان باشند؟
(صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۳)

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۵۹. ۴ دانش‌آموز رشتهٔ انسانی و ۴ دانش‌آموز رشتهٔ تجربی را به چند روش می‌توان کنار هم قرار داد، به طوری که هیچ دو دانش‌آموز رشتهٔ انسانی کنار هم نباشند؟
(صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۳)

۱) $(۴!)^۲$ ۲) $۲\times(۴!)^۲$ ۳) $\frac{۸!}{۲!}$ ۴) $\frac{۸!}{۴!}$

۶۰. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد شش رقمی می‌توان نوشت به طوری که ارقام فرد یک در میان باشند؟
(صفحهٔ ۱۱- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون- ۲۱ مهر ۱۴۰۲)

۱) ۳۶ ۲) ۵۴ ۳) ۶۰ ۴) ۸۱

۱ شمارش

ریاضی و آمار (۳)- پایهٔ دوازدهم- فصل اول- صفحه‌های ۱ تا ۱۱

۴ تبدیل

در قسمت «جایگشت» گفتیم که اگر n شیء متمایز داشته باشیم هر حالت از کنار هم قرار گرفتن آنها را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم که تعداد آنها برابر است با $n!$. حالا فرض کنید می‌خواهیم r شیء از میان n شیء متمایز را انتخاب و آنها را کنار هم قرار دهیم، محاسبهٔ تعداد راه‌های انجام این کار که در واقع محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز است، با استفاده از مفهومی به نام تبدیل انجام می‌شود.

تعریف تبدیل

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب‌ها مهم باشد یا به بیان دیگر تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز، تبدیل r شیء از n شیء متمایز نامیده می‌شود که آن را با نماد $P(n , r)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر مسائل تبدیل را می‌توان به کمک اصل ضرب نیز حل کرد.

● **مثال:** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

○ **حل:** عدد مورد نظر را به صورت $\underset{(۳)}{\square}\ \underset{(۲)}{\square}\ \underset{(۱)}{\square}$ در نظر می‌گیریم، برای خانهٔ (۱)، ۵ حالت، برای خانهٔ (۲)، ۴ حالت و برای خانهٔ (۳)، ۳ حالت امکان‌پذیر است، پس بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با $۵\times۴\times۳$. دقت کنید که $۵\times۴\times۳$ را می‌توانیم به کمک نماد فاکتوریل هم بیان کنیم، به این صورت:

$$۵\times۴\times۳=\frac{۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=\frac{۵!}{۲!}$$

در حل مثال قبل در واقع تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۵ شیء متمایز را حساب کردیم، پس می‌توانیم بگوییم $P(۵ , ۳)=\frac{۵!}{۲!}=۵\times۴\times۳$. در حالت کلی:

فرمول تبدیل

تبدیل r شیء از n شیء متمایز برابر است با:

$$P(n , r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

تذکر در حل بعضی سؤال‌های تبدیل، اصلاً نیازی به دانستن مفهوم شمارشی آن نداریم و صرفاً از فرمول آن استفاده می‌کنیم.

تست از معادلهٔ $P(۵ , x)=xP(۵ , x-۱)$، مقدار x کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۱» از فرمول تبدیل استفاده می‌کنیم:

$$P(۵ , x)=\frac{۵!}{(۵-x)!} , P(۵ , x-۱)=\frac{۵!}{(۵-(x-۱))!}=\frac{۵!}{(۶-x)!}$$

و مقادیر بالا را در معادلهٔ مفروض سؤال قرار می‌دهیم.

$$\frac{۵!}{(۵-x)!}=x\times\frac{۵!}{(۶-x)!}\xrightarrow{\div۵!}\frac{۱}{(۵-x)!}=\frac{x}{(۶-x)!}$$

$$\Rightarrow\frac{(۶-x)!}{(۵-x)!}=x\Rightarrow\frac{(۶-x)\times(۵-x)!}{(۵-x)!}=x\Rightarrow۶-x=x\Rightarrow۶=۲x\Rightarrow x=۳$$

پاسخ تشریحی آمار و احتمال

پاسخ تشریحی شمارش و احتمال: حسین حاجیلو
پاسخ تشریحی چرخهٔ آمار: ایمان چینی‌فروشان

۱. گزینهٔ ۱

باید یک دانش‌آموز دهم «یا» یک دانش‌آموز یازدهم «یا» یک دانش‌آموز دوازدهم انتخاب کنیم، پس بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با:

$۳+۴+۵=۱۲$

۲. گزینهٔ ۴

این شخص می‌تواند به ۵ حالت رنگ، به ۳ حالت جنس پارچه و به ۲ حالت نوع بسته‌بندی پیراهن خود را انتخاب کند، پس طبق اصل ضرب، انتخاب پیراهن خود را می‌تواند به $۵\times۳\times۲=۳۰$ حالت انجام دهد.

۳. گزینهٔ ۴

اگر مسابقات به صورت رفت و برگشت باشد، کار تنظیم هر مسابقهٔ فوتبال شامل دو مرحله است: مرحلهٔ اول: تعیین تیم میزبان و مرحلهٔ دوم: تعیین تیم میهمان. اگر ۱۶ تیم داشته باشیم، برای مرحلهٔ اول ۱۶ انتخاب و برای مرحلهٔ دوم ۱۵ انتخاب داریم. پس طبق اصل ضرب، این کار به $۱۶\times۱۵=۲۴۰$ حالت امکان‌پذیر است.

۴. گزینهٔ ۱

در هر یک از خانه‌های (۱) تا (۴)، می‌توانیم هر یک از ارقام ۴ , ۳ , ۲ , ۱ را قرار دهیم، یعنی برای هر خانه چهار حالت داریم.

(۱) (۲) (۳) (۴)
$\boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}$

پس طبق اصل ضرب، تعداد اعداد مورد نظر سؤال برابر است با:

$۴\times۴\times۴\times۴=۴^۴=(۲^۲)^۴=۲^۸=۲۵۶$

۵. گزینهٔ ۴

ارقام زوج غیر صفر عبارت‌اند از: $\underbrace{۲ , ۴ , ۶ , ۸}_{\text{چهار رقم}}$. هر یک از این چهار رقم می‌توانند در هر یک از خانه‌های (۱) تا (۵) قرار بگیرند تا یک عدد پنج رقمی که تمام ارقام آن زوج غیر صفر هستند ساخته شود.

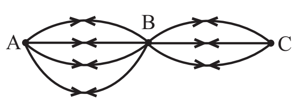
(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)
$\boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}\ \boxed{۴}$

پس طبق اصل ضرب، خواستهٔ سؤال برابر است با:

$۴\times۴\times۴\times۴\times۴=۴^۵=(۲^۲)^۵=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$

۶. گزینهٔ ۴

با توجه به شکل، مسیر حرکت به صورت زیر است:



$A \xrightarrow[۴]{(۱)} B \xrightarrow[۳]{(۲)} C \xrightarrow[۳]{(۳)} B \xrightarrow[۴]{(۴)} (A)$

برای مسیر (۱)، ۴ حالت، برای مسیر (۲)، ۳ حالت، برای مسیر (۳)، ۳ حالت و برای مسیر (۴)، ۴ حالت داریم، پس طبق اصل ضرب، خواستهٔ سؤال برابر است با: $۴\times۳\times۳\times۴=۱۴۴$

۷. گزینهٔ ۳

در پاسخگویی به ۳ سؤال دو گزینه‌ای به شرط آن که جواب دادن به سؤال‌ها الزامی باشد، برای هر سؤال ۲ انتخاب داریم (هرکدام از دو گزینه را می‌توانیم انتخاب کنیم)، پس طبق اصل ضرب در این حالت، تعداد حالت‌های پاسخگویی می‌شود:

$\underset{\text{سؤال اول}}{۲}\times\underset{\text{سؤال دوم}}{۲}\times\underset{\text{سؤال سوم}}{۲}=۲^۳$

شبیه همین استدلال برای پاسخگویی به ۳ سؤال چهار گزینه‌ای به شرط آنکه جواب دادن به همهٔ سؤال‌ها الزامی باشد وجود دارد، تعداد حالت‌های پاسخگویی برابر است با: $۴\times۴\times۴=۴^۳$. پس خواستهٔ سؤال برابر است با:

$\frac{۴^۳}{۲^۳}=(\frac{۴}{۲})^۳=۲^۳=۸$

۸. گزینهٔ ۳

سؤالات دفترچهٔ کنکور چهار گزینه‌ای هستند، پس برای هر سؤال، ۵ انتخاب وجود دارد (انتخاب هریک از گزینه‌ها یا پاسخ ندادن به آن)، پس طبق اصل ضرب، تعداد راه‌های پاسخ دادن به سؤال‌های دفترچه، برابر می‌شود با: $\underbrace{۵\times۵\times...\times۵}_{\text{۲۴۰ مرتبه}}=۵^{۲۴۰}$

۹. گزینهٔ ۲

(۲) (۳)   (۴) (۵) (۱)
$\boxed{۴}\ \boxed{۹}$ ق $\boxed{۹}\ \boxed{۹}\ \boxed{۳}$

با توجه به توضیحات سؤال، در خانهٔ (۱) هریک از اعداد $\underbrace{\{۹ , ۶ , ۳\}}_{\text{۳ حالت}}$ و در خانهٔ (۲) هر یک از اعداد $\underbrace{\{۷ , ۵ , ۳ , ۲\}}_{\text{۴ حالت}}$ می‌توانند قرار بگیرند و در خانه‌های (۳)، (۴) و (۵) هر یک از اعداد $\{۹ , ... , ۲ , ۱\}$ می‌توانند قرار بگیرند، پس بنا به اصل ضرب، خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$۴\times۹\times۹\times۹\times۳=۴\times۹^۳\times۳=۴\times(۳^۲)^۳\times۳$$
$$=۴\times(۳^۶\times۳)=۴\times۳^۷$$

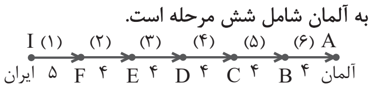
۱۰. گزینهٔ ۴

در خانهٔ (۱)، هر یک از هفت حرف **D , I , H , S , R , A , F** را می‌توانیم قرار دهیم، اما در خانهٔ (۲) حرفی را که در خانهٔ (۱) قرار دادیم، نمی‌توانیم استفاده کنیم، پس برای آن ۶ انتخاب داریم. در خانهٔ (۳) هم نمی‌توانیم حرفی را که در خانهٔ (۲) قرار دادیم استفاده کنیم، پس برای آن هم ۶ انتخاب داریم. با این توضیحات، تعداد کلمات مطلوب، با استفاده از اصل ضرب برابر است با: $۷\times۶\times۶=۲۵۲$

(۱) (۲) (۳)
$\boxed{۷}\ \boxed{۶}\ \boxed{۶}$

۱۱. گزینهٔ ۳

مطابق شکل اگر پنج کشور بین ایران و آلمان را **B**، **C**، **D**، **E** و **F** بنامیم، کار رفتن از ایران به آلمان شامل شش مرحله است.



برای رفتن از **I** به **F**، ۵ روش وجود دارد، برای رفتن از **F** به **E**، ۴ روش وجود دارد (وسیلهٔ نقلیه‌ای که در سفر از **I** به **F** استفاده شد، قابل قبول نیست)، به همین ترتیب هر یک از سفرهای $D \to E$، $C \to D$، $B \to C$ و $A \to B$ هم ۴ روش دارند، پس طبق اصل ضرب، خواستهٔ سؤال برابر است با:

$۵\times۴\times۴\times۴\times۴\times۴=۵\times۴^۵=۵\times۲^{۱۰}=۵\times۱۰۲۴=۵۱۲۰$

۱۲. گزینهٔ ۴

برای ثبت‌نام هر پسر، ۵ انتخاب داریم. پس طبق اصل ضرب، ثبت‌نام ۴ پسر $۵\times۵\times۵\times۵=۵^۴$ حالت دارد. برای ثبت‌نام دختر اول ۴ انتخاب داریم و از آنجا که می‌خواهیم هیچ دو دختری در یک مجتمع نباشند، برای ثبت‌نام دختر دوم ۳ انتخاب و برای ثبت‌نام دختر سوم ۲ انتخاب داریم. پس طبق اصل ضرب، ثبت‌نام دخترها $۴\times۳\times۲$ حالت دارد. در نهایت با استفاده از اصل ضرب، تعداد راه‌های ثبت‌نام پسرها و دخترها برابر است با:

$۵^۴\times(۴\times۳\times۲)=۵^۳\times(۵\times۴\times۳\times۲)=۵^۳\times۱۲۰$

۱۳. گزینهٔ ۴

رقم وسط محدودیت دارد، پس آن را در اولویت قرار داده، مرحلهٔ (۱) را پر کردن آن در نظر می‌گیریم.

(۲) (۳) (۱) (۴) (۵)
$\boxed{۴}\ \boxed{۳}\ \underset{\text{۱ یا ۹}}{\boxed{۲}}\ \boxed{۲}\ \boxed{۱}$

در خانهٔ (۱) باید رقم فرد قرار بگیرد (۱ یا ۹) پس برای آن ۲ انتخاب داریم. حالا که یکی از رقم‌ها را در خانهٔ (۱) قرار دادیم، برای خانهٔ (۲)، ۴ انتخاب داریم (رقمی که در خانهٔ (۱) قرار گرفت، قابل قبول نیست)، به همین ترتیب برای خانه‌های (۳)، (۴) و (۵) به ترتیب ۳، ۲ و ۱ انتخاب داریم و طبق اصل ضرب $۴۸ = ۱ × ۲ × ۲ × ۳ × ۴$ عدد، با شرایط مسئله می‌توان نوشت.

۱۴. گزینهٔ ۳

اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند ۰ باشد پس محدودیت دارد و پر کردن آن را در اولویت قرار داده، مرحلهٔ (۱) را پر کردن آن در نظر می‌گیریم.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)
۵ ۵ ۴ ۳ ۲

برای مرحلهٔ (۱)، ۵ انتخاب داریم. چون تکرار ارقام مجاز نیست، برای مرحلهٔ (۲)، ۵ انتخاب داریم. (رقمی که در مرحلهٔ (۱) استفاده شد قابل قبول نیست، اما ۰ قابل قبول است). برای مرحلهٔ (۳)، ۴ انتخاب داریم (دو رقمی که در مرحلهٔ (۱) و (۲) استفاده شدند، قابل قبول نیستند) به همین ترتیب برای مرحله‌های (۴) و (۵) به ترتیب ۳ و ۲ انتخاب داریم و طبق اصل ضرب، خواستهٔ سؤال برابر است با:

$۵ × ۵ × ۴ × ۳ × ۲ = ۶۰۰$

۱۵. گزینهٔ ۳

اگر بخواهیم عدد ساخته شده فرد باشد، باید یک رقم فرد در یکان آن قرار دهیم (۱ یا ۷).

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)
۲ ۵ ۴ ۳ ۲
۱ یا ۷

پس یکان دارای محدودیت است و پر کردن آن را مرحلهٔ (۱) در نظر می‌گیریم. در مرحلهٔ (۱)، ۲ انتخاب داریم. چون می‌خواهیم عدد ساخته شده رقم تکراری نداشته باشد، برای مرحلهٔ (۲)، ۵ انتخاب داریم (رقمی که در یکان قرار گرفت، قابل قبول نیست) و به همین ترتیب برای مرحله‌های (۳)، (۴) و (۵) به ترتیب ۴، ۳ و ۲ انتخاب داریم، پس طبق اصل ضرب، تعداد عددهای مطلوب برابر است با: $۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۲ = ۲۴۰$

۱۶. گزینهٔ ۲

اعداد اول یک رقمی عبارت‌اند از ۲، ۳، ۵ و ۷ و اعداد مربع کامل یک رقمی عبارت‌اند از ۱، ۴ و ۹؛ پس برای ساختن عدد سه رقمی مورد نظر، مجاز به استفاده از اعداد $\underbrace{\{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۷ , ۹\}}_{۷ \text{ رقم}}$ هستیم.

(۱) (۲) (۳)
۲ ۶ ۵
۲ یا ۴

اگر بخواهیم عدد ساخته شده زوج باشد، باید یکان آن زوج باشد، یعنی در پر کردن یکان محدودیت داریم و آن را مرحلهٔ (۱) در نظر می‌گیریم. چون تکرار ارقام مجاز نیست، برای پر کردن خانهٔ (۲)، ۶ انتخاب داریم (رقمی که در (۱) قرار گرفته، قابل قبول نیست) و به همین ترتیب برای خانهٔ (۳)، ۵ انتخاب داریم؛ در نهایت با استفاده از اصل ضرب، جواب سؤال برابر است با: $۵ × ۶ × ۲ = ۶۰$

۱۷. گزینهٔ ۲

اگر هیچ شرطی نداشته باشیم، هریک از ارقام اعداد می‌توانند ۰، ۱، ۲، ۳، ... یا ۹ باشند، البته به‌جز اولین عدد سمت چپ که نمی‌تواند ۰ باشد.

(۴) (۱) (۳) (۲)
۳ ۵ ۴ ۵

در این سؤال می‌خواهیم رقم دهگان زوج باشد، یعنی یکی از اعداد $\{۸ , ۶ , ۴ , ۲ , ۰\}$، پس خانهٔ (۱) بیشترین محدودیت را دارد و پر کردن آن را در اولویت قرار می‌دهیم، برای خانهٔ (۱)، ۵ انتخاب داریم، سایر ارقام باید از میان اعداد $\{۹ , ۷ , ۵ , ۳ , ۱\}$ انتخاب شوند، پس برای خانهٔ (۲)، ۵ انتخاب داریم. از آنجا که تکرار ارقام مجاز نیست، برای خانه‌های (۳) و (۴) به ترتیب ۴ و ۳ انتخاب داریم، پس طبق اصل ضرب، تعداد اعداد مطلوب برابر است با:

$۵ × ۴ × ۵ × ۳ = ۳۰۰$

۱۸. گزینهٔ ۳

منظور سؤال این است که باید عدد ساخته شده بر ۵ بخش‌پذیر باشد. می‌دانیم عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد.

(۱) (۲) (۳) (۴) (۵)
۱ ۵ ۴ ۳ ۲
(۵)

در این سؤال ۰ را در ارقام مجاز نداریم، پس باید یکان عدد ساخته شده ۵ باشد، یعنی فقط یکان محدودیت دارد و پر کردن آن را مرحلهٔ (۱) در نظر می‌گیریم. چون تکرار مجاز نیست، در مرحلهٔ (۲)، ۵ انتخاب داریم (رقم ۵ را در یکان استفاده کردیم، پس هر یک از ارقام $۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶$ را می‌توانیم در مرحلهٔ (۲) استفاده کنیم). به همین ترتیب برای مرحله‌های (۳)، (۴) و (۵) به ترتیب $۴ , ۳ , ۲$ انتخاب داریم، پس طبق اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با: $۲ × ۳ × ۴ × ۵ × ۱ = ۱۲۰$

۱۹. گزینهٔ ۲

می‌خواهیم ارقام عدد ساخته شده فرد باشند، پس ارقام را باید از مجموعهٔ $A = \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹\}$ انتخاب کنیم.

(۱) (۲) (۳) (۴)
۴ ۴ ۳ ۲
۳، ۵، ۷ یا ۹

اگر بخواهیم عدد ساخته شده از ۳۰۰۰ بزرگتر باشد، باید رقم سمت چپ آن یکی از چهار عدد ۳، ۵، ۷ یا ۹ باشد.

پس رقم سمت چپ دارای محدودیت است و مرحلهٔ (۱) را پر کردن آن در نظر می‌گیریم. در مرحلهٔ (۲) هر یک از اعضای مجموعهٔ A، به‌جز عضوی که در مرحلهٔ (۱) استفاده شد را می‌توانیم استفاده کنیم (۴ انتخاب). به همین ترتیب برای مرحله‌های (۳) و (۴) به ترتیب ۳ و ۲ انتخاب داریم و طبق اصل ضرب، تعداد عددهای مورد نظر برابر است با:

$۴ × ۴ × ۳ × ۲ = ۹۶$

۲۰. گزینهٔ ۳

ارقام ساخته شده باید از مجموعهٔ $A = \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹\}$ انتخاب شوند. می‌دانیم عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که یکان آن ۰ یا ۵ باشد، که در اینجا ۰ را نمی‌توانیم استفاده کنیم.

(۱) (۲) (۳)
۱ ۳ ۳
۵ — ۳، ۷ یا ۹

اگر بخواهیم عدد ساخته شده از ۳۰۰ بزرگتر باشد، صدگان باید ۳، ۵، ۷ یا ۹ باشد. با این توضیحات، رقم یکان بیشترین محدودیت را دارد (یک انتخاب برای آن داریم) پس مرحلهٔ (۱) را پر کردن آن در نظر می‌گیریم. بعد از آن صدگان محدودیت دارد و پر کردن آن را مرحلهٔ (۲) در نظر می‌گیریم. از آنجا که رقم ۵ را در مرحلهٔ (۱) استفاده کردیم، برای مرحلهٔ (۲)، ۳ انتخاب داریم (۳، ۷ یا ۹). حالا دو عضو مجموعهٔ A را در مرحله‌های (۱) و (۲) استفاده کرده‌ایم، و چون می‌خواهیم ارقام متمایز باشند، برای مرحلهٔ (۳) هم ۳ انتخاب داریم. پس طبق اصل ضرب، خواستهٔ سؤال برابر است با: $۳ × ۳ × ۱ = ۹$

۲۱. گزینهٔ ۳

برای آنکه عدد ساخته شده فرد باشد، باید یکان آن فرد باشد، پس ۱، ۳ و ۹ کاندید قرار گرفتن در یکان هستند. اما می‌خواهیم ارقام متمایز و مجموع یکان و دهگان از ۱۲ بیشتر باشد، پس چاره‌ای نداریم به جز آن که یکان را ۹ و دهگان را ۸ در نظر بگیریم، یعنی برای یکان ۱ انتخاب و برای دهگان هم ۱ انتخاب امکان‌پذیر است و بعد از آن می‌توانیم یکی از ۳ رقم باقی‌مانده را در صدگان قرار دهیم که در این صورت ۲ انتخاب برای هزارگان باقی می‌ماند، پس طبق اصل ضرب، تعداد اعداد مطلوب برابر است با: $.۲ × ۳ × ۱ × ۱ = ۶$

یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۱	۱	۳	۲
۹	۸		

۲۲. گزینهٔ ۲

بنا به اصل ضرب، تعداد کل اعداد سه رقمی برابر است با:

صدگان		دهگان		یکان	
۹	×	۱۰	×	۱۰	$= ۹۰۰$
غیرصفر					

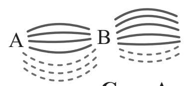
بنا به اصل ضرب، تعداد اعداد سه رقمی با ارقام متمایز برابر است با:

صدگان	دهگان	یکان	
$\boxed{9}\times$	$\boxed{9}\times$	$\boxed{8}$	$=648$
غیرصفر	غیر از صدگان	غیر از صدگان و یکان	

پس در $900-648=252$ عدد سه رقمی، رقم تکراری وجود دارد.

۲۳. گزینهٔ ۳

راه‌های اصلی را با —— و راه‌های فرعی را با ------ نشان می‌دهیم.



اگر هیچ شرطی نداشته باشیم تعداد راه‌های رفتن از A به C به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$(A\to B)$ و $(B\to C)$

$7\times7=49$

حالا اگر بخواهیم فقط از راه‌های فرعی عبور کنیم، تعداد راه‌های رفتن از A به C به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$(A\to B)$ و $(B\to C)$

$3\times2=6$

پس تعداد راه‌های رفتن از A به C به شرطی که حداقل در یکی از مسیرها از راه اصلی استفاده کنیم، برابر است با $49-6=43$.

۲۴. گزینهٔ ۳

خواستهٔ سؤال را می‌توان به این صورت بیان کرد:

(یک دوازدهمی و یک دهمی) یا (یک یازدهمی و یک دوازدهمی) یا (یک دهمی و یک یازدهمی)

$5\times4+6\times5+4\times6$

$=20+30+24=74$

۲۵. گزینهٔ ۴

علی می‌تواند به شهر B سفر کند که در این صورت ۲ انتخاب برای رستوران «و» ۳ انتخاب برای تفریح دارد «یا» به شهر C سفر کند که در این صورت ۳ انتخاب برای رستوران «و» ۳ انتخاب برای تفریح دارد، پس پاسخ سؤال برابر است با: $2\times3+3\times3=6+9=15$

۲۶. گزینهٔ ۱

برای مسافرت از A به C داریم:

$(A\to B)$ و $(B\to C)$ یا $(A\to D)$ و $(D\to C)$ یا $(A\to E)$ و $(E\to C)$

$4\times4+2\times3+1\times2$

$=16+6+2=24$

برای مسافرت از D به A بدون عبور از E داریم:

$(D\to A)$ یا $(D\to C)$ و $(C\to B)$ و $(B\to A)$

$2+3\times4\times4=2+48=50$

پس $x=24$ و $y=50$ داریم: $|x-y|=|24-50|=26$

۲۷. گزینهٔ ۳

برای سفر از A به F، داریم:

$(A\to B)$ و $(B\to E)$ و $(E\to F)$ یا $(A\to C)$ و $(C\to D)$ و $(D\to F)$

$4\times y\times2+2\times x\times3$

$=8y+6x$

طبق فرض سؤال، تعداد حالت‌های انجام سفر از A به F برابر با ۴۶ است، پس: $8y+6x=46\xrightarrow{\div2}4y+3x=23$

۲۸. گزینهٔ ۴

برای آنکه عدد زوج و عدد فرد کنار هم قرار نگیرد، باید هر سه رقم تشکیل‌دهندهٔ رمز زوج یا هر سهٔ آنها فرد باشند.

حالت اول: اگر رمز فقط با اعداد زوج $\{0,2,4,6,9\}$ ساخته شود، در این صورت بنا به اصل ضرب $5\times4\times3=60$ رمز می‌توان ساخت.

(۳)	(۲)	(۱)	:شمارهٔ مرحله
$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	:تعداد حالت‌ها

حالت دوم: اگر رمز فقط با اعداد فرد $\{1,3,5,7,9\}$ ساخته شود، در این صورت بنا به اصل ضرب $5\times4\times3=60$ رمز می‌توان ساخت.

(۳)	(۲)	(۱)	:شمارهٔ مرحله
$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	:تعداد حالت‌ها

پس بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با $60+60=120$.

توجه: در این سؤال چون می‌خواهیم «رمز» بسازیم نه «عدد»، صفر بودن رقم سمت چپ مجاز است.

۲۹. گزینهٔ ۲

سه حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول: عدد ساخته شده دو رقمی می‌باشد. بنا به اصل ضرب، تعداد عددها در این حالت $2\times3=6$ تا است.

(۲)	(۱)	:شمارهٔ مرحله
$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	:تعداد حالت‌ها
۰، ۱ یا ۲	۱ یا ۲	

حالت دوم: عدد ساخته شده سه رقمی باشد. بنا به اصل ضرب، تعداد عددها در این حالت $2\times3\times3=18$ تاست.

(۳)	(۲)	(۱)	:شمارهٔ مرحله
$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	:تعداد حالت‌ها

حالت سوم: عدد ساخته شده چهار رقمی باشد. بنا به اصل ضرب، تعداد عددها در این حالت $2\times3\times3\times3=54$ تاست.

(۴)	(۳)	(۲)	(۱)	:شمارهٔ مرحله
$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	:تعداد حالت‌ها

پس بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با: $6+18+54=78$

۳۰. گزینهٔ ۳

عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که یکان آن ۰ یا ۵ باشد، پس مسئله را به دو حالت تفکیک می‌کنیم.

حالت اول: یکان عدد ساخته شده ۰ باشد. طبق اصل ضرب در حالت اول $3\times4\times5\times1=60$ عدد می‌توان ساخت.

(۴)	(۳)	(۲)	(۱)	:شمارهٔ مرحله
$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$	:تعداد حالت‌ها
			۰	

حالت دوم: یکان عدد ساخته شده ۵ باشد. برای استفاده از اصل ضرب، ابتدا رقم یکان، سپس رقم هزارگان و بعد از آن دو رقم صدگان و دهگان را پُر می‌کنیم، طبق اصل ضرب، در حالت دوم $4\times4\times3\times1=48$ عدد می‌توان ساخت.

(۲)	(۳)	(۴)	(۱)	:شمارهٔ مرحله
$\boxed{4}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	:تعداد حالت‌ها
عدد غیر ۰			۵	

در نهایت بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با مجموع تعداد عددهای ساخته شده در حالت اول و حالت دوم که می‌شود $60+48=108$.

۳۱. گزینهٔ ۴

اگر هزارگان ۴ یا ۵ باشد، برای سایر ارقام محدودیتی نداریم و حتماً عدد ساخته شده از ۳۳۰۰ بزرگتر است:

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)		:شمارهٔ مرحله
$\boxed{2}\times$	$\boxed{4}\times$	$\boxed{3}\times$	$\boxed{2}$	$=48$	:تعداد حالت‌ها
۴ یا ۵					

ولی اگر هزارگان ۳ باشد، صدگان باید ۴ یا ۵ باشد تا عدد ساخته شده از ۳۳۰۰ بزرگتر باشد.

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)		:شمارهٔ مرحله
$\boxed{1}\times$	$\boxed{2}\times$	$\boxed{3}\times$	$\boxed{2}$	$=12$	:تعداد حالت‌ها
۳	۴ یا ۵				

پس $48+12=60$ عدد با شرایطی که سؤال گفته، می‌توان ساخت.

۳۲. گزینهٔ ۲

چون می‌خواهیم عدد ساخته شده از ۵۰۰۰ بزرگ‌تر باشد، باید رقم هزارگان آن ۵، ۷ یا ۸ باشد و چون می‌خواهیم عدد ساخته شده زوج باشد، سه حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول: رقم یکان ۰ باشد. در این حالت طبق اصل ضرب، ۱۸ = ۱×۲×۳×۳ عدد داریم.

شمارهٔ مرحله:	(۲)	(۳)	(۴)	(۱)
تعداد حالت‌ها:	۳	۳	۲	۱
	۵، ۷ یا ۸			۰

حالت دوم: رقم یکان ۴ باشد. در این حالت طبق اصل ضرب، ۱۸ = ۱×۲×۳×۳ عدد داریم.

شمارهٔ مرحله:	(۲)	(۳)	(۴)	(۱)
تعداد حالت‌ها:	۳	۳	۲	۱
	۵، ۷ یا ۸			۴

حالت سوم: رقم یکان ۸ باشد. در این حالت طبق اصل ضرب ۱۲ = ۱×۲×۳×۲ عدد داریم.

شمارهٔ مرحله:	(۲)	(۳)	(۴)	(۱)
تعداد حالت‌ها:	۲	۳	۲	۱
	۵ یا ۷			۸

پس طبق اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با: ۴۸ = ۱۲ + ۱۸ + ۱۸.

۳۳. گزینهٔ ۲

سه حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول: رقم صدگان ۳ باشد.

با توجه به اصل ضرب، ۸۱ = ۹×۹×۱ عدد سه رقمی داریم که رقم صدگان آنها ۳ باشد.

شمارهٔ مرحله:	(۱)	(۲)	(۳)
تعداد حالت‌ها:	۱	۹	۹
	۳	رقم‌هایی غیر از ۳	

حالت دوم: رقم دهگان ۳ باشد.

با توجه به اصل ضرب، ۷۲ = ۹×۱×۸ عدد سه رقمی داریم که رقم صدگان آنها ۳ باشد.

(۲)	(۱)	(۳)
۸	۱	۹
رقم‌هایی غیر از ۳ و ۰	۳	

حالت سوم: رقم یکان ۳ باشد، در این حالت هم مثل حالت دوم ۷۲ = ۱×۹×۸ عدد داریم.

پس با توجه به اصل جمع ۲۲۵ = ۷۲ + ۷۲ + ۸۱ عدد سه رقمی وجود دارد که فقط یکی از رقم‌های آنها ۳ است.

۳۴. گزینهٔ ۲

سه حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول: رقم یکان و دهگان ۳ باشد. در این حالت بنا به اصل ضرب ۸ = ۱×۱×۸ عدد داریم.

شمارهٔ مرحله:	(۳)	(۲)	(۱)
تعداد حالت‌ها:	۸	۱	۱
	رقم‌هایی غیر از ۳ و ۰	۳	۳

حالت دوم: رقم یکان و صدگان ۳ باشد. در این حالت بنا به اصل ضرب ۹ = ۱×۹×۱ عدد داریم.

شمارهٔ مرحله:	(۲)	(۳)	(۱)
تعداد حالت‌ها:	۱	۹	۱
	۳	رقم غیر ۳	۳

حالت سوم: رقم دهگان و صدگان ۳ باشد. در این حالت بنا به اصل ضرب ۹ = ۹×۱×۱ عدد داریم.

شمارهٔ مرحله:	(۱)	(۲)	(۳)
تعداد حالت‌ها:	۱	۱	۹
	۳	۳	رقم غیر ۳

پس بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با: ۲۶ = ۹ + ۹ + ۸

۳۵. گزینهٔ ۱

سه حالت امکان‌پذیر است:

حالت اول: اگر رقم یکان ۱ باشد، برای رقم صدگان سه حالت امکان‌پذیر است (۴ ، ۳ ، ۲) ولی برای رقم دهگان محدودیتی نداریم، پس بنا به اصل ضرب در این حالت ۱۲ = ۱×۴×۳ عدد داریم.

تعداد حالت‌ها:	(۲)	(۳)	(۱)
	۳	۴	۱
	۲، ۳ یا ۴		۱

حالت دوم: اگر رقم یکان ۲ باشد، برای رقم صدگان دو حالت امکان‌پذیر است (۴ ، ۳) ولی برای رقم دهگان محدودیتی نداریم، پس بنا به اصل ضرب در این حالت ۸ = ۱×۴×۲ عدد داریم.

حالت سوم: اگر رقم یکان ۳ باشد، برای رقم صدگان یک حالت امکان‌پذیر است (۴) ولی برای رقم دهگان محدودیتی نداریم، پس بنا به اصل ضرب در این حالت ۴ = ۱×۴×۱ عدد داریم.

در نهایت با استفاده از اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با:

۲۴ = ۴ + ۸ + ۱۲

۳۶. گزینهٔ ۳

علی برای ورود ۴ انتخاب و برای خروج ۳ انتخاب دارد (از دربی که وارد شده، نباید خارج شود) پس بنا به اصل ضرب، ورود و خروج علی ۱۲ = ۳×۴ حالت دارد.

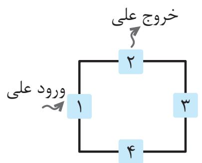
اما حسن:

۱- اگر از درب خروجی علی وارد شود، برای خروج ۳ انتخاب دارد که تعداد حالت‌های آن می‌شود: ۳ = ۳×۱

۲- اگر از دربی غیر از درب ورودی و خروجی علی وارد شود، برای ورود ۲ انتخاب و برای خروج ۲ انتخاب دارد که تعداد حالت‌های آن می‌شود ۴ = ۲×۲. پس بنا به اصل جمع، تعداد حالت‌های ورود و خروج حسن برابر است با: ۷ = ۴ + ۳

در نهایت با استفاده از اصل ضرب، تعداد حالت‌های ورود و خروج علی و حسن برابر است با: ۸۴ = ۷×۱۲

توجه: برای فهم بهتر تعداد حالت‌های ورود و خروج حسن، فرض کنید علی از درب (۱) وارد و از درب (۲) خارج شده است. اگر حسن از درب (۲) وارد شود، از سه درب (۱)، (۳) یا (۴) می‌تواند خارج شود، اما اگر مثلاً از (۳) وارد شود، از دو درب (۱) یا (۴) می‌تواند خارج شود.



۳۷. گزینهٔ ۲

زهرا برای ورود ۵ انتخاب و برای خروج ۴ انتخاب دارد. پس بنا به اصل ضرب ورود و خروج زهرا، ۲۰ = ۴×۵ حالت دارد.

اما نازنین:

۱- اگر از درب خروجی زهرا وارد شود، برای خروج ۴ انتخاب دارد، که تعداد حالت‌های آن می‌شود ۴ = ۴×۱.

۲- اگر از دربی غیر از درب ورودی و خروجی زهرا وارد شود، ۳ انتخاب برای ورود و ۳ انتخاب برای خروج دارد که تعداد حالت‌های آن می‌شود ۹ = ۳×۳. پس بنا به اصل جمع، تعداد حالت‌های ورود و خروج نازنین برابر است با ۱۳ = ۹ + ۴.

در نهایت با استفاده از اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با:

۲۶۰ = ۱۳ × ۲۰

(۲۰: تعداد حالت‌های ورود و خروج زهرا؛ ۱۳: تعداد حالت‌های ورود و خروج نازنین)

۳۸. گزینهٔ ۴

اگر هیچ شرطی نداشته باشیم می‌توانیم هریک از کتاب‌ها را به یکی از دو نفر بدهیم، پس برای هر کتاب دو انتخاب داریم و بنا به اصل ضرب ۳۲ = ۲×۲×۲×۲×۲ حالت می‌توانیم کتاب‌ها را تقسیم‌بندی کنیم. از میان این ۳۲ حالت، حالتی که همهٔ کتاب‌ها به نفر اول یا همهٔ کتاب‌ها به نفر دوم برسد نامطلوب است، پس ۲ = ۱ + ۱ حالت نامطلوب داریم، بنابراین پاسخ سؤال برابر است با: ۳۰ = ۲ − ۳۲.

۳۹. گزینهٔ ۳

اگر هیچ شرطی نداشته باشیم، با این هفت رقم بنا به اصل ضرب

(یکان، دهگان، صدگان) ۲۹۴ = $\boxed{۷}\times\boxed{۷}\times\boxed{۶}$ عدد می‌توان ساخت. (صدگان: غیرصفر)

تعداد عددهای ساخته شده با ارقام زوج، یعنی ۶ ، ۴ ، ۲ ، ۰، برابر است با:

(یکان، دهگان، صدگان) ۴۸ = $\boxed{۴}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}$ (صدگان: غیرصفر)

تعداد عددهای ساخته شده با ارقام فرد، یعنی ۱ ، ۳ ، ۵ برابر است با:

$$\underset{\text{صدگان}}{\boxed{۳}}\times\underset{\text{دهگان}}{\boxed{۳}}\times\underset{\text{یکان}}{\boxed{۳}}=۲۷$$

پس بنا به اصل جمع ۷۵ = ۲۷ + ۴۸ عدد داریم که رقم‌های آنها فقط زوج یا فقط فرد هستند. بنابراین در ۲۱۹ = ۷۵ − ۲۹۴ عدد، هم رقم زوج و هم رقم فرد وجود دارد.

۴۰. گزینهٔ ۲

ابتدا تعداد کل اعداد سه رقمی زوج را به دست می‌آوریم.

$$\underset{\text{رقم غیرصفر}}{\overset{(۲)}{\boxed{۹}}}\quad\overset{(۳)}{\boxed{۱۰}}\quad\underset{۰،۲،۴،۶\text{ یا }۸}{\overset{(۱)}{\boxed{۵}}}\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}۹\times۱۰\times۵=۴۵۰$$

حال تعداد اعداد سه رقمی زوج با ارقام متمایز را حساب می‌کنیم، دو حالت داریم:

حالت اول: رقم یکان صفر باشد.

$$\begin{array}{lccc} \text{شمارهٔ مرحله:} & (۲) & (۳) & (۱) \\ \text{تعداد حالت‌ها:} & \boxed{۹} & \boxed{۸} & \boxed{۱} \\ & \text{رقم غیرصفر} & & ۰ \end{array}\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}۹\times۸\times۱=۷۲$$

حالت دوم: رقم یکان صفر نباشد.

$$\begin{array}{lccc} \text{شمارهٔ مرحله:} & (۲) & (۳) & (۱) \\ \text{تعداد حالت‌ها:} & \boxed{۸} & \boxed{۸} & \boxed{۴} \\ & \text{رقم غیر صفر و غیر از خانهٔ (۱)} & & ۲،۴،۶\text{ یا }۸ \end{array}\xrightarrow{\text{اصل ضرب}}۸\times۸\times۴=۲۵۶$$

پس ۳۲۸ = ۲۵۶ + ۷۲ عدد سه رقمی زوج با ارقام متمایز داریم.
بنابراین در ۱۲۲ = ۳۲۸ − ۴۵۰ عدد زوج سه رقمی، رقم تکراری داریم.

۴۱. گزینهٔ ۱

تساوی‌ها را تک تک بررسی می‌کنیم.

الف) نماد فاکتوریل فقط برای اعداد طبیعی و صفر تعریف می‌شود، پس سمت چپ تساوی یعنی $(\frac{۴}{۵})!$ تعریف نشده است، در حالی که سمت راست آن برابر با $\frac{۱}{۵}$ است، چون $\frac{۱}{۵}=\frac{۴!}{۵\times۴!}=\frac{۴!}{۵!}$.

ب) می‌دانیم $۳!=۶$، پس سمت چپ تساوی برابر است با $۳۶=(۳!)^۲$، در حالی که سمت راست تساوی عددی بزرگتر از ۱۲۰ است، چون $۹\times۸\times۷\times۶\times\underbrace{۵!}_{۱۲۰}=۹!$.

پ) این تساوی درست است، چون $۱۰\times\underbrace{۱\times۲\times۳\times\dots\times۹}_{۹!}=۱۰!$.

ت) می‌دانیم $۵!=۱۲۰$ و $۳!=۶$، پس سمت چپ تساوی برابر است با $۵!-۳!=۱۱۴$ در حالی که سمت راست آن برابر است با $۲!=۲$.

بنابراین فقط تساوی (پ) برقرار است ولی سایر تساوی‌ها برقرار نیستند.

۴۲. گزینهٔ ۲

داریم $۶\times۵=۳۰$ ، $۸\times۶=۴۸$ و $۸\times۷=۵۶$، پس:

$$۳۰\times۴۸\times۵۶=(۵\times۶)\times(۶\times۸)\times(۷\times۸)=(\underset{\underset{۱\times۲\times۳}{\downarrow}}{۶}\times\overset{\overset{۴\times۲}{\uparrow}}{۸})\times(۵\times۶\times۷\times۸)$$

$$=(۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷\times۸)\times۲=۸!\times۲$$

۴۳. گزینهٔ ۳

می‌دانیم $۰!=۱$ و $۲!=۲$، پس $۰!+۲!=۳$ و عبارت مورد نظر به صورت $\frac{۳!}{۵!}\times\frac{۸!}{۴!}$ است و داریم:

$$\frac{۸!}{۴!}\times\frac{۳!}{۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۴\times۳!}\times\frac{۳!}{۵!}=\frac{۸\times۷\times۶}{۴}=۲\times۷\times۶=۸۴$$

۴۴. گزینهٔ ۴

در مخرج عبارت $\frac{۱۰}{۱۰!+۹!+۸!}$ می‌توانیم از $۸!$ فاکتور بگیریم.

$$\frac{۱۰}{۱۰!+۹!+۸!}=\frac{۱۰}{۱۰\times۹\times۸!+۹\times۸!+۸!}=\frac{۱۰}{۸!\underbrace{(۱۰\times۹+۹+۱)}_{۱۰۰}}=\frac{۱}{۸!\times۱۰}$$

حالا باید ببینیم حاصل کدام گزینه برابر با $\frac{۱}{۸!\times۱۰}$ است.

گزینهٔ «۱»:

$$\frac{۱}{۱۰!}-\frac{۱}{۱۱!}=\frac{۱}{۱۰!}-\frac{۱}{۱۱\times۱۰!}=\frac{۱}{۱۰!}(۱-\frac{۱}{۱۱})=\frac{۱}{۱۰!}\times\frac{۱۱-۱}{۱۱}=\frac{۱۰}{۱۱!}$$

گزینهٔ «۲»: قرینهٔ گزینهٔ «۱» است، پس حاصل آن $-\frac{۱۰}{۱۱!}$ می‌شود.

گزینهٔ «۳»: قرینهٔ گزینهٔ «۴» است، پس یکی از آنها را محاسبه می‌کنیم.

گزینهٔ «۴»:

$$\frac{۱}{۹!}-\frac{۱}{۱۰!}=\frac{۱}{۹!}-\frac{۱}{۱۰\times۹!}=\frac{۱}{۹!}(۱-\frac{۱}{۱۰})=\frac{۱}{۹!}\times\frac{۱۰-۱}{۱۰}$$

$$=\frac{۱}{۹!}\times\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱}{۹\times۸!}\times\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱}{۸!\times۱۰}$$

۴۵. گزینهٔ ۱

می‌دانیم $(۲n+۱)!=(۲n+۱)\times(۲n)\times(۲n-۱)!$، پس معادلهٔ مفروض سؤال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۲n-۱)!\times(۲n+۱)\times(۲n)=۶(۲n-۱)!\Rightarrow(۲n+۱)\times(۲n)=۶$$

اگر ۶ را به صورت ۲×۳ بنویسیم، داریم: $(۲n+۱)\times(۲n)=۳\times۲$

می‌توانیم نتیجه بگیریم $۲n=۲$ و $۲n+۱=۳$، پس $n=۱$ و در نتیجه:

$$\frac{(n+۴)!}{(n+۲)!}=\frac{۵!}{۳!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!}=۴\times۵=۲۰$$

۴۶. گزینهٔ ۴

برای ساختن عدد مضرب ۵، باید یکی از ۵ها را در خانهٔ (۱) قرار دهیم، پس خانهٔ (۱) تنها ۱ حالت دارد.

$$\underbrace{\overset{(۶)}{\boxed{}}\ \overset{(۵)}{\boxed{}}\ \overset{(۴)}{\boxed{}}\ \overset{(۳)}{\boxed{}}\ \overset{(۲)}{\boxed{}}}_{۵!}\quad\underset{\underset{۱}{\downarrow}}{\overset{(۱)}{\boxed{۵}}}$$

بعد از انجام این کار، پنج رقم باقی می‌ماند که در پنج خانه (با شماره‌های (۲) تا (۶)) $۵!$ جایگشت دارند، پس با استفاده از اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با $۱\times۵!=۱۲۰$.

۴۷. گزینهٔ ۲

برای جایگاه راننده ۳ انتخاب داریم، پس از انتخاب راننده، چهار نفر باقی می‌مانند که تعداد جایگشت‌های آنها در جایگاه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) برابر است با: $۴!$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{راننده}} & \boxed{(۱)} & \\ \boxed{(۲)} & \boxed{(۳)} & \boxed{(۴)} \end{array}$$

پس بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با:

$$۳\times۴!=۳\times۲۴=۷۲$$

۴۸. گزینهٔ ۳

پنج حرف (a, b, c, d, e) را داریم و می‌خواهیم کلمه‌های سه حرفی بسازیم که در آنها c و d به کار رفته باشد. پس در مرحلهٔ اول یکی از سه حرف (a, b, e) را انتخاب می‌کنیم که این کار به ۳ حالت امکان‌پذیر است. حالا سه حرف داریم، در مرحلهٔ دوم این ۳ حرف متمایز را می‌خواهیم کنار هم بچینیم که این کار به $۳!$ حالت امکان‌پذیر است. در نهایت بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با:

$$۳\times۳!=۳\times۶=۱۸$$

۴۹. گزینهٔ ۲

$$\underset{\text{د}}{\overset{(۷)}{\boxed{۱}}}\ \overset{(۶)}{\boxed{}}\ \overset{(۵)}{\boxed{}}\ \overset{(۴)}{\boxed{}}\ \overset{(۳)}{\boxed{}}\ \overset{(۲)}{\boxed{}}\ \underset{\text{ج}}{\overset{(۱)}{\boxed{۱}}}$$

تکلیف خانه‌های (۱) و (۷) معلوم است و هرکدام یک حالت دارند.

بعد از پر کردن خانه‌های (۱) و (۷)، پنج حرف برایمان باقی می‌ماند (ه ، ا ، ن ، گ ، ر) که تعداد جایگشت‌های آنها در خانه‌های (۲) تا (۶) برابر است با:

$$۵!=۱۲۰$$

۵۰. گزینهٔ ۱

توجه کنید که «یـ» وقتی در پایان کلمه قرار گیرد به صورت «ی» نوشته می‌شود و بی نقطه است پس برای خانهٔ (۵) سه حالت (ا، ر، ی) امکان‌پذیر است.
بعد از پر کردن خانهٔ (۵)، چهار حرف برایمان باقی می‌ماند که تعداد جایگشت‌های آنها در خانه‌های (۱) تا (۴) برابر است با $۴!$.

$\underset{\text{ا، ر، ی}}{\boxed{۳}}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}}_{۴!}$

پس بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با: $۳\times ۴!=۳\times ۲۴=۷۲$

۵۱. گزینهٔ ۳

پنج نفر داریم و می‌خواهیم هرکدام از آنها را در یک اتاق اسکان دهیم، با توجه به آنچه سؤال گفته است، سه حالت امکان‌پذیر است:

$\boxed{۱}\boxed{۲}\boxed{۳}$
راهرو
$\boxed{۴}\boxed{۵}$

الف) علی و حسن در اتاق‌های (۱) و (۲) باشند که در این صورت جایگشت آنها در این دو اتاق $۲!$ است و سه نفر دیگر در سه اتاق باقیمانده $۳!$ جایگشت دارند. پس بنا به اصل ضرب، تعداد راه‌ها در این حالت برابر است با $۲!\times ۳!=۲\times ۶=۱۲$.
ب) علی و حسن در اتاق‌های (۲) و (۳) باشند، با استدلالی مشابه حالت (الف)، تعداد راه‌ها در این حالت هم برابر است با $۲!\times ۳!=۱۲$.
پ) علی و حسن در اتاق‌های (۴) و (۵) باشند که مثل حالت‌های (الف) و (ب)، تعداد راه‌ها در این حالت هم برابر است با $۲!\times ۳!=۱۲$.
پس بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با: $۱۲+۱۲+۱۲=۳۶$

۵۲. گزینهٔ ۱

حروف یکسان را در کنار هم قرار می‌دهیم و هرکدام از بسته‌های حاصل، یعنی $\boxed{DD}$ و $\boxed{AAA}$ را یک شیء در نظر می‌گیریم که با $\boxed{M}$، $\boxed{R}$ و $\boxed{N}$ تشکیل پنج شیء متمایز می‌دهند، پس در کنار هم $۵!=۱۲۰$ جایگشت دارند.
یکی از جایگشت‌های مطلوب: $\boxed{DD}\boxed{M}\boxed{R}\boxed{AAA}\boxed{N}$

۵۳. گزینهٔ ۲

عبارت «کار» را در یک بسته قرار می‌دهیم که این بسته با سه حرف (خ، و، د) تشکیل چهار شیء می‌دهند که این چهار شیء در کنار هم $۴!=۲۴$ جایگشت دارند.

۵۴. گزینهٔ ۳

دو حرف (r, t) را در یک بسته کنار هم قرار می‌دهیم که این بسته به همراه شش حرف c, o, m, p, u, e تشکیل هفت شیء می‌دهند و در کنار هم $۷!$ جایگشت دارند، اما (r, t) هم درون بسته $۲!$ جایگشت دارند، پس بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با $۷!\times ۲!$.

$\underbrace{\boxed{c}\ \boxed{o}\ \boxed{m}\ \boxed{p}\ \boxed{u}\ \boxed{e}\ \overset{۲!}{\boxed{tr}}}_{۷!}$

۵۵. گزینهٔ ۳

سه کتاب ریاضی را در کنار هم یک بسته و چهار کتاب تاریخ را در کنار هم یک بستهٔ دیگر در نظر می‌گیریم که این دو بسته در کنار هم $۲!$ جایگشت دارند، اما کتاب‌های ریاضی در بستهٔ اول $۳!$ جایگشت و کتاب‌های تاریخ در بستهٔ دوم $۴!$ جایگشت دارند. پس بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با: $۲!\times ۳!\times ۴!=۲\times ۶\times ۲۴=۲۸۸$

$\underbrace{\overset{۳!}{\boxed{R_1R_2R_3}}\ \overset{۴!}{\boxed{T_1T_2T_3T_4}}}_{۲!}$

۵۶. گزینهٔ ۲

ابتدا تعداد حالت‌هایی را محاسبه می‌کنیم که رضا و محمد کنار هم باشند: رضا و محمد را در کنار هم یک بسته در نظر می‌گیریم که این بسته در کنار اصغر، سهیل، کسری و حسن $۵!$ جایگشت دارد، اما رضا و محمد درون بسته $۲!$ جایگشت دارند، پس بنا به اصل ضرب، تعداد حالت‌های نامطلوب برابر است با $۵!\times ۲!$.

$\underbrace{\overset{۲!}{\boxed{RM}}\ \boxed{A}\ \boxed{S}\ \boxed{K}\ \boxed{H}}_{۵!}$

اما اگر هیچ شرطی نداشتیم، این شش نفر در کنار هم $۶!$ جایگشت داشتند، پس پاسخ سؤال برابر است با:
تعداد کل حالت‌ها − تعداد حالت‌های نامطلوب $=۶!-۵!\times ۲$
$=۵!\times ۶-۵!\times ۲=۵!(۶-۲)=۱۲۰\times ۴=۴۸۰$

۵۷. گزینهٔ ۳

دو حرف (n, t) را در کنار هم در یک بسته قرار می‌دهیم که درون بسته $۲!$ جایگشت دارند. پس اگر شرط دیگری نداشته باشیم، این بسته در کنار سه حرف (p, o, i) تشکیل چهار شیء می‌دهند و در کنار هم $۴!$ جایگشت دارند، پس بنا به اصل ضرب در $۴!\times ۲!$ حالت دو حرف (n, t) در کنار هم هستند.
اما حالت نامطلوب در اینجا آن است که کلمه با p شروع شود، در این صورت سه خانهٔ خالی (خانه‌های (۲)، (۳) و (۴)) را داریم که می‌توانیم (nt, i, o) را در آن قرار دهیم که این کار به $۳!$ حالت امکان‌پذیر است، اما با توجه به جایگشت n و t در کنار هم بنا به اصل ضرب، تعداد حالت‌های نامطلوب برابر است با $۳!\times ۲!$. پس پاسخ سؤال برابر است با:

$\overset{(۱)}{\boxed{p}}\ \overset{(۲)}{\boxed{}}\ \overset{(۳)}{\boxed{}}\ \overset{(۴)}{\boxed{}}$

تعداد کل حالت‌ها − تعداد حالت‌های نامطلوب
$۴!\times ۲!-۳!\times ۲!=۲۴\times ۲-۶\times ۲=۴۸-۱۲=۳۶$

۵۸. گزینهٔ ۱

باید کتاب‌های ریاضی را در خانه‌های (۱)، (۳) و (۵) و کتاب‌های اقتصاد را در خانه‌های (۲) و (۴) قرار دهیم، تا کتاب‌ها از نظر موضوعی یک در میان باشند.

$\overset{(۵)}{\boxed{r}}\ \overset{(۴)}{\boxed{e}}\ \overset{(۳)}{\boxed{r}}\ \overset{(۲)}{\boxed{e}}\ \overset{(۱)}{\boxed{r}}$

تعداد جایگشت‌های سه کتاب ریاضی در سه خانهٔ (۱)، (۳) و (۵) برابر است با $۳!$. تعداد جایگشت‌های دو کتاب اقتصاد در دو خانهٔ (۲) و (۴) برابر است با $۲!$. پس بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با $۳!\times ۲!=۶\times ۲=۱۲$.

۵۹. گزینهٔ ۲

منظور سؤال این است که باید دانش‌آموزان از نظر رشته، به صورت یک در میان چیده شوند که این کار به دو روش امکان‌پذیر است.
روش اول: چیدمان به صورت زیر باشد.

$\boxed{E_1}\boxed{T_1}\boxed{E_2}\boxed{T_2}\boxed{E_3}\boxed{T_3}\boxed{E_4}\boxed{T_4}$

در این حالت چهار دانش‌آموز انسانی در چهار خانهٔ رنگی $۴!$ جایگشت و چهار دانش‌آموز تجربی در چهار خانهٔ سفید $۴!$ جایگشت دارند، پس بنا به اصل ضرب تعداد حالت‌ها در روش اول $۴!\times ۴!=(۴!)^۲$ است.
روش دوم: چیدمان به صورت زیر باشد.

$\boxed{T_1}\boxed{E_1}\boxed{T_2}\boxed{E_2}\boxed{T_3}\boxed{E_3}\boxed{T_4}\boxed{E_4}$

با استدلالی مشابه روش اول، تعداد حالت‌ها در روش دوم هم $(۴!)^۲$ است.
در نهایت بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با مجموع تعداد حالت‌ها در روش اول و روش دوم، یعنی: $(۴!)^۲+(۴!)^۲=۲\times(۴!)^۲$

۶۰. گزینهٔ ۳

دو حالت امکان‌پذیر است:
۱- عدد ساخته شده با رقم فرد شروع شود.

$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

در این صورت باید رقم‌های فرد یعنی (۱، ۳، ۵) را در سه خانهٔ رنگی قرار دهیم که این کار به $۳!$ حالت امکان‌پذیر است و رقم‌های زوج یعنی

(۴ , ۲ , ۰) را در خانه‌های سفید قرار دهیم که این کار به $۳!$ حالت امکان‌پذیر است. پس تعداد عددها در این حالت، بنا به اصل ضرب برابر است با $۳!\times۳!$.

۲- عدد ساخته شده با رقم زوج شروع شود.

■	□	■	□	■	□
۲ یا ۴					

در این حالت، رقم ۰ نمی‌تواند در خانهٔ (۱) قرار بگیرد پس تعداد راه‌های پر کردن خانه‌های رنگی با رقم‌های زوج بنا به اصل ضرب برابر است با $۲\times۲\times۱=۴$ و تعداد راه‌های پر کردن خانه‌های سفید با رقم‌های فرد برابر است با $۳!$، پس تعداد عددهای ساخته شده در این حالت بنا به اصل ضرب برابر است با $۴\times۳!$ در نهایت بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با: $۳!\times۳!+۴\times۳!=(۳!+۴)\times۳!=(۶+۴)\times۶=۶۰$

.۶۱ گزینهٔ ۱

راه حل اول:

چون قرار است ۳ نفر از ۱۲ نفر را برای سه مورد متمایز انتخاب کنیم، پس جابه‌جایی افراد اهمیت دارد، بنابراین پاسخ سؤال برابر است با:

$$P(۱۲\,,۳)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۹!}=۱۳۲۰$$

راه حل دوم:

برای مورد اول یکی از ۱۲ نفر را انتخاب می‌کنیم و برای مورد دوم یکی از ۱۱ نفر باقیمانده را انتخاب می‌کنیم و برای مورد سوم یکی از ۱۰ نفر باقیمانده را، پس بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با:

$$۱۲\times۱۱\times۱۰=۱۳۲۰$$

.۶۲ گزینهٔ ۱

حرف «ا» را در خانهٔ (۱) و حرف «ن» را در خانهٔ (۵) قرار می‌دهیم، حالا سه خانهٔ خالی داریم که باید آنها را با سه حرف از میان شش حرف (ع ، ل ، و ، م ، س ، ی) پُر می‌کنیم.

(۵)	(۴)	(۳)	(۲)	(۱)
ن				ا

پس پاسخ سؤال برابر است با تعداد انتخاب‌های ۳ شیء از بین ۶ شیء متمایز که در آن جابه‌جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد، یعنی:

$$P(۶\,,۳)$$

.۶۳ گزینهٔ ۱

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
□	□	□	□

کار مورد نظر سؤال را در دو مرحله انجام می‌دهیم، در مرحلهٔ اول با توجه به اینکه حرف S می‌تواند در هریک از خانه‌های (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) قرار بگیرد، برای جایگاه S، ۴ حالت داریم.

در مرحلهٔ دوم پس از مشخص شدن جایگاه حرف S، پنج حرف باقی می‌مانند (D , A , N , E , H) که باید آنها را در سه خانهٔ باقیمانده قرار دهیم، تعداد روش‌های انجام این کار را می‌توانیم با استفاده از اصل ضرب یا فرمول تبدیل به دست آوریم:

$$۴\times P(۵\,,۳)=۴\times\frac{۵!}{(۵-۳)!}=۴\times\frac{۵!}{۲!}=۴\times\frac{۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}$$
$$=۴\times۶۰=۲۴۰$$

.۶۴ گزینهٔ ۱

برای آنکه ۳ کتاب داستان و ۲ کتاب علمی به صورت یک در میان چیده شوند، باید کتاب‌های داستان را در خانه‌های رنگی و کتاب‌های علمی را در خانه‌های سفید قرار دهیم.

■	□	■	□	■

انتخاب ۳ کتاب از میان ۷ کتاب داستان و چیدن آنها در سه خانهٔ رنگی به $P(۷\,,۳)$ حالت امکان‌پذیر است. به همین ترتیب انتخاب ۲ کتاب از میان ۴ کتاب علمی و چیدن آنها در دو خانهٔ سفید به $P(۴\,,۲)$ حالت امکان‌پذیر است. پس بنا به اصل ضرب، پاسخ سؤال برابر است با:

$$P(۷\,,۳)\times P(۴\,,۲)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}\times\frac{۴!}{(۴-۲)!}=\frac{۷!}{۴!}\times\frac{۴!}{۲!}=\frac{۷!}{۲!}$$
$$=۷\times۶\times۵\times۴\times۳=۲۵۲۰$$

.۶۵ گزینهٔ ۱

مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

الف) رمز ساخته شده فاقد حرف تکراری باشد: در این صورت باید از میان پنج حرف S , A , Z , E , H سه حرف را انتخاب کرده و کنار هم بچینیم. با استفاده از اصل ضرب یا فرمول تبدیل تعداد رمزها را در این حالت به دست آوریم:

۵	۴	۳

$$۵\times۴\times۳=P(۵\,,۳)=۶۰$$

ب) رمز ساخته شده دارای حرف تکراری باشد: منظور این است که رمز ساخته شده مثلاً دارای دو حرف S باشد، در این صورت از میان چهار حرف A , Z , E , H یکی را انتخاب کرده و سپس آن را در خانهٔ خالی قرار می‌دهیم.

(۱)	(۲)	(۳)
□	S	S
S	□	S
S	S	□

پس بنا به اصل ضرب، تعداد رمزها در این حالت $۱۲=۳\times۴$ است، شکل بالا به خوبی این حالت را نشان می‌دهد. بنا به اصل جمع، پاسخ سؤال برابر است با مجموع تعداد رمزها در دو حالت (الف) و (ب)، یعنی:

$$۶۰+۱۲=۷۲$$

.۶۶ گزینهٔ ۲

می‌دانیم $P(n\,,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$، پس:

$$P(n\,,۲)=\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n\times(n-۱)\times(n-۲)!}{(n-۲)!}=n(n-۱)$$

با جایگذاری مقدار به دست آمده، در معادلهٔ مفروض سؤال، داریم:

$$P(n\,,۲)=۵n+۷\Rightarrow n(n-۱)=۵n+۷\Rightarrow n^۲-n=۵n+۷$$
$$\Rightarrow n^۲-۶n-۷=۰\Rightarrow (n+۱)(n-۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=-۱\\ n=۷\end{cases}$$

مقدار $n=-۱$ را نمی‌پذیریم چون در این صورت $P(n\,,۲)$ و $P(n-۳\,,n-۴)$ تعریف نمی‌شود، پس $n=۷$ و داریم:

$$P(n-۳\,,n-۴)\xrightarrow{n=۷}P(۴\,,۳)=\frac{۴!}{(۴-۳)!}=\frac{۴!}{۱!}=۴!$$

.۶۷ گزینهٔ ۲

می‌دانیم $P(n\,,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$، پس:

$$P(۶\,,۲)=\frac{۶!}{(۶-۲)!}=\frac{۶!}{۴!}=\frac{۶\times۵\times۴!}{۴!}=۶\times۵=۳۰$$

می‌دانیم $C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$، پس:

$$C_۲^۴=\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

از طرفی $۰!=۱!=۱$، پس حاصل عبارت مورد نظر سؤال برابر است با:

$$\frac{۶+۳۰}{۱\times۱}=۳۶$$

.۶۸ گزینهٔ ۱

همانطور که می‌دانیم $\binom{n}{n-r}=\binom{n}{r}$، از این تساوی می‌توان نکتهٔ زیر را نتیجه گرفت:

> **نکته** اگر $\binom{n}{b}=\binom{n}{a}$، آنگاه دو حالت امکان‌پذیر است:
>
> $۱)\ a=b$ $\quad$ $۲)\ a+b=n$

با استفاده از نکتهٔ بالا، داریم:

$$\binom{۴}{x-۳}=\binom{۴}{۳x-۵}\Rightarrow\begin{cases}۱)\ x-۳=۳x-۵\Rightarrow ۵-۳=۳x-x\\ \Rightarrow ۲=۲x\Rightarrow x=۱\\ ۲)\ (x-۳)+(۳x-۵)=۴\Rightarrow ۴x=۱۲\\ \Rightarrow x=۳\end{cases}$$