۲۲۹- به ازای $n \geq M$، اندازه‌ی فاصله‌ی جملات دنباله‌ی $a_n=[\frac{n^2+29}{2n^2+3n+1}]$ از حد دنباله به حداقل می‌رسد. کم‌ترین مقدار طبیعی M کدام است؟([ ] ، علامت جزء صحیح است.)

(۲۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۴آبان۹۲–شرکت کنندگان ۴۳ هزار نفر)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۳۰- در اثبات $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2n)=+\infty$ برای هر عدد حقیقی مثبت k، حداقل عدد طبیعی M کدام است؟ $(n\geq M \Rightarrow a_n>k)$

(۱۸ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۳آبان۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) $[\sqrt{k}]+1$ ۲) $[\sqrt{k+1}]$

۳) $[\sqrt{k}]+2$ ۴) $[\sqrt{k+2}]$

۲۳۱- جملات دنباله‌ی $\{a_n\}=\{-n^2-6n\}_{n=1}$ از عدد طبیعی M به بعد از عدد $[k=-9991]$ بزرگ‌تر نمی‌باشند. حداقل مقدار M کدام است؟

(۱۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۲آذر۹۲–شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)

۱) ۹۶ ۲) ۹۷ ۳) ۹۸ ۴) ۱۰۰

۲۳۲- اگر دنباله‌ی $\{n(1+\frac{a}{n})^3-n\}_{n=1}$ به عدد ۱۲ همگرا باشد، a کدام است؟

(۱۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۲ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۳آبان۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۳- با فرض $S_n=1+2+3+\cdots+n$، اگر به ازای $n\geq n_0$ فاصله‌ی نقاط نظیر دنباله‌ی $\{\frac{-2S_n}{2S_n+n+1}\}$ از نقطه همگرایی خود کم‌تراز ۰/۰۳ باشد، کوچک‌ترین مقدار n_0 کدام است؟

(۱۵ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۲ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۳آبان۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۰

۲۳۴- قدرمطلق اختلاف سوپریموم و اینفیموم مجموعه‌ی مقادیر دنباله‌ی $a_n=\tan^{-1}(-n^2+7n-13)$ کدام است؟

(۱۳ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۳ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۴آبان۹۲–شرکت کنندگان ۴۲ هزار نفر)

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

۲۳۵- به ازای هر عدد حقیقی و منفی k از نامساوی $n\geq[\sqrt[3]{1-k}]$ می‌توان نامساوی $a_n<k$ را نتیجه گرفت. دنباله‌ی $\{3^{a_n}\}$ چگونه است؟([ ] ، علامت جزء صحیح است.)

(۱۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۵ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۴آبان۹۲–شرکت کنندگان ۴۲ هزار نفر)

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به یک ۳) واگرا به $+\infty$ ۴) واگرا به $-\infty$

۲۳۶- اگر $a_n=1+\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2}$ باشد، چه تعداد از جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ در نابرابری $a_n<0/996$ صدق می‌کند؟

(۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۳ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۹آبان۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

فصل ۲ دیفرانسیل | سؤال‌های نسبتاً دشوار | مبحث: حد

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۴(یا ۵) سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۶ سوال پاسخ دهند.

۲۳۷- تابع $f(x)=\begin{cases} x & x\in Q \\ [x] & x\notin Q \end{cases}$ در کدام مجموعه‌ی نقاط دارای حد است؟ ([ ] ، علامت جزء صحیح است.)

(۴۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۷ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۶دی۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) $\{x \mid x=2k, k\in Z\}$ ۲) $R-Z$

۳) Z ۴) ϕ

۲۳۸-اگر $f(x)=\begin{cases}2x\ , & x\in Q\\ x^2+1\ , & x\notin Q\end{cases}$ باشد، تابع $g(x)=(x^3-2x)f(x)$ در چند نقطه دارای حد است؟

(**۳۰ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۴ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۲فروردین۹۳–شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳۹-حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(3^x-1)\left(\frac{1}{9^x-1}-\cos\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟

(**۲۸ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۱ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۸دی۹۱–شرکت کنندگان ۳۰ هزار نفر)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) وجود ندارد.

۲۴۰-حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\left[\frac{1}{[x]-x}\right]$ ، کدام است؟([ ] نماد جزء صحیح است.)

(**۲۶ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۱۷شهریور۹۱–شرکت کنندگان ۲۶ هزار نفر)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) $-\infty$

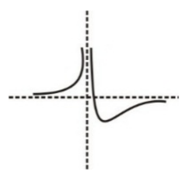
۲۴۱-اگر $f(x)=[x]+\frac{|x|}{x}$ و $a_n=\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}$ ، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟([ ] ، علامت جزء صحیح است.)

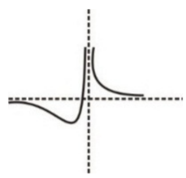
(**۲۵ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۸دی۹۱–شرکت کنندگان ۳۰ هزار نفر)

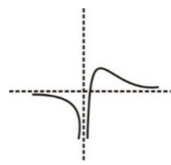
۱) همگرا به ۱ ۲) همگرا به ۱- ۳) همگرا به ۲- ۴) واگرا

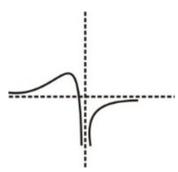
۲۴۲-نمودار $y=\frac{x-2}{x^2+4x+4}$ با توجه به مجانب‌هایش شبیه کدام شکل زیر است؟

(**۲۴ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۵ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۹دی۹۱–شرکت کنندگان ۴۲ هزار نفر)

۱)


۲)


۳)


۴)


۲۴۳-اگر $f(x)=\frac{[x]-k}{[-x]-4}$ و به ازای هر دنباله‌ی $a_n\neq 1$ همگرا به۱، دنباله‌ی $f(a_n)$ همگرا باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ کدام است؟([ ] ، علامت جزء صحیح است.)

(**۲۳ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۸دی۹۱–شرکت کنندگان ۳۰ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) ۵- ۳) ۱- ۴) وجود ندارد.

۲۴۴-حاصل حد $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ کدام است؟

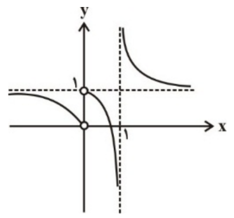
(**۲۳ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادنداما ۱۲ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۵دی۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{2}$

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۳(یا ۴) سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۵ سوال پاسخ دهند.

۲۴۵-اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر همگراست؟

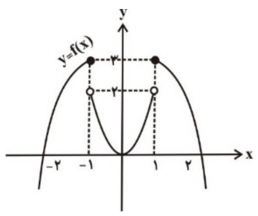
(**۲۰ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۴ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۶دی۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)



۱) $fof(\frac{(-1)^n}{n+1})$
۲) $fof(n-1)$
۳) $fof(\frac{n}{n+1})$
۴) $fof(1-n)$

۲۴۶-اگر $H(x)$ تابع هوی‌ساید و $sgn(x)$ تابع علامت باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟([ ] علامت جزء صحیح است.)

(**۱۹ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۲آذر۹۲–شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)



$$A=\lim_{x\to 1^-}[f(x)]+\lim_{x\to 0^+}H(x)+\lim_{x\to(-2)^-}sgn(f(x))$$

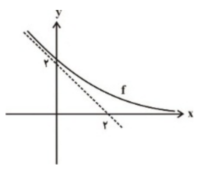
۱) ۳ ۲) ۲
۳) ۴ ۴) ۱

۲۴۷-کدام دنباله به همراه دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{n\pi}$ می‌تواند در اثبات عدم وجود حد $\lim_{x\to 0^+}[x\sin\frac{1}{x}]$ استفاده شود؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

(**۱۶ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۲فروردین۹۳–شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

۱) $b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ ۲) $b_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{6}}$
۳) $b_n=\frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}}$ ۴) $b_n=\frac{1}{2n\pi+\pi}$

۲۴۸-اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت شکل زیر باشد، حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+(x+1)f(x)}{x}$ کدام است؟



(**۱۵ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۹ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۱۶فروردین۹۲–شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $-\infty$

۲۴۹-تابع $g(x)=\begin{cases} f(x), & x>-1 \\ -2x-2, & x\le -1\end{cases}$ مفروض است. اگر تابع درجه‌ی دوم f در نقطه‌ی $(-1,0)$ مینیمم داشته باشد و حد چپ و راست g در $x=-1$ برابر باشند، آنگاه $\lim_{x\to 2^-}g(x)$ کدام است؟

(**۱۴ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۲آذر۹۲–شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۰-اگر تابع f در بازه‌ی $(-1,1)$ در شرایط $f^2(x)-2\cos^2 xf(x)+\cos 2x\le 0$ صدق کند، مقدار $\lim_{x\to 0}f(x)$ کدام است؟

(**۱۴ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۲فروردین۹۳–شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

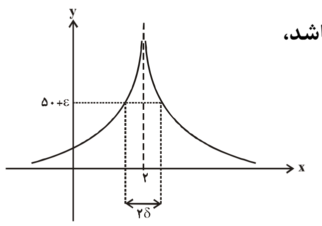
۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۲۵۱- حد راست تابع $f(x)=\frac{\sqrt{\cos ۳x-\cos x}}{\sin ۳x-\sin x}$ در $x=\pi$ کدام است؟

(**۱۳ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۵دی۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۲۵۲- با توجه به شکل زیر که نمودار تابع $f(x)=\frac{۲}{(x-۲)^۲}$ را نشان می‌دهد، اگر ε عددی نامنفی باشد، آنگاه بیش‌ترین مقدار δ کدام است؟



(**۱۳ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲دی۹۰–شرکت کنندگان ۳۵ هزار نفر)

۱) ۰/۰۲ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۴ ۴) /۰۴

۲۵۳- حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x(\tan^{-۱}x+x)}{۱+x}+\frac{x^۲-\sin x}{۱-x}\right)$ کدام است؟

(**۱۲ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۴ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۳دی۹۰–شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

۱) $۲-\frac{\pi}{۲}$ ۲) $-۲-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۲۵۴- اگر داشته باشیم $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x}+\sqrt{x-۱})(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x+a})=۲a-۵$ ، آنگاه مقدار a کدام است؟

(**۱۲ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۹ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۲آذر۹۲–شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۲ ۴) ۲-

فصل ۲ دیفرانسیل | سؤال‌های دشوارتر | مبحث: حد

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۱ سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۲(یا ۳) سوال پاسخ دهند.

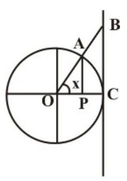
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۴سوال پاسخ دهند.

۲۵۵- با توجه به دایره‌ی مثلثاتی زیر، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\overline{AP}\times\overline{PC}}{\sin x-\overline{BC}}$ کدام است؟($\overline{AB}$ ، اندازه‌ی پاره‌خط AB است.)

(**۱۱ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۷ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۸دی۹۱–شرکت کنندگان ۳۰ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) ۱-

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$



۲۵۶-اگر $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{16^x-16x^4}{a^x-2x^b}$ باشد، آنگاه مقدار $a+b$ کدام است؟

(**۱۱ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۷ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۶دی۹۲–شرکت کنندگان ۳۱ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵۷-اگر $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x}{ax+b}}-1\right)=-\dfrac{1}{2}$ باشد، آنگاه $a+b$ کدام است؟

(**۱۱ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۲فروردین۹۳–شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۲۵۸-اگر داشته باشیم $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos ax}-\sqrt{\cos bx}}{\tan^2 x-\sin^3 x}=2$، آنگاه زوج مرتب (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

(**۱۰ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۲آذر۹۲–شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)

۱) $(3,1)$ ۲) $(1,3)$ ۳) $(\sqrt{2},2)$ ۴) $(2,\sqrt{2})$

۲۵۹-اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^m+x^2}{px^n+mx^3}=3$ و $n\geq 3$، آنگاه حاصل $m+p-n$ کدام نمی‌تواند باشد؟

(**۱۰ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۲۷دی۹۲–شرکت کنندگان ۵۲ هزار نفر)

۱) $\dfrac{1}{3}$ ۲) $\dfrac{3}{2}$ ۳) $-\dfrac{7}{3}$ ۴) $-\dfrac{8}{3}$

۲۶۰-حاصل حد $\dfrac{\log_2 x-\log_x 2}{\log_2 \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ وقتی $x\to 2$ کدام است؟

(**۱۰ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۵ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۵دی۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) ۱ ۲) $\dfrac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۶۱-معادله‌ی $x^3+x+\log a=0$ در بازه‌ی $(-1,1)$ ریشه دارد. برای a چند مقدار صحیح وجود دارد؟

(**۱۰ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۷ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۵دی۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) ۹۹ ۲) ۱۰۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۹۹

۲۶۲- اگر $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x+2^{a-x}-6}{2^{2-x}+2^x-5}$ باشد، مقدار متناهی L کدام است؟

(**۷ درصد** شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۳ درصد پاسخ صحیح دادند.)(۵دی۹۳–شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

۱) $\dfrac{3}{2}$ ۲) $\dfrac{2}{3}$ ۳) $\dfrac{4}{3}$ ۴) $\dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-n(n+۱)}{(n+۱)^۲} = \frac{-n}{n+۱} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -۱$$

$$|a_n-(-۱)|<۰/۰۳ \Rightarrow |\frac{-n}{n+۱}+۱|<۰/۰۳$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{n+۱} < \frac{۳}{۱۰۰} \Rightarrow n+۱ > \frac{۱۰۰}{۳}$$

$$\Rightarrow n+۱ > ۳۳/\overline{۳} \Rightarrow n > ۳۲/\overline{۳} \Rightarrow n \geq ۳۳$$

پس کم‌ترین مقدار $n_\circ$ برابر ۳۳ است.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

۲۳۴- گزینه‌ی «۲»

با توجه به این که تابع $f(x)=\tan^{-۱}x$ صعودی اکید است، بنابراین $\sup$ و $\inf$ دنباله‌ی a_n به ترتیب به ازای بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار دنباله‌ی $b_n=-n^۲+۷n-۱۳$ به دست می‌آید. بیش‌ترین مقدار تابع $g(x)=-x^۲+۷x-۱۳$ به ازای $\frac{-b}{۲a}=\frac{-۷}{-۲}=\frac{۷}{۲}$ به دست می‌آید. با توجه به این که $n\in N$ است، عدد طبیعی قبل و بعد از $\frac{۷}{۲}$ را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$n=۳: b_n=-(۳)^۲+۷(۳)-۱۳=-۱$$

$$n=۴: b_n=-(۴)^۲+۷(۴)-۱۳=-۱$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار a_n به ازای $n=۳$ (یا $n=۴$) به دست می‌آید.

$$\sup(a_n)=a_۳=\tan^{-۱}(-۱)=\frac{-\pi}{۴}$$

کم‌ترین مقدار دنباله‌ی a_n به ازای کم‌ترین مقدار دنباله‌ی b_n به دست می‌آید و چون $\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$، دنباله‌ی b_n کران پایین ندارد، پس:

$$\inf(a_n)=\lim_{n\to\infty} a_n=\tan^{-۱}(-\infty)=\frac{-\pi}{۲}$$

$$|\sup(a_n)-\inf(a_n)|=|\frac{-\pi}{۴}-(-\frac{\pi}{۲})|=\frac{\pi}{۴}$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۲۳۵- گزینه‌ی «۱»

به ازای هر عدد حقیقی و منفی k، مقدار طبیعی $M=[\sqrt[۳]{۱-k}]$ یافت شده است، به طوری که:

$$n\geq M \Rightarrow a_n<k$$

پس دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا به $-\infty$ است و داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} ۳^{a_n}=۳^{-\infty}=\frac{۱}{۳^{+\infty}}=\circ$$

(دیفرانسیل- صفحه‌ی ۳۹)

۲۳۶- گزینه‌ی «۲»

$$a_n<۰/۹۹۶ \Rightarrow ۱+\frac{\sin\frac{n\pi}{۲}}{n^۲}<۰/۹۹۶ \Rightarrow \frac{\sin\frac{n\pi}{۲}}{n^۲}<-\frac{۴}{۱۰۰۰}$$

اگر $\sin\frac{n\pi}{۲}$ برابر صفر یا یک باشد، نامعادله غیرممکن است پس $\sin\frac{n\pi}{۲}=-۱$ است.

$$\frac{-۱}{n^۲}<\frac{-۴}{۱۰۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{n^۲}>\frac{۴}{۱۰۰۰} \Rightarrow n^۲<۲۵۰ \Rightarrow n<۱۵/...$$

$$n\leq ۱۵$$

از طرفی برای این که $\sin\frac{n\pi}{۲}=-۱$ برقرار باشد باید $n=۴k+۳ (k\in Z)$ باشد، پس:

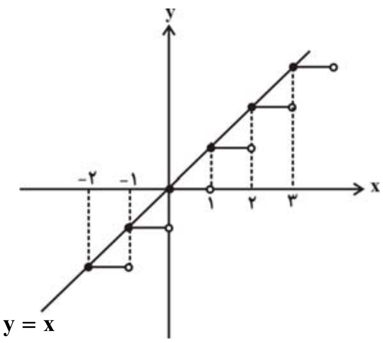
$n\in\{۳,۷,۱۱,۱۵\} \Rightarrow$ ۴ جمله وجود دارد.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۶)

فصل سوم / حد

۲۳۷- گزینه‌ی «۴»

نقاط تابع روی یکی از نمودارهای $y=x$ و $y=[x]$ هستند. همان طور که ملاحظه می‌کنید تابع در نقاط صحیح دارای حد راست است ولی حد چپ ندارد. در باقی نقاط نیز نه حد چپ دارد و نه حد راست. پس تابع در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.



(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)

۲۳۸- گزینه‌ی «۴»

تابع g در نقاطی حد دارد که در آن نقاط یا ۱) عبارت $x^۳ - ۲x$ صفر شود یا ۲) دو ضابطه‌ی تابع f برابر باشد.

$$۱)\ x^۳ - ۲x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pm\sqrt{۲}$$

$$۲)\ ۲x = x^۲ + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

بنابراین تابع g در ۴ نقطه حد دارد.

توجه: در نقاطی که عبارت $x^۳ - ۲x$ صفر می‌شود، حد تابع g به صورت (کران‌دار $\times ۰$) می‌شود. بنابراین در این نقاط g حد دارد.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)

۲۳۹- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to ۰}(۳^x-۱)(\frac{۱}{۹^x-۱}) = \lim_{x\to ۰}\frac{(۳^x-۱)}{(۳^x-۱)(۳^x+۱)} = \frac{۱}{۲}$$

بنا به قضیه فشردگی داریم $\lim_{x\to ۰}(۳^x-۱)(\cos\frac{۱}{x}) = ۰$ پس:

$$\lim_{x\to ۰}(۳^x-۱)(\frac{۱}{۹^x-۱} - \cos\frac{۱}{x}) = \frac{۱}{۲} - ۰ = \frac{۱}{۲}$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۷۵ تا ۸۷)

۲۴۰- گزینه‌ی «۱»

وقتی $x \to ۱^+$ ، آنگاه: $[x] = ۱$

حال با فرض $t = ۱ - x$ ، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۱^+}(x-۱)[\frac{۱}{۱-x}] = -\lim_{t\to ۰^-} t[\frac{۱}{t}] = -۱$$

یادآوری: با توجه به تمرین کتاب درسی داریم: $\lim_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}] = ۱$

(دیفرانسیل- صفحه‌ی ۸۱)

۲۴۱- گزینه‌ی «۳»

اگر $x > ۰$ باشد، آنگاه $x > \sin x$ است. بنابراین با توجه به این که $\frac{۱}{n} > ۰$ است داریم: $\frac{۱}{n} > \sin\frac{۱}{n} \Rightarrow \sin(\frac{۱}{n}) - \frac{۱}{n} < ۰ \Rightarrow a_n < ۰$

با توجه به این که دنباله‌ی a_n همگرا به صفر است و از مقادیر کم‌تر به عدد صفر نزدیک می‌شود. داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-}([x] + \frac{|x|}{x}) = \lim_{x\to ۰^-}([x] + \frac{-x}{x})$$

$$= -۱ - ۱ = -۲$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۲۴۲- گزینه‌ی «۳»

$$y = \frac{x-۲}{(x+۲)^۲}$$

بنابراین در اطراف خط مجانب قائم $x = -۲$ ، تابع به سمت $-\infty$ میل می‌کند.

بنابراین گزینه‌های (۳) یا (۴) می‌تواند درست باشد.

در ضمن داریم: $\lim_{x\to \pm\infty} y = ۰$

اما وقتی $x \to +\infty$ ، y مثبت وقتی $x \to -\infty$ ، y منفی است. بنابراین گزینه‌ی (۳)درست است.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۴)

۲۴۳- گزینه‌ی «۳»

چون به ازای هر دنباله‌ی $a_n \neq ۱$ همگرا به ۱، دنباله‌ی $f(a_n)$ همگراست، پس $\lim_{x\to ۱} f(x)$ وجود دارد، پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+}\frac{[x]-k}{[-x]-۴} = \lim_{x\to ۱^+}\frac{۱-k}{-۲-۴} = \frac{k-۱}{۶}$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-}\frac{[x]-k}{[-x]-۴} = \lim_{x\to ۱^-}\frac{۰-k}{-۱-۴} = \frac{k}{۵}$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) \Rightarrow \frac{k-۱}{۶} = \frac{k}{۵} \Rightarrow ۵k - ۵ = ۶k$$
$$\Rightarrow k = -۵$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \frac{k}{۵} = -۱$$

(دیفرانسیل- صفحه‌ی ۸۰)

۲۴۴- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{\sqrt{x}-\sqrt{۲}+\sqrt{x-۲}} = \lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x-۲}\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x-۲}(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{\sqrt{x-۲}}+۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x+۲}}{(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{\sqrt{x-۲}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{۲}}{\sqrt{x}+\sqrt{۲}}+۱)}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{۴}}{(\frac{x-۲}{\sqrt{x-۲}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+۱)} = \lim_{x\to ۲^+}\frac{۲}{(\sqrt{x-۲}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+۱)}$$

$$= \frac{۲}{۰+۱} = ۲$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۲۴۵- گزینه‌ی «۳»

با توجه به این که دنباله‌ی $\{\frac{n}{n+۱}\}$ با مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ همگراست، داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} fof(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(f(x)) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = ۱$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to +\infty} fof(\frac{n}{n+۱}) = fof(۱^-) = ۱$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۵۳ تا ۷۴)

۲۴۶- گزینه‌ی «۴»

$$H(x) = \begin{cases} ۱ & , \quad x \ge ۰ \\ ۰ & , \quad x < ۰ \end{cases} \quad , \quad sgn(x) = \begin{cases} ۱ & , \quad x > ۰ \\ ۰ & , \quad x = ۰ \\ -۱ & , \quad x < ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^-} [f(x)] = [۲^-] = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۰^+} H(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to (-۲)^-} sgn(f(x)) = sgn(۰^-) = -۱ \end{cases} \Rightarrow A = ۱ + ۱ - ۱ = ۱$$

(دیفرانسیل- صفحه‌ی ۶۸)

۲۴۷- گزینه‌ی «۳»

اگر فرض کنیم $f(x) = [x\sin\frac{۱}{x}]$، داریم:

$$f(a_n) = [\frac{۱}{n\pi}\sin(n\pi)] = [۰] = ۰ \Rightarrow \lim_{n\to +\infty} f(a_n) = ۰$$

بنابراین حد دنباله‌ی $\{f(b_n)\}$ نباید صفر باشد. (b_n در تمامی گزینه‌ها با مقادیر بیش‌تر از صفر به صفر همگرا هستند.)

گزینه‌ی «۱»:
$$\lim_{n\to +\infty} f(b_n) = \lim_{n\to +\infty} [\frac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۲}}\sin(۲n\pi + \frac{\pi}{۲})]$$

$$= \lim_{n\to +\infty} [\frac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۲}}] = [۰^+] = ۰$$

گزینه‌ی «۲»:
$$\lim_{n\to +\infty} f(b_n) = \lim_{n\to +\infty} [\frac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۶}}\sin(۲n\pi + \frac{\pi}{۶})]$$

$$= \lim_{n\to +\infty} [\frac{۱}{۴n\pi + \frac{\pi}{۳}}] = [۰^+] = ۰$$

گزینه‌ی «۳»:
$$\lim_{n\to +\infty} f(b_n) = \lim_{n\to +\infty} [\frac{۱}{۲n\pi - \frac{\pi}{۲}}\sin(۲n\pi - \frac{\pi}{۲})]$$

$$= \lim_{n\to +\infty} [\frac{-۱}{۲n\pi - \frac{\pi}{۲}}] = [۰^-] = -۱$$

گزینه‌ی «۴»:
$$\lim_{n\to +\infty} f(b_n) = \lim_{n\to +\infty} [\frac{۱}{۲n\pi + \pi}\sin(۲n\pi + \pi)]$$

$$= \lim_{n\to +\infty} [\frac{۰}{۲n\pi + \pi}] = [۰] = ۰$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۲۴۸- گزینه‌ی «۱»

مطابق شکل، معادله‌ی مجانب مایل تابع f به صورت $y = -x + ۲$ می‌باشد. پس:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -۱ \\ \lim\limits_{x\to -\infty} (f(x) + x) = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \frac{x^۲ + (x+۱)f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^۲ + xf(x) + f(x)}{x}$$

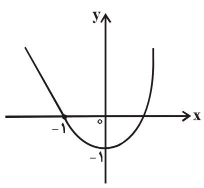
$$= \lim_{x\to -\infty} (x + f(x) + \frac{f(x)}{x}) = ۲ - ۱ = ۱$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲)

۲۴۹- گزینه‌ی «۳»

چون f یک تابع درجه‌ی دوم است، پس معادله‌ی آن به‌صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ خواهد بود. از طرفی با توجه به این‌که f در $(۰, -۱)$ مینیمم دارد و حد چپ و حد راست تابع g در $x = -۱$ برابر است، نمودار تابع $g(x)$ به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to (-۱)^-} g(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} g(x) = ۰$$



با توجه به نمودار، مختصات نقطه‌ی $(-۱, ۰)$ در معادله‌ی تابع f صدق می‌کند. داریم:

$$\begin{cases} f(-۱) = a - b + c = ۰ \\ f(۰) = -۱ \Rightarrow c = -۱ \\ \text{طول نقطه‌ی مینیمم} = \frac{-b}{۲a} = ۰ \Rightarrow b = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۱ \Rightarrow f(x) = x^۲ - ۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x) = \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۲^۲ - ۱ = ۳$$

(حسابان- صفحه‌های ۱۴۵ تا ۱۴۹ و دیفرانسیل- ۶۹ تا ۷۴)

۲۵۰- گزینه‌ی «۲»

راه حل اول:اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = L$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰}(f^{۲}(x) - ۲\cos^{۲} x f(x) + \cos ۲x) \le \lim_{x\to ۰} ۰$$

$$\Rightarrow L^{۲} - ۲L + ۱ \le ۰ \Rightarrow (L-۱)^{۲} \le ۰ \Rightarrow L = ۱$$

راه حل دوم:

$$۲\cos^{۲} x = ۱ + \cos ۲x$$

$$\Rightarrow f^{۲}(x) - (۱+\cos ۲x) f(x) + \cos ۲x \le ۰$$

$$\Rightarrow (f(x) - ۱)(f(x) - \cos ۲x) \le ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \cos ۲x \le f(x) \le ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۰} \cos ۲x = \lim\limits_{x\to ۰} ۱ = ۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۷۳ تا ۷۸)

۲۵۱- گزینه‌ی «۳»

در صورت و مخرج کسر از تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{\sqrt{-۲\sin ۲x \sin x}}{۲\sin x \cos ۲x} = \frac{\sqrt{-۲(۲\sin x \cos x)\sin x}}{۲\sin x \cos ۲x}$$

$$= \frac{\sqrt{-\sin^{۲} x \cos x}}{\sin x \cos ۲x}$$

پس داریم:

$$\lim_{x\to \pi^{+}} f(x) = \lim_{x\to \pi^{+}} \frac{|\sin x|\sqrt{-\cos x}}{\sin x \cos ۲x}$$

$$= \lim_{x\to \pi^{+}} \frac{-\sqrt{-\cos x}}{\cos ۲x} = -۱$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۲ تا ۸۵)

۲۵۲- گزینه‌ی «۲»

با توجه به شکل و فرض سؤال، اگر $۲-\delta < x < ۲+\delta$ و $x \ne ۲$، آنگاه $f(x) > ۵۰$. به عبارت دیگر، اگر $۰ < |x-۲| < \delta$، آنگاه $\frac{۲}{(x-۲)^{۲}} > ۵۰$. پس داریم:

$$\frac{۲}{(x-۲)^{۲}} > ۵۰ \Rightarrow ۰ < (x-۲)^{۲} < \frac{۲}{۵۰} = \frac{۱}{۲۵}$$

$$\Rightarrow ۰ < |x-۲| < \frac{۱}{۵} = ۰/۲ \Rightarrow \delta \le ۰/۲ \Rightarrow \max(\delta) = ۰/۲$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶)

۲۵۳- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x(\tan^{-۱} x + x)}{۱+x} + \frac{x^{۲} - \sin x}{۱-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x(\frac{-\pi}{۲} + x)(۱-x) + (۱+x)(x^{۲} - \sin x)}{(۱+x)(۱-x)}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{-\pi}{۲}x + \frac{\pi}{۲}x^{۲} + x^{۲} - x^{۳} + x^{۲} - \sin x + x^{۳} - x\sin x}{۱-x^{۲}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^{۲}(۲+\frac{\pi}{۲}) + x(\frac{-\pi}{۲} - \sin x) - \sin x}{۱-x^{۲}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^{۲}(۲+\frac{\pi}{۲})}{-x^{۲}} = -۲ - \frac{\pi}{۲}$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۲۵۴- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x-۱})(\sqrt{x+۱} - \sqrt{x+a})\left(\frac{\sqrt{x+۱} + \sqrt{x+a}}{\sqrt{x+۱} + \sqrt{x+a}}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x-۱})\left(\frac{x+۱-x-a}{\sqrt{x+۱} + \sqrt{x+a}}\right)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-۱}}{\sqrt{x+۱} + \sqrt{x+a}}\right)(۱-a) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}\right)(۱-a)$$

$$= ۱-a \Rightarrow ۱-a = ۲a-۵ \Rightarrow ۳a = ۶ \Rightarrow a = ۲$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۲۵۵- گزینه‌ی «۲»

اگر فرض کنیم شعاع دایره برابر یک باشد، داریم:

$$\overline{AP} = \sin x, \overline{PC} = ۱ - \cos x, \overline{BC} = \tan x$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\overline{AP} \times \overline{PC}}{\sin x - \overline{BC}} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x \times (۱-\cos x)}{\sin x - \tan x}$$

$$= \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x \times (۱-\cos x)}{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to ۰} \frac{\sin x \cos x(۱-\cos x)}{\sin x(\cos x - ۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۰} -\cos x = -۱$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۴ تا ۸۷ و ۹۵ و ۹۶)

۲۵۶- گزینه‌ی «۳»

با توجه به این که حد صورت کسر برابر صفر است. باید حد مخرج نیز صفر باشد در غیر این صورت حاصل حد برابر صفر خواهد بود.

$$\lim_{x\to ۱}(a^x - ۲x^b) = a - ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۲$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱۶^x - ۱۶x^۴}{a^x - ۲x^b} = \lim_{x\to ۱}\frac{(۴^x - ۴x^۲)(۴^x + ۴x^۲)}{۲^x - ۲x^b}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(۲^x - ۲x)(۲^x + ۲x)(۴^x + ۴x^۲)}{۲^x - ۲x^b}$$

$$= \lim_{x\to ۱}\frac{(۲^x - ۲x)(۴)(۸)}{۲^x - ۲x^b} = ۳۲$$

واضح است که باید $۲^x - ۲x$ با عبارت $۲^x - ۲x^b$ حذف شود. بنابراین داریم:

$$b = ۱ \Rightarrow a + b = ۳$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۲۵۷- گزینه‌ی «۳»

باید داشته باشیم $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{\frac{x}{ax+b}} - ۱) = ۰$ زیرا در غیر این صورت حاصل حد داده شده برابر بی‌نهایت خواهد بود و برای این منظور، باید $a = ۱$ باشد.

$$\lim_{x\to +\infty} x\frac{(\sqrt{\frac{x}{x+b}} - ۱)(\sqrt{\frac{x}{x+b}} + ۱)}{(\sqrt{\frac{x}{x+b}} + ۱)} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x(\frac{x}{x+b} - ۱)}{۲}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x(\frac{x - x - b}{x+b})}{۲} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-bx}{۲(x+b)} = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow \frac{-b}{۲} = \frac{-۱}{۲}$$

$$\Rightarrow b = ۱ \Rightarrow a + b = ۱ + ۱ = ۲$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۰۴ تا)

۲۵۸- گزینه‌ی «۲»

با توجه به این که $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} = ۱$ و $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x} = ۱$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۰}\sin x = \lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})x = \lim_{x\to ۰} x$$

$$\lim_{x\to ۰}\tan x = \lim_{x\to ۰}(\frac{\tan x}{x})x = \lim_{x\to ۰} x$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{\tan^۲ x - \sin^۳ x}$$

$$= \lim_{x\to ۰}(\frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{x^۲ - x^۳} \times \frac{\sqrt{\cos ax} + \sqrt{\cos bx}}{\sqrt{\cos ax} + \sqrt{\cos bx}})$$

$$= \lim_{x\to ۰}\frac{\cos ax - \cos bx}{x^۲(۱ - x)(۱ + ۱)} = \lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin(\frac{a+b}{۲})x\sin(\frac{a-b}{۲})x}{۲x^۲(۱ - x)}$$

$$= \lim_{x\to ۰}\frac{-۲(\frac{a+b}{۲})x(\frac{a-b}{۲})x}{۲x^۲} = \lim_{x\to ۰}\frac{(b^۲ - a^۲)x^۲}{۴x^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{b^۲ - a^۲}{۴} = ۲ \Rightarrow b^۲ - a^۲ = ۸$$

به ازای $a = ۱$ و $b = ۳$ تساوی فوق برقرار است.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۵۵ و ۶۹ تا ۷۴)

۲۵۹- گزینه‌ی «۲»

اگر $n > ۳$، الزاماً $m > ۳$ و $m = n$ خواهد بود و داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{px^n} = ۳ \xrightarrow{m=n} \frac{۱}{p} = ۳ \Rightarrow p = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow m + p - n = (m - n) + p = ۰ + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

اگر $n = ۳$، دو حالت $m = ۳$ و $m < ۳$ را بررسی می‌کنیم:

$$n = ۳, m = ۳ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{۲x^۳}{(p+۳)x^۳} = ۳ \Rightarrow \frac{۲}{p+۳} = ۳$$

$$\Rightarrow p + ۳ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow p = -\frac{۷}{۳} \Rightarrow m + p - n = ۳ - \frac{۷}{۳} - ۳ = -\frac{۷}{۳}$$

$$n = ۳, m < ۳ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^۳}{(p+m)x^۳} = ۳ \Rightarrow \frac{۱}{p+m} = ۳$$

$$\Rightarrow p + m = \frac{۱}{۳} \Rightarrow m + p - n = \frac{۱}{۳} - ۳ = -\frac{۸}{۳}$$

توجه کنید حالت $n = ۳$ و $m > ۳$ امکان‌پذیر نیست.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۳)

۲۶۰- گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم $\log_x^۲ = \frac{۱}{\log_۲^x}$ پس:

$$\log_۲^x - \frac{۱}{\log_۲^x} = \frac{(\log_۲^x)^۲ - ۱}{\log_۲^x} = \frac{(\log_۲^x - ۱)(\log_۲^x + ۱)}{\log_۲^x}$$

از طرفی:

$$\log_{۲}^{(\frac{x}{۲})^{۲}} = ۲\log_{۲}^{\frac{|x|}{۲}} \xrightarrow{x>۰} ۲(\log_{۲}^{x}-\log_{۲}^{۲}) = ۲(\log_{۲}^{x}-۱)$$

داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\log_{۲}^{x}-\log_{x}^{۲}}{\log_{۲}^{(\frac{x}{۲})^{۲}}} = \lim_{x\to ۲}\frac{(\log_{۲}^{x}-۱)(\log_{۲}^{x}+۱)}{۲(\log_{۲}^{x}-۱)\times \log_{۲}^{x}}$$

$$= \lim_{x\to ۲}\frac{\log_{۲}^{x}+۱}{۲\log_{۲}^{x}} = \frac{۱+۱}{۲\times ۱} = ۱$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۲۶۱- گزینه‌ی «۱»

f پیوسته و صعودی اکید است. پس فقط یک ریشه می‌تواند داشته باشد که با توجه به صورت سوال، این ریشه در بازه‌ی $(-۱,۱)$ است. طبق قضیه‌ی بولزانو داریم:

$$f(-۱)f(۱)<۰ \Rightarrow (-۲+\log a)(۲+\log a)<۰ \Rightarrow -۲<\log a<۲$$

$$\Rightarrow \log^{۰/۰۱} < \log a < \log^{۱۰۰} \Rightarrow ۰/۰۱<a<۱۰۰$$

$$\xrightarrow{a\in Z} a\in \{۱,۲,\cdots,۹۹\} : \text{۹۹مقدار}$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۲۶۲- گزینه‌ی «۲»

با توجه به این که مخرج کسر وقتی $x\to ۲$، به صفر میل می‌کند، باید صورت کسر هم دارای حد صفر باشد در غیر این صورت L متناهی نمی‌شود:

$$۲^{۲}+۲^{a-۲}-۶=۰ \Rightarrow ۲^{a-۲}=۲ \Rightarrow a-۲=۱ \Rightarrow a=۳$$

به ازای $a=۳$ خواهیم داشت:

$$L=\lim_{x\to ۲}\frac{۲^{x}+۲^{۳}\times ۲^{-x}-۶}{۲^{۲}\times ۲^{-x}+۲^{x}-۵} = \lim_{x\to ۲}\frac{۲^{x}+\frac{۸}{۲^{x}}-۶}{\frac{۴}{۲^{x}}+۲^{x}-۵}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(۲^{x})^{۲}-۶(۲^{x})+۸}{(۲^{x})^{۲}-۵(۲^{x})+۴}$$

به کمک تغییر متغیر $t=۲^{x}$، حاصل حد را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$L=\lim_{t\to ۴}\frac{t^{۲}-۶t+۸}{t^{۲}-۵t+۴}=\lim_{t\to ۴}\frac{(t-۴)(t-۲)}{(t-۴)(t-۱)}=\frac{۴-۲}{۴-۱}=\frac{۲}{۳}$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

فصل چهارم / پیوستگی و مجانب

۲۶۳- گزینه‌ی «۳»

$y_{۱}=[x]$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ پیوسته است.

$y_{۲}=[۲x]$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ فقط در $x=\frac{۱}{۲}$ ناپیوسته است.

$y_{۳}=[۳x]$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ فقط در $x=\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}$ ناپیوسته است.

چون نقاط ناپیوستگی غیرمشترک می‌باشند. بنابراین با توجه به مسئله‌ی ۱۰ صفحه‌ی ۹۹ کتاب درسی، f در ۳ نقطه ناپیوسته است.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۹ تا ۹۹)

۲۶۴- گزینه‌ی «۴»

$$D_{gof}=\{x\in D_{f} \mid f(x)\in D_{g}\}$$

$$D_{gof}=\{x\in R-\{۰\} \mid \frac{۲}{x}\geq ۲\} \Rightarrow D_{gof}=(۰,۱]$$

با توجه به این که تابع gof در سمت راست ۱ تعریف نشده است. بنابراین اگر تابع gof در $x=۱$ پیوستگی چپ داشته باشد، در این نقطه پیوسته است.

$$gof(۱)=g(f(۱))=g(۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^{-}} gof(x)=g(\lim_{x\to ۱^{-}} f(x))=g(۲^{+})=۳$$

بنابراین تابع gof در $x=۱$ پیوسته است.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶)

۲۶۵- گزینه‌ی «۱»

ضابطه تابع به صورت زیر است.

$$y=[\frac{۱}{[x]}]=\begin{cases} -۱ & , \quad x<۰ \\ ۱ & , \quad ۱\leq x<۲ \\ ۰ & , \quad ۲\leq x \end{cases}$$

و ملاحظه می‌کنیم تابع در دامنه تعریفش در $x=۲$ ناپیوسته و در سایر نقاط پیوسته است.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۹۰ تا ۹۵)