درخت دانش

مؤلف این فصل: فرهاد حامی

فصل اول

تابع

(۳۴ پیمانه)

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

تابع

۳۴۰ سؤال شناسنامه‌دار
- ۱۶۲ سؤال تألیفی و طراحی شده از کتاب درسی
- ۱۰۸ سؤال از کنکورهای سراسری
- ۷۰ سؤال از آزمون‌های کانون

در درس‌نامه می‌بینید
۸۲ سؤال
- ۴۸ تست طراحی شده با نگاه به رویکردهای کنکورهای جدید
- ۳۴ مثال برای ادراک و تثبیت

		آبی	سبز	زرد	
۱	توابع چندجمله‌ای و تابع درجه‌ی سوم				۱ پیمانه / ۱۰ تست
۲	توابع صعودی و توابع نزولی				۵ پیمانه / ۵۰ تست
۳	ترکیب توابع				۹ پیمانه / ۹۰ تست
۴	انتقال و تبدیل نمودار توابع				۷ پیمانه / ۷۰ تست
۵	تابع وارون				۱۰ پیمانه / ۱۰۰ تست
	آزمون جمع‌بندی پایان فصل				۲ پیمانه / ۲۰ تست

انتقال و تبدیل نمودار توابع:
۱. انتقال‌های افقی و عمودی (یادآوری و تکمیل)
۲. انعکاس نمودارها (قرینه‌یابی و تقارن)
۳. انبساط و انقباض عمودی و افقی

تابع وارون:
۱. توابع وارون‌پذیر
۲. محاسبه‌ی مقدار و ضابطه‌ی تابع وارون
۳. نمودار تابع وارون و ویژگی‌های آن
۴. ترکیب f با f^{-1} و وارون ترکیب تابع

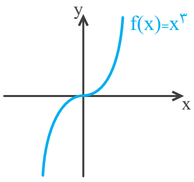
۱ توابع چندجمله‌ای و تابع درجه‌ی سوم

ریاضی ۳ دوازدهم	فصل اول صفحه‌های: ۲ تا ۵

توابع چندجمله‌ای ◄ هر تابع به صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+k$ را که در آن a، b، c و ... و k اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a\neq 0$، یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی n می‌نامند. دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای مجموعه‌ی اعداد حقیقی است و توابع ثابت، همانی، خطی و درجه‌ی دوم، توابعی چندجمله‌ای هستند. توابع زیر همگی چندجمله‌ای هستند.

$y=x^6+x^5-2x+7$ و $y=3x^3-2x^2$ و $y=x^2-x$ و $y=7$ و $y=5x-2$

تابع درجه‌ی سوم ◄ هر تابع به معادله‌ی $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$، یک تابع درجه‌ی سوم نامیده می‌شود که یک حالت خاص از آن، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3$ است.

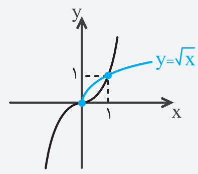
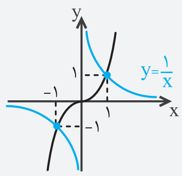
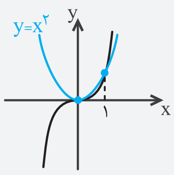
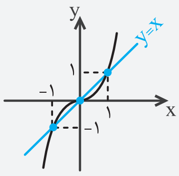


با نقطه‌یابی می‌توان نمودار این تابع را یافت. با توجه به شکل روبه‌رو، ویژگی‌های زیر در این تابع دیده می‌شود:

۱) دامنه و برد تابع، R است.

۲) نمودار تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

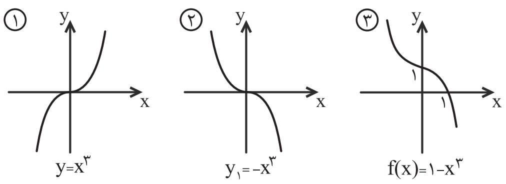
۱ با رسم نمودار دو تابع در یک دستگاه مختصات می‌توانیم در مورد وجود تعداد نقاط تلاقی آن‌ها نظر دهیم. در شکل‌های زیر تعداد نقاط تلاقی تابع $y=x^3$ با برخی توابع معروف نمایش داده شده است.

$y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$	$y=x^3$ و $y=\frac{1}{x}$	$y=x^3$ و $y=x^2$	$y=x^3$ و $y=x$
			
دو نقطه‌ی تلاقی ریشه‌ها: ۰ و ۱	دو نقطه‌ی تلاقی ریشه‌ها: ۱ , ۱−	دو نقطه‌ی تلاقی ریشه‌ها: ۰ و ۱	سه نقطه‌ی تلاقی ریشه‌ها: ۱−، ۰ و ۱

۲ با استفاده از خواص انتقالی می‌توانیم نمودار توابع به شکل کلی $y=a(x+b)^3+c$ ($a\neq 0$ و b و c اعداد حقیقی) را به کمک تابع $y=x^3$ رسم کنیم.

● **مثال:** تابع با ضابطه‌ی $y=x^3$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $f(x)=1-x^3$ را رسم کنید.

○ **حل:** برای رسم نمودار تابع $f(x)=1-x^3$، ابتدا نمودار تابع $y=x^3$ را نسبت به محور x ها قرینه کرده تا $y_1=-x^3$ به دست آید؛ سپس نمودار حاصل را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ پیمانه	پیمانه‌ی ۱
۱۰ تست	

تابع درجه‌ی سوم و تبدیل نمودار آن | تیپ ۱ | صفحه‌های ۲ تا ۵ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۰ ریاضی ۳

۱. نمودار تابع $y=2-x^3$ از کدام ناحیه‌ی دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟ (صفحه‌ی ۵- مکمل کار در کلاس)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

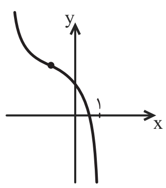
۲. نمودار تابع $f(x)=x^3$ در بازه‌ی $(-\infty, a]$ بالای نمودار تابع $g(x)=x^2$ قرار ندارد. بیشترین مقدار a کدام است؟ (صفحه‌ی ۴- مکمل فعالیت)

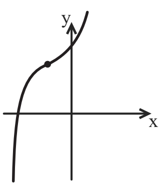
۱) صفر ۲) ۱ ۳) هر مقدار دلخواهی ۴) ۱-

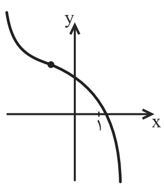
۳. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3$ با دو انتقال بر نمودار تابع $g(x)=x^3+3x^2+3x$ منطبق می‌شود. در این انتقال، نقطه به طول ۲ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار تابع g قرار می‌گیرد؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با کار در کلاس)

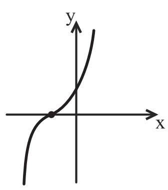
۱) ۷ ۲) ۶۳ ۳) ۱- ۴) ۲۶

۴. نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=2-(x+1)^3$ کدام شکل زیر است؟ (صفحه‌ی ۵- مشابه کار در کلاس)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-(x-۱)^{۳}+a$، همواره به ازای هر مقدار x از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند. حدود a کدام است؟
(صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۱)

۱) $a\geq ۱$ ۲) $a\leq ۱$ ۳) $a\geq -۱$ ۴) $a\leq -۱$

۶. نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+۳x(۱-x)$ از کدام ناحیه(ها) نمی‌گذرد؟ (صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۱) (آزمون کانون – ۲۶ دی ۹۹)

۱) اول و دوم ۲) دوم و چهارم ۳) اول ۴) چهارم

۷. تابع $f(x)=x^{۳}$ مفروض است. اگر تابع $f(x)$ را ۴ واحد به پایین و ۲ واحد به راست منتقل کنیم، تابع $g(x)$ به دست می‌آید. معادله‌ی $f(x)=g(x)$ چند جواب دارد؟
(صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۱) (آزمون کانون – ۳ آبان ۹۸)

۱) یک جواب مثبت ۲) یک جواب منفی ۳) یک جواب مثبت و یک جواب منفی ۴) فاقد جواب

۸. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}$، در بازه‌ی $(-\infty , a)$ همواره پایین خط به معادله‌ی $y=۳-۲x$ است، بیشترین مقدار a کدام است؟
(صفحه‌ی ۴- مکمل فعالیت)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

۹. برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{۳}-۲ & x\geq ۰ \\ a+x & x<۰ \end{cases}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، کم‌ترین مقدار a کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۱)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) ۲-

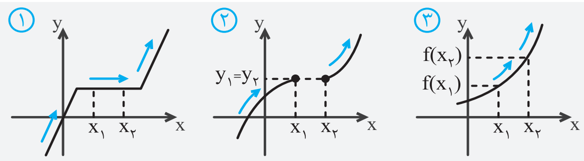
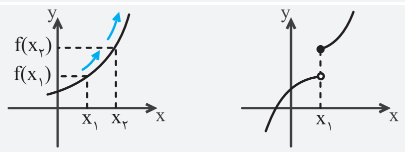
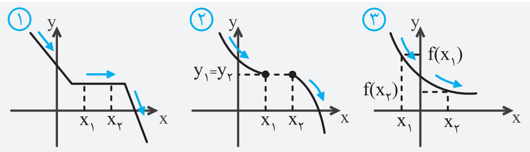
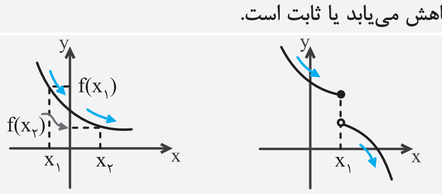
۱۰. تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۳}-۱ & , \quad x\geq ۰ \\ (x-۱)^{۳}+۴ & , \quad x<۰ \end{cases}$ مفروض است. به ازای چند مقدار صحیح k، معادله‌ی $f(x)=k$ دارای دو جواب است؟
(صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۱) (آزمون کانون – ۳ آبان ۹۸)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۲ توابع صعودی و توابع نزولی

ریاضی ۳ دوازدهم	فصل اول
	صفحه‌های: ۶ تا ۱۰

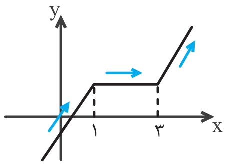
تعریف و شناخت نموداری ◄ مجموعه‌ی A $(A\subseteq D_f)$ را در نظر بگیرید. به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به مجموعه‌ی A، تابع f:

تابع	تعریف ریاضی	توصیف	نمودار و ویژگی‌های آن
صعودی	$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\leq f(x_۲)$	در فاصله‌ای که تابع f صعودی است، با حرکت از چپ به راست روی نمودار، رو به پایین نخواهیم رفت.	 با افزایش x، y افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند.
اکیداً صعودی (صعودی اکید)	$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$	در فاصله‌ای که تابع f اکیداً صعودی است، با حرکت از چپ به راست روی نمودار، همواره رو به بالا خواهیم رفت.	 (۱) با افزایش x، y افزایش می‌یابد. (۲) f تابعی همواره یک به یک است.
نزولی	$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\geq f(x_۲)$	در فاصله‌ای که تابع f نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت.	 با افزایش x، y کاهش می‌یابد یا ثابت است.
اکیداً نزولی (نزولی اکید)	$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$	در فاصله‌ای که تابع f اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، همواره رو به پایین خواهیم رفت.	 (۱) با افزایش x، y کاهش می‌یابد. (۲) f تابعی همواره یک به یک است.

با توجه به تعاریف:

۱ هر تابع صعودی (نزولی) را یک تابع یکنوا و هر تابع اکیداً صعودی (نزولی) را اکیداً یکنوا می‌نامیم.

۲ هر تابع اکیداً صعودی، خود یک تابع صعودی است ولی عکس آن همواره درست نیست، یعنی ممکن است تابع صعودی باشد ولی صعودی اکید نباشد. در واقع یک تابع صعودی می‌تواند اکید (شکل ۳ در بالا) یا غیراکید (شکل‌های ۱ و ۲ در بالا) باشد. این توضیح برای تابع اکیداً نزولی و نزولی نیز برقرار است. به شکل زیر توجه کنید. با توجه به نمودار تابع f:



(۱) در بازهٔ $(-\infty , ۱]$: اکیداً صعودی

(۲) در بازهٔ $[۱ , ۳]$: ثابت

(۳) در بازهٔ $(-\infty , ۳]$: صعودی

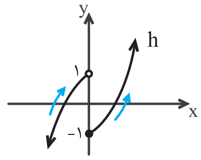
(۴) در بازهٔ $[۳ , +\infty)$: اکیداً صعودی

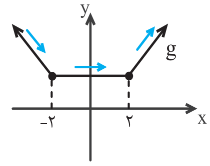
(۵) در بازهٔ $[۱ , +\infty)$: صعودی

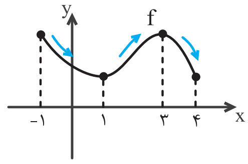
(۶) در دامنهٔ خود $(-\infty , +\infty)$: صعودی

۳ تابع ثابت، تابعی هم صعودی و هم نزولی است.

۴ ممکن است تابع f در دامنهٔ خود، در بازه‌ای صعودی و در بازه‌ای نزولی باشد، در این صورت f را در دامنه‌اش غیریکنوا می‌نامیم.







تابع h در بازهٔ $(-\infty , ۰)$ اکیداً صعودی است.

تابع h در بازهٔ $[۰ , +\infty)$ اکیداً صعودی است

تابع h در R غیریکنواست زیرا در حرکت از x های منفی به مثبت، به پایین رفتیم.

تابع g در بازهٔ $(-\infty , -۲)$ اکیداً نزولی است.

تابع g در بازهٔ $[-۲ , ۲]$ ثابت است.

تابع g در بازهٔ $(-\infty , ۲]$ نزولی است.

تابع g در بازهٔ $[-۲ , +\infty)$ صعودی است.

تابع g در دامنه‌اش غیریکنواست.

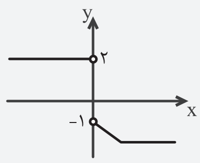
تابع f در بازهٔ $[-۱ , ۱]$ نزولی است.

تابع f در بازهٔ $[۱ , ۳]$ صعودی است.

تابع f در بازهٔ $[۳ , ۴]$ نزولی است.

تابع f در بازهٔ $[-۱ , ۴]$ غیریکنواست.

تست شکل زیر، نمودار تابع نزولی f با دامنهٔ R است، اگر $f(۰) = a$، آنگاه مجموعه مقادیر ممکن برای a کدام است؟



۱) $(-۱ , ۲)$

۲) $[۲ , +\infty)$

۳) $[-۱ , ۲]$

۴) $(-\infty , -۱]$

پاسخ گزینهٔ «۳» طبق تعریف در تابع نزولی باید در حرکت از چپ به راست، به بالا حرکت نکنیم، پس مقدار تابع در $x = ۰$ باید بین دو عدد -۱ و ۲ یا مساوی با یکی از آنها قرار گیرد، بنابراین $-۱ \leq f(۰) \leq ۲$، پس $-۱ \leq a \leq ۲$. توجه کنید اگر a مثلاً ۳ یا ۲- انتخاب شود تابع غیر یکنوا خواهد بود.

تست اگر تابع $f = \{(-۲ , ۴) , (۳ , ۹) , (۱ , m) , (۵ , ۱۰) , (۲ , ۷)\}$ اکیداً صعودی باشد، m کدام عدد زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) ۸ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۵/۵

پاسخ گزینهٔ «۱» در تابع اکیداً صعودی با افزایش x، y همواره افزایش می‌یابد، پس نقاط را در جدول برحسب x از کوچک به بزرگ مرتب می‌نماییم و شرط اکیداً صعودی را بررسی می‌کنیم. طبق تعریف:

x	-۲	۱	۲	۳	۵
y	۴	m	۷	۹	۱۰

$$-۲ < ۱ < ۲ \Rightarrow f(-۲) < f(۱) < f(۲) \Rightarrow ۴ < m < ۷$$

پس $m = ۸$ قابل قبول نیست.

۵ برای بررسی یکنوایی یک تابع با استفاده از تعریف ریاضی، باید از شرط $x_۱ < x_۲$ یکی از نامساوی‌های چهارگانه را با تشکیل تابع مورد نظر نتیجه بگیریم.

به عنوان مثال برای بررسی یکنوایی تابع $f(x) = x^۳ - ۱$ داریم:

$$x_۱ < x_۲ \xrightarrow{\text{به توان ۳}} x_۱^۳ < x_۲^۳ \xrightarrow{-۱} x_۱^۳ - ۱ < x_۲^۳ - ۱ \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

با توجه به نامساوی به دست آمده، تابع f اکیداً صعودی است.

تذکر با توجه به تعریف تابع صعودی و نزولی داریم:

۱ در تابع اکیداً صعودی، با حذف f از دو طرف نامساوی یا گرفتن f از دو طرف نامساوی، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

۲ در تابع اکیداً نزولی با حذف f از دو طرف نامساوی یا گرفتن f از دو طرف نامساوی، جهت نامساوی عوض می‌شود.

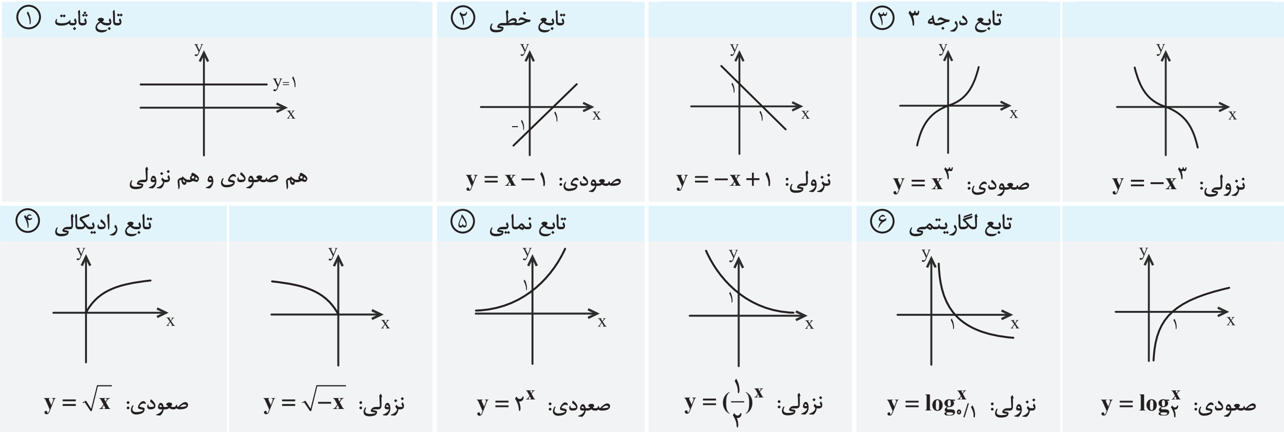
تست اگر تابع f با دامنهٔ R، اکیداً نزولی و $f(۵a + ۳) > f(۲ - a)$ باشد، آنگاه حدود a کدام است؟

۱) $a > \frac{-۱}{۶}$ ۲) $a < \frac{-۱}{۶}$ ۳) $a \leq ۰$ ۴) $a \geq ۰$

پاسخ گزینهٔ «۲» f اکیداً نزولی است، پس با حذف f از دو طرف نامساوی، جهت آن عوض می‌شود، پس:

$$f(۵a + ۳) > f(۲ - a) \xrightarrow{\text{اکیداً نزولی } f} ۵a + ۳ < ۲ - a \rightarrow ۶a < -۱ \rightarrow a < \frac{-۱}{۶}$$

یکنوایی انواع توابع (ضابطه و رسم نمودار) ◄ وقتی ضابطه‌ی یک تابع در اختیار باشد، با رسم نمودار آن می‌توانیم در مورد یکنوایی تابع نظر دهیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.



با توجه به شکل‌ها نتیجه می‌گیریم که:

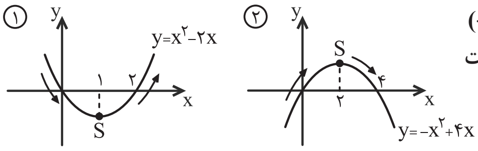
۱) تابع ثابت $f(x)=c$ (یا بخشی از آن) را هم صعودی و هم نزولی در نظر می‌گیریم.

۲) تابع‌های خطی $y=ax+b$، تابع‌های رادیکالی $y=\sqrt{ax+b}$ و تابع‌های درجه‌ی سوم $y=(ax+b)^۳$ به ازای $a>۰$، صعودی و به ازای $a<۰$ نزولی هستند.

۳) تابع‌های $y=a^x$ و $y=\log_a^x$ به ازای $a>۱$، صعودی و به ازای $۰<a<۱$ نزولی‌اند.

توجه ◄◄ بعضی از توابع در دامنه‌ی خود غیریکنوا هستند ولی با محدود کردن دامنه‌ی تابع می‌توان تابعی یکنوا به دست آورد.

نمودار دو تابع مقابل را در نظر بگیرید. تابع شکل ① در دامنه‌ی خود غیریکنوا ولی در بازه‌ی $(-\infty, ۱]$ نزولی و در بازه‌ی $[۱, +\infty)$ صعودی است. همچنین تابع شکل ② نیز در دامنه‌ی خود غیریکنواست ولی در بازه‌ی $(-\infty, ۲]$، صعودی و در بازه‌ی $[۲, +\infty)$ نزولی است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که:



۴) تابع درجه‌ی دوم $y=ax^۲+bx+c$ در دامنه‌ی خود غیریکنواست ولی در بازه‌ی قبل از رأس و خود آن، یا بعد از رأس و خود آن یکنواست؛ به عبارت دیگر این تابع در هر یک از بازه‌های $[\frac{-b}{۲a}, +\infty)$ یا $(-\infty, \frac{-b}{۲a}]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه، یکنواست.

تست اگر تابع درجه دوم $y=ax^۲+(a-۱)x-۲$ در بازه‌ی $[-۱, +\infty)$ نزولی باشد، حدود a کدام است؟

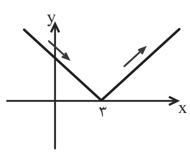
۱) $a>۰$ ۲) $a<۰$ ۳) $-۱\le a<۰$ ۴) $a\le -۱$

پاسخ گزینه‌ی «۳» نمودار سهمی به یکی از دو شکل روبه‌رو می‌تواند باشد. تابع داده شده در بازه‌ی $[-۱, +\infty)$ نزولی است، پس شکل ② می‌تواند درست باشد $(a<۰)$. این تابع در بازه‌ی $[x_S, +\infty)$ نزولی است، پس برای آنکه تابع در بازه‌ی $[-۱, +\infty)$ نزولی باشد، باید بازه‌ی $[-۱, +\infty)$ زیرمجموعه‌ی بازه‌ی $[x_S, +\infty)$ باشد، یعنی $x_S\le -۱$، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a<۰ \\ x_S\le -۱ \end{cases} \Rightarrow x_S=-\frac{(a-۱)}{۲a}\le -۱ \Rightarrow \frac{a-۱}{۲a}\ge ۱ \xrightarrow{a<۰} a-۱\le ۲a \to a\ge -۱ \xrightarrow{a<۰} -۱\le a<۰$$

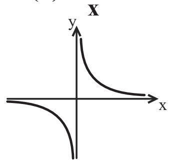
● **مثال:** با رسم نمودار، یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

(۱) $f(x)=|x-۳|$



○ حل: با توجه به نمودار دیده می‌شود که f غیریکنواست ولی در بازه‌ی $[۳, +\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-\infty, ۳]$ نزولی است.

(۲) $f(x)=\frac{۱}{x}$

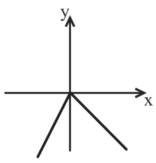


○ حل: دامنه‌ی تابع f، $R-\{۰\}$ است. f در دامنه‌ی خود غیریکنواست ولی در هر یک از بازه‌های $(-\infty, ۰)$ و $(۰, +\infty)$ نزولی است.

● **مثال:** یکنوایی تابع $y=x-۲|x|$ را بررسی کنید.

○ حل: تابع را به یک تابع دو ضابطه‌ای تبدیل کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم.

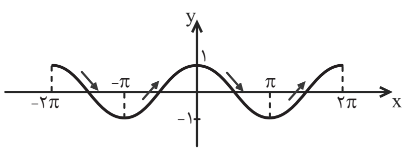
$$y=x-۲|x|=\begin{cases} -x & , \quad x\ge ۰ \\ ۳x & , \quad x<۰ \end{cases}$$



با توجه به نمودار، دیده می‌شود که این تابع نه صعودی است نه نزولی (غیریکنواست).

● **مثال:** با رسم نمودار تابع $f(x)=\cos x$ در بازه‌ی $[-۲\pi, ۲\pi]$، یکنوایی آن را بررسی کنید.

○ حل: نمودار تابع در روبه‌رو رسم شده است. با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع f در این بازه غیریکنواست. تابع f در هر یک از بازه‌های $[۰, \pi]$ و $[-۲\pi, -\pi]$ نزولی و در هر یک از بازه‌های $[\pi, ۲\pi]$ و $[-\pi, ۰]$ صعودی است.

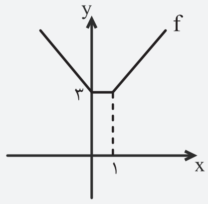


تست تابع با ضابطهٔ $f(x)=||x|+۲|+|x-۱|$، در کدام بازه نزولی است؟

۱) $[۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۱]$ ۳) $[۰,۲]$ ۴) R

پاسخ گزینهٔ «۲» نمودار تابع $f(x)=||x|+۲|+|x-۱|$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم اگر $A>۰$ باشد، آنگاه $|A|=A$، با توجه به اینکه $|x|+۲$ همواره مثبت است، داریم:

$$f(x)=|x|+۲+|x-۱|$$



اگر نمودار تابع $y=|x|+|x-۱|$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم، نمودار تابع f به دست می‌آید.
با توجه به نمودار، تابع f در بازهٔ $(-\infty,۱]$ نزولی است.

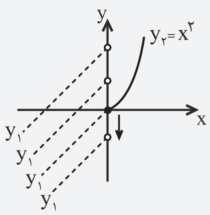
تست اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x+a & , x<۰ \\ x^۲ & , x\geq ۰ \end{cases}$ روی دامنهٔ خود همواره صعودی باشد، a کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۲

پاسخ گزینهٔ «۳» نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. در ضابطهٔ بالایی، a عرض از مبدأ خط است.

$$y_۱=x+a \ ، \ x<۰$$

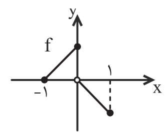
$$y_۲=x^۲ \ ، \ x\geq ۰$$



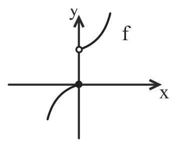
با توجه به نمودار، تابع زمانی در R اکیداً صعودی است که عرض از مبدأ خط کوچکتر یا مساوی صفر باشد، بنابراین $a\leq ۰$، در نتیجه a نمی‌تواند ۱ باشد.

۵ هر تابع اکیداً یکنوا، تابعی یک به یک است، ولی عکس آن همواره درست نیست، یعنی هر تابع یک به یک، لزوماً اکیداً یکنوا نیست.

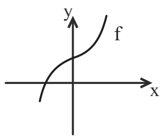
به شکل‌های زیر توجه کنید:



f در بازهٔ $[-۱,۱]$ یک به یک است ولی در این بازه یکنوا نیست.



f اکیداً صعودی و یک به یک است.



f اکیداً صعودی و یک به یک است.

یکنوایی و اعمال روی توابع ◄ برای تعیین یکنوایی اعمال روی توابع می‌توانیم از تعریف استفاده کنیم. برای این منظور در تابع f (تابع داده شده) مقادیر $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ را تشکیل داده و با تعیین علامت نامساوی ($\geq$ یا $\leq$) بین آنها، نوع یکنوایی یا عدم وجود آن را بررسی می‌کنیم.

الف- اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، با اثر دادن آن بر $x_۱<x_۲$، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

ب- اگر تابع f اکیداً نزولی باشد، با اثر دادن آن بر $x_۱<x_۲$، جهت نامساوی عوض می‌شود.

● **مثال:** اگر f و g توابعی اکیداً صعودی باشند، نشان دهید $f+g$ نیز تابعی اکیداً صعودی است.

○ **حل:** بنابر تعریف داریم:

$$x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲) \quad (\text{اکیداً صعودی است } f)$$

$$x_۱<x_۲\Rightarrow g(x_۱)<g(x_۲) \quad (\text{اکیداً صعودی است } g)$$

$$x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)+g(x_۱)<f(x_۲)+g(x_۲)\Rightarrow (f+g)(x_۱)<(f+g)(x_۲)$$

بنابراین $f+g$ اکیداً صعودی است.

نکته اگر f و g هر دو اکیداً صعودی باشند، آنگاه $f+g$ اکیداً صعودی است ولی در مورد $f-g$، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ نمی‌توان نظر قطعی داد و باید تابع را تشکیل دهیم. همچنین اگر f اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی باشند، آنگاه $f-g$ اکیداً صعودی است. (برای اثبات تعریف یکنوایی دو تابع را نوشته و از خواص نامساوی‌ها استفاده کنید.)

به عنوان مثال تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x+\log_{۰/۲}x$ تابعی اکیداً نزولی در دامنهٔ خود است، زیرا از مجموع دو تابع اکیداً نزولی تشکیل شده است.

تست کدام تابع با ضابطهٔ زیر اکیداً یکنوا نیست؟

۱) $y=x+\sqrt{x}$ ۲) $y=x|x|+[x]$ ۳) $y=x^۳-x$ ۴) گزینه‌های ۲ و ۳

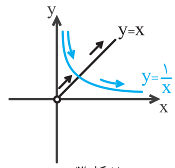
پاسخ گزینهٔ «۳» تابع $y=x+\sqrt{x}$ از مجموع دو تابع صعودی x و $\sqrt{x}$ تشکیل شده پس یکنواست. تابع $y=x|x|+[x]$ از مجموع تابع اکیداً صعودی $x|x|$ و تابع صعودی $[x]$ تشکیل شده پس اکیداً یکنواست. تابع $y=x^۳-x$ اکیداً یکنوا نیست، زیرا: $y(۰)=y(۱)=۰$.

تذکر ◄ با توجه به تعریف، در مورد اعمال روی توابع می‌توان به نتایج زیر رسید:

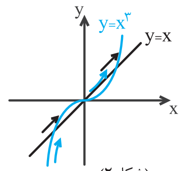
۱ همواره جهت حرکت f و $-f$ خلاف یکدیگر است؛ یعنی اگر f اکیداً صعودی باشد، $-f$ اکیداً نزولی است (شکل ۱).

۲ توان فرد برجهت حرکت بی‌اثر است، یعنی اگر f اکیداً صعودی باشد، آنگاه $f^۳$ نیز اکیداً صعودی است (شکل ۲).

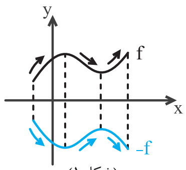
۳ جهت حرکت f و $\frac{1}{f}$ خلاف یکدیگر است، یعنی اگر f افزایشی باشد، $\frac{1}{f}$ کاهشی است (شکل ۳).



(شکل ۳)



(شکل ۲)



(شکل ۱)

جهت حرکت $y=x$ و $y=\frac{1}{x}$ به ازای $x>0$ خلاف یکدیگر

$y=x$ و $y=x^3$ هر دو اکیداً صعودی و جهت حرکت یکسانی دارند.

جهت حرکت f و $-f$ خلاف یکدیگر

تذکر ◄ اگر تابع f اکیداً یکنوا و پیوسته باشد، آنگاه ابتدا و انتهای دامنه، ابتدا و انتهای برد را خواهد داد، از این موضوع در تعیین کمترین و بیشترین مقدار یک تابع پیوسته در یک بازه‌ی پیوسته می‌توانیم استفاده کنیم.

به عنوان مثال تابع $f(x)=\log(x+1)$ تابعی اکیداً صعودی و پیوسته است، پس کمترین و بیشترین مقدار آن در بازه‌ی $[0\,,\,99]$ با قرار دادن ابتدا و انتهای بازه به دست خواهد آمد:

$$f(0)=\log 1=0 \quad و \quad f(99)=\log 100=2 \Rightarrow y_{min}=0 \quad و \quad y_{max}=2$$

تست برد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=3^{|\cos x|-1}$ بازه‌ی $[a\,,\,b]$ است، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ گزینه‌ی «۴» می‌دانیم همواره $-1\le \cos x\le 1$، پس:

$$0\le|\cos x|\le 1 \Rightarrow -1\le|\cos x|-1\le 0$$

برد تابع $y=3^t$ ، $-1\le t\le 0$ را می‌خواهیم. از آنجا که تابعی صعودی است، کمترین و بیشترین مقدار آن به ترتیب به ازای کمترین و بیشترین مقدار t حاصل می‌شود، یعنی:

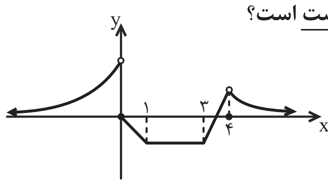
$$y_{min}=3^{-1}=\frac{1}{3} \quad و \quad y_{max}=3^{0}=1 \Rightarrow R_f=[\frac{1}{3}\,,1]=[a\,,b]\Rightarrow b-a=\frac{2}{3}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵ پیمانه	پیمانه‌های
۵۰ تست	۲ تا ۶

تعریف وشناخت نمودار | تیپ ۲ | صفحه‌های ۶ تا ۱۰ ریاضی ۳

۱۱. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. کدام گزینه <u>نادرست</u> است؟ (صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۸۸)



۱) f در بازه‌ی $(-\infty\,,0)$ اکیداً صعودی است.
۲) f در بازه‌ی $[0\,,3]$ نزولی است.
۳) f در بازه‌ی $[3\,,4]$ اکیداً صعودی است.
۴) f در بازه‌ی $(4\,,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

۱۲. اگر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه f محور x ها را .... (صفحه‌ی ۸- مکمل کار در کلاس)

۱) حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. ۲) دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند.
۳) قطع نمی‌کند. ۴) حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

۱۳. رابطه‌ی $f=\{(1\,,m^2-4m)\,,(2\,,m-4)\,,(m\,,6)\,,(3\,,8)\}$ به ازای چند مقدار صحیح m، یک تابع اکیداً صعودی است؟
(صفحه‌ی ۷- متن درس) (آزمون کانون - ۱۹ مهر ۹۸)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱۴. تابع f اکیداً نزولی و دامنه‌ی آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2-m-5)<f(-3+2m-m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟ (صفحه‌ی ۷- متن درس) **(سراسری ریاضی - تیر ۱۴۰۲)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵. f تابعی پیوسته با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و اکیداً نزولی است. اگر نمودار تابع f از نقطه‌ی $A(1\,,3)$ بگذرد و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، آنگاه مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(1-3f(x))<3$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- متن درس)

۱) $(-\infty\,,1)$ ۲) $(-\infty\,,0)$ ۳) $(1\,,+\infty)$ ۴) $(2,+\infty)$

تعیین یکنوایی با رسم نمودار تابع | تیپ ۳ | صفحه‌های ۶ تا ۱۰ ریاضی ۳

۱۶. تابع $f(x)=mx^2-nx-k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه‌ی زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است؟

$$\{(m\,,n-1)\,,(0\,,k)\,,(n-1\,,m^2+2m-1)\,,(3k+2,\,2k+1)\}$$

(تعریف یکنوایی و تابع- سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی - دی ۱۴۰۱)**

۱) -1 ۲) $-\sqrt{5}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{5}$

تابع (فصل اول)

۱۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{2}-2x-3$ با دامنهٔ $\{x: |x-1|<2\}$، همواره چگونه است؟ (صفحهٔ ۸- کار در کلاس- مکمل پ) (سراسری ریاضی - ۹۱)

۱) منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

۱۸. حدود a برای آن‌که تابع $y=(a-4)x^{2}-x$ در بازهٔ $[2,+\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟ (صفحهٔ ۸- کار در کلاس- مکمل پ) (آزمون کانون - ۴ دی ۹۴)

۱) $a\geq 4$ ۲) $a\geq \frac{17}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}<a<\frac{17}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}<a<4$

۱۹. تابع $f(x)=(-9+k^{2})x^{3}+5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k، چقدر است؟ (صفحهٔ ۸- کار در کلاس- مکمل پ) **(سراسری تجربی–تیر ۱۴۰۱)**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

۲۰. تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{2}|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است، بیشترین مقدار a کدام است؟ (**منطبق بر کتاب درسی**- صفحهٔ ۱۰- تمرین ۵)

۱) صفر ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۲۱. به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x|x| & , x\neq 0 \\ a & , x=0 \end{cases}$ در R صعودی است؟

(**منطبق بر کتاب درسی**- صفحهٔ ۱۰- تمرین ۵) (آزمون کانون - ۸۹)

۱) $\{0\}$ ۲) $R-\{0\}$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $\{1,-1\}$

۲۲. کدام تابع زیر نزولی است؟ (صفحهٔ ۹- مکمل کار در کلاس ۲) (آزمون کانون – ۸۸)

۱) $y=x+|x|$ ۲) $y=2x+|x|$ ۳) $y=|x|-x$ ۴) $y=x-2|x|$

۲۳. کدام تابع زیر غیر یکنواست؟ (صفحهٔ ۱۰- مکمل تمرین ۵)

۱) $y=[x]$ ۲) $y=[-x]$ ۳) $y=\frac{1}{x}$ ۴) $y=x+\frac{|x|}{x}$

۲۴. کدام تابع در دامنهٔ خود غیریکنواست؟ (صفحهٔ ۱۰- مکمل تمرین ۵)

۱) $y=x+[x]$ ۲) $y=x-[x]$ ۳) $y=[2+x]$ ۴) $y=[-1-x]$

۲۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+2|+|x-1|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟ (صفحهٔ ۹- مکمل کار در کلاس ۲) **(سراسری تجربی – ۹۸)**

۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,+\infty)$

۲۶. تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+1|-|x-2|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟ (صفحهٔ ۹- مکمل کار در کلاس ۲) **(سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۸)**

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(-1,+\infty)$ ۳) $(-1,2)$ ۴) $(2,+\infty)$

۲۷. در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-2|+|x-3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=2x^{2}-x-10$، در چند نقطه مشترک هستند؟

(صفحهٔ ۹- مکمل کار در کلاس ۲) (سراسری تجربی- ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

۲۸. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} -2x-3 & , x<-4 \\ 3 & , -4\leq x<2 \\ ax+b & , x\geq 2 \end{cases}$ در دامنهٔ خود نزولی است، زوج مرتب (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

(**منطبق بر کتاب درسی**- صفحهٔ ۱۰- تمرین ۲)

۱) $(2,-6)$ ۲) $(0,4)$ ۳) $(-3,10)$ ۴) $(-2,5)$

۲۹. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} -3x+1 & ; x\geq 0 \\ ax+a+4 & ; x<0 \end{cases}$ در تمام دامنه‌اش نزولی اکید باشد، مجموعه تمام مقادیر ممکن برای a کدام است؟

(صفحهٔ ۱۰- مکمل تمرین ۲) (آزمون کانون - ۳ دی ۹۵)

۱) $\{a\leq 0\}$ ۲) $\{-3\leq a\leq 0\}$ ۳) $\{-3\leq a<0\}$ ۴) $\{a<0\}$

۳۰. به ازای چند مقدار صحیح a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} (8-a^{2})x-5 & ; x\leq 1 \\ -\frac{1}{2}(3a+4)x+3 & ; x\geq 2 \end{cases}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟ (صفحهٔ ۱۰- مکمل تمرین ۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۵

۳۱. تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x & , 0\leq x\leq 4 \\ x^{2}+6x & , x<0 \end{cases}$ در بازهٔ $[a,b]$ صعودی است. بزرگترین مقدار $b-a$ کدام است؟ (صفحهٔ ۱۰- مکمل تمرین ۲)

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۴

۳۲. به ازای چند مقدار صحیح k تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} -2x & , x<-2 \\ -x^{2}-kx & , x\geq -2 \end{cases}$ در R اکیداً نزولی است؟ (صفحهٔ ۱۰- مکمل تمرین ۲)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) بی‌شمار ۴) ۱

ریاضی ۳ تجربی (پایهٔ دوازدهم) (کد: ۳۱۱۵)

۳۳. تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-\sqrt{x^۲-۴x+۴}$ در بازهٔ $[۰,۳]$ .... (صفحهٔ ۱۰- مرتبط با فعالیت)

۱) یک به یک است. ۲) صعودی است. ۳) نزولی است. ۴) ثابت است.

۳۴. تابع $f(x)=x+(a-۱)|x|$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a، یکنوای غیراکید است؟ (**منطبق بر کتاب درسی**- صفحهٔ ۹- کار در کلاس- ب)

۱) $\{۱,۲\}$ ۲) $(-\infty,۰]$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $\{۰,۲\}$

۳۵. تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-۲)|x|$ در کدام نقطه به طول زیر، از صعودی به نزولی تغییر جهت می‌دهد؟ (صفحهٔ ۱۰- مرتبط با تمرین ۲)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

۳۶. تابع $y=x|x-۴|$ در بازهٔ $[a,b]$ نزولی است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟ (صفحهٔ ۱۰- مرتبط با تمرین ۲) (آزمون کانون – ۱۸ مهر ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|(x+\frac{۱}{x})$ در دامنهٔ خود چگونه است؟ (صفحهٔ ۱۰- مرتبط با تمرین ۲)

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) غیر یک به یک ۴) غیریکنوا

۳۸. تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+۲|x-۲|$ در کدام بازه صعودی است؟ (صفحهٔ ۹- مکمل کار در کلاس ۲)

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $(۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

۳۹. تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x^۲+۱|-|x+۱|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (صفحهٔ ۱۰- مرتبط با تمرین ۲)

۱) $(-\infty,۱)$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ ۴) $(-\infty,\frac{۱}{۲})$

۴۰. اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-a|+|۲x-۴|-۳x$ در بازهٔ $[۲,+\infty)$ هم صعودی و هم نزولی باشد و نمودار تابع f از نقطهٔ $A(۳,-۵)$ عبور کند، آنگاه نمودار تابع f محور xها را در چه طولی قطع می‌کند؟ (صفحهٔ ۱۰- مرتبط با تمرین ۲)

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۴۱. تابع با ضابطهٔ $f(x)=۵|x-m|-۴x$ را به‌صورت $f(x)=\begin{cases}ax-۱ & , x\geq ۱\\ cx+b & , x<۱\end{cases}$ نوشته‌ایم، در بازه‌ای که f اکیداً نزولی است، ضابطهٔ تابع $f(۱-x)$ کدام است؟ (صفحهٔ ۱۰- مرتبط با تمرین ۲)

۱) $-x-۴\ , x<۰$ ۲) $۹x-۴\ , x<۰$ ۳) $-x-۴\ , x>۰$ ۴) $۹x-۴\ , x>۰$

۴۲. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\left(\frac{x+|x|}{۲}\right)^۲-\left(\frac{x-|x|}{۲}\right)^۲$ در R: (صفحهٔ ۹- مرتبط با کار در کلاس)

۱) ابتدا صعودی و سپس نزولی است. ۲) ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۳) همواره صعودی است. ۴) همواره نزولی است.

۴۳. تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-|x-۱|)^۲$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟ (صفحهٔ ۱۰- مرتبط با تمرین ۲)

۱) $(-\infty,\frac{۱}{۲}]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},۱]$ ۳) $(-\infty,۱]$ ۴) $[\frac{۱}{۲},+\infty)$

۴۴. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}x-[x] & , \text{زوج } [x]\\ x+[x] & , \text{فرد } [x]\end{cases}$، در بازهٔ $(-۱,a)$ اکیداً صعودی است، بیشترین مقدار a کدام است؟ (صفحهٔ ۱۰- مرتبط با تمرین ۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۵. اگر $f(x)=۲^{-۲x}+۳$ و $g(x)=۴+\log_۲\frac{۱}{x}$، آنگاه: (**منطبق بر کتاب درسی**- صفحهٔ ۱۰- تمرین ۴)

۱) f صعودی و g نزولی است. ۲) f نزولی و g صعودی است. ۳) f و g صعودی‌اند. ۴) f و g نزولی‌اند.

۴۶. تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $(-\pi,۳\pi)$، چند بار از صعودی به نزولی تغییر جهت می‌دهد؟ (صفحهٔ ۹- مکمل کار در کلاس ۱)

۱) یکبار ۲) دوبار ۳) سه‌بار ۴) چهاربار

۴۷. در کدام بازهٔ زیر، هر دو تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ نزولی‌اند و مقادیر آن‌ها مختلف‌العلامت هستند؟ (صفحهٔ ۹- مشابه کار در کلاس ۱)

۱) $(۰,\frac{\pi}{۲})$ ۲) $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ ۳) $(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$ ۴) $(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$

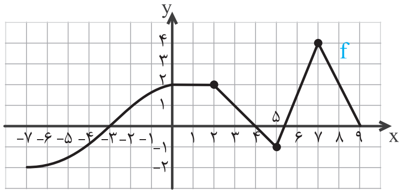
۴۸. تابع $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$، در بازهٔ A با بیشترین طول، صعودی است. طول بازهٔ A کدام است؟ (**منطبق بر کتاب درسی**- صفحهٔ ۹- کار در کلاس- الف)

۱) π ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۴\pi}{۳}$

اعمال روی توابع و یکنوایی | تیپ ۴ | صفحه‌های ۶ تا ۱۰ ریاضی ۳

۴۹. نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. در کدام بازه نمودار تابع $g(x)=-f(x)$، صعودی غیراکید و نامثبت است؟

(منطبق بر کتاب درسی- صفحه‌ی ۱۰- تمرین ۳)



۱) $[۰\,,۵]$
۲) $[۰\,,۴]$
۳) $[-۳\,,۲]$
۴) $[۴\,,۵]$

۵۰. اگر تابع f نسبت به محور yها متقارن و در بازه‌ی $[۰\,,۲]$ اکیداً نزولی باشد، آنگاه تابع $-f$ در بازه‌ی $[-۲\,,۰]$ چگونه است؟ (صفحه‌ی ۷- متن درس)

۱) اکیداً نزولی ۲) اکیداً صعودی ۳) ابتدا صعودی و بعد نزولی ۴) ابتدا نزولی و بعد صعودی

۵۱. اگر تابع $f(x)$ تابع همانی باشد، به ازای کدام ضابطه برای $g(x)$، تابع $(\frac{f}{g})(x)$ در دامنه‌اش اکیداً یکنواست؟

(اعمال روی توابع و یکنوایی- سؤال ترکیبی) (آزمون کانون – ۲۰ فروردین ۱۴۰۰)

۱) $x-|x|$ ۲) $\frac{۱}{x}$ ۳) $|x|$ ۴) $\sqrt{x}$

۵۲. اگر $y=f(x)$ تابعی نزولی اکید و مثبت باشد، کدام تابع زیر الزاماً اکیداً صعودی است؟ (اعمال روی توابع و یکنوایی- سؤال ترکیبی) (آزمون کانون – ۸۹)

۱) $\frac{۱}{f(x)}$ ۲) $\frac{-۱}{f(x)}$ ۳) $f^{۳}(x)$ ۴) $\sqrt{f(x)}$

۵۳. اگر f تابعی با دامنه‌ی $[۰\,,۵]$، نزولی اکید باشد و داشته باشیم $f(۰)=۳$ و $f(۵)=۱$، آنگاه تابع $g(x)=\frac{۱}{f(x)}-f(x)$ روی بازه‌ی $[۰\,,۵]$ چگونه است؟

(اعمال روی توابع و یکنوایی- سؤال ترکیبی)

۱) ابتدا صعودی و بعد نزولی ۲) ابتدا نزولی بعد صعودی ۳) صعودی اکید ۴) نزولی اکید

۵۴. اگر داشته باشیم $f=\{(m\,,۱)\,,(۱\,,m)\,,(۴\,,۴)\}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ و تابع $f+g$ صعودی و $m\geq ۰$ باشد، چند مقدار صحیح برای m قابل قبول است؟

(اعمال روی توابع و یکنوایی- سؤال ترکیبی) (آزمون کانون – ۲ شهریور ۹۷)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۵۵. تابع f روی R اکیداً نزولی است. اگر $f(۳)=۰$ باشد، دامنه‌ی $g(x)=\sqrt{x^{۲}f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

(اعمال روی توابع و یکنوایی- سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی خارج از کشور–تیر ۱۴۰۱)**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۶. در تابع خطی نزولی $f(x)=ax+b$، اگر $f(ax+b)=۴x+۱$ باشد، $f(۱)$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- متن درس)

۱) ۲ ۲) صفر ۳) -۲ ۴) -۳

۵۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-\frac{۱}{|x|+۱}$ در R: (اعمال روی توابع و یکنوایی- سؤال ترکیبی)

۱) ابتدا صعودی و سپس نزولی است.
۲) ابتدا نزولی و سپس صعودی است.
۳) همواره صعودی است.
۴) همواره نزولی است.

۵۸. کمترین مقدار تابع $y=۳^{x^{۲}-۱}$ کدام است؟ (تابع نمایی و یکنوایی- سؤال ترکیبی)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) صفر

۵۹. فرض کنید $[a\,,b]$ برد تابع $f(x)=۲^{-\sqrt{۵\sin^{۲}(x)-۱}}$ باشد. مقدار $a+b$، کدام است؟

(تابع نمایی و یکنوایی- سؤال ترکیبی) **(سراسری ریاضی خارج از کشور –۱۴۰۰)**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۶۰. فرض کنید برد تابع $f(x)=۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^{۲}(x)-۱}}-۲^{\sqrt[۳]{۱-۹\cos^{۲}(x)}}$ به صورت $[a\,,b]$ باشد. مقدار $b-a$، کدام است؟

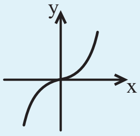
(تابع نمایی و یکنوایی- سؤال ترکیبی) **(سراسری ریاضی –۱۴۰۰)**

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۲۱}{۴}$

پاسخ تشریحی تابع

پاسخ تشریحی (به ترتیب حروف الفبا): حسین حاجیلو
فرهاد حامی، فرزانه دانایی، حمیدرضا رحیم‌خانلو

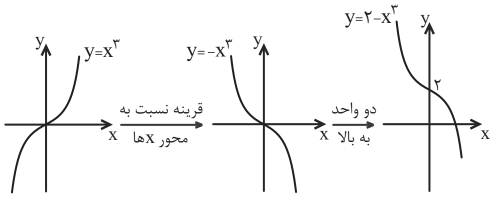
راهبرد حل تیپ (۱)

نمودار تابع درجه‌ی سوم $f(x)=x^۳$ به شکل  است.

با استفاده از خواص انتقال می‌توانیم نمودار تـابع $y=a(x+b)^۳+c$ را رسم کنیم. برای رسم آن ابتدا تابع $y=x^۳$ را $|b|$ واحد بـه راسـت $(b<۰)$ و یا چپ $(b>۰)$ منتقل کرده و سپس عرض هـر نقطـه را a برابر کرده و در انتها نمودار حاصل را $|c|$ واحد به بالا $(c>۰)$ یا پایین $(c<۰)$ انتقال می‌دهیم.

۱. گزینهٔ ۳

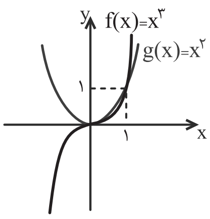
نمودار تابع $y=۲-x^۳$ را رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود نمودار تابع $y=۲-x^۳$ از ناحیه‌ی سـوم عبور نمی‌کند.

۲. گزینهٔ ۲

نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود دو تـابع در نقطه‌ی $(۱,۱)$ متقـاطع‌انـد و بـه ازای $x\in(-\infty,۱]$ نمـــــــودار تـــابع $f(x)=x^۳$ بـــالای نمـــودار تابع $g(x)=x^۲$ قرار نمی‌گیرد، پس حداکثر مقدار a برابر با یک است.

۳. گزینهٔ ۱

ضابطه‌ی تابع g را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$g(x)=x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱=(x+۱)^۳-۱$$

بنابراین اگر نمودار تابع $f(x)=x^۳$ را یک واحد به چپ و سپس یـک واحـد بـه پـایین انتقـال دهـیم، نمـودار تـابع $g(x)=f(x+۱)-۱$ حاصل می‌شود.

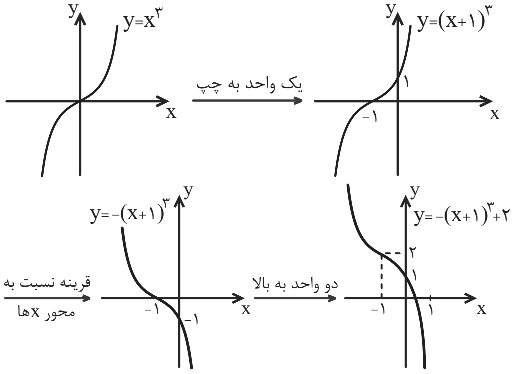
بنابراین از طول هر نقطه یک واحد کم شده و از عرض هر نقطه نیز یک واحد کم می‌شود، پس خواهیم داشت: $f(۲)=۲^۳=۸$

$$A(۲,۸)\xrightarrow{g(x)=f(x+۱)-۱}A'(۲-۱,۸-۱)=(۱,۷)$$

پس نقطه‌ی $(۲,۸)$ روی نمودار تابع f به نقطه‌ی $(۱,۷)$ روی نمودار تابع g تبدیل می‌شود.

۴. گزینهٔ ۱

نمودار تابع $y=۲-(x+۱)^۳$ را با استـفاده از نمـودار تـابع $y=x^۳$ به‌ترتیب زیر رسم می‌کنیم.

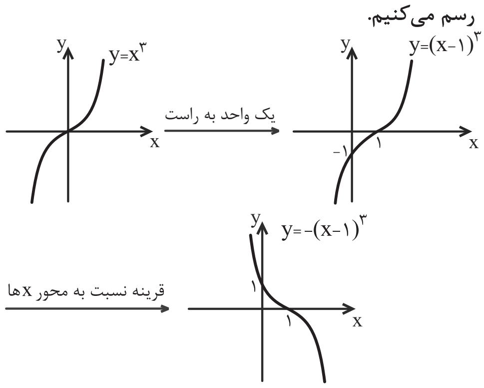


توجه کنید که محل تلاقی تابع با محور xها که با حل معادله‌ی $y=۰$ به‌دست می‌آید برابر با $\sqrt[۳]{۲}-۱$ است که از یک کوچکتر است.

$$y=۰\Rightarrow ۲-(x+۱)^۳=۰\Rightarrow(x+۱)^۳=۲$$
$$\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{۲}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۲}-۱<۱$$

۵. گزینهٔ ۳

نمودار تابع $f(x)=-(x-۱)^۳+a$ را به کمک انتقـال نمـودار تـابع $y=x^۳$ رسم می‌کنیم.

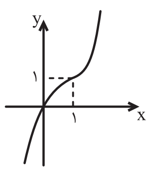


اگر $a\ge ۰$ باشد، نمودار a واحد به بالا منتقل مـی‌شـود و از ناحیـه‌ی سوم عبور نخواهد کرد. اگر $a<۰$ باشد و نمودار حداکثر تا یک واحد به پایین منتقل شود، از ناحیه سوم عبور نمـی‌کنـد، پـس حـدود a بـه صورت $a\ge -۱$ خواهد بود.

۶. گزینهٔ ۲

ابتدا ضابطه‌ی تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x-۱+۱=(x-۱)^۳+۱$$



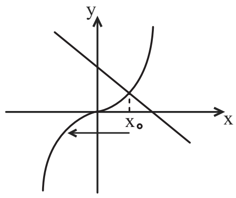
برای رسـم نمـودار f، کـافی اسـت نمـودار تـابع $y=x^۳$ را یک واحد به راست و سپس یک واحد به بالا انتقال دهیم. با توجه به نمودار روبه‌رو، تابع f از نواحی دوم و چهارم عبور نمـی‌کنـد. توجـه کنید که تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۷. گزینهٔ ۴

ابتدا ضابطه‌ی تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^۳\xrightarrow{\text{۴ واحد به پایین}}y=x^۳-۴$$
$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}}g(x)=(x-۲)^۳-۴$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^۳=(x-۲)^۳-۴$$
$$\Rightarrow x^۳=x^۳+۳(x^۲)(-۲)+۳(x)(-۲)^۲+(-۲)^۳-۴$$
$$\Rightarrow x^۳=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸-۴$$
$$\Rightarrow ۶x^۲-۱۲x+۱۲=۰\Rightarrow x^۲-۲x+۲=۰$$
$$\Rightarrow \Delta<۰ \text{ فاقد جواب}$$

۸. گزینهٔ ۱

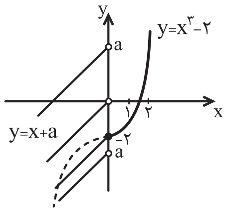


بــا رســم نــمــودار دو تــابــع $y_۱=۳-۲x$ و $y_۲=x^۳$، دیده مــی‌شــود کــه دو نــمــودار یــکــدیــگر را در یـــک نقطــه بــه‌طــول $x_{\circ}$ قطــع مــی‌کــننــد، لذا معادله‌ی: $x^۳=۳-۲x \rightarrow x^۳+۲x-۳=\circ$ تنها یک ریشه دارد. چون مجموع ضرایب این معادله صفر است، پس ریشـــه‌ی آن ۱ اســـت در نتیجـــه $x_{\circ}=۱$ و تـــابع $y=x^۳$، در بازه‌ی $(-\infty , ۱)$ پـایین خط $y=۳-۲x$ اسـت. بـنـابراین بیشـترین مقدار a برابر یک است.

۹. گزینهٔ ۴

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:
$$f(x)=\begin{cases} x^۳-۲ & x\geq \circ \\ x+a & x<\circ \end{cases}$$

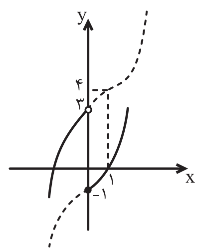
برای رسم ضابطه‌ی بالایی تابع f، نمودار تابع $y=x^۳$ را دو واحد به پایین منتقل کرده، سپس قسمت چپ محور y ها را حذف می‌کنیم.



با توجه به نمودار، برای آنکه برد تـابع برابـر بـا R شـود، بایـد $a\geq -۲$ باشـد، پـس کـمتـرین مقدار a برابر با -۲ است.

۱۰. گزینهٔ ۲

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. برای رسم ضابطه‌ی بالایی، کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به پایین انتقـال دهـیم. بـرای رسـم ضابطه‌ی پایینی، کافی است نمودار تابع $y=x^۳$ را یک واحد به راست و سپس ۴ واحد به بالا انتقال دهیم.



با توجه به نمودار، خـط $y=k$ اگـــر k در محـــــدوده‌ی $-۱\leq k<۳$ باشـد، دو نقطـه‌ی تلاقی با نمودار f خواهد داشت و در نتیجه معادله‌ی $f(x)=k$ دو جواب خواهد داشت.

پس به ازای مقادیر $k=-۱ , \circ , ۱ , ۲$، معادله دو جواب دارد.

راهبرد حل تیپ (۲)

تابع f روی یک بازه با حرکت روی نمودار از چپ به راست:

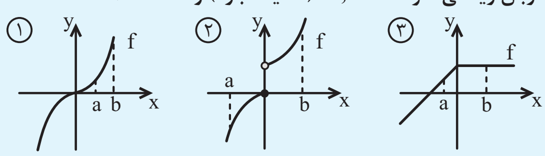
① اکیداً صعودی است هرگاه همواره رو به بالا حرکت کنیم. (شکل‌های ۱ و ۲)

② صعودی است هرگاه رو به پایین حرکت نکنیم. (شکل ۳)

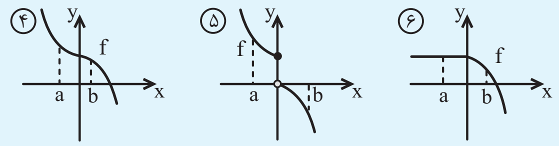
③ اکیداً نزولـی اسـت هرگـاه همـواره رو بـه پـایین حرکـت کنـیم. (شکل‌های ۴ و ۵)

④ نزولی است هرگاه رو به بالا حرکت نکنیم. (شکل ۶)

به زبان ریاضی اگر $a , b\in I$ (I یک بازه) و $a<b$ آنگاه:



$f(a)<f(b)$ اکیداً صعودی	$f(a)<f(b)$ اکیداً صعودی	$f(a)\leq f(b)$ صعودی غیراکید



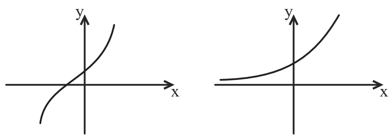
$f(a)>f(b)$ اکیداً نزولی	$f(a)>f(b)$ اکیداً نزولی	$f(a)\geq f(b)$ نزولی غیراکید

۱۱. گزینهٔ ۳

گزینه‌ی (۳) نادرست است زیرا در بازه‌ی $[۳ , ۴)$ با حرکت روی نمودار از چپ به راست همواره رو به بالا خواهیم رفت، ولی در نقطـه‌ی $x=۴$ رو به پایین می‌رویم، پس در بـازه‌ی $[۳ , ۴]$ تـابع نـه صـعودی است و نه نزولی.

۱۲. گزینهٔ ۱

اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، محور x ها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند. به شکل‌های زیر توجه کنید.



۱۳. گزینهٔ ۱

می‌خواهیم رابطه‌ی f یک تابع اکیداً صعودی باشد، چون $۲<۱$، پس باید $f(۱)<f(۲)$ باشد:

$$m^۲-۴m<m-۴ \Rightarrow m^۲-۵m+۴<\circ$$
$$\Rightarrow (m-۱)(m-۴)<\circ \Rightarrow ۱<m<۴$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار صحیح } m} m=۲ , m=۳$$

$$\xrightarrow{m=۲} f=\{(۱,-۴),\underline{(۲,-۲)},\underline{(۲,۶)},(۳,۸)\} \rightarrow \text{تابع نیست.}$$

$$\xrightarrow{m=۳} f=\{(۱,-۳),(۲,-۱),\underline{(۳,۶)},\underline{(۳,۸)}\} \rightarrow \text{تابع نیست.}$$

پس هیچ m ای وجود ندارد.

۱۴. گزینهٔ ۱

تابع f اکیداً نزولی است، پس در نامساوی زیـر، بـا برداشـتن f، جهت نامساوی تغییر می‌کند:

$$f(m^۲-m-۵)<f(-۳+۲m-m^۲)$$
$$\xrightarrow[\text{جهت نامساوی تغییر می‌کند}]{f \text{ اکیداً نزولی}} m^۲-m-۵>-۳+۲m-m^۲$$
$$\Rightarrow ۲m^۲-۳m-۲>\circ \xrightarrow{\times ۲} ۴m^۲-۶m-۴>\circ$$
$$\Rightarrow (۲m)^۲-۳(۲m)-۴>\circ \Rightarrow (۲m-۴)(۲m+۱)>\circ$$
$$\xrightarrow{\div ۲} (m-۲)(۲m+۱)>\circ \Rightarrow m>۲ \text{ یا } m<-\frac{۱}{۲} \quad (*)$$

از آنجـا کـه دامنـــه‌ی تـابع f، مقـادیر منفـی اسـت، پـس بایـد عبارت‌های $m^۲-m-۵$ و $-m^۲+۲m-۳$ منفی باشند. بـا توجـه به حدود به‌دست آمده‌ی $(*)$، بـه ازای $m>۲$ (مقـادیر صحیح m)، عبارت $m^۲-m-۵$ مثبت می‌شود، پس قابل قبول نیست.

برای $m<-\frac{۱}{۲}$، از آن‌جا که مقادیر صحیح m را می‌خواهیم، فقـط بـه ازای $m=-۱$ هر دو عبارت منفی می‌شوند، پس فقط یک عدد صحیح داریم. توجه کنید که بـه ازای اعـداد صـحیح کوچـک‌تـر از $m=-۱$ یعنی -۲، -۳ و $\cdots$ عبارت $m^۲-m-۵$ همواره مثبت خواهد بود.

۱۵. گزینهٔ ۴

از آنجا که $A(۱,۳)\in f$، پس $f(۱)=۳$، بنابراین خواهیم داشت:

$$f(۱-۳f(x))<۳ \xrightarrow{f(۱)=۳} f(۱-۳f(x))<f(۱)$$

تابع f اکیداً نزولی است، پس $f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow x_1<x_2$، یعنی در برداشتن f از طرفین نامساوی، جهت نامساوی تغییر می‌کند و داریم:

$$۱-۳f(x)>۱ \Rightarrow -۳f(x)>۰ \Rightarrow f(x)<۰$$

از طرفی تابع f محور xها را در نقطه‌ای به‌طول ۲ قطع می‌کند، بنابراین $f(۲)=۰$، پس:

$$f(x)<۰ \xrightarrow{f(۲)=۰} f(x)<f(۲) \xrightarrow{\text{f نزولی اکید}} x>۲$$

در نتیجه $x\in(۲,+\infty)$.

راهبرد حل تیپ (۳)

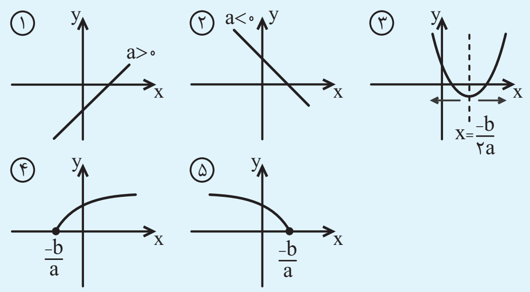
با رسم نمودار یک تابع، می‌توان در مورد یکنوایی آن نظر داد. از میان توابع شناخته شده:

① توابع خطی به شکل $f(x)=ax+b$، اگر $a>۰$ اکیداً صعودی و $a<۰$ اکیداً نزولی‌اند. (شکل‌های ۱ و ۲).

② تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، در هر یک از بازه‌های $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$ و $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ اکیداً یکنواست ولی در R غیریکنواست. (شکل ۳)

③ تابع $f(x)=\sqrt{ax+b}$، اگر $a>۰$، اکیداً صعودی و اگر $a<۰$، اکیداً نزولی است. (شکل‌های ۴ و ۵)

④ توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ غیریکنوا هستند.



۱۶. گزینهٔ ۳

فقط تابع ثابت، هم صعودی و هم نزولی است. برای اینکه تابع $f(x)=mx^2-nx-k$، تابع ثابت شود، باید $m=۰$ و $n=۰$ باشد.

بنابراین با جایگذاری این مقادیر در مجموعه‌ی زیر خواهیم داشت:

$$\{(m,n-۱),(۰,k),(n-۱,m^2+۲m-۱),(۳k+۲,۲k+۱)\}$$

$$\xrightarrow{m=۰,\ n=۰}\{(۰,-۱),(۰,k),(-۱,-۱),(۳k+۲,۲k+۱)\}$$

برای اینکه مجموعه‌ی فوق تابع باشد، باید $(۰,-۱)=(۰,k)$ باشد، در نتیجه: $k=-۱$، بنابراین:

$$f(\sqrt{۵})=-k=-(-۱)=۱$$

۱۷. گزینهٔ ۱

دامنه: $|x-۱|<۲$

چون طرفین نامعادله نامنفی هستند می‌توانیم به توان ۲ برسانیم:

$$\Rightarrow (x-۱)^2<۴$$

$$\Rightarrow x^2-۲x+۱<۴ \Rightarrow x^2-۲x-۳<۰ \Rightarrow f(x)<۰$$

بنابراین تابع f همواره منفی است. محور تقارن $x=۱$ است، با توجه به دامنه که بازه‌ی $(-۱,۳)$ است، تابع ابتدا نزولی و بعد صعودی است.

۱۸. گزینهٔ ۲

در تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$، اگر $a>۰$ باشد، تابع در بازه‌ی $[\frac{-b}{۲a},+\infty)$ صعودی و اگر $a<۰$ باشد، در بازه‌ی $(-\infty,\frac{-b}{۲a}]$ صعودی است. بنابراین برای اینکه تابع $y=(a-۴)x^2-x$ در بازه‌ی $[۲,+\infty)$ صعودی باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

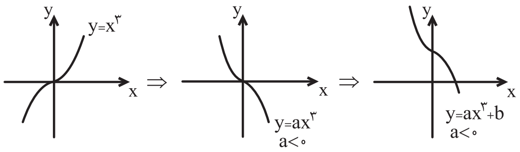
$$\begin{cases}(۱)\ x^2\ \text{ضریب}>۰ \Rightarrow a-۴>۰\Rightarrow a>۴ & (I)\\ (۲)\ \frac{-b}{۲a}\le ۲ \Rightarrow \frac{-(-۱)}{۲(a-۴)}\le ۲ & \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲(a-۴)\ge \frac{۱}{۲}\Rightarrow a-۴\ge\frac{۱}{۴}\Rightarrow a\ge\frac{۱۷}{۴}\qquad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) داریم: $a\ge\frac{۱۷}{۴}$.

۱۹. گزینهٔ ۱

تابع $y=x^3$ اکیداً صعودی است، پس اگر a عددی منفی باشد، تابع $y=ax^3$ و در نتیجه تابع $y=ax^3+b$ اکیداً نزولی است.



پس برای آنکه تابع $f(x)=(-۹+k^2)x^3+۵$ اکیداً نزولی باشد، باید ضریب x^3 منفی باشد:

$$-۹+k^2<۰ \Rightarrow (k-۳)(k+۳)<۰\Rightarrow -۳<k<۳$$

$$\Rightarrow k\ \text{مجموعه‌ی مقادیر صحیح}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

بنابراین مجموع مقادیر صحیح قابل قبول برای k برابر است با:

$$-۲-۱+۰+۱+۲=۰$$

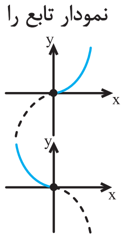
۲۰. گزینهٔ ۱

نمودار تابع را با ضابطه‌بندی رسم می‌کنیم.

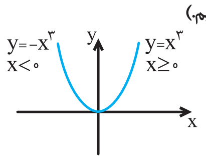
$$f(x)=\begin{cases}x^3 & ,\ x\ge۰\\ -x^3 & ,\ x<۰\end{cases}$$

(نمودار: سمت راست نمودار $(y=x^3)$)

(نمودار: ابتدا $y=-x^3$ را رسم کرده و سپس سمت چپ آن را در نظر می‌گیریم.)



$\Rightarrow$

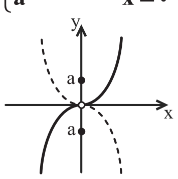


با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع در بازه‌ی $(-\infty,۰]$ نزولی است، پس بیشترین مقدار a، صفر است.

۲۱. گزینهٔ ۱

ضابطه‌ی تابع را به صورت زیر نوشته و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x|x| & x\ne۰\\ a & x=۰\end{cases}=\begin{cases}x(x)=x^2 & ,\ x>۰\\ x(-x)=-x^2 & ,\ x<۰\\ a & ,\ x=۰\end{cases}$$

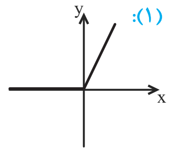


با توجه به نمودار، برای اینکه تابع صعودی باشد، a فقط می‌تواند صفر باشد.

۲۲. گزینهٔ ۳

ابتدا هر یک از توابع را به صورت دو ضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آنها را رسم کرده و با توجه به نمودار صعودی یا نزولی بودن آنها را مشخص می‌کنیم:

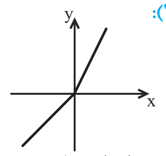
گزینهٔ (۱):



$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & , \quad x \geq ۰ \\ ۰ & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

با توجه به نمودار، این تابع صعودی است.

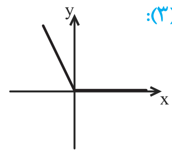
گزینهٔ (۲):



$$y = ۲x + |x| = \begin{cases} ۳x & , \quad x \geq ۰ \\ x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

با توجه به نمودار، این تابع صعودی است.

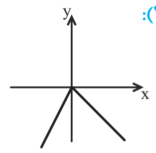
گزینهٔ (۳):



$$y = |x| - x = \begin{cases} ۰ & , \quad x \geq ۰ \\ -۲x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

با توجه به نمودار، این تابع نزولی است.

گزینهٔ (۴):



$$y = x - ۲|x| = \begin{cases} -x & , \quad x \geq ۰ \\ ۳x & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

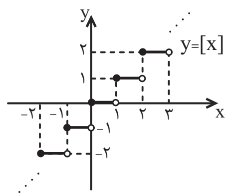
با توجه به نمودار، این تابع نه صعودی است نه نزولی (غیریکنواست).

۲۳. گزینهٔ ۳

نمودار هر یک از توابع را رسم کرده و یکنوایی آنها را تعیین می‌کنیم:

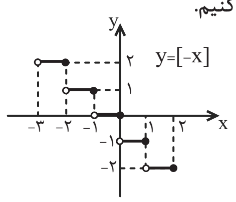
گزینهٔ (۱):

با توجه به نمودار، تابع $y = [x]$ صعودی است، پس یکنواست.



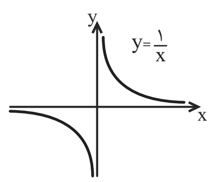
گزینهٔ (۲): برای رسم نمودار تابع $y = [-x]$، قرینهٔ نمودار $y = [x]$ را نسبت به محور y ها رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار، تابع $y = [-x]$ نزولی است، پس یکنواست.

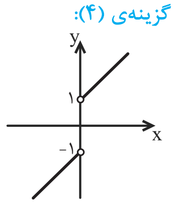


گزینهٔ (۳):

با توجه به نمودار، تابع $y = \frac{۱}{x}$ در دامنهٔ خود یعنی $R - \{۰\}$ غیریکنواست.



گزینهٔ (۴):



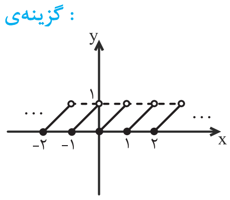
$$y = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + \frac{x}{x} = x + ۱ & x > ۰ \\ x + \frac{-x}{x} = x - ۱ & x < ۰ \end{cases}$$

با توجه به نمودار، تابع $y = x + \frac{|x|}{x}$ صعودی است، پس یکنواست.

۲۴. گزینهٔ ۲

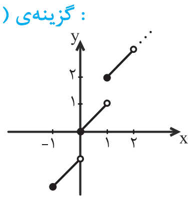
نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

گزینهٔ (۲):



نه صعودی و نه نزولی (غیریکنوا) است.

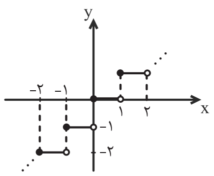
گزینهٔ (۱):



صعودی است.

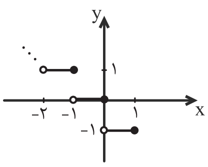
گزینهٔ (۳): $y = [x] + ۲$

نمودار $y = [x]$ مطابق شکل زیر است:



صعودی است $y = [x] + ۲ \Leftarrow$ صعودی است.

گزینهٔ (۴): با قرینه‌کردن نمودار تابع $y = [x]$ نسبت به محور y ها، نمودار تابع $y = [-x]$ به‌دست می‌آید.



نزولی است $y = -۱ + [-x] \Leftarrow$ نزولی است.

۲۵. گزینهٔ ۱

تابع $f(x) = |x + ۲| + |x - ۱|$ را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x + ۲ + x - ۱ = ۲x + ۱ & , \quad x > ۱ \\ x + ۲ - (x - ۱) = ۳ & , \quad -۲ \leq x \leq ۱ \\ -(x + ۲) - (x - ۱) = -۲x - ۱ & , \quad x < -۲ \end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ تابع، اگر $x < -۲$، آنگاه تابع f، یک تابع خطی با شیب منفی است و می‌دانیم توابع خطی با شیب منفی اکیداً نزولی هستند، بنابراین تابع در بازهٔ $(-\infty , -۲)$ اکیداً نزولی است.

توجه کنید که تابع در بازهٔ $(-\infty , ۱)$ نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

۲۶. گزینهٔ ۳

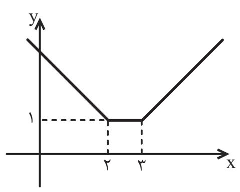
ابتدا تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |x + ۱| - |x - ۲|$$
$$= \begin{cases} x + ۱ - (x - ۲) = ۳ & , \quad x > ۲ \\ x + ۱ + (x - ۲) = ۲x - ۱ & , \quad -۱ \leq x \leq ۲ \\ -(x + ۱) + (x - ۲) = -۳ & , \quad x < -۱ \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید در بازهٔ $(-۱ , ۲)$، تابع f یک تابع خطی با شیب مثبت است که می‌دانیم توابع خطی با شیب مثبت اکیداً صعودی هستند.

۲۷. گزینهٔ ۱

نمودار تابع $f(x) = |x - ۲| + |x - ۳|$ به صورت زیر است.



ملاحظه می‌شود که این تابع به ازای $x < ۲$ اکیداً نزولی است که در این صورت عبارت‌های داخل هر دو قدرمطلق منفی هستند. بنابراین:

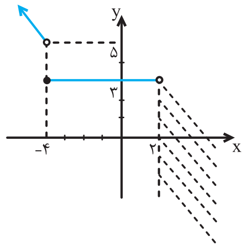
$$x < ۲ : f(x) = -(x - ۲) - (x - ۳) = -۲x + ۵$$

حال باید بررسی کنیم معادله‌ی $\underbrace{2x^2-x-10}_{g(x)}=\underbrace{-2x+5}_{f(x);x<2}$ چند جواب در $x<2$ دارد.

$$2x^2+x-15=0 \Rightarrow (2x-5)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2}>2 & \times \\ x=-3<2 & \checkmark \end{cases}$$

۲۸. گزینهٔ ۴

ابتدا نمودار تابع را برای بازه‌ی $(-\infty , 2)$ رسم می‌کنیم، سپس شرایط را برای بازه‌ی $[2 , +\infty)$ بررسی می‌کنیم. اگر شیب خط $y=ax+b$ مثبت باشد، تابع غیر یکنوا خواهد شد، پس باید $a\le 0$ و در نتیجه یکی از گزینه‌های ۲ یا ۳ یا ۴ می‌توانند درست باشند. از آنجایی که در تابع نزولی رو به بالا نخواهیم رفت، پس گزینه‌ای مورد قبول است که برد آن کوچکتر یا مساوی ۳ باشد (یا نمودارش را بکشید)، پس گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



گزینه‌ی (۲): $\xrightarrow{a=0\ ,\ b=4} y_2=4\ ،\ x\ge 2$ غقغ

گزینه‌ی (۳): $\xrightarrow{a=-3\ ,\ b=10} y_3=-3x+10\ ،\ x\ge 2$

$x\ge 2 \Rightarrow -3x\le -6 \Rightarrow -3x+10\le 4$

$\Rightarrow y_3\le 4$ غقغ

گزینه‌ی (۴): $\xrightarrow{a=-2\ ,\ b=5} y_4=-2x+5\ ،\ x\ge 2$

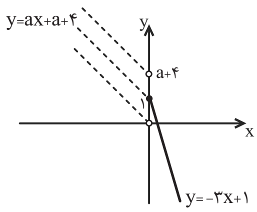
$-2x\le -4 \Rightarrow -2x+5\le 1 \Rightarrow y\le 1$ ✓

۲۹. گزینهٔ ۳

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} -3x+1 & , \quad x\ge 0 \\ ax+a+4 & , \quad x<0 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، برای آنکه تابع در تمام دامنه‌اش اکیداً نزولی باشد، باید شیب خط $y=ax+a+4$ منفی باشد و عرض از مبدأ آن نیز بزرگتر یا مساوی یک باشد، بنابراین:



$$\begin{cases} \text{شیب} <0 \Rightarrow a<0 \\ \text{عرض از مبدأ} \ge 1 \xrightarrow[y\ge 1]{x=0} a+4\ge 1 \Rightarrow a\ge -3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} -3\le a<0$$

۳۰. گزینهٔ ۳

در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} (8-a^2)x-5 & ; \quad x\le 1 \\ -\frac{1}{2}(3a+4)x+3 & ; \quad x\ge 2 \end{cases}$، هر دو ضابطه‌ی بالایی و پایینی یک تابع خطی هستند، بنابراین برای آنکه تابع اکیداً نزولی باشد باید اولاً شیب هر دو خط منفی باشد:

$$\begin{cases} 8-a^2<0 \Rightarrow a^2>8 \Rightarrow a>\sqrt{8} \ \text{یا}\ a<-\sqrt{8} & \text{(I)} \\ -\frac{1}{2}(3a+4)<0 \Rightarrow 3a+4>0 \Rightarrow a>-\frac{4}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{(I)}\cap\text{(II)}} a>\sqrt{8} \quad (*)$$

ثانیاً با توجه به ضابطه‌ها، تابع وقتی اکیداً نزولی است که از $2>1$ (مرز دامنه‌ها) نتیجه بگیریم: $f(1)>f(2)$ (می‌توانید شکل فرضی رسم کنید.)، پس:

$$f(1)>f(2) \Rightarrow (8-a^2)-5>-\frac{1}{2}(3a+4)(2)+3$$

$$\Rightarrow 3-a^2>-3a-4+3 \Rightarrow a^2-3a-4<0$$

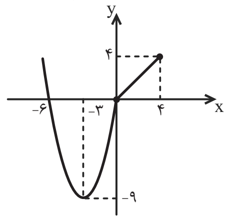
$$\Rightarrow (a-4)(a+1)<0 \Rightarrow -1<a<4 \quad (**)$$

از اشتراک $(*)$ و $(**)$ داریم: $\sqrt{8}<a<4$ که شامل عدد صحیح ۳ است.

۳۱. گزینهٔ ۳

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 4 \\ x(x+6) & x<0 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار، بزرگترین بازه‌ای که تابع f در آن صعودی است بازه‌ی $[-3 , 4]$ است.



بنابراین: $a=-3\ ,\ b=4 \Rightarrow b-a=4-(-3)=7$

۳۲. گزینهٔ ۴

ضابطه‌ی پایینی تابع، یک تابع درجه‌ی دوم است، می‌دانیم توابع درجه‌ی دوم با دهانه‌ی رو به پایین در بازه‌های مساوی یا بزرگتر از رأس، نزولی هستند، یعنی در بازه‌های $x\ge x_S$، پس رأس نباید در دامنه‌ی ضابطه‌ی پایینی باشد:

ضابطه‌ی پایینی: $y=-x^2-kx \quad , \quad x\ge -2$

طول رأس: $x_S=-\frac{-k}{2(-1)}=-\frac{k}{2} \xrightarrow{x_S\le -2} -\frac{k}{2}\le -2$

$$\Rightarrow \frac{k}{2}\ge 2 \Rightarrow k\ge 4 \quad \text{(I)}$$

از طرفی مقدار تابع در $x=-2$ از ضابطه‌ی پایینی باید کوچکتر یا مساوی مقدار تابع در $x=-2$ از ضابطه‌ی بالایی باشد:

$$-(-2)^2-k(-2)\le -2(-2) \Rightarrow -4+2k\le 4$$

$$\Rightarrow 2k\le 8 \Rightarrow k\le 4 \quad \text{(II)}$$

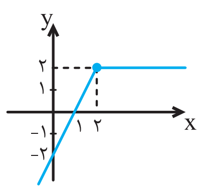
از اشتراک (I) و (II)، داریم: $k=4$.

۳۳. گزینهٔ ۲

تابع را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=x-\sqrt{(x-2)^2}=x-|x-2|$$

$$f(x)=\begin{cases} 2 & , \quad x\ge 2 \\ 2x-2 & , \quad x<2 \end{cases}$$



با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع صعودی است ولی غیراکید.

۳۴. گزینهٔ ۴

تابع را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax & , \quad x\ge 0 \\ (2-a)x & , \quad x<0 \end{cases}$$

یک تابع یکنوای غیراکید پیوسته در نمودارش دارای تابع ثابت است، پس دو حالت ممکن است:

$$(1)\ \ a=0 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\ge 0 \\ 2x & , \quad x<0 \end{cases}$$

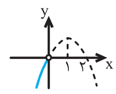
$$(2)\ a=2 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2x & , \ x\ge 0 \\ 0 & , \ x<0 \end{cases}$$

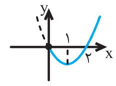
بنابراین مجموعه جواب a، مجموعه‌ی $\{0, 2\}$ خواهد بود.

۳۵. گزینهٔ ۲

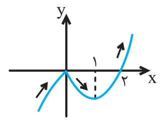
نمودار تابع را رسم می‌کنیم، برای این منظور تابع را به یک تابع چندضابطه‌ای با تعیین علامت قدرمطلق تبدیل می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-2) & , \ x<0 \\ x(x-2) & , \ x\ge 0 \end{cases}$$





$\Rightarrow$

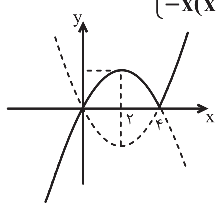


با توجه به نمودار دیده می‌شود که در $x=0$ تابع از صعودی به نزولی تغییر علامت می‌دهد.

۳۶. گزینهٔ ۴

تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و سپس رسم می‌کنیم:

$$y=x|x-4|=\begin{cases} x(x-4) & , \ x\ge 4 \\ -x(x-4) & , \ x<4 \end{cases}$$



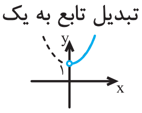
با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی $[2, 4]$ نزولی است، بنابراین:

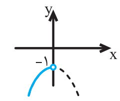
$$b-a=4-2=2$$

۳۷. گزینهٔ ۱

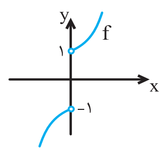
با تبدیل تابع به یک تابع چندضابطه‌ای و رسم آن داریم:

$$f(x)=\begin{cases} x(x+\frac{1}{x})=x^2+1 & , \ x>0 \\ -x(x+\frac{1}{x})=-x^2-1 & , \ x<0 \end{cases}$$





$\Rightarrow$



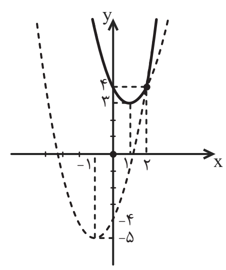
با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع در دامنه‌ی خود صعودی است.

۳۸. گزینهٔ ۲

تابع $f(x)=x^2+2|x-2|$ را با تعیین علامت قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای نوشته و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2(x-2)=x^2+2x-4 & , \ x\ge 2 \\ x^2+2(-(x-2))=x^2-2x+4 & , \ x<2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} (x+1)^2-5 & , \ x\ge 2 \\ (x-1)^2+3 & , \ x<2 \end{cases}$$

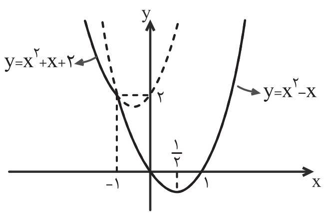


با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $[1, +\infty)$ صعودی است، بنابراین در بازه‌ی $(1, +\infty)$ نیز صعودی است.

۳۹. گزینهٔ ۴

نمودار تابع $f(x)=|x^2+1|-|x+1|$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم اگر $A>0$ باشد، آنگاه $|A|=A$. با توجه به اینکه عبارت x^2+1 همواره مثبت است، داریم:

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+1-(x+1)=x^2-x & , \ x\ge -1 \\ x^2+1-(-(x+1))=x^2+x+2 & , \ x<-1 \end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $(-\infty, \frac{1}{2})$ اکیداً نزولی است.

۴۰. گزینهٔ ۱

تابع $f(x)=|x-a|+|2x-4|-3x$، از نقطه‌ی $A(3, -5)$ عبور می‌کند، پس $f(3)=-5$، بنابراین:

$$f(3)=|3-a|+|6-4|-9=-5 \Rightarrow |3-a|=2$$

از طرفی تابع در بازه‌ی $[2, +\infty)$ هم صعودی و هم نزولی است، پس در این بازه یک تابع ثابت است و باید در ضابطه‌ی تابع با برداشتن قدرمطلق‌ها، x ها حذف شوند، در نتیجه در بازه‌ی $[2, +\infty)$ باید، $x-a\ge 0$ یا $x\ge a$ باشد، پس $a\le 2$ و نتیجه می‌گیریم که عبارت $3-a$ در معادله‌ی بالا، همواره مثبت بوده و خواهیم داشت:

$$|3-a|=2 \Rightarrow 3-a=2 \Rightarrow a=1$$

برای یافتن محل تقاطع تابع با محور x ها باید معادله‌ی $f(x)=0$ را حل کنیم:

$$f(x)=0 \Rightarrow f(x)=|x-1|+|2x-4|-3x=0$$

با بازه‌بندی داریم:

$$1\le x\le 2 \Rightarrow x-1-(2x-4)-3x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{4}$$ غ ق ق

$$x\le 1 \Rightarrow -(x-1)-(2x-4)-3x=0 \Rightarrow x=\frac{5}{6}$$

۴۱. گزینهٔ ۴

یک تابع قدرمطلقی را با استفاده از تعیین علامت ریشه‌ی داخل قدرمطلق، می‌توانیم به‌شکل یک تابع دوضابطه‌ای بنویسیم. با توجه به تابع دوضابطه‌ای داده شده، مرز ناحیه، همان ریشه‌ی داخل قدرمطلق است، بنابراین $x=m=1$، حال تابع دوضابطه‌ای را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=5|x-1|-4x=\begin{cases} 5(x-1)-4x & , \ x\ge 1 \\ -5(x-1)-4x & , \ x<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x-5 & , \ x\ge 1 \\ -9x+5 & , \ x<1 \end{cases}$$

تابع f در ضابطه‌ی پایینی اکیدا نزولی است، حال $f(1-x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\xrightarrow{x\to 1-x} f(1-x)=\begin{cases} (1-x)-5 & , \ 1-x\ge 1 \\ -9(1-x)+5 & , \ 1-x<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1-x)=\begin{cases} -x-4 & , \ x\le 0 \\ 9x-4 & , \ x>0 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع $f(1-x)$، در بازه‌ای که f اکیدا نزولی است، برابر است با:

$$9x-4, \ x>0$$

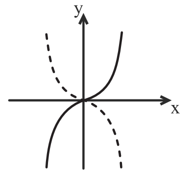
۴۲. گزینهٔ ۳

تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و سپس رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\left(\frac{x+|x|}{۲}\right)^۲-\left(\frac{x-|x|}{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\left(\frac{x+x}{۲}\right)^۲-\left(\frac{x-x}{۲}\right)^۲ & , x\geq ۰\\ \left(\frac{x+(-x)}{۲}\right)^۲-\left(\frac{x-(-x)}{۲}\right)^۲ & , x<۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۲ & , x\geq ۰\\ -x^۲ & , x<۰\end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع f همواره صعودی است.

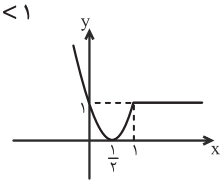
۴۳. گزینهٔ ۱

ابتدا تابع f را به صورت دوضابطه‌ای نوشته، سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=(x-|x-۱|)^۲$$

$$f(x)=\begin{cases}(x-(x-۱))^۲ & , x\geq ۱\\ (x-(-(x-۱)))^۲ & , x<۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}۱ & , x\geq ۱\\ (۲x-۱)^۲ & , x<۱\end{cases}$$

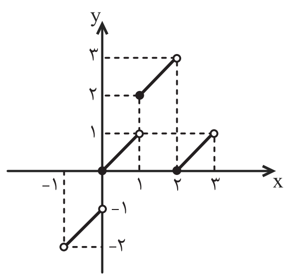


با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $(-\infty , \frac{۱}{۲}]$ نزولی است.

۴۴. گزینهٔ ۱

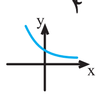
ضابطه‌ی تابع را برای $x>-۱$ می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

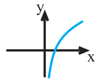
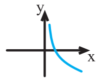
$$f(x)=\begin{cases}-۱<x<۰ \xrightarrow[\text{ضابطه‌ی پایینی}]{[x]=-۱} x-۱\\ ۰\leq x<۱ \xrightarrow[\text{ضابطه‌ی بالایی}]{[x]=۰} x\\ ۱\leq x<۲ \xrightarrow[\text{ضابطه‌ی پایینی}]{[x]=۱} x+۱\\ ۲\leq x<۳ \xrightarrow[\text{ضابطه‌ی بالایی}]{[x]=۲} x-۲\end{cases}$$



با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $(-۱ , ۲)$ اکیداً صعودی است و بیشترین مقدار a برابر ۲ است.

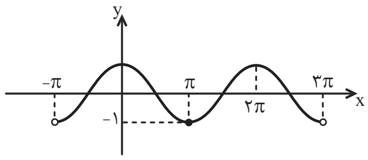
۴۵. گزینهٔ ۴

ابتدا توجه کنید که $۲^{-۲x}=(\frac{۱}{۴})^x$، پس $f(x)=(\frac{۱}{۴})^x+۳$، تابع $y=(\frac{۱}{۴})^x$ با نمودار  نزولی و انتقال عمودی نیز بر یکنوایی بی‌اثر است، پس تابع f نزولی است.

در تابع g، ابتدا دقت کنید که $\log_{\frac{۱}{۲}}^x=\log_{۲^{-۱}}^x=-\log_۲^x$، پس $g(x)=-\log_۲^x+۴$. تابع $y=\log_۲^x$ به شکل  صعودی است، پس تابع $y=-\log_۲^x$ که قرینه‌ی آن نسبت به محور xهاست به شکل  نزولی است و انتقال عمودی هم بر یکنوایی بی‌اثر است، پس تابع g نزولی است.

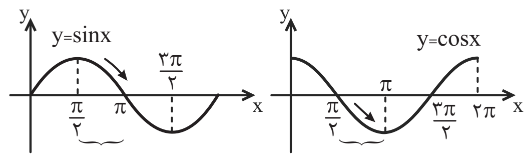
۴۶. گزینهٔ ۲

با رسم نمودار تابع $y=\cos x$ در بازه‌ی $(-\pi , ۳\pi)$، دیده می‌شود که نمودار دو بار در نقاط $x=۰$ و $x=۲\pi$ از صعودی به نزولی تغییر جهت می‌دهد.



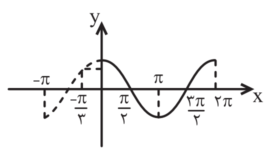
۴۷. گزینهٔ ۲

با توجه به نمودار دو تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$، دیده می‌شود که در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲} , \pi)$، مقدار دو تابع مختلف‌العلامت و مقادیر هر دو کاهش می‌یابند.

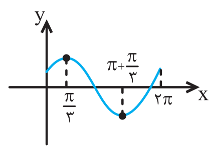


۴۸. گزینهٔ ۲

به نمودار تابع $y=\cos x$ توجه کنید. برای رسم نمودار تابع $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ باید نمودار $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{۳}$ واحد به راست انتقال دهیم. (برای رسم محور yها را مطابق شکل در ابتدا خط $x=\frac{-\pi}{۳}$ قرار دهید و شکل را رسم کنید.)



نقاطی که بیشترین و کمترین مقدار برای تابع به دست می‌دهند را مشخص می‌کنیم. با توجه به نمودار تابع f:



در بازه‌های: $[۰ , \frac{\pi}{۳}]$ و $[\pi+\frac{\pi}{۳} , ۲\pi]$ صعودی

در بازه‌ی: $[\frac{\pi}{۳} , \pi+\frac{\pi}{۳}]$ نزولی

چون طول بازه‌ی A بیشترین است، پس از میان دو بازه، بازه‌ی $[\frac{۴\pi}{۳} , ۲\pi]$، طول بیشتری دارد و برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است.

راهبرد حل تیپ (۴)

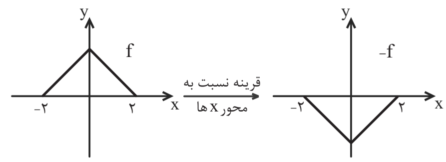
برای تعیین یکنوایی اعمال روی توابع می‌توانیم از تعریف استفاده کنیم. در تابع f (تابع داده شده) مقادیر $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ را تشکیل داده و با تعیین علامت نامساوی ($\geq$ یا $\leq$) بین آنها، یکنوایی یا عدم وجود آن را بررسی می‌کنیم.

۴۹. گزینهٔ ۲

نمودار تابع g، قرینه‌ی نمودار تابع f نسبت به محور x هاست. از آنجایی‌که جهت حرکت f و $-f$ خلاف یکدیگر است، پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که تابع f در آن نزولی غیراکید و نامنفی است که بازه‌ی $[۰,۴]$ خواهد بود.

۵۰. گزینهٔ ۱

می‌توان تابع f را به صورت زیر در نظر گرفت که نسبت به محور y ها متقارن است و در بازه‌ی $[۰,۲]$ اکیداً نزولی است. قرینه‌ی آن را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم تا نمودار تابع $-f$ حاصل شود.



همانطور که مشاهده می‌شود تابع $-f$ در بازه‌ی $[-۲,۰]$ اکیداً نزولی است.

۵۱. گزینهٔ ۴

ضابطه‌ی تابع همانی به صورت $f(x)=x$ است. با توجه به هر گزینه، ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

گزینه‌ی (۱) : $(\frac{f}{g})(x)=\frac{x}{x-|x|}=\begin{cases}\frac{x}{x-x}=\frac{x}{۰} & , x\geq ۰\\ \frac{x}{x-(-x)}=\frac{x}{۲x} & , x<۰\end{cases}$

$\Rightarrow (\frac{f}{g})(x)=\frac{۱}{۲}\ , x<۰ \rightarrow$ تابع ثابت، اکیداً یکنوا نیست.

گزینه‌ی (۲) : $(\frac{f}{g})(x)=\frac{x}{\frac{۱}{x}}=x^۲\ , x\neq ۰ \rightarrow$ یکنوا نیست.

گزینه‌ی (۳) : $(\frac{f}{g})(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}\frac{x}{x} & , x>۰\\ \frac{x}{-x} & , x<۰\end{cases}$

$\Rightarrow (\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}۱ & , x>۰\\ -۱ & , x<۰\end{cases} \rightarrow$ تابع، اکیداً یکنوا نیست.

گزینه‌ی (۴) : $(\frac{f}{g})(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\ , x>۰$ اکیداً صعودی است.

۵۲. گزینهٔ ۱

با توجه به مطالب گفته شده در درس، می‌دانیم که جهت حرکت تابع f، خلاف حرکت $\frac{۱}{f}$ و $-f$ است، بنابراین وقتی f اکیداً نزولی است، $\frac{۱}{f}$ اکیداً صعودی و در نتیجه $-\frac{۱}{f}$ اکیداً نزولی خواهد بود.

از طرفی توان فرد بر یکنوایی بی‌اثر است، پس $f^۳$ نیز اکیداً نزولی است. برای گزینه‌ی (۴) طبق تعریف داریم:

گزینه‌ی (۴) : $\sqrt{f(x)}$

$$x_۱<x_۲ \xrightarrow{f\ \text{اکیداً نزولی}} f(x_۱)>f(x_۲) \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{f(x_۱)}>\sqrt{f(x_۲)}$$

تابع $\sqrt{f}$ اکیداً نزولی است.

۵۳. گزینهٔ ۳

f تابعی نزولی اکید و مثبت است، بنابراین طبق تعریف تابع نزولی اکید، $-f$ و $\frac{۱}{f}$ توابعی صعودی اکید هستند (در تعریف جهت نامساوی عوض می‌شود.)، بنابراین مجموع آن‌ها نیز صعودی اکید است.

۵۴. گزینهٔ ۳

تابع $(f+g)(x)$ با دامنه‌ی $\{m,۱,۴\}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f+g=\{(m,۱+\sqrt{m}),(۱,m+۱),(۴,۶)\}$$

اگر $۰<m<۱$ باشد، آن‌گاه باید $۱+\sqrt{m}\leq m+۱$ یعنی $\sqrt{m}\leq m$ که این معادله در بازه‌ی $(۰,۱)$ جواب ندارد.

اگر $m>۱$ باید $۱+\sqrt{m}\geq ۱+m$ باشد که امکان‌پذیر نیست.

با در نظر گرفتن $m=۰$ داریم:

$$f+g=\{(۰,۱),(۱,۱),(۴,۶)\}$$

و اگر $m=۱$:

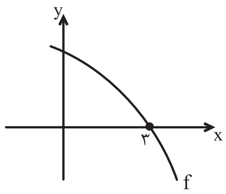
$$f+g=\{(۱,۲),(۴,۶)\}$$

که هر ۲ صعودی هستند. بنابراین دو مقدار صحیح برای m وجود دارد.

۵۵. گزینهٔ ۴

دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{x^۲f(x)}$، مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^۲f(x)\geq ۰$ است.

شکل فرضی روبه‌رو را برای تابع f در نظر می‌گیریم و عبارت $x^۲f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم.



با توجه به جدول، مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^۲f(x)\geq ۰$ به صورت $x\leq ۳$ است که شامل چهار عدد صحیح نامنفی $۰,۱,۲,۳$ است.

x		۰		۳	
$x^۲$	+	۰	+		+
$f(x)$	+		+	۰	−
$x^۲f(x)$	+	۰	+	۰	−

قابل قبول

۵۶. گزینهٔ ۴

با توجه به اینکه تابع خطی $f(x)=ax+b$ نزولی است، پس $a<۰$. تابع $f(ax+b)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}f(ax+b)=a(ax+b)+b=a^۲x+ab+b\\ f(ax+b)=۴x+۱\end{cases}$$

با متحد قرار دادن طرف راست معادله‌های بالا، خواهیم داشت:

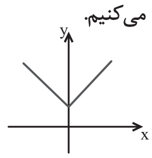
$$\begin{cases}a^۲=۴ \xrightarrow{a<۰} a=-۲\\ ab+b=۱ \xrightarrow{a=-۲} -۲b+b=۱ \Rightarrow b=-۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-۲x-۱ \Rightarrow f(۱)=-۲-۱=-۳$$

۵۷. گزینهٔ ۲

از رابطه‌ی بین جهت تغییرات تابع f با $\frac{۱}{f}$ استفاده می‌کنیم.

از تابع $y=|x|+۱$ در مخرج کسر شروع می‌کنیم و یکنوایی را بررسی می‌کنیم. نمودار به‌شکل روبه‌رو است.



با توجه به نمودار تابع دیده می‌شود که تابع ابتدا نزولی و سپس صعودی است، با توجه به اینکه جهت حرکت f و $\frac{۱}{f}$ خلاف یکدیگر است، پس

$y=\frac{۱}{|x|+۱}$، ابتدا صعودی و سپس نزولی است. همچنین جهت حرکت f و $-f$ خلاف یکدیگر است، پس $y=\frac{-۱}{|x|+۱}$، ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۵۸. گزینهٔ ۲

بنا به تعریف، اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، با گرفتن f از دو طرف یک نامساوی، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند. از طرفی تابع $f(x)=۳^x$ همواره صعودی است، بنابراین: $x^۲\ge ۰\Rightarrow x^۲-۱\ge -۱$

$$\xrightarrow[\text{f اکیداً صعودی است}]{f(x)=۳^x} f(x^۲-۱)\ge f(-۱)$$

$$\Rightarrow ۳^{x^۲-۱}\ge ۳^{-۱}\Rightarrow y\ge \frac{۱}{۳}$$

بنابراین کمترین مقدار تابع $y=۳^{x^۲-۱}$ برابر با $\frac{۱}{۳}$ است.

۵۹. گزینهٔ ۴

می‌دانیم همواره $-۱\le \sin x\le ۱$، پس:

$$۰\le \sin^۲ x\le ۱\Rightarrow ۰\le ۵\sin^۲ x\le ۵\Rightarrow -۱\le ۵\sin^۲ x-۱\le ۴$$

$$\Rightarrow ۰\le \sqrt{۵\sin^۲ x-۱}\le ۲$$

برد تابع $y=۲^{-t}=(\frac{۱}{۲})^t\ ,\ ۰\le t\le ۲$ را می‌خواهیم. از آنجا که تابعی نزولی است، کمترین و بیشترین مقدار آن به ترتیب به ازای بیشترین و کمترین مقدار t حاصل می‌شود، یعنی:

$$\begin{cases} y_{min}=۲^{-۲}=\frac{۱}{۴} \\ y_{max}=۲^{۰}=۱ \end{cases}\Rightarrow \text{برد تابع}=[\frac{۱}{۴},۱]$$

$$\Rightarrow a=\frac{۱}{۴}\ ,\ b=۱\Rightarrow a+b=\frac{۱}{۴}+۱=\frac{۵}{۴}$$

۶۰. گزینهٔ ۴

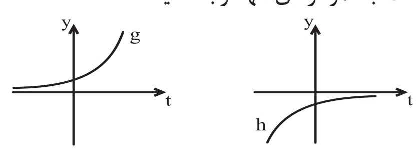
با فرض $t=\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}$، داریم:

$$-۱\le \cos x\le ۱\Rightarrow ۰\le \cos^۲ x\le ۱\Rightarrow -۱\le ۹\cos^۲ x-۱\le ۸$$

$$\Rightarrow -۱\le \sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}\le ۲\Rightarrow -۱\le t\le ۲$$

حالا برد تابع $y=۲^t-۲^{-t}$ را می‌خواهیم که در آن $-۱\le t\le ۲$.

تابع $g(t)=۲^t$ صعودی و تابع $h(t)=-۲^{-t}=-(\frac{۱}{۲})^t$ نیز صعودی است. به نمودارهای آنها توجه کنید:



پس تابع $y=g(t)+h(t)$ هم صعودی است، یعنی کمترین مقدار آن به ازای کمترین مقدار t و بیشترین مقدار آن به ازای بیشترین مقدار t به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y_{min}=۲^{-۱}-۲^{۱}=\frac{۱}{۲}-۲=-\frac{۳}{۲} \\ y_{max}=۲^{۲}-۲^{-۲}=۴-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۵}{۴} \end{cases}\Rightarrow R_f=[-\frac{۳}{۲},\frac{۱۵}{۴}]$$

$$\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}\ ,\ b=\frac{۱۵}{۴}\Rightarrow b-a=\frac{۱۵}{۴}+\frac{۳}{۲}=\frac{۲۱}{۴}$$

راهبرد حل تیپ (۵)

از آنجایی که $(fog)(a)=f(g(a))$، پس برای محاسبه‌ی تابع fog وقتی دو تابع f و g به صورت زوج مرتب داده شده‌اند، مقدار تابع fog را در نقاط دامنه‌ی g حساب می‌کنیم.

به عنوان مثال اگر $g=\{(۱,۲)\}$ و $f=\{(۲,۵)\}$، آنگاه در تشکیل fog، ورودی از g گرفته می‌شود و خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{x=۱} f(\underbrace{g(۱)}_{۲})=f(۲)=۵\to (۱,۵)\in fog$$

و داریم $fog=\{(۱,۵)\}$.

۶۱. گزینهٔ ۳

با توجه به شکل داریم:

$$f=\{(۱,۳),(۲,۵),(-۱,۱)\}$$
$$g=\{(۰,۱),(۵,-۳),(۴,-۱)\}$$

برای محاسبه‌ی تابع fog از دامنه‌ی g شروع می‌کنیم:

$x=۰:(fog)(۰)=f(g(۰))=f(۱)=۳\Rightarrow (۰,۳)\in fog$

$x=۵:(fog)(۵)=f(g(۵))=f(-۳):$ وجود ندارد

$x=۴:(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۱)=۱\Rightarrow (۴,۱)\in fog$

$\Rightarrow fog=\{(۰,۳),(۴,۱)\}$

۶۲. گزینهٔ ۳

با توجه به اینکه $(fog)(x)=f(g(x))$، برای آنکه تابع $f(g(x))$ تعریف شود، شرط اول آن است که x بتواند ورودی تابع g باشد، شرط دوم هم آن است که $g(x)$ بتواند ورودی تابع f باشد. از آنجا که در این سؤال تعداد ورودی‌های تابع g کم است، به ازای هر سه عضو دامنه‌ی تابع g، ترکیب $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

$$x=۱\Rightarrow (fog)(۱)=f(g(۱))=f(۴)=\frac{۱}{۴-۱}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow (۱,\frac{۱}{۳})\in fog$$

$x=۲\Rightarrow (fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=\frac{۱}{۱-۱}:$ تعریف نشده

$$x=۳\Rightarrow (fog)(۳)=f(g(۳))=f(-۱)=\frac{۱}{-۱-۱}=\frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow (۳,\frac{-۱}{۲})\in fog$$

$$\Rightarrow fog=\left\{(۱,\frac{۱}{۳}),(۳,\frac{-۱}{۲})\right\}$$

۶۳. گزینهٔ ۲

$$f=\{(۲,۶),(۱,۵),(۵,۷),(۶,۹)\}\to D_f=\{۲,۱,۵,۶\}$$

به ازای اعضای دامنه‌ی f، تابع fof را تشکیل می‌دهیم:

$fof(۲)=f(f(۲))=f(۶)=۹\to (۲,۹)$

$fof(۱)=f(f(۱))=f(۵)=۷\to (۱,۷)$

$fof(۵)=f(f(۵))=f(۷):$ وجود ندارد

$fof(۶)=f(f(۶))=f(۹):$ وجود ندارد

$\Rightarrow fof=\{(۲,۹),(۱,۷)\}$

$\to$ مجموع اعضای برد $=۹+۷=۱۶$

۶۴. گزینهٔ ۳

با توجه به فرضیات مسأله، $f(x)=۲x-۱$ است لذا با توجه به این‌که $x\in A$ است داریم:

$$f(۱)=۱\ ,\ f(۲)=۳\ ,\ f(۳)=۵\ ,\ f(۴)=۷\ ,\ f(۵)=۹$$