فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر

(۱۸ پیمانه)

گزینش و تنظیم سوال‌ها: حمیدرضا رحیم‌خانلو
درس‌نامه: فرهاد حامی

مرجع کتاب درسی:
ریاضی ۲ - فصل اول
صفحه‌های ۱ تا ۲۴

بارم این فصل در امتحان			
	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور
نمره در امتحان	۶	۲	۲/۵

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

هندسهٔ تحلیلی و جبر

۹۰ سؤال امتحانی شناسنامه‌دار
۱۸ پیمانه ۵ سؤالی

۱ هندسهٔ تحلیلی
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۶ پیمانه — ۳۰ سؤال

1. یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط
2. فاصلهٔ دو نقطه
3. مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط
4. فاصلهٔ نقطه از خط

۲ معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ ۲
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۶ پیمانه — ۳۰ سؤال

1. روش تغییر متغیر برای حل معادله
2. مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲
3. تشکیل معادلهٔ درجه ۲ با استفاده از S و P
4. ماکزیمم و مینیمم تابع درجهٔ دوم
5. صفرهای تابع درجه ۲

۳ معادلات گویا و معادلات رادیکالی
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۴ پیمانه — ۲۰ سؤال

1. معادلات گویا
2. معادلات رادیکالی

سؤال‌های ویژهٔ برترها
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
۲ پیمانه — ۱۰ سؤال

صفحه‌های ۱ تا ۱۰ ریاضی ۲

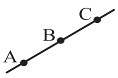
۱ هندسهٔ تحلیلی

۱ یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

❖ **شیب خط:** شیب خط به صورت نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی تعریف می‌شود. بنابراین با داشتن دو نقطهٔ $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$، شیب خط برابر $\boxed{m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$ تعریف می‌شود. به جای کلمهٔ شیب می‌توان کلمهٔ «ضریب زاویه» را نیز به کار برد. در خط‌های افقی (موازی محور x ها)، شیب برابر صفر است. اگر دو نقطه با طول برابر (هم‌طول) روی یک خط باشند، از آنجا که مخرج در محاسبهٔ شیب صفر می‌شود، شیب خط تعریف نمی‌شود.

تیپ ۱ امتحانی شرط بر یک استقامت بودن سه نقطه: **اگر سه نقطهٔ A ، B و C بر روی یک خط راست قرار داشته باشند، آنگاه:**

$$m_{AB}=m_{AC}$$



❖ **یافتن شیب خط و روش‌های نوشتن معادلهٔ آن:** معادلهٔ یک خط به دو صورت زیر نوشته می‌شود:

۱ اگر معادلهٔ خط به‌صورت $\boxed{y=mx+h}$ (معادلهٔ صریح) باشد، $\boxed{\text{شیب خط همان ضریب } x}$ است.

۲ اگر معادلهٔ خط به‌صورت $\boxed{ax+by+c=۰}$ (معادلهٔ ضمنی) باشد، شیب خط برابر $\boxed{m=-\dfrac{x \text{ ضریب}}{y \text{ ضریب}}=-\dfrac{a}{b}}$ است.

تیپ ۲ امتحانی نوشتن معادلهٔ خط: **با در اختیار داشتن شیب و یک نقطه از خط می‌توانیم معادلهٔ خط را بنویسیم. اگر m شیب خط و $A(x_۱,y_۱)$ یک نقطه از خط باشد، آنگاه معادلهٔ خط به صورت زیر نوشته می‌شود:**

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

توجه اگر دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ از خط معلوم باشند، ابتدا شیب خط را از $m_{AB}=\dfrac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ یافته و معادلهٔ خط را با داشتن شیب و یکی از نقاط می‌نویسیم.

نمونهٔ امتحانی: معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A(۲,-۱)$ و $B(۸,۳)$ عبور می‌کند.

حل: دو نقطه از خط معلوم است، ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه را می‌یابیم:

$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۳-(-۱)}{۸-۲}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

$$y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-(-۱)=\frac{۲}{۳}(x-۲)\Rightarrow y+۱=\frac{۲}{۳}(x-۲)\Rightarrow y+۱=\frac{۲}{۳}x-\frac{۴}{۳}\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x-\frac{۷}{۳}$$

تیپ ۳ امتحانی وضعیت دو خط نسبت به هم: **در دستگاه مختصات، دو خط یا موازی‌اند یا متقاطع یا بر هم منطبق‌اند. اگر m و m' به ترتیب شیب‌های دو خط (غیرمنطبق) Δ و Δ' باشند، آنگاه:**

۱ شرط موازی بودن آن است که شیب‌هایشان با هم برابر باشند، یعنی: $\boxed{m=m'}$

۲ شرط عمود بر هم بودن آن است که شیب یکی عکس و قرینهٔ شیب دیگری باشد، یعنی: $\boxed{m'=-\dfrac{۱}{m} \text{ یا } mm'=-۱}$

۳ شرط متقاطع بودن آن است که شیب دو خط با هم برابر نباشند، یعنی: $m\neq m'$

بنابراین در تعیین وضعیت دو خط نسبت به هم، فقط با شیب دو خط کار داریم؛ ابتدا شیب آنها را یافته و سپس شرط خواسته شده را اعمال می‌کنیم.

نمونهٔ امتحانی: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A(۴,-۱)$ بگذرد و بر خط Δ به معادلهٔ $۳y=۶x+۷$ عمود باشد.

حل: ابتدا شیب خط Δ را یافته و سپس آن را عکس و قرینه می‌کنیم:

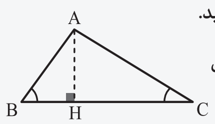
$$۳y=۶x+۷\xrightarrow[\div ۳]{\text{معادله را مرتب می‌کنیم.}}y=۲x+\frac{۷}{۳}\xrightarrow{\text{شیب را می‌خوانیم.}}m_\Delta=۲\xrightarrow[\text{شیب را عکس و قرینه می‌کنیم.}]{\text{خط مطلوب بر این خط عمود است.}}m'=-\frac{۱}{۲}$$

با داشتن شیب و یک نقطه، معادلهٔ خط را می‌نویسیم:

$$y-y_A=m'(x-x_A)\Rightarrow y-(-۱)=-\frac{۱}{۲}(x-۴)\Rightarrow y+۱=-\frac{۱}{۲}x+۲\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

تیپ ۴ امتحانی کاربرد هندسی (یافتن معادلهٔ ارتفاع در مثلث): **اگر سه رأس (یا سه ضلع) مثلث ABC داده شده باشد، می‌توانیم معادلهٔ ارتفاع AH وارد بر BC را با توجه به ویژگی خطوط عمود بر هم، بیابیم.**

نمونهٔ امتحانی: در مثلث ABC با مختصات رئوس $A(۰,-۱)$ ، $B(۱,۱)$ و $C(۳,۰)$، معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC را بیابید.



حل: مطابق شکل فرضی روبه‌رو باید معادلهٔ ارتفاع AH را بیابیم. برای این منظور ابتدا شیب خط BC را یافته و با عکس و قرینه کردن آن، شیب ارتفاع را می‌یابیم. از طرفی ارتفاع مورد نظر از رأس A می‌گذرد، به کمک آن معادلهٔ ارتفاع را می‌نویسیم:

$$B(۱,۱)\ ,\ C(۳,۰)\xrightarrow[\text{را می‌یابیم.}]{BC \text{ شیب خط}}m=\frac{۰-۱}{۳-۱}=-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس و قرینه می‌کنیم.}}m_{AH}=۲\Rightarrow y-(-۱)=۲(x-۰)\xrightarrow{\text{ساده می‌کنیم.}}y=۲x-۱$$

سؤال‌های امتحانی

پیمانه‌های ۱ و ۲ | ۲ پیمانه | ۱۰ سؤال

۱ یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط — صفحه‌های ۲ تا ۴ کتاب درسی

مرجع

۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) شیب خط $2x-3y+2=0$ برابر $\frac{2}{3}$ است.

ب) دو خط متقاطع شیب‌های عکس هم دارند.

پ) شیب خط عمود بر خط $2y-3x=1$ برابر $-\frac{2}{3}$ است.

ت) دو خط $x+2y=1$ و $y=2x+3$ بر هم عمودند. (۰/۲۵ نمره)

صفحه‌های ۳ و ۴ – مرتبط با کار در کلاس
(الف – لنگرود – ابن‌سینا – دی ۱۴۰۰) (۴ بار تکرار)
(ب – تهران – دکتر ترابی – دی ۱۴۰۱) (۷ بار تکرار)
(پ – لرستان – نواب صفوی – دی ۱۴۰۱) (۵ بار تکرار)
ت – امتحان نهایی – شهریور ۱۴۰۲ (صبح) (۱۳ بار تکرار)

۲. در جاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید.

الف) هرگاه خط L محور yها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آن‌گاه h .... خط L نامیده می‌شود.

ب) معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(1,-1)$ و $(2,3)$ به‌صورت .... است.

پ) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای .... برابر باشند.

صفحه‌های ۲ و ۳ – مرتبط با کار در کلاس
(الف – قشم – تربیت – دی ۱۴۰۰) (۵ بار تکرار)
(ب – رشت – شاهد کمیل – دی ۱۴۰۰) (۳ بار تکرار)
(پ – اردبیل – راه نور – دی ۱۴۰۲) (۵ بار تکرار)

۳. نشان دهید نقاط $A(-3,2)$، $B(1,-2)$ و $C(9,-10)$ بر یک خط واقع هستند.

صفحهٔ ۲ – مکمل کار در کلاس ۴ – الف
(اقلید – نرجس خاتون – خرداد ۱۴۰۱) (۴ بار تکرار)

۴. خطوط داده شده نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟ (موازی، عمود یا متقاطع غیرعمود)

الف) $L_1: y=\frac{1}{2}x+7$ ، $L_2: x-2y=1$

ب) $L_3: 2x-y=1$ ، $L_4: x+2y=6$

پ) $L_5: 2y=3x+5$ ، $L_6: 2x-3y+3=0$

صفحهٔ ۴ – مرتبط با کار در کلاس ۱
(الف – زاهدان – الزهرا (س) – دی ۱۴۰۱)
(ب – دزفول – حجاب – دی ۱۴۰۱)
(پ – کرج – قلم‌چی – دی ۱۴۰۰)
(۷ بار تکرار)

۵. معادلهٔ خط موازی با خط $2y-4x=1$ را که از نقطهٔ $A(0,2)$ می‌گذرد، بنویسید.

صفحهٔ ۳ – مرتبط با کار در کلاس ۶ – پ
(سقز – کوثر – دی ۱۴۰۰) (۱۰ بار تکرار)

۶. معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $A(3,4)$ و عمود بر خطی به معادلهٔ $3x-5y=4$ را بنویسید.

صفحهٔ ۳ – مرتبط با فعالیت
(ابهر – سما – دی ۱۴۰۱) (۱۵ بار تکرار)

۷. خط L به معادلهٔ $2y-3x=1$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+5$ را در نظر بگیرید.

الف) m را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

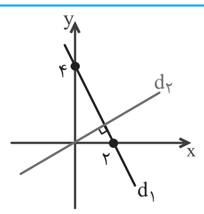
ب) به ازای چه مقداری از m دو خط بر یکدیگر عمودند؟

صفحهٔ ۴ – مشابه کار در کلاس ۲
(اصفهان – خرد – دی ۱۴۰۱) (۷ بار تکرار)

۸. مقدار a را چنان بیابید که خطوط $y=(2a+1)x+1$ و $(a+1)y=x+2$ بر هم عمود باشند.

صفحهٔ ۳ – مرتبط با فعالیت
(سرپل ذهاب – خدیجه کبری (س) – دی ۱۴۰۰) (۱۳ بار تکرار)

۹. معادلهٔ خطوط d_1 و d_2 را بیابید.



صفحهٔ ۳ – مرتبط با فعالیت
(نوشهر – پیام دانش – دی ۱۴۰۱) (۵ بار تکرار)

۱۰. اگر نقاط $A(1,4)$، $B(-1,2)$ و $C(5,0)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع AH را به‌دست آورید.

صفحهٔ ۴ – مرتبط با کار در کلاس
(آمل – شهید بهشتی – دی ۱۴۰۱) (۱۵ بار تکرار)

۱ هندسهٔ تحلیلی

صفحه‌های ۱ تا ۱۰ ریاضی ۲

۲ فاصلهٔ دو نقطه

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ از هم، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

۱ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۱\,,\,y_۱)$ از مبدأ مختصات برابر $OA=\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}$ است.

توجه اگر نقطهٔ M روی محور x ها باشد، مختصات آن $M(x\,,\,۰)$، اگر روی محور y ها باشد، مختصات آن $M(۰\,,\,y)$، اگر روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشد، مختصات آن $M(x\,,\,x)$ و اگر روی نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم باشد، مختصات آن $M(x\,,\,-x)$ در نظر گرفته می‌شود.
به طریق مشابه اگر نقطهٔ M بر روی مثلاً خط $y=۳x-۱$ باشد، مختصات آن را به صورت $M(x\,,\,۳x-۱)$ در نظر می‌گیریم.

نمونهٔ امتحانی: مختصات طول نقطه‌ای روی نیمساز ناحیهٔ اول را بیابید که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $A(۲\,,\,۱)$ برابر ۵ باشد.

حل: چون نقطه روی نیمساز ناحیهٔ اول قرار دارد، مختصات آن $M(x\,,\,x)$ است، فاصلهٔ آن را تا نقطهٔ $A(۲\,,\,۱)$ یافته و برابر ۵ قرار می‌دهیم:

$$AM=\sqrt{(x-۲)^۲+(x-۱)^۲}=۵\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}(x-۲)^۲+(x-۱)^۲=۲۵\xrightarrow{\text{اتحادها را باز می‌کنیم}}x^۲-۴x+۴+x^۲-۲x+۱=۲۵$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌سازی}}۲x^۲-۶x-۲۰=۰\xrightarrow{\div ۲}x^۲-۳x-۱۰=۰\xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}}(x-۵)(x+۲)=۰\xrightarrow{x>۰\ \text{ناحیهٔ اول}}x=۵$$

تیپ ۵ امتحانی کاربرد هندسی (تعیین اضلاع، محیط و نوع مثلث): **اگر مختصات رئوس یک مثلث معلوم باشد، با یافتن اندازهٔ سه ضلع مثلث می‌توانیم محیط و همچنین نوع مثلث را تعیین کنیم. ۱ اگر هر سه ضلع برابر باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع است. ۲ اگر اندازهٔ دو ضلع از سه ضلع برابر باشد، مثلث متساوی‌الساقین است. ۳ اگر رابطهٔ فیثاغورس بین سه ضلع برقرار باشد، مثلث قائم‌الزاویه است. بدیهی است اگر حالت‌های ۲ و ۳ با هم برقرار باشد، مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.**

نمونهٔ امتحانی: نشان دهید مثلث ABC با مختصات رئوس $A(۱\,,\,۰)$، $B(۴\,,\,۲)$ و $C(۳\,,\,-۳)$، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است.

حل:

$$AB=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۲-۰)^۲}=\sqrt{۱۳}\ ,\ AC=\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۳-۰)^۲}=\sqrt{۱۳}\ ,\ BC=\sqrt{(۳-۴)^۲+(-۳-۲)^۲}=\sqrt{۲۶}$$

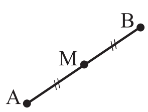
از آنجا که $AB=AC$ مثلث متساوی‌الساقین است. همچنین $AB^۲+AC^۲=BC^۲$، پس مثلث در رأس A قائمه است.

توجه به طریق مشابه با در اختیار داشتن رئوس در مربع، مستطیل و ... می‌توانیم طول اضلاع، قطر، محیط و مساحت آنها را بیابیم.

۳ مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

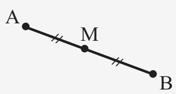
هرگاه $A(x_۱\,,\,y_۱)$ و $B(x_۲\,,\,y_۲)$ دو نقطه در یک دستگاه مختصات باشند، آنگاه مختصات نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M(\frac{x_۱+x_۲}{۲}\,,\,\frac{y_۱+y_۲}{۲})$$



تیپ ۶ امتحانی قرینه‌یابی: **اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AA' باشد، آنگاه نقطهٔ A' را قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M می‌نامیم. بنابراین برای یافتن قرینهٔ یک نقطه نسبت به یک خط یا نقطهٔ دیگر از این ویژگی استفاده می‌کنیم.**

نمونهٔ امتحانی: قرینهٔ نقطهٔ $A(-۲\,,\,۱)$ را نسبت به نقطهٔ $M(۴\,,\,۲)$ به دست آورید.



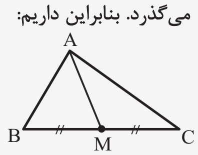
حل: در شکل مقابل، نقطهٔ B قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M است، بنابراین نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB قرار دارد، پس داریم:

$$M\ \text{وسط}\ AB:M(\frac{x_A+x_B}{۲}\,,\,\frac{y_A+y_B}{۲})=M(۴\,,\,۲)\Rightarrow\begin{cases}\frac{x_A+x_B}{۲}=۴\Rightarrow\frac{-۲+x_B}{۲}=۴\Rightarrow x_B=۸+۲=۱۰\\ \frac{y_A+y_B}{۲}=۲\Rightarrow\frac{۱+y_B}{۲}=۲\Rightarrow y_B=۴-۱=۳\end{cases}\Rightarrow B(۱۰\,,\,۳)$$

تیپ ۷ امتحانی کاربرد هندسی (یافتن معادلهٔ میانه و عمود منصف): **با استفاده از نقطهٔ وسط پاره‌خط، می‌توانیم معادلهٔ میانه و عمود منصف یک مثلث و معادلهٔ عمود منصف یک پاره‌خط را بیابیم.**

نمونهٔ امتحانی: مثلث ABC با مختصات رئوس $A(۲\,,\,۱)$، $B(۳\,,\,۴)$ و $C(۵\,,\,۰)$ را در نظر بگیرید. معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل فرضی مقابل، نقطهٔ M وسط ضلع BC قرار دارد و میانهٔ AM منطبق بر خطی است که از دو نقطهٔ A و M می‌گذرد. بنابراین داریم:

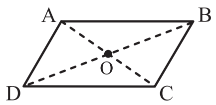


$$B(۳\,,\,۴)\ \text{و}\ C(۵\,,\,۰)\Rightarrow M(\frac{x_B+x_C}{۲}\,,\,\frac{y_B+y_C}{۲})=(\frac{۳+۵}{۲}\,,\,\frac{۴+۰}{۲})=(۴\,,\,۲)$$

معادلهٔ میانهٔ AM برابر است با معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $A(۲\,,\,۱)$ و $M(۴\,,\,۲)$، پس داریم:

$$\text{معادلهٔ میانهٔ}\ AM:\ y-y_A=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}(x-x_A)\Rightarrow y-۱=\frac{۲-۱}{۴-۲}(x-۲)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x$$

توجه در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ (شکل مقابل)، قطرها منصف هم هستند. پس O وسط AC و BD است و داریم:



$$\begin{cases} x_O = \dfrac{x_A + x_C}{۲} = \dfrac{x_B + x_D}{۲} \\ y_O = \dfrac{y_A + y_C}{۲} = \dfrac{y_B + y_D}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{matrix}$$

رابطهٔ بالا برای مربع، مستطیل و لوزی نیز برقرار است. همچنین در مربع و لوزی، قطرها عمود منصف یکدیگرند.

سؤال‌های امتحانی

۲ پیمانه — **۱۰ سؤال** — **پیمانه‌های ۳ و ۴**

۲ فاصلهٔ دو نقطه — صفحه‌های ۴ تا ۸ و تمرین‌های صفحه‌های ۹ و ۱۰ کتاب درسی

۳ مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

۱۱. درستی یا نادرستی مورد «الف» را مشخص کرده و در جاهای خالی سایر موارد، عبارت یا عدد مناسب قرار دهید.

الف) اگر A و B دو نقطهٔ هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |y_A - y_B|$.

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,-۴)$ از مبدأ مختصات، برابر .... است.

پ) قرینهٔ نقطهٔ $A(-۲,۳)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر .... است.

ت) قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $P(\alpha,\beta)$ برابر $B(-۱,۳)$ باشد، مقدار α و β به‌ترتیب .... و .... است.

مرجع: صفحه‌های ۵ تا ۷- مرتبط با کار در کلاس
(الف - پلدختر - الزهرا (س) - دی ۱۴۰۱) (۴ بار تکرار)
(ب - تهران - امام محمد باقر (ع) - خرداد ۱۴۰۱) (۴ بار تکرار)
(پ - شوش دانیال - دانشوران - دی ۱۴۰۰) (۴ بار تکرار)
(ت - خرمشهر - بوستان امامت - دی ۱۴۰۰) (۷ بار تکرار)

۱۲. مثلث ABC با رأس‌های $A(۱,۲)$، $B(۲,۵)$ و $C(۴,۱)$ مفروض است. نشان دهید این مثلث، یک مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

صفحهٔ ۹- مشابه تمرین ۳
(تهران - فدک - خرداد ۱۴۰۱)
(۱۰ بار تکرار)

۱۳. نقاطی روی محور طول‌ها بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $(۲,۳)$ به فاصلهٔ ۵ باشد.

صفحهٔ ۵- مرتبط با نتیجهٔ فعالیت
(اراک - بصیرت - دی ۱۴۰۲)
(۷ بار تکرار)

۱۴. فاصلهٔ نقطهٔ $C(۱,۴)$ را از وسط پاره‌خط AB بیابید که در آن $A(۲,۴)$ و $B(-۲,۲)$ است.

صفحهٔ ۹- مرتبط با تمرین ۲
(بویین‌زهرا - دکتر مروستی - دی ۱۴۰۱)
(۱۰ بار تکرار)

۱۵. قرینهٔ نقطهٔ $A(-۴,۱)$ نسبت به نقطهٔ $M(۱,۵)$ را به‌دست آورید.

صفحهٔ ۷- مرتبط با کار در کلاس ۲- ب
(قم - امامی - خرداد ۱۴۰۱)
(۱۵ بار تکرار)

۱۶. معادلهٔ عمود منصف پاره‌خطی را که دو سر آن نقاط $A(۴,۳)$ و $B(۲,-۳)$ باشد، بنویسید.

صفحه‌های ۳ و ۷- ترکیبی
(اصفهان - خرد - دی ۱۴۰۰)
(۱۳ بار تکرار)

۱۷. نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۴,۴)$ دو انتهای یک قطر دایره‌ای هستند. مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره را بیابید. (۰/۷۵ نمره)

صفحهٔ ۹- مرتبط با تمرین ۴
امتحان نهایی - غایب موجه - خرداد ۱۴۰۲
(۱۳ بار تکرار)

۱۸. مثلثی با رأس‌های $A(۲,۱)$، $B(۳,۴)$ و $C(۵,۰)$ را در نظر بگیرید.

الف) مختصات نقطهٔ M وسط ضلع BC را بنویسید.

ب) طول میانهٔ AM را به دست آورید.

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را بیابید.

صفحهٔ ۷- مرتبط با کار در کلاس ۱
(اصفهان - خرد - دی ۱۴۰۱)
(۱۵ بار تکرار)

۱۹. نقاط $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱)$ مختصات سه رأس مثلث ABC هستند. مطلوب است محاسبهٔ:

الف) طول میانهٔ AM

ب) معادلهٔ عمود منصف BC

صفحهٔ ۷- مکمل کار در کلاس ۱
(شیروان - مالک اشتر - دی ۱۴۰۲)
(۱۷ بار تکرار)

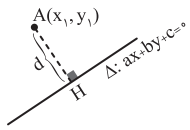
۲۰. نقاط $A(۲,-۳)$، $B(۰,۱)$ و $C(۶,۳)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس D را بیابید.

صفحهٔ ۹- مرتبط با تمرین ۵
(خواف - خاتم‌الانبیا (ص) - دی ۱۴۰۱)
(۱۰ بار تکرار)

۱ هندسهٔ تحلیلی

صفحه‌های ۱ تا ۱۰ ریاضی ۲

۴ فاصلهٔ نقطه از خط



اگر نقطهٔ $A(x_۱ , y_۱)$ و معادلهٔ خط $\Delta : ax+by+c=۰$ را داشته باشیم، آنگاه فاصلهٔ نقطهٔ A از خط Δ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

برای محاسبهٔ فاصله، ابتدا تمام جملات در معادلهٔ خط را به یک طرف برده و مساوی صفر قرار می‌دهیم. صورت کسر، قدرمطلق مختصات نقطه در معادلهٔ خط و مخرج آن، جذر مجموع مربعات ضرایب x و y در معادلهٔ خط است.

۱ فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط به معادلهٔ $\Delta : ax+by+c=۰$ برابر $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است.

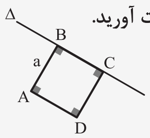
نمونهٔ امتحانی: اگر فاصلهٔ نقطهٔ $A(۱ , -۲)$ از خط $۸y+۶x-k=۰$ برابر ۳ باشد، مقدار k را بیابید.

حل:

$$\xrightarrow{A(۱,-۲)}\frac{|۶\times۱+۸\times(-۲)-k|}{\sqrt{۶^۲+۸^۲}}=۳\Rightarrow\frac{|-۱۰-k|}{۱۰}=۳\Rightarrow|-۱۰-k|=۳۰\Rightarrow-۱۰-k=\pm۳۰\Rightarrow\begin{cases}-۱۰-k=۳۰\Rightarrow k=-۴۰\\-۱۰-k=-۳۰\Rightarrow k=۲۰\end{cases}$$

تیپ ۸ امتحانی کاربرد هندسی (یافتن اندازهٔ ارتفاع مثلث و اندازهٔ ضلع مربع و مستطیل): با داشتن معادلهٔ یک ضلع و یک رأس غیر واقع بر آن، طول اجزاء و روابط طولی را در شکل‌های هندسی می‌توانیم بیابیم. مانند اندازهٔ ضلع مربع (یا مستطیل) یا اندازهٔ ارتفاع، مساحت مثلث و ...

نمونهٔ امتحانی: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y=۳x-۲$ واقع است. اگر $A(۵ , ۱)$ یکی از رأس‌های مربع باشد، مساحت مربع را به دست آورید.

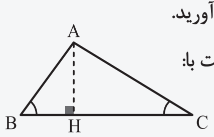


حل: با توجه به شکل فرضی مقابل، از آنجا که نقطهٔ $A(۵ , ۱)$ روی خط $y=۳x-۲$ قرار ندارد، فاصلهٔ رأس A از خط Δ برابر با طول ضلع مربع است. بنابراین طول ضلع مربع برابر است با:

$$y=۳x-۲\xrightarrow{\text{تمام جملات یک طرف مساوی صفر}}۳x-y-۲=۰\xrightarrow{A(۵ , ۱)}a=\frac{|۳\times۵-۱-۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\Rightarrow S=a^۲=(\frac{۱۲}{\sqrt{۱۰}})^۲=\frac{۱۴۴}{۱۰}=۱۴/۴$$

نمونهٔ امتحانی: مثلث ABC با مختصات رئوس $A(۲ , ۰)$ ، $B(۱ , ۴)$ و $C(-۳ , ۲)$ مفروض است. طول ارتفاع AH را به دست آورید.



حل: طول ارتفاع AH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲ , ۰)$ تا ضلع BC است. معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $B(۱ , ۴)$ و $C(-۳ , ۲)$ برابر است با:

$$BC: y-y_B=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}(x-x_B)\Rightarrow BC: y-۴=\frac{۲-۴}{-۳-۱}(x-۱)\Rightarrow y-۴=\frac{۱}{۲}(x-۱)\Rightarrow BC: x-۲y+۷=۰\Rightarrow AH=\frac{|۲-۲(۰)+۷|}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۹}{\sqrt{۵}}$$

توجه برای یافتن فاصلهٔ بین دو خط موازی Δ و Δ'، کافی است یک نقطهٔ دلخواه بر روی یکی از خطوط در نظر بگیریم و فاصلهٔ آن نقطه را از خط دیگر بیابیم.

نمونهٔ امتحانی: نشان دهید دو خط به معادلات $x-۵y=۶$ و $۲x=۱۰y+۱$ با هم موازی‌اند و سپس فاصلهٔ بین این دو خط را بیابید.

حل: شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$x-۵y=۶\Rightarrow y=\frac{۱}{۵}x-\frac{۶}{۵}\Rightarrow m_۱=\frac{۱}{۵}\quad \text{و}\quad ۲x=۱۰y+۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۵}x-\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow m_۲=\frac{۱}{۵}$$

بنابراین دو خط موازی‌اند. $m_۱=m_۲$ برای به دست آوردن فاصلهٔ دو خط موازی، کافی است یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر گرفته و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به دست آوریم؛ بنابراین نقطهٔ $A(۶ , ۰)$ را روی خط $x-۵y=۶$ در نظر گرفته و فاصلهٔ آن را از خط $۲x=۱۰y+۱$ می‌یابیم:

$$۲x=۱۰y+۱\Rightarrow ۲x-۱۰y-۱=۰\Rightarrow d=\frac{|۲\times۶-۱۰\times۰-۱|}{\sqrt{۲^۲+(-۱۰)^۲}}=\frac{۱۱}{\sqrt{۱۰۴}}=\frac{۱۱}{۲\sqrt{۲۶}}$$

سؤال‌های امتحانی

۲ پیمانه | ۱۰ سؤال | پیمانه‌های ۵ و ۶

۴ فاصلهٔ نقطه از خط

صفحه‌های ۸ تا ۱۰ کتاب درسی

۲۱. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۲,-۳)$ را از خط $y=۴x-۱$ بیابید.

مرجع
صفحه ۸- مرتبط با مثال
(کرج- بهارستان- خرداد ۱۴۰۱)
(۲۰ بار تکرار)

۲۲. فاصلهٔ نقطهٔ $A(۳,۱)$ از خط $۵x+۱۲y=k$ برابر ۲ است. k چه مقادیری می‌تواند باشد؟	صفحهٔ ۸- مرتبط با نتیجهٔ مثال (اراک- کوثر- خرداد ۱۴۰۱) **(۱۰ بار تکرار)**
۲۳. اگر خط $۴x+۳y=-۱۰$ بر دایره به مرکز $(۱,۲)$ مماس باشد، اندازهٔ شعاع دایره را بیابید. (۱ نمره)	صفحهٔ ۹- مرتبط با کار در کلاس ۲ **امتحان نهایی- شهریور ۱۴۰۲** **(۲۰ بار تکرار)**
۲۴. یکی از اضلاع مربع بر خط $y=۲x-۱$ واقع است. اگر نقطهٔ $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را به دست آورید. (۱/۲۵ نمره)	صفحهٔ ۹- مرتبط با تمرین ۷ **امتحان نهایی- غایب موجه- شهریور ۱۴۰۲** **(۲۰ بار تکرار)**
۲۵. دو ضلع یک مستطیل بر خطوط $۲y+x=۶$ و $۲x-y=۷$ منطبق هستند و یک رأس آن $A(۸,۵)$ می‌باشد. مساحت این مستطیل را بیابید.	صفحهٔ ۹- مکمل تمرین ۷ (قم- دکتر شهریاری- دی ۱۴۰۱) **(۱۲ بار تکرار)**
۲۶. دو نقطه بر روی خط به معادلهٔ $y=۲x-۳$ قرار دارند که فاصلهٔ این نقاط از خط به معادلهٔ $۵x+۲y=۱۱$ برابر $\sqrt{۲۹}$ می‌باشد. این دو نقطه را به دست آورید.	صفحهٔ ۸- مرتبط با نتیجهٔ متن (نور- شهید بهشتی- خرداد ۱۴۰۱) **(۷ بار تکرار)**
۲۷. اگر $A(۱,۴)$، $B(-۲,-۲)$ و $C(۴,۲)$ رأس‌های مثلث باشند؛ الف) معادلهٔ ارتفاع BH را بیابید. ب) طول ارتفاع BH را بیابید. پ) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.	صفحهٔ ۸- مکمل مثال (چمستان- مبارکه- دی ۱۴۰۱) **(۱۳ بار تکرار)**
۲۸. فاصلهٔ دو خط موازی $-۴x+۳y=۴$ و $۸x-۶y+۲=۰$ چقدر است؟	صفحهٔ ۹- مرتبط با تمرین ۸ (شیراز- ایده‌آل پارسی- خرداد ۱۴۰۱) **(۱۰ بار تکرار)**
۲۹. دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟	صفحهٔ ۹- مرتبط با تمرین ۸ (کرمان- شهید مهدوی- خرداد ۱۴۰۱) **(۱۰ بار تکرار)**
۳۰. فاصلهٔ بین دو خط موازی به معادلات $-۶y+۴x+۳=۰$ و $-۳y+۲x+a=۰$ برابر $\sqrt{۱۳}$ می‌باشد. مقادیر a را به دست آورید.	صفحهٔ ۹- مکمل تمرین ۸ (مشهد- مبین- خرداد ۱۴۰۱) **(۷ بار تکرار)**

۲ معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ ۲

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۸ ریاضی ۲

۱ روش تغییر متغیر برای حل معادله

راهبرد حل سؤال امتحانی ۳۱

تیپ ۱ امتحانی حل معادله با تغییر متغیر: برای حل بعضی از معادلات چندجمله‌ای با درجات بالاتر از ۲، بر حسب x، با دقت در معادله، می‌توان عبارت مناسبی بر حسب متغیر جدید مانند u را انتخاب و معادلهٔ جدیدی را تشکیل داد که بر حسب u از درجهٔ دوم باشد. با حل معادلهٔ جدید، مقادیر u را یافته و از آنجا مقادیر x را می‌یابیم.

نمونهٔ امتحانی: معادلات زیر را حل کنید.

(b) $(۴-x^۲)^۲-۲(۴-x^۲)-۱۵=۰$

حل: با تغییر متغیر $۴-x^۲=u$ خواهیم داشت:

$u^۲-۲u-۱۵=۰ \Rightarrow (u-۵)(u+۳)=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} u=۵ \Rightarrow ۴-x^۲=۵ \Rightarrow x^۲=-۱ & \text{جواب ندارد.} \\ u=-۳ \Rightarrow ۴-x^۲=-۳ \Rightarrow x^۲=۷ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۷} \end{cases}$

(a) $x^۴-۱۳x^۲+۳۶=۰$

حل: با تغییر متغیر $x^۲=u$ خواهیم داشت:

$u^۲-۱۳u+۳۶=۰ \Rightarrow (u-۹)(u-۴)=۰$

$\Rightarrow \begin{cases} u-۹=۰ \Rightarrow u=۹ \Rightarrow x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm۳ \\ u-۴=۰ \Rightarrow u=۴ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm۲ \end{cases}$

۲ مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

راهبرد حل سؤال‌های امتحانی ۳۲ تا ۳۷

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$، اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله باشند، آنگاه:

حاصلضرب ریشه‌ها: $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$ مجموع ریشه‌ها: $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

توجه در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$:

۱ اگر دو ریشه قرینهٔ هم باشند، آنگاه $b=۰$ است. (یعنی $\alpha=-\beta$ یا $\alpha+\beta=۰$، پس: $b=۰$)

۲ اگر دو ریشه معکوس هم باشند، آنگاه $a=c$ است. (یعنی $\alpha=\frac{۱}{\beta}$ یا $\alpha\beta=۱$، پس: $\frac{c}{a}=۱$).

در هر دو حالت باید $\Delta>۰$ باشد تا هر دو ریشه حقیقی باشند.

نمونهٔ امتحانی: اگر معادلهٔ $x^۲-(m-۲)x-۴m=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و قرینه باشد، این دو ریشه را بیابید.

حل: باید ضریب x، صفر باشد، یعنی $m-۲=۰$، بنابراین $m=۲$. با قرار دادن این مقدار m در معادله، خواهیم داشت:

$$x^۲-(m-۲)x-۴m=۰ \xrightarrow{m=۲} x^۲-۴\times۲=۰ \Rightarrow x^۲-۸=۰ \Rightarrow x^۲=۸ \Rightarrow x=\pm۲\sqrt{۲}$$

تیپ ۲ امتحانی روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله: در معادلهٔ درجهٔ دوم گاهی به حالت‌هایی برمی‌خوریم که رابطهٔ جبری بین دو ریشه، جزو خواستهٔ (دادهٔ) مسئله است. در این حالت معمولاً استفاده از روش‌های زیر راهگشاست.

۱ رابطهٔ خواسته شده بین دو ریشه متقارن است: رابطهٔ متقارن، رابطه‌ای است که اگر جای دو ریشه را عوض کنیم عبارت تغییری نکند. نمونه‌های روابط متقارن عبارت‌اند از: $\alpha^۲+\beta^۲$ یا $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$. در این حالت برای حل مسأله از فاکتورگیری یا اتحادها استفاده کرده و عبارت خواسته را برحسب S و P بیان می‌کنیم.

نمونهٔ امتحانی: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+۵x-۸=۰$ باشند، حاصل $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ را بیابید.

حل: ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۵$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۸$.

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} =\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{استفاده از اتحاد } a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab \text{ در صورت}} =\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(-۵)^۲-۲(-۸)}{-۸}=\frac{۲۵+۱۶}{-۸}=-\frac{۴۱}{۸}$$

۲ رابطهٔ داده شده بین دو ریشه متقارن نباشد: وقتی رابطه‌ای غیرمتقارن بین دو ریشه داده می‌شود (به عنوان مثال: $\alpha=۴\beta-۳$ یا $\alpha=۲\beta$) و مجهولی در معادله خواسته شده باشد (به عنوان مثال، k ، m ...)، برای یافتن این مجهول، با تشکیل مجموع (یا ضرب) دو ریشه در رابطه، یک ریشهٔ معادله را می‌یابیم، سپس با قرار دادن این ریشه در خود معادله، مجهول معادله را پیدا می‌کنیم.

به عنوان مثال اگر رابطهٔ $\alpha=۴\beta-۳$ بین دو ریشه داده باشد، کافی است β را به طرفین تساوی اضافه کنیم: $\alpha+\beta=۵\beta-۳$،

همچنین اگر رابطهٔ $\alpha=۲\beta$ بین دو ریشه داده باشد، کافی است طرفین تساوی را در β ضرب کنیم: $\alpha\beta=۲\beta^۲$.

نمونهٔ امتحانی: در معادلهٔ $x^۲-۶x+m=۰$ یک ریشهٔ معادله از سه برابر دیگری، ۲ واحد بیشتر است. m را بیابید.

حل: اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، آنگاه طبق فرض $\alpha=۳\beta+۲$. باید مقدار یک ریشه را بیابیم.

$$\alpha=۳\beta+۲ \xrightarrow{\text{به طرفین تساوی } \beta \text{ را اضافه می‌کنیم.}} \alpha+\beta=۴\beta+۲ \xrightarrow{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۶} ۶=۴\beta+۲ \Rightarrow \beta=۱$$

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس: $۱^۲-۶\times۱+m=۰ \Rightarrow ۱-۶+m=۰ \Rightarrow m=۵$

۳ تشکیل معادلهٔ درجه ۲ با استفاده از S و P

راهبرد حل سؤال‌های امتحانی ۳۸ تا ۴۰

تیپ ۳ امتحانی تشکیل معادله با داشتن ریشه‌ها: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، می‌توانیم معادلهٔ آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=۰ \Rightarrow x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰ \Rightarrow \boxed{x^۲-Sx+P=۰}$$

نمونهٔ امتحانی: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۳+\sqrt{۲}$ و $۳-\sqrt{۲}$ باشد.

حل: کافی است مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را یافته و در معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ قرار دهیم. بنابراین:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=(۳+\sqrt{۲})+(۳-\sqrt{۲})=۶ \\ P=\alpha\beta=(۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})=۹-۲=۷ \end{cases} \xrightarrow{S=۶,\ P=۷} x^۲-۶x+۷=۰$$

تیپ ۴ امتحانی تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم جدید: در این حالت دو معادله داریم که ریشه‌های یک معادله، برحسب ریشه‌های معادلهٔ دیگر داده می‌شوند. ریشه‌های معادلهٔ اول α و β در نظر گرفته می‌شوند و ریشه‌های معادلهٔ جدید بر حسب α و β نوشته می‌شوند. برای یافتن معادلهٔ جدید، مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را S' و P' نامیده و آنها را برحسب S و P معادلهٔ اول یافته و سپس معادلهٔ جدید را به صورت $x^۲-S'x+P'=۰$ می‌نویسیم.

نمونهٔ امتحانی: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش از سه برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$، یک واحد کمتر باشد.

حل: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$ باشند، آنگاه:

$$x^۲-x-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۱}{۱}=۱ \\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۱}=-۱ \end{cases}$$

سه برابر ریشه‌ها یعنی ۳α و ۳β و یک واحد کمتر از سه برابر یعنی $۳\alpha-۱$ و $۳\beta-۱$، بنابراین:

$$\begin{cases} S'=(۳\alpha-۱)+(۳\beta-۱)=۳(\alpha+\beta)-۲=۳\times۱-۲=۱ \\ P'=(۳\alpha-۱)(۳\beta-۱)=۹\alpha\beta-۳(\alpha+\beta)+۱=۹(-۱)-۳\times۱+۱=-۱۱ \end{cases} \xrightarrow{S'=۱,\ P'=-۱۱} x^۲-x-۱۱=۰$$

سؤال‌های امتحانی

۲ پیمانه — ۱۰ سؤال — پیمانه‌های ۷ و ۸

۱ روش تغییر متغیر برای حل معادله — صفحهٔ ۱۱ و تمرین‌های صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی

۳۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4+x^2-12=0$

ب) $8x^6-7x^3-1=0$

پ) $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$

مرجع: صفحهٔ ۱۸– مرتبط با تمرین ۱
(الف– قزوین– علامه طباطبایی– خرداد ۱۴۰۱)
(ب– شیراز– امتیاز– دی ۱۴۰۲)
(۲۰ بار تکرار)
(پ– تهران– دانشفر– دی ۱۴۰۲)
(۱۰ بار تکرار)

۲ مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲ — صفحه‌های ۱۲ و ۱۳ و تمرین‌های صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی

۳۲. در جاهای خالی (الف) تا (پ) عبارت یا عدد مناسب قرار دهید و درستی یا نادرستی عبارت (ت) را مشخص کنید.

الف) در معادلهٔ $-2x^2+x+5=0$، مجموع ریشه‌ها برابر با .... است.

ب) حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+7x-8=0$ برابر با .... است.

پ) ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+(m-2)x-m=0$ در صورتی قرینهٔ یکدیگرند که m مساوی .... باشد.

ت) معادلهٔ $x^2+6x+7=0$ دو ریشهٔ مثبت دارد. (۰/۲۵ نمره)

صفحه‌های ۱۲ و ۱۳– مرتبط با فعالیت و کار در کلاس اول
(الف– اهواز– شهدای ملی حفاری– دی ۱۴۰۱)
(ب– ساری– مرحوم مفیدی– خرداد ۱۴۰۱)
(۷ بار تکرار)
(پ– بوشهر– خلیج فارس– خرداد ۱۴۰۱)
(۵ بار تکرار)
ت– امتحان نهایی– غایب موجه– خرداد ۱۴۰۲
(۵ بار تکرار)

۳۳. اگر حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+7mx+2m-1=0$ برابر ۳ باشد:

الف) مقدار m را بیابید.

ب) مجموع ریشه‌ها را به دست آورید.

صفحهٔ ۱۲– مکمل فعالیت ۲
(رفسنجان– شهید رجایی– دی ۱۴۰۱)
(۱۰ بار تکرار)

۳۴. به ازای چه مقدار m جواب‌های معادلهٔ $mx^2+3x+m^2=2$ معکوس یکدیگرند؟

صفحهٔ ۱۲– مکمل فعالیت ۲
(بجنورد– آرمیتا مصلی‌نژاد– خرداد ۱۴۰۱)
(۷ بار تکرار)

۳۵. در معادلهٔ $4x^2-16x+m=0$ مقدار m را طوری به دست آورید که یکی از ریشه‌ها ۲ واحد بزرگ‌تر از ریشهٔ دیگر باشد.

صفحهٔ ۱۳– مکمل کار در کلاس ۱
(کرج– سلاله– خرداد ۱۴۰۱)
(۱۰ بار تکرار)

۳۶. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+10x+2=0$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$

ب) $\alpha^2+\beta^2$

صفحهٔ ۱۳– مکمل کار در کلاس ۱
(تهران– دکتر حسابی– دی ۱۴۰۱)
(۱۵ بار تکرار)

۳۷. در معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل $ax^2+bx+c=0$، اگر یکی از ریشه‌های این معادله برابر ۲ باشد و $c=2b$، در این صورت ریشهٔ دیگر این معادله را بیابید. (۱ نمره)

صفحهٔ ۱۳– مکمل کار در کلاس اول
شبه نهایی– اردیبهشت ۱۴۰۳ (عصر)
(۵ بار تکرار)

۳ تشکیل معادلهٔ درجه ۲ با استفاده از S و P — صفحه‌های ۱۲ و ۱۳ و تمرین‌های صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی

۳۸. معادله‌های درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن‌ها، اعداد داده شده باشند.

الف) $6+\sqrt{2}$ و $6-\sqrt{2}$

ب) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ و $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$

صفحهٔ ۱۸– مرتبط با تمرین ۲
(الف– قزوین– علامه طباطبایی– خرداد ۱۴۰۱)
صفحهٔ ۱۳– مرتبط با کار در کلاس ۳
(ب– سبزوار– عصر دانش– دی ۱۴۰۲)
(۳۰ بار تکرار)

۳۹. دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها $-1/5$ و حاصلضربشان -7 باشد.

صفحهٔ ۱۳– مشابه کار در کلاس ۱
(کرمانشاه– فاطمیه– دی ۱۴۰۲)
(۵ بار تکرار)

۴۰. الف– معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ باشد.

ب– معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که هریک از ریشه‌هایش از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-1=0$ دو واحد بیشتر باشد.

صفحهٔ ۱۳– مکمل متن درس
(الف– ساوه– محراب– دی ۱۴۰۱)
(ب– کاشان– رویش– دی ۱۴۰۰)
(۱۷ بار تکرار)

پاسخ تشریحی هندسه تحلیلی و جبر، فصل اول

پاسخ تشریحی: فرزانه دانایی

۱. الف) درست است، زیرا:

$$۲x-۳y+۲=۰ \Rightarrow ۳y=۲x+۲ \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{شیب}: m=\frac{۲}{۳}$$

ب) نادرست است، زیرا هر دو خطی که شیب‌های نابرابر داشته باشند، متقاطع‌اند.

پ) درست است، شیب‌های دو خط عمود بر هم، عکس و قرینهٔ یکدیگرند، پس داریم:

$$۲y-۳x=۱ \Rightarrow ۲y=۳x+۱ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{شیب}: m=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \text{شیب خط عمود}: m'=-\frac{۱}{m}=-\frac{۲}{۳}$$

ت) درست است (۰/۲۵)، زیرا حاصلضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم -۱ است و داریم:

$$\begin{cases} x+۲y=۱ \to m=-\frac{۱}{۲} \\ y=۲x+۳ \to m'=۲ \end{cases} \Rightarrow mm'=۲(-\frac{۱}{۲})=-۱$$

---

۲. الف) عرض از مبدأ

ب) $y=۴x-۵$

معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۱,-۱)$ و $(۲,۳)$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط}: m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۳-(-۱)}{۲-۱}=۴$$

$$\text{معادلهٔ خط}: y-y_۱=m(x-x_۱) \Rightarrow y-(-۱)=۴(x-۱)$$

$$\Rightarrow y+۱=۴x-۴ \Rightarrow y=۴x-۵$$

پ) شیب‌های برابر

---

۳. اگر سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط قرار داشته باشند، آنگاه داریم: $m_{AB}=m_{BC}$. بنابراین برای سه نقطهٔ $A(-۳,۲)$، $B(۱,-۲)$ و $C(۹,-۱۰)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۲-۲}{۱-(-۳)}=\frac{-۴}{۴}=-۱ \\ m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-۱۰-(-۲)}{۹-۱}=\frac{-۸}{۸}=-۱ \end{cases}$$

بنابراین $m_{AB}=m_{BC}$، پس نقاط A، B و C روی یک خط قرار دارند.

---

۴. برای تعیین وضعیت دو خط نسبت به هم، باید شیب خطوط را بیابیم؛ اگر شیب‌ها برابر باشند، موازی‌اند. اگر حاصلضرب شیب‌ها برابر -۱ باشد، بر هم عمودند. اگر شیب‌ها نابرابر باشند، متقاطع‌اند.

الف) $L_۱: y=\frac{۱}{۲}x+۷ \to m_۱=\frac{۱}{۲}$

$$L_۲: x-۲y=۱ \Rightarrow ۲y=x-۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲} \to m_۲=\frac{۱}{۲}$$

$\Rightarrow m_۱=m_۲ \Rightarrow$ دو خط موازی‌اند.

ب) $L_۳: ۲x-y=۱ \Rightarrow y=۲x-۱ \to m_۳=۲$

$$L_۴: x+۲y=۶ \Rightarrow ۲y=-x+۶$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۳ \to m_۴=-\frac{۱}{۲}$$

$\Rightarrow m_۳m_۴=(۲)(-\frac{۱}{۲})=-۱ \Rightarrow$ دو خط بر هم عمودند.

پ) $L_۵: ۲y=۳x+۵ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+\frac{۵}{۲} \to m_۵=\frac{۳}{۲}$

$$L_۶: ۲x-۳y+۳=۰ \Rightarrow ۳y=۲x+۳$$

$$\Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+۱ \to m_۶=\frac{۲}{۳}$$

$\Rightarrow m_۵ \neq m_۶ \Rightarrow$ دو خط متقاطع‌اند.

---

۵. شیب‌های دو خط موازی با هم برابر است. ابتدا شیب خط $۲y-۴x=۱$ را می‌یابیم:

$$۲y-۴x=۱ \Rightarrow ۲y=۴x+۱ \Rightarrow y=۲x+\frac{۱}{۲} \to m=۲$$

بنابراین شیب خط مورد نظر برابر با $m=۲$ است.

راه حل اول: معادلهٔ خط مورد نظر را به صورت $y=mx+h$ در نظر می‌گیریم. بنابراین: $y=۲x+h$ این خط از نقطهٔ $A(۰,۲)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$y_A=۲x_A+h \Rightarrow ۲=۲\times۰+h \Rightarrow h=۲$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ خط}: y=۲x+۲$$

راه حل دوم: خط مورد نظر از نقطهٔ $A(۰,۲)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-۲=۲(x-۰) \Rightarrow y=۲x+۲$$

---

۶. حاصلضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم، برابر با -۱ است. ابتدا شیب خط $۳x-۵y=۴$ را می‌یابیم:

$$۳x-۵y=۴ \Rightarrow ۵y=۳x-۴ \Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x-\frac{۴}{۵} \to m=\frac{۳}{۵}$$

اگر m' شیب خط مورد نظر باشد، داریم:

$$mm'=-۱ \Rightarrow m'=\frac{-۱}{m}=\frac{-۱}{\frac{۳}{۵}}=-\frac{۵}{۳}$$

بنابراین شیب خط $m'=-\frac{۵}{۳}$ است و از نقطهٔ $A(۳,۴)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ خط مورد نظر به صورت زیر است:

$$y-y_A=m'(x-x_A) \Rightarrow y-۴=-\frac{۵}{۳}(x-۳)$$

$$\Rightarrow y-۴=-\frac{۵}{۳}x+۵ \Rightarrow y=-\frac{۵}{۳}x+۹$$

---

۷. الف) شیب‌های دو خط موازی با هم برابر است، بنابراین:

$$L: ۲y-۳x=۱ \Rightarrow ۲y=۳x+۱ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲} \to m_L=\frac{۳}{۲}$$

$$m_T=m_L \Rightarrow m_T=\frac{۳}{۲}$$

ب) حاصلضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم -۱ است، بنابراین:

$$m_Tm_L=-۱ \Rightarrow m_T=\frac{-۱}{m_L}=-\frac{۲}{۳}$$

---

۸. حاصلضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم -1 است، بنابراین:

$$\begin{cases} y=(2a+1)x+1 \to m=2a+1 \\ (a+1)y=x+2 \Rightarrow y=\dfrac{1}{a+1}x+\dfrac{2}{a+1} \to m'=\dfrac{1}{a+1} \end{cases}$$

$$mm'=-1 \Rightarrow (2a+1)(\frac{1}{a+1})=-1 \Rightarrow 2a+1=-(a+1)$$

$$\Rightarrow 2a+1=-a-1 \Rightarrow 3a=-2 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$$

---

۹. ابتدا معادلهٔ خط d_1 را می‌یابیم. این خط از دو نقطهٔ $A(0,4)$ و $B(2,0)$ می‌گذرد، شیب آن برابر است با:

$$m_1=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-4}{2-0}=\frac{-4}{2}=-2$$

بنابراین شیب خط d_1 برابر با $m_1=-2$ است و از نقطهٔ $A(0,4)$ نیز می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$d_1: y-y_A=m_1(x-x_A) \Rightarrow y-4=-2(x-0)$$

$$\Rightarrow y=-2x+4$$

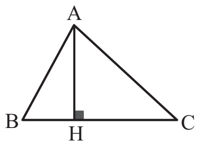
خط d_2 بر خط d_1 عمود است، بنابراین حاصلضرب شیب‌هایشان -1 است:

$$m_1m_2=-1 \Rightarrow m_2=\frac{-1}{m_1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

بنابراین شیب خط d_2 برابر با $m_2=\frac{1}{2}$ است و از مبدأ مختصات می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به صورت $y=\frac{1}{2}x$ است.

---

۱۰. شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید. ارتفاع AH از نقطهٔ A گذشته و بر ضلع BC عمود است.



حاصلضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر با -1 است، پس ابتدا شیب خط BC را به دست می‌آوریم:

$B(-1,2)$, $C(5,0)$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{0-2}{5-(-1)}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

بنابراین شیب خط AH برابر است با:

$$m_{BC}.m_{AH}=-1 \Rightarrow m_{AH}=\frac{-1}{m_{BC}}=\frac{-1}{-\frac{1}{3}}=3$$

پس شیب خط AH برابر با $m_{AH}=3$ است و از نقطهٔ $A(1,4)$ نیز می‌گذرد، بنابراین معادلهٔ آن به صورت زیر است:

$$AH: y-y_A=m_{AH}(x-x_A) \Rightarrow y-4=3(x-1)$$

$$\Rightarrow y-4=3x-3 \Rightarrow y=3x+1$$

---

۱۱. الف) درست است.

ب) ۵

فاصلهٔ نقطهٔ $A(3,-4)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

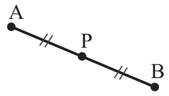
$$AO=\sqrt{x_A^2+y_A^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

پ) $A'(2,-3)$

قرینهٔ نقطهٔ $A(-2,3)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر است با:

$$A'(-x_A,-y_A)=(-(-2),-3)=(2,-3)$$

ت) $\alpha=0$ و $\beta=\frac{5}{2}$



در شکل فرضی مقابل، نقطهٔ B قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ P است، پس نقطهٔ P وسط پاره‌خط AB است و داریم:

$A(1,2)$, $B(-1,3)$, $P(\alpha,\beta)$

$$P(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})=(\frac{1+(-1)}{2},\frac{2+3}{2})=(0,\frac{5}{2})$$

$$\Rightarrow P(\alpha,\beta)=(0,\frac{5}{2}) \Rightarrow \alpha=0 \ , \ \beta=\frac{5}{2}$$

---

۱۲. طول اضلاع را به کمک فرمول فاصلهٔ دو نقطه می‌یابیم:

$A(1,2)$, $B(2,5)$, $C(4,1)$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{(2-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$$
$$=\sqrt{(4-2)^2+(1-5)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$
$$=\sqrt{(4-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

از آنجا که $AB=AC$، پس مثلث متساوی‌الساقین است. همچنین $BC^2=AB^2+AC^2$، بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است.

---

۱۳. مختصات نقطه روی محور طول‌ها را به صورت $B(x,0)$ در نظر می‌گیریم، فاصلهٔ آن از نقطهٔ $A(2,3)$ باید برابر با ۵ شود، بنابراین:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$\Rightarrow 5=\sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 25=(x-2)^2+9 \Rightarrow (x-2)^2=25-9=16$$

$$\Rightarrow x-2=\pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x-2=4 \Rightarrow x=6 \\ x-2=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

بنابراین فاصلهٔ دو نقطهٔ $(6,0)$ و $(-2,0)$ روی محور طول‌ها از نقطهٔ $(2,3)$ برابر با ۵ است.

---

۱۴. ابتدا مختصات نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را می‌یابیم:

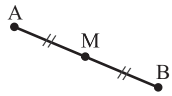
$A(2,4)$, $B(-2,2)$

$$M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})=(\frac{2+(-2)}{2},\frac{4+2}{2})=(0,3)$$

فاصلهٔ نقطهٔ $C(1,4)$ از نقطهٔ $M(0,3)$ برابر است با:

$$CM=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}$$
$$=\sqrt{(0-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

۱۵. در شکل فرضی مقابل، نقطهٔ B قرینهٔ A نسبت به نقطهٔ M است.



بنابراین نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB قرار دارد و داریم:

$$A(-۴,۱)\quad,\quad M(۱,۵)\quad,\quad B(x_B,y_B)$$

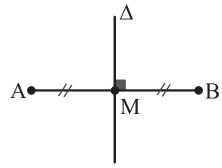
$$AB \text{ وسط } M: M\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)=(۱,۵)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_A+x_B}{۲}=۱\Rightarrow\dfrac{-۴+x_B}{۲}=۱\Rightarrow x_B=۲+۴=۶\\[2mm]\dfrac{y_A+y_B}{۲}=۵\Rightarrow\dfrac{۱+y_B}{۲}=۵\Rightarrow y_B=۱۰-۱=۹\end{cases}$$

$$\Rightarrow B(۶,۹)$$

---

۱۶. با توجه به شکل فرضی مقابل، عمود منصف پاره‌خط AB از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد و بر آن عمود است.



حاصلضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر با -۱ است، بنابراین ابتدا شیب پاره‌خط AB و سپس شیب خط Δ را می‌یابیم:

$$A(۴,۳)\quad,\quad B(۲,-۳)$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۳-۳}{۲-۴}=\frac{-۶}{-۲}=۳$$

$$m_\Delta m_{AB}=-۱\Rightarrow m_\Delta=\frac{-۱}{m_{AB}}=\frac{-۱}{۳}$$

نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB قرار دارد، بنابراین:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)=\left(\frac{۴+۲}{۲},\frac{۳+(-۳)}{۲}\right)=(۳,۰)$$

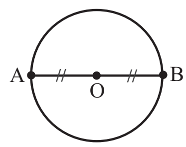
بنابراین عمود منصف AB خطی با شیب $m_\Delta=-\frac{۱}{۳}$ است که از نقطهٔ $M(۳,۰)$ می‌گذرد:

$$y-y_M=m_\Delta(x-x_M)\Rightarrow y-۰=-\frac{۱}{۳}(x-۳)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+۱$$

---

۱۷. با توجه به شکل مقابل، اگر نقاط A و B دو سر یک قطر دایره باشند، آنگاه مرکز دایره وسط AB قرار دارد. بنابراین داریم:



$$A(۲,-۲)\quad,\quad B(۴,۴)$$

$$O\left(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲}\right)=\left(\frac{۲+۴}{۲},\frac{-۲+۴}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow O=(۳,۱)\qquad (۰/۲۵)$$

حال اندازهٔ شعاع را می‌یابیم:

$$R=OA=\sqrt{(x_A-x_O)^۲+(y_A-y_O)^۲}$$

$$=\sqrt{(۲-۳)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}\qquad (۰/۵)$$

---

۱۸. الف) مختصات نقطهٔ M وسط ضلع BC به صورت زیر است:

$$B(۳,۴)\quad,\quad C(۵,۰)$$

$$M\left(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲}\right)=\left(\frac{۳+۵}{۲},\frac{۴+۰}{۲}\right)=(۴,۲)$$

ب) طول میانهٔ AM برابر با فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(۲,۱)$ و $M(۴,۲)$ است:

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}$$

$$=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

پ) معادلهٔ میانهٔ AM، معادلهٔ خطی است که از دو نقطهٔ $A(۲,۱)$ و $M(۴,۲)$ می‌گذرد:

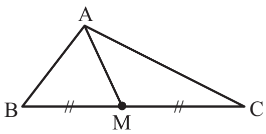
$$AM \text{ شیب خط}: m=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{۲-۱}{۴-۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$AM \text{ معادلهٔ}: y-y_A=m(x-x_A)$$

$$\Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۲)\Rightarrow y-۱=\frac{۱}{۲}x-۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x$$

---

۱۹. الف) مطابق شکل فرضی مقابل، M وسط ضلع BC قرار دارد، پس مختصات نقطهٔ M برابر است با:



$$B(۳,۱)\quad,\quad C(۷,۱)$$

$$M\left(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲}\right)=\left(\frac{۳+۷}{۲},\frac{۱+۱}{۲}\right)=(۵,۱)$$

طول میانهٔ AM برابر با فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(۱,۹)$ و $M(۵,۱)$ است:

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}$$

$$=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۱-۹)^۲}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

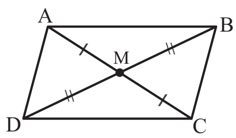
ب) عمود منصف ضلع BC خطی است که از وسط ضلع BC می‌گذرد و بر ضلع BC عمود است، پس ابتدا شیب ضلع BC را به دست می‌آوریم:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{۱-۱}{۷-۳}=۰$$

شیب ضلع BC صفر است، پس ضلع BC یک خط افقی است که خط عمود بر آن یک خط عمودی به معادلهٔ $x=k$ است. عمود منصف از وسط ضلع BC یعنی نقطهٔ $M(۵,۱)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ عمود منصف به صورت $x=۵$ است.

---

۲۰. در شکل فرضی مقابل، قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، بنابراین نقطهٔ M وسط قطر AC و همچنین وسط قطر BD قرار دارد. بنابراین داریم:



$$A(۲,-۳)\quad,\quad B(۰,۱)\quad,\quad C(۶,۳)$$

$$\begin{cases}AC \text{ وسط } M: M\left(\dfrac{x_A+x_C}{۲},\dfrac{y_A+y_C}{۲}\right)\\[2mm]BD \text{ وسط } M: M\left(\dfrac{x_B+x_D}{۲},\dfrac{y_B+y_D}{۲}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_A+x_C}{۲}=\dfrac{x_B+x_D}{۲}\\[2mm]\dfrac{y_A+y_C}{۲}=\dfrac{y_B+y_D}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲+۶=۰+x_D\Rightarrow x_D=۸\\-۳+۳=۱+y_D\Rightarrow y_D=-۱\end{cases}\Rightarrow D(۸,-۱)$$

۲۱. فاصلهٔ نقطهٔ (x_0,y_0) از خط $ax+by+c=0$ از رابطهٔ $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$A(2,-3)\ ,\ y=4x-1 \to 4x-y-1=0$$

$$d=\frac{|4x_A-y_A-1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|4\times 2-(-3)-1|}{\sqrt{16+1}}=\frac{10}{\sqrt{17}}$$

۲۲. فاصلهٔ نقطهٔ $(x_0\ ,\ y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ از رابطهٔ $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به دست می‌آید، بنابراین:

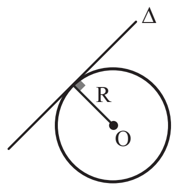
$$A(3\ ,1)\ ,\ 5x+12y=k \to 5x+12y-k=0$$

$$d=\frac{|5x_A+12y_A-k|}{\sqrt{5^2+12^2}} \Rightarrow 2=\frac{|5\times 3+12\times 1-k|}{13}$$

$$\Rightarrow |15+12-k|=2\times 13 \Rightarrow |27-k|=26$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 27-k=26 \Rightarrow k=27-26=1 \\ 27-k=-26 \Rightarrow k=27+26=53 \end{cases}$$

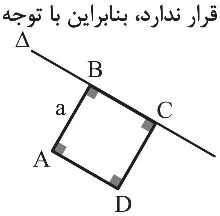
۲۳. در شکل فرضی مقابل، خط Δ بر دایره مماس است. خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس، عمود است. بنابراین شعاع دایره برابر با فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس است، پس داریم:



$$O(1\ ,2)\ ,\ 4x+3y=-10 \to 4x+3y+10=0$$

$$R=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{(0/25)}}=\frac{|4(1)+3(2)+10|}{\underbrace{\sqrt{4^2+3^2}}_{(0/5)}}=\frac{20}{5}=4\ (0/25)$$

۲۴. نقطهٔ $A(3\ ,0)$ روی خط $y=2x-1$ قرار ندارد، بنابراین با توجه به شکل فرضی مقابل، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط برابر با ضلع مربع است. بنابراین طول ضلع مربع برابر است با:



$$A(3\ ,0)\ ,\ y=2x-1 \to 2x-y-1=0$$

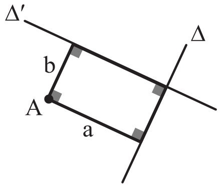
طول ضلع مربع : $a=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(0/25)$

$$=\frac{|2(3)-0-1|}{\underbrace{\sqrt{2^2+(-1)^2}}_{(0/5)}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\ (0/25)$$

مساحت مربع $=a^2=(\sqrt{5})^2=5$ $(0/25)$

۲۵. شیب خط $2y+x=6$ برابر با $m=-\frac{1}{2}$ و شیب خط $2x-y=7$ برابر با $m'=2$ است، بنابراین $mm'=-1$ است، پس این دو خط بر هم عمودند. از طرفی رأس $A(8,5)$ در معادلهٔ هیچ کدام از این دو خط صدق نمی‌کند.

پس شکل فرضی مقابل را خواهیم داشت. فاصلهٔ نقطهٔ A از این دو خط، اضلاع مستطیل را می‌دهد، بنابراین:



$$A(8,5)\ ,\ x+2y-6=0\ ,\ 2x-y-7=0$$

$$a=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|8+2\times 5-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$b=\frac{|a'x_0+b'y_0+c'|}{\sqrt{a'^2+b'^2}}=\frac{|2\times 8-5-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

مساحت مستطیل $=ab=\frac{12}{\sqrt{5}}\times\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{48}{5}$

۲۶. مختصات نقاط روی خط $y=2x-3$ را به صورت $A(x,2x-3)$ در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط $5x+2y-11=0$ برابر با $\sqrt{29}$ است، بنابراین داریم:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \sqrt{29}=\frac{|5x_A+2y_A-11|}{\sqrt{5^2+2^2}}$$

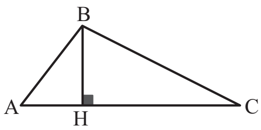
$$\Rightarrow \sqrt{29}=\frac{|5x+\overbrace{2(2x-3)}^{4x-6}-11|}{\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow |9x-17|=\sqrt{29}\times\sqrt{29}=29 \Rightarrow 9x-17=\pm 29$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x-17=29 \Rightarrow x=\frac{17+29}{9}=\frac{46}{9} \\ 9x-17=-29 \Rightarrow x=\frac{17-29}{9}=\frac{-12}{9}=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1(\frac{46}{9},2\times\frac{46}{9}-3)=(\frac{46}{9},\frac{65}{9}) \\ A_2(-\frac{4}{3},2\times\frac{-4}{3}-3)=(-\frac{4}{3},-\frac{17}{3}) \end{cases}$$

۲۷. الف) با توجه به شکل فرضی مقابل، ارتفاع BH خطی است که از نقطهٔ B می‌گذرد و بر ضلع AC عمود است.



پس شیب ارتفاع BH، قرینه و معکوس شیب ضلع AC است، بنابراین خواهیم داشت:

$$A(1,4)\ ,\ B(-2,-2)\ ,\ C(4,2)$$

شیب ضلع AC : $m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{2-4}{4-1}=-\frac{2}{3}$

شیب ارتفاع BH : $m_{BH}=-\frac{1}{m_{AC}}=-\frac{1}{-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

معادلهٔ BH : $y-y_B=m_{BH}(x-x_B)$

$$\Rightarrow y-(-2)=\frac{3}{2}(x-(-2)) \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+1$$

ب) طول ارتفاع BH برابر با فاصلهٔ نقطهٔ B تا ضلع AC است، پس ابتدا معادلهٔ ضلع AC را به دست می‌آوریم:

$$y-y_A=m_{AC}(x-x_A) \Rightarrow y-4=-\frac{2}{3}(x-1)$$

$$\xrightarrow{\times ۳} ۳y-۱۲=-۲x+۲$$
$$\Rightarrow AC: ۲x+۳y-۱۴=۰$$

فاصلهٔ نقطهٔ $B(-۲,-۲)$ از خط $۲x+۳y-۱۴=۰$ برابر است با:

$$BH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲\times(-۲)+۳\times(-۲)-۱۴|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۲۴}{\sqrt{۱۳}}$$

پ) مساحت مثلث ABC برابر است با: $\frac{BH\times AC}{۲}$، پس ابتدا اندازهٔ ضلع AC را می‌یابیم:

$$A(۱,۴)\quad,\quad C(۴,۲)$$
$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^۲+(y_C-y_A)^۲}$$
$$=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۲-۴)^۲}=\sqrt{۳^۲+۲^۲}=\sqrt{۱۳}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{BH\times AC}{۲}=\frac{\frac{۲۴}{\sqrt{۱۳}}\times\sqrt{۱۳}}{۲}=۱۲$$

---

۲۸. برای به دست آوردن فاصلهٔ دو خط موازی کافی است یک نقطهٔ دلخواه روی یک خط در نظر گرفته و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به دست آوریم. در معادلهٔ خط $-۴x+۳y=۴$ اگر $y=۰$ باشد، $x=-۱$ خواهد بود، پس فاصلهٔ نقطهٔ $(-۱,۰)$ از خط $۸x-۶y+۲=۰$ را به دست می آوریم:

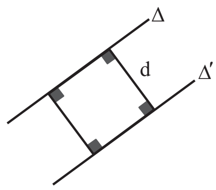
$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۸(-۱)-۶(۰)+۲|}{\sqrt{۸^۲+(-۶)^۲}}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

---

۲۹. شیب دو خط $۲x-۲y=۳$ و $y=x+۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}۲x-۲y=۳\Rightarrow y=x-\frac{۳}{۲}\Rightarrow m_۱=۱\\ y=x+۱\quad\Rightarrow m_۲=۱\end{cases}$$

شیب‌ها برابرند، پس دو خط موازی‌اند.
با توجه به شکل فرضی مقابل، طول ضلع مربع برابر است با فاصلهٔ دو خط موازی.



برای به دست آوردن فاصلهٔ این دو خط موازی، روی خط $y=x+۱$، نقطهٔ $(۰,۱)$ را در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ آن را از خط $۲x-۲y-۳=۰$ می‌یابیم:

ضلع مربع: $d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲\times۰-۲\times۱-۳|}{\sqrt{۲^۲+(-۲)^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۸}}$

مساحت مربع: $d^۲=(\frac{۵}{\sqrt{۸}})^۲=\frac{۲۵}{۸}$

---

۳۰. ابتدا یک نقطهٔ دلخواه روی خط $-۶y+۴x+۳=۰$ در نظر می‌گیریم؛ اگر $x=۰$ باشد، آنگاه $y=\frac{۱}{۲}$ خواهد بود. فاصلهٔ دو خط موازی برابر با $\sqrt{۱۳}$ است، بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ $(۰,\frac{۱}{۲})$ از خط $۲x-۳y+a=۰$ برابر با $\sqrt{۱۳}$ است.

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\Rightarrow\sqrt{۱۳}=\frac{|۲\times۰-۳\times\frac{۱}{۲}+a|}{\sqrt{۲^۲+(-۳)^۲}}$$
$$\Rightarrow\sqrt{۱۳}=\frac{|-\frac{۳}{۲}+a|}{\sqrt{۱۳}}\Rightarrow|a-\frac{۳}{۲}|=\sqrt{۱۳}\times\sqrt{۱۳}=۱۳$$
$$\Rightarrow a-\frac{۳}{۲}=\pm۱۳$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a-\frac{۳}{۲}=۱۳\Rightarrow a=۱۳+\frac{۳}{۲}=\frac{۲۹}{۲}\\ a-\frac{۳}{۲}=-۱۳\Rightarrow a=-۱۳+\frac{۳}{۲}=-\frac{۲۳}{۲}\end{cases}$$

۳۱.

الف) $x^۴+x^۲-۱۲=۰$

با تغییر متغیر $x^۲=t$ خواهیم داشت:

$$t^۲+t-۱۲=۰\Rightarrow(t+۴)(t-۳)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}t+۴=۰\Rightarrow t=-۴\Rightarrow x^۲=-۴\rightarrow \text{جواب ندارد.}\\ t-۳=۰\Rightarrow t=۳\Rightarrow x^۲=۳\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}\end{cases}$$

ب) $۸x^۶-۷x^۳-۱=۰$

با تغییر متغیر $x^۳=t$ خواهیم داشت:

$$۸t^۲-۷t-۱=۰$$

مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه $t=۱$ و ریشهٔ دیگر $t=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۸}$ است، بنابراین:

$$\Rightarrow\begin{cases}t=۱\Rightarrow x^۳=۱\Rightarrow x=۱\\ t=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow x^۳=-\frac{۱}{۸}\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

پ) $(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰$

با تغییر متغیر $x^۲+x=t$ خواهیم داشت:

$$t^۲-۱۸t+۷۲=۰\Rightarrow(t-۶)(t-۱۲)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}t-۶=۰\Rightarrow t=۶\Rightarrow x^۲+x=۶\\ t-۱۲=۰\Rightarrow t=۱۲\Rightarrow x^۲+x=۱۲\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x^۲+x-۶=۰\Rightarrow(x+۳)(x-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۳\\x=۲\end{cases}\\ x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow(x+۴)(x-۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۴\\x=۳\end{cases}\end{cases}$$

---

۳۲. الف) $\frac{۱}{۲}$

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$، مجموع ریشه‌ها برابر با $-\frac{b}{a}$ است. پس برای معادلهٔ $-۲x^۲+x+۵=۰$ داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$$

ب) -۴

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، حاصلضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{c}{a}$ است. پس برای معادلهٔ $2x^2+7x-8=0$ داریم:

$$P=\frac{-8}{2}=-4 : \text{حاصلضرب ریشه‌ها}$$

پ) ۲

اگر ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگر باشند، مجموع آن‌ها صفر خواهد شد. ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+(m-2)x-m=0$ قرینهٔ یکدیگرند، پس داریم:

$$S=-\frac{b}{a}=0\Rightarrow -\frac{m-2}{3}=0\Rightarrow m=2 : \text{مجموع ریشه‌ها}$$

ت) نادرست است $(0/25)$.

از آنجا که $\Delta>0$ است، پس معادله دو ریشه دارد. از طرفی حاصلضرب ریشه‌ها $P=\frac{c}{a}=7$ مثبت است، پس دو ریشه هم‌علامت‌اند. مجموع ریشه‌ها $S=-\frac{b}{a}=-6$ منفی است، پس هر دو ریشه منفی هستند.

---

۳۳. حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+7mx+2m-1=0$ برابر با ۳ است، پس داریم:

الف) $P=\frac{c}{a}\Rightarrow 3=\frac{2m-1}{3}$: حاصلضرب ریشه‌ها

$$\Rightarrow 2m-1=9\Rightarrow 2m=10\Rightarrow m=5$$

ب) $S=-\frac{b}{a}=-\frac{7m}{3}=-\frac{7\times5}{3}=-\frac{35}{3}$: مجموع ریشه‌ها

---

۳۴. ریشه‌های معادلهٔ $mx^2+3x+m^2-2=0$ معکوس یکدیگرند، پس حاصلضرب ریشه‌ها برابر با یک است:

$$P=\frac{c}{a}\Rightarrow 1=\frac{m^2-2}{m}\Rightarrow m^2-2=m : \text{حاصلضرب ریشه‌ها}$$

$$\Rightarrow m^2-m-2=0\Rightarrow (m-2)(m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=-1\end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر m در معادله، داریم:

$$\xrightarrow{m=2} 2x^2+3x+2=0\to\Delta<0$$

$$\xrightarrow{m=-1} -x^2+3x-1=0\to\Delta>0$$

به ازای $m=2$، دلتای معادله منفی است، پس معادله جواب ندارد. بنابراین فقط $m=-1$ قابل قبول است.

---

۳۵. اگر α و β را ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-16x+m=0$ در نظر بگیریم، طبق فرض یک ریشه ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بزرگ‌تر است، پس داریم: $\alpha=\beta+2$، از طرفی مجموع ریشه‌ها برابر با $\alpha+\beta=-\frac{-16}{4}=4$ است، پس خواهیم داشت:

$$\alpha+\beta=4\xrightarrow{\alpha=\beta+2}\beta+2+\beta=4\Rightarrow 2\beta=2\Rightarrow\beta=1$$

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$$4\times1^2-16\times1+m=0\Rightarrow 4-16+m=0\Rightarrow m=12$$

---

۳۶. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+10x+2=0$ باشند، داریم:

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-10\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=2\end{cases}$$

عبارت‌های داده شده را بازنویسی کرده و با استفاده از تساوی‌های بالا، مقدار آن‌ها را به دست می‌آوریم:

الف) $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-10}{2}=-5$

ب) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-10)^2-2(2)$

$$=100-4=96$$

---

۳۷. اگر $x_1=2$ و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\xrightarrow{x_1=2}2+x_2=-\frac{b}{a}\quad(*)\quad(0/25)$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}\xrightarrow[c=2b]{x_1=2}2x_2=\frac{2b}{a}\Rightarrow x_2=\frac{b}{a}\quad(**)\quad(0/25)$$

با جایگذاری $(**)$ در $(*)$ داریم:

$$\underbrace{2+x_2=-x_2}_{(0/25)}\Rightarrow 2x_2=-2\Rightarrow\underbrace{x_2=-1}_{(0/25)}$$

---

۳۸. اگر S مجموع ریشه‌ها و P حاصلضرب ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، آنگاه می‌توان معادلهٔ درجهٔ دوم را به صورت $x^2-Sx+P=0$ نوشت، بنابراین:

الف) $6+\sqrt{2}\ ,\ 6-\sqrt{2}$

$$\begin{cases}S=6+\sqrt{2}+6-\sqrt{2}=12\\ P=(6+\sqrt{2})(6-\sqrt{2})=36-2=34\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2-Sx+P=0}x^2-12x+34=0$$

ب) $\frac{1+\sqrt{2}}{3},\frac{1-\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{cases}S=\frac{1+\sqrt{2}}{3}+\frac{1-\sqrt{2}}{3}=\frac{2}{3}\\ P=(\frac{1+\sqrt{2}}{3})(\frac{1-\sqrt{2}}{3})=\frac{1-2}{9}=-\frac{1}{9}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2-Sx+P=0}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}=0$$

---

۳۹. اگر دو عدد حقیقی را x_1 و x_2 در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=-1/5\\ P=x_1x_2=-7\end{cases}$$

پس می‌توان یک معادلهٔ درجهٔ دوم تشکیل داد که x_1 و x_2 ریشه‌های آن باشند:

$$\xrightarrow{x^2-Sx+P=0}x^2-(-1/5)x-7=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x-7=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-\frac{3}{2}\pm\sqrt{(\frac{3}{2})^2-4(1)(-7)}}{2\times1}=\frac{-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-\frac{3}{2}+\frac{11}{2}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-\frac{3}{2}-\frac{11}{2}}{2} = \dfrac{-7}{2} \end{cases}$$

۴۰. الف) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-1=0$ باشند، داریم:

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-3}{2} = \dfrac{3}{2} \\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر دو برابر ریشه‌های معادلهٔ بالا هستند، یعنی: 2α و 2β. با یافتن مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها، معادلهٔ مورد نظر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} S = 2\alpha+2\beta = 2(\alpha+\beta) = 2(\frac{3}{2}) = 3 \\ P = (2\alpha)2(\beta) = 4\alpha\beta = 4(-\frac{1}{2}) = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2-Sx+P=0} x^2-3x-2=0$$

ب) اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-1=0$ باشند، داریم:

$$\alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -1 \quad , \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر، دو واحد از ریشه‌های معادلهٔ بالا بیشترند پس به صورت $\alpha+2$ و $\beta+2$ هستند. با یافتن مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها، معادلهٔ مورد نظر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} S = (\alpha+2)+(\beta+2) = \alpha+\beta+4 = -1+4 = 3 \\ P = (\alpha+2)(\beta+2) = \alpha\beta + \underbrace{2\alpha+2\beta}_{2(\alpha+\beta)} + 4 \\ \qquad = -1+2(-1)+4 = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2-Sx+P=0} x^2-3x+1=0$$

۴۱. الف) درست است، زیرا در تابع درجهٔ دوم $f(x)=-x^2+3x$، ضریب x^2 منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است و تابع دارای ماکزیمم است.

ب) درست است. طول رأس سهمی $f(x)=-x^2+4x+1$ برابر است با:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

پ) نادرست است. برای سهمی $y=-x^2+2x$ داریم:

$$\begin{cases} x_S = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2(-1)} = 1 \\ y_S = -(1)^2+2(1) = 1 \end{cases}$$

بنابراین رأس سهمی نقطهٔ $S(1,1)$ است.

ت) درست است (۰/۲۵). مقدار ماکزیمم تابع $y=-2x^2+8x-5$ همان عرض رأس سهمی است، پس داریم:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{8^2-4(-2)(-5)}{4(-2)} = \frac{24}{8} = 3$$

۴۲. الف) در تابع درجهٔ دوم $f(x)=-x^2+2x+3$ ضریب x^2 یعنی $a=-1$ منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است و تابع دارای ماکزیمم است. ابتدا طول نقطهٔ ماکزیمم (طول رأس) و سپس عرض نقطهٔ ماکزیمم را به دست می‌آوریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

$$y_S = f(1) = -1+2+3 = 4$$

همچنین از فرمول $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$ نیز می‌توان مقدار ماکزیمم را به دست آورد:

$$y_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{2^2-4(-1)(3)}{4(-1)} = -\frac{16}{-4} = 4$$

ب) در تابع درجهٔ دوم $g(x)=2x^2+9x-5$ ضریب x^2 یعنی $a=2$ مثبت است، پس دهانهٔ سهمی رو به بالاست و تابع دارای مینیمم است. ابتدا طول نقطهٔ مینیمم (طول رأس) و سپس عرض نقطهٔ مینیمم را به دست می‌آوریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{9}{2(2)} = -\frac{9}{4}$$

$$y_S = g(-\frac{9}{4}) = 2(-\frac{9}{4})^2 + 9(-\frac{9}{4}) - 5$$

$$= \frac{81}{8} - \frac{81}{4} - 5 = -\frac{121}{8}$$

همچنین از فرمول $y_S = -\frac{\Delta}{4a}$ نیز می‌توان مقدار مینیمم را به دست آورد:

$$y_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9^2-4(2)(-5)}{4(2)} = -\frac{121}{8}$$

۴۳. طول نقطه‌ی ماکزیمم تابع $y=(1-m)x^2+(m^2-6)x+1$ که همان طول رأس سهمی است، برابر با -1 است، بنابراین داریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -1 = -\frac{m^2-6}{2(1-m)} \Rightarrow \frac{m^2-6}{2-2m} = 1$$

$$\Rightarrow m^2-6 = 2-2m \Rightarrow m^2+2m-8=0$$

$$\Rightarrow (m+4)(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m+4=0 \Rightarrow m=-4 \\ m-2=0 \Rightarrow m=2 \end{cases}$$

از طرفی تابع دارای ماکزیمم است، پس باید ضریب x^2 منفی باشد:

$$1-m<0 \Rightarrow m>1$$

پس فقط $m=2$ قابل قبول است.

۴۴. در تابع $f(x)=x^2+3x+2m-5$، مینیمم تابع یا همان عرض رأس سهمی، برابر با ۳ است، پس داریم:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow 3 = -\frac{3^2-4(1)(2m-5)}{4(1)}$$

$$\Rightarrow 3 = -\frac{9-8m+20}{4} \Rightarrow 3 = -\frac{29-8m}{4}$$

$$\Rightarrow -12 = 29-8m \Rightarrow 8m=41 \Rightarrow m = \frac{41}{8}$$