



# فصل اول

## تابع

(۱۴ پیمانه)

مرجع کتاب درسی:  
ریاضی ۳ - فصل اول  
صفحه‌های ۱ تا ۲۹

بادرخت دانش، تام به تام  
بیشرفت خود را ارزیابی کنید.

**گام اول:** میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.  
آبی: مسلطم.  
سبز: نسبتاً مسلطم.  
زرد: مسلط نیستم.  
**گام‌های بعدی:** اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیشتر دارید.

### تابع

۷۰ سؤال امتحانی شناسنامه‌دار

۱۴ پیمانه‌ی ۵ سؤالی

آبی  سبز  زرد

تعداد پیمانه

۱	توابع چندجمله‌ای - تابع درجه ۳	۳ پیمانه	۱	توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی
۲	توابع صعودی و توابع نزولی	۱۵ سؤال		

آبی  سبز  زرد

تعداد پیمانه

۱	ترکیب توابع	۸ پیمانه	۲	ترکیب توابع
۲	تبدیل نمودار توابع	۴۰ سؤال		
۳	رسم نمودار تابع $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$			

آبی  سبز  زرد

تعداد پیمانه

۳	تابع وارون	۳ پیمانه	۳	تابع وارون
		۱۵ سؤال		

درس و سؤال‌های طراحی شده‌ی این فصل: فرهاد حامی  
گزینش و چیدمان سؤال‌ها: فرزانه دانایی

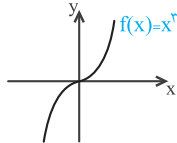
ریاضی ۳- صفحه‌های ۲ تا ۱۰

توابع چندجمله‌ای -  
توابع صعودی و نزولی

توابع چندجمله‌ای - تابع درجه ۳

توابع چندجمله‌ای: هر تابع به معادله‌ی  $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + k$  را که در آن  $a, b, c, \dots$  و  $k$  اعداد حقیقی،  $n$  یک عدد صحیح نامنفی و  $a \neq 0$  است را یک تابع چندجمله‌ای از درجه‌ی  $n$  می‌نامیم، به عنوان مثال:

$$y = 2x^6 - 5x^4, \quad y = x^2 - 2x, \quad y = \frac{1}{3}x^2 + 5x, \quad y = 5x + 1, \quad y = 3$$

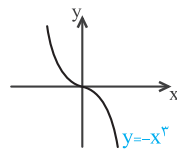


توجه: دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

تابع درجه‌ی سوم: هر تابع به معادله‌ی  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a \neq 0$ )، یک تابع درجه‌ی سوم نامیده می‌شود. یک حالت خاص از آن  $f(x) = x^3$  با نمودار روبه‌روست. در این تابع دامنه و برد، اعداد حقیقی است.

تیب ۱ امتحانی: رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = (x+a)^3 + b$ : با استفاده از خواص انتقال و تقارن می‌توانیم نمودار تابع با ضابطه‌ی

$y = (x+a)^3 + b$  را به کمک نمودار تابع  $y = x^3$  رسم کنیم. برای رسم آن ابتدا نمودار تابع  $y = x^3$  را  $a$  واحد به راست برای  $a < 0$  یا  $a$  واحد به چپ برای  $a > 0$  و سپس  $b$  واحد به بالا برای  $b > 0$  و یا  $b$  واحد به پایین برای  $b < 0$  انتقال می‌دهیم.

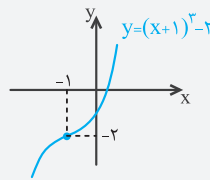
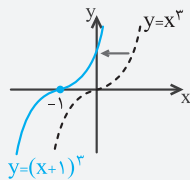


توجه: نمودار تابع  $y = -x^3$ ، قرینه‌ی نمودار تابع  $y = x^3$  نسبت به محور  $x$  هاست، پس نمودار آن به شکل مقابل است.

مثال: به کمک نمودار تابع  $y = x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

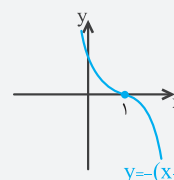
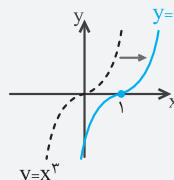
(a)  $y = (x+1)^3 - 2$

حل: کافی است نمودار تابع  $y = x^3$  را یک واحد به چپ و سپس ۲ واحد به پایین انتقال دهیم.



(b)  $y = -(x-1)^3$

حل: ابتدا نمودار تابع  $y = x^3$  را یک واحد به راست انتقال داده تا تابع  $y = (x-1)^3$  به دست آید و سپس قرینه‌ی آن را نسبت به محور  $x$  ها رسم می‌کنیم تا تابع  $y = -(x-1)^3$  به دست آید.



توجه: در مواردی لازم است ابتدا ضابطه‌ی داده شده را با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای به شکل  $y = \pm(x+a)^3 + b$  تبدیل کنیم.

به عنوان مثال تابع با ضابطه‌ی  $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$  را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$y = -(x^3 - 3x^2 + 3x) = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1) = -(x-1)^3 - 1$$

مرجع

سؤالات امتحانی

ریاضی ۳- صفحه‌ی ۴- مشابه فعالیت- ب	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) نمودار تابع $y = x^3$ در بازه‌ی $(0, 1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد. (زنجان- نمونه شهدا- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۴- فعالیت- الف	ب) نمودار تابع $y = x^3$ برای تمام $x$ های نامنفی، بالای نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد. (همدان- دارالفنون- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲- متن درس	در جاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید. الف) دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای، مجموعه‌ی ..... است. ب) اگر تابع $y = x^3$ را سه واحد به چپ و ۵ واحد به بالا منتقل کنیم، ضابطه‌ی تابع عبارت است از: .....
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۵- مکمل کار در کلاس	(زنجان- شاهد فاطمیه- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مشابه تمرین ۱	۳. به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، نمودار تابع $y = (x+2)^3 - 1$ را رسم و دامنه و برد آن را مشخص کنید. (اردبیل- شایسته- دی ۹۹)

## مرجع

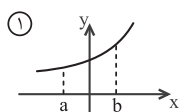
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۴- فعالیت- پ	(کرمان- پروین اعتصامی- دی ۹۹)	۴. نمودار تابع $y = -(x-2)^3$ را رسم کنید.
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۱	(شیراز- فرزانهگان حضرت زینب (س)- دی ۹۸)	۵. نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ را رسم کنید.

## ۲ توابع صعودی و توابع نزولی

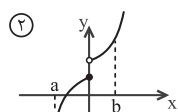
در تابع  $f$  روی یک بازه با حرکت روی نمودار از چپ به راست:

۱ اکیداً صعودی است، هرگاه همواره رو به بالا حرکت کنیم. (شکل‌های ۱ و ۲)

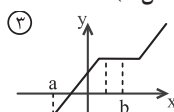
۲ صعودی است، هرگاه رو به پایین حرکت نکنیم. (شکل ۳)



①  
 $f(a) < f(b)$   
اکیداً صعودی



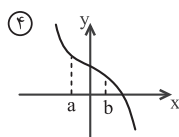
②  
 $f(a) < f(b)$   
اکیداً صعودی



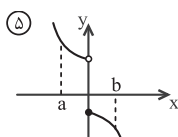
③  
 $f(a) \leq f(b)$   
صعودی ولی غیراکید

۳ اکیداً نزولی است، هرگاه همواره رو به پایین حرکت کنیم. (شکل‌های ۴ و ۵)

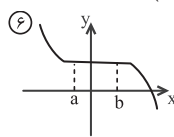
۴ نزولی است، هرگاه رو به بالا حرکت نکنیم. (شکل ۶)



④  
 $f(a) > f(b)$   
اکیداً نزولی



⑤  
 $f(a) > f(b)$   
اکیداً نزولی

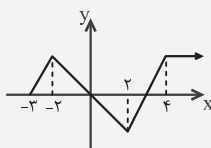


⑥  
 $f(a) \geq f(b)$   
نزولی ولی غیراکید

**توجه ۱۱** با توجه به تعریف، هر تابع اکیداً صعودی (اکیداً نزولی)، صعودی (نزولی) است ولی عکس آن همواره صحیح نیست. در شکل ۳، تابع صعودی است ولی اکید نیست زیرا در دامنه‌ی خود در بازه‌ای ثابت است.

**نیم ۲ امتحانی** شناخت یکنوایی در نمودار: وقتی نمودار یک تابع داده شده، برای تعیین فواصل یکنوایی، باید ببینیم در یک بازه با افزایش  $x$  از چپ به راست، نمودار به چه سمتی حرکت می‌کند، به بالا، صعودی، به پایین، نزولی و اگر ثابت است، هم صعودی و هم نزولی است.

● مثال: وضعیت یکنوایی تابع زیر را بررسی کنید.



○ حل: در بازه‌های  $[-2, -3]$  و  $[2, 4]$  تابع  $f$  اکیداً صعودی (صعودی) است.

در بازه‌ی  $[-2, 2]$ ، تابع  $f$  اکیداً نزولی (نزولی) است.

در بازه‌ی  $[-3, +\infty)$ ، تابع  $f$  صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست زیرا شامل تابع ثابت است.

در بازه‌ی  $[4, +\infty)$ ، تابع  $f$  ثابت است، پس هم صعودی و هم نزولی است.

تابع در دامنه‌ی خود یعنی بازه‌ی  $[-3, +\infty)$  غیریکنواست، یعنی نه صعودی است و نه نزولی.

**نیم ۳ امتحانی** تعیین یکنوایی توابع با رسم نمودار آنها: وقتی ضابطه‌ی یک تابع در اختیار باشد، با رسم نمودار آن می‌توانیم در مورد یکنوایی آن نظر دهیم.

● مثال: یکنوایی توابع زیر را بررسی کنید.

(a)  $y = x^2 - 4x$

○ حل: ابتدا می‌نویسیم:  
 $y = (x-2)^2 - 4$

کافی است نمودار تابع  $y = x^2$  را ۲ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال دهیم. نمودار تابع به شکل زیر است:



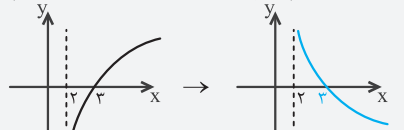
با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی  $[2, +\infty)$  اکیداً صعودی و در بازه‌ی  $(-\infty, 2]$  اکیداً نزولی است.

(b)  $y = -\log_3(x-2)$

○ حل: برای رسم نمودار کافی است نمودار تابع

$y = \log_3 x$  را که به شکل را که به شکل  $y = \log_3 x$  است، ۲ واحد به

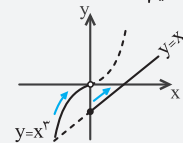
راست انتقال دهیم و سپس نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم:



با توجه به نمودار، تابع در بازه‌ی  $(2, +\infty)$  اکیداً نزولی است.

(c)  $y = \begin{cases} x^3 & , x < 0 \\ x-2 & , x \geq 0 \end{cases}$

○ حل: هر یک از ضابطه‌ها را در دامنه‌ی داده شده رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار، تابع در هر یک از بازه‌های  $(-\infty, 0)$  و  $(0, +\infty)$  اکیداً صعودی است ولی در دامنه‌ی خود یعنی  $\mathbb{R}$ ، غیریکنواست.

**سؤالات امتحانی**

**مرجع**

<p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۷- متن درس</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹ مشابه کار در کلاس ۲- پ</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹ مکمل کار در کلاس ۲</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰ مرتبط با فعالیت- پ</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰ مرتبط با فعالیت- پ</p>	<p>۶. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>(الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.</p> <p>(ب) تابع <math>y = -x^3 + 2</math> در دامنه‌ی تعریفش، صعودی است.</p> <p>(پ) تابع <math>f(x) = \frac{1}{x}</math> در <math>R</math> اکیداً نزولی است.</p> <p>(ت) هر تابع یک به یک، اکیداً یکنواست.</p> <p>(ث) هر تابعی که اکیداً یکنوا باشد، حتماً تابعی یک به یک است.</p> <p>(امتحان نهایی- دی ۹۷)</p> <p>(امتحان نهایی- شهریور ۹۸)</p> <p>(مشهد- شاهد فاطمیه- دی ۹۹)</p> <p>(یزد- فرزانهگان- دی ۹۸)</p> <p>(ایلام- رازی- دی ۹۹)</p>
<p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹ مکمل کار در کلاس ۲</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۴</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹ مشابه کار در کلاس ۲- پ</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۵</p>	<p>۷. در جاهای خالی، گزینه‌ی مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.</p> <p>(الف) تابع <math>y = (x+1)^3</math> در دامنه‌ی تعریف خود ..... (صعودی، نزولی) است. (امتحان نهایی- خرداد ۹۸)</p> <p>(ب) تابع <math>y = (\frac{1}{p})^x</math> تابعی ..... (صعودی، نزولی) و تابع <math>y = \log_p x</math> تابعی ..... (صعودی، نزولی) است. (کرگان- میررحیم- دی ۹۹)</p> <p>(پ) تابع <math>y = -x^3 - 2</math> در دامنه‌ی تعریف خود ..... (صعودی، نزولی) است. (اهواز- نمونه دولتی فدک- دی ۹۹)</p> <p>(ت) تابع <math>y = x^2  x </math> در کل دامنه‌اش ..... (صعودی، نزولی، غیر یکنوا) است. (مشهد- کانون علم- ۹۹)</p>
<p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۷- متن درس</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۷- متن درس</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۸- مکمل مثال</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹ مکمل کار در کلاس ۲</p> <p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹ مکمل کار در کلاس ۲</p>	<p>۸. در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.</p> <p>(الف) تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع ..... نامیده می‌شود. (امتحان نهایی- دی ۹۸)</p> <p>(ب) به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع ..... می‌گویند. (تهران- نمونه دولتی شهید نواب صفوی- دی ۹۹)</p> <p>(پ) تابع <math>y =  x-2 </math> در بازه‌ی ..... نزولی است. (اصفهان- صائب اصفهانی- دی ۹۹)</p> <p>(ت) تابع <math>f(x) = 2x - x^2</math> روی بازه‌ی ..... اکیداً نزولی است. (کرمان- پروین اعتماسی- دی ۹۹)</p> <p>(ث) اگر تابع <math>y = ax + b</math> هم صعودی و هم نزولی باشد، مقدار <math>a</math> برابر است با ..... (زاهدان- نمونه فرهنگ- دی ۹۹)</p>
<p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۸ کار در کلاس ح و خ</p>	<p>۹. هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است؟</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>(الف)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>(ب)</p> </div> </div> <p>(کرمانشاه- شهید مفتح- دی ۹۹)</p>
<p>ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مشابه تمرین ۳</p>	<p>۱۰. با توجه به شکل، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.</p> <p>(الف) تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟</p> <p>(ب) تابع در چه بازه‌ای صعودی است؟</p> <p>(پ) تابع در چه بازه‌ای نزولی است؟</p> <p>(ت) تابع در چه بازه‌ای ثابت است؟</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>(کرمانشاه- دانشگاه رازی- دی ۹۹)</p>

## سؤالات امتحانی

## موضوع

ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- تمرین ۴	۱۱. نمودار تابع $y = -\log_2 x + 2$ را رسم کنید و صعودی و نزولی بودن آن را مشخص کنید. (تهران- ممتاز حنا- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۹ مکمل کار در کلاس ۲	۱۲. نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس تعیین کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند. الف) $y = 2x +  x $ ب) $y = -\sqrt{x} + 1$ (دزفول- حجاب- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۲	۱۳. نمودار تابع زیر را رسم کرده و وضعیت یکنوایی تابع را بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x > 0 \\ x-1 & , x \leq 0 \end{cases}$ (تهران- نمونه دولتی شهید نواب صفوی- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- تمرین ۲	۱۴. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید. $f(x) = \begin{cases} -2x-3 & , x < -4 \\ 3 & , -4 \leq x < 2 \\ 3x-2 & , x \geq 2 \end{cases}$ (اصفهان- شاهد صرمیه- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۰- مکمل تمرین ۲	۱۵. نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & , x \geq 1 \\ x+2 & , 0 \leq x < 1 \\ -x^3+1 & , x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع $f$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است. (گرگان- شاهد- دی ۹۹)

## ۲ ترکیب توابع

ریاضی ۳- صفحه‌های ۱۱ تا ۲۳

## ۱ ترکیب توابع

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

تعریف: اگر  $f$  و  $g$  دو تابع باشند، آنگاه ترکیب دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت مقابل تعریف می‌شود:شرط تشکیل این تابع آن است که اشتراک برد تابع  $g$  و دامنه‌ی تابع  $f$ ، تهی نباشد. در این صورت دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

توجه: در نماد ترکیب دو تابع، پرانتز نشان می‌دهد که کدام تابع اول وارد محاسبه می‌شود، یعنی:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

اول  $f$  بعد  $g$ تیپ ۱ امتحانی محاسبه‌ی مقدار تابع مرکب  $(f \circ g)(a)$ : برای محاسبه‌ی  $(f \circ g)(a)$  داریم:  $(f \circ g)(a) = f(g(a))$ ، پس ابتدا مقدار تابع  $g$  را در  $a$  محاسبهکرده و سپس مقدار تابع  $f$  را در  $g(a)$  می‌یابیم. اگر  $f$  در  $g(a)$  تعریف نشود  $(f \circ g)(a)$  تشکیل نمی‌شود.

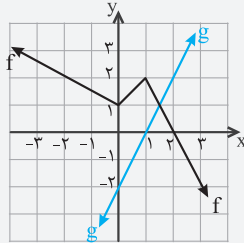
توجه: سؤالات این تیپ، می‌تواند به صورت نمودار، جدول، زوج مرتب یا ضابطه مطرح شود. به مثال‌های داده شده توجه کنید.

● مثال: با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را بیابید.

x	۱	۳	-۲	۷
f(x)	۲	۶	۵	۱۱
g(x)	-۱	۹	۱۱	۳

الف)  $(f \circ g)(7)$ ب)  $(g \circ (g - f))(3)$ ○ حل: الف)  $(f \circ g)(7) = f(g(7))$ ، از آنجا که  $g(7) = 3$ ، پس  $f(g(7)) = f(3) = 6$ ، بنابراین  $(f \circ g)(7) = 6$ .ب) از آنجا که  $(g \circ (g - f))(3) = g((g - f)(3)) = g(g(3) - f(3))$ ، پس ابتدا باید  $(g - f)(3)$  را بیابیم، یعنی:بنابراین  $(g - f)(3) = 3$ ، پس  $g((g - f)(3)) = g(3) = 9$ .

$$(g - f)(3) = g(3) - f(3) = 9 - 6 = 3$$



مثال: با توجه به نمودارهای توابع  $f$  و  $g$  در شکل مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مقدار  $(g \circ f)(-2)$  را بیابید.

ب) اگر  $f(g(a)) = -2$  باشد،  $a$  را بیابید.

حل: الف)  $(g \circ f)(-2) = g(f(-2))$ ، مطابق شکل  $f(-2) = 2$ ، پس:  $(g \circ f)(-2) = g(2)$ ، مطابق شکل  $g(2) = 2$ ، بنابراین  $(g \circ f)(-2) = 2$ .

ب) فرض می‌کنیم  $g(a) = t$ ، پس  $f(t) = -2$ ، باید در شکل ببینیم مقدار تابع  $f$ ، به ازای چه مقداری از  $x$  برابر  $-2$  می‌شود که برابر  $x = 3$  است، بنابراین  $g(a) = 3$ ، از آنجا که  $g$  یک تابع خطی با عرض از مبدأ  $-2$  و طول از مبدأ  $1$  است، پس معادله‌ی آن برابر است با:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} = 1 \Rightarrow \frac{-1}{2}y = 1 - x \Rightarrow y = 2(x - 1) \Rightarrow g(x) = 2x - 2 \Rightarrow g(a) = 3 \Rightarrow 2a - 2 = 3 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$

مثال: اگر  $f = \{(0, -1), (2, -3), (4, 5)\}$  و  $g = \{(-3, 4), (5, 1), (1, 2)\}$ ، آنگاه تابع  $g \circ f$  را بیابید.

حل: از آنجایی که  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ ، پس خواهیم داشت:

تعریف نمی‌شود:  $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1)$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(-3) = 4 \Rightarrow (2, 4) \in g \circ f \Rightarrow g \circ f = \{(2, 4), (4, 1)\}$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(5) = 1 \Rightarrow (4, 1) \in g \circ f$$

**تیب ۲ امتحانی** تشکیل ضابطه‌ی تابع مرکب و دامنه‌ی آن: برای تشکیل تابع  $f \circ g$  وقتی ضابطه‌ی دو تابع  $f$  و  $g$  داده شده است، از آنجا که

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ باید هر جا در تابع } f \text{ به جای } x \text{ قرار دهیم } g(x) \text{، به عنوان مثال اگر } f(x) = 2x + 1 \text{ و } g(x) = 5x - 3 \text{، آنگاه:}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x - 3) = 2(5x - 3) + 1 = 10x - 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = 5(2x + 1) - 3 = 10x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

۱ در حالت کلی  $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

۲ در نوشتن ضابطه‌ی ترکیب دو تابع، دامنه‌ی آن را با استفاده از تعریف یافته و در کنار تابع ترکیب می‌نویسیم.

مثال: اگر  $f(x) = 2\sqrt{4-x}$  و  $g(x) = \sqrt{x-2}$  باشند، به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه‌ی تابع  $g \circ f$  را بیابید.

ب) تابع  $g \circ f$  را تشکیل دهید.

پ) مقدار  $(g \circ f)(-5) - (f \circ g)(3)$  را تعیین کنید.

حل: الف) از آنجا که  $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ ، ابتدا دامنه‌ی  $f$  و  $g$  را می‌یابیم. دامنه‌ی تابع  $f$  با شرط نامنفی بودن زیر رادیکال از حل نامعادله‌ی

$$4 - x \geq 0 \text{ یا } x \leq 4 \text{ و دامنه‌ی تابع } g \text{ به طریق مشابه از حل نامعادله‌ی } x - 2 \geq 0 \text{ یا } x \geq 2 \text{ برابر } D_g = [2, +\infty) \text{ است، پس:}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 4] \mid 2\sqrt{4-x} \in [2, +\infty)\}$$

$$2\sqrt{4-x} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{4-x} \geq 1 \Rightarrow 4-x \geq 1 \Rightarrow x \leq 3$$

$$D_{g \circ f} = \{x \leq 4 \mid x \leq 3\} = (-\infty, 3]$$

ب) برای تشکیل تابع  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ، کافی است در تابع  $g$ ، به جای  $x$ ،  $f(x)$  را قرار دهیم، پس داریم:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2\sqrt{4-x}) = \sqrt{2\sqrt{4-x} - 2}$$

پ) برای محاسبه‌ی مقدار خواسته شده داریم:

$$(g \circ f)(-5) - (f \circ g)(3) = g(f(-5)) - f(g(3))$$

$$= g(6) - f(1) = \sqrt{6-2} - 2\sqrt{4-1} = 2 - 2\sqrt{3}$$

مثال: اگر  $f(x) = 2x + a$  و  $g(x) = 2x^2 + bx$ ، اعداد طبیعی  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که داشته باشیم:

حل: تابع  $g \circ f$  را تشکیل می‌دهیم:

$$(g \circ f)(x) = g(2x + a) = 2(2x + a)^2 + b(2x + a) = 2(4x^2 + 4ax + a^2) + 2bx + ba = 8x^2 + 8ax + 2a^2 + 2bx + ab = 8x^2 + (8a + 2b)x + 2a^2 + ab \quad (1)$$

با متحد قرار دادن (۱) با معادله‌ی  $(g \circ f)(x) = 8x^2 + 14x + 5$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 8a + 2b = 14 \\ 2a^2 + ab = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 7 \Rightarrow b = 7 - 4a \\ 2a^2 + ab = 5 \xrightarrow{b=7-4a} 2a^2 + a(7-4a) = 5 \rightarrow -2a^2 + 7a - 5 = 0 \end{cases}$$

از  $a = 1$  در  $b = 7 - 4a$ ، نتیجه می‌شود  $b = 3$ .

## نیم ۳ امتحانی

معلوم بودن  $f \circ g$  و عدم وجود  $f$  یا  $g$ : اگر یکی از دو تابع وجود نداشته باشد ولی تابع مرکب معلوم باشد، یکی از دو حالت زیر را داریم:

①  $f$  و  $f \circ g$  معلوم و  $g$  مجهول: در این حالت در تابع  $f$ ،  $f(g(x))$  را تشکیل داده و دو طرف را مساوی هم قرار می‌دهیم.

● مثال: اگر  $f(x) = 3x + 1$  و  $(f \circ g)(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ، آنگاه  $g(x)$  را بیابید.

○ حل: در تابع  $f(x) = 3x + 1$ ، با تشکیل  $f(g(x))$  به رابطه‌ی  $f(g(x)) = 3g(x) + 1$  می‌رسیم، بنابراین:

$$\begin{cases} f(g(x)) = \frac{2x-1}{x+1} \\ f(g(x)) = 3g(x) + 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{سمت راست‌ها هم برابرند}]{\text{سمت چپ‌ها برابر، پس}} \frac{2x-1}{x+1} = 3g(x) + 1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 1 = 3g(x) \Rightarrow \frac{2x-1-x-1}{x+1} = 3g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{x-2}{3(x+1)}$$

②  $g$  و  $f \circ g$  معلوم و  $f$  مجهول: در این حالت فرض می‌کنیم  $g(x) = t$ ،  $x$  را برحسب  $t$  می‌یابیم و جایگذاری می‌کنیم، سپس  $f(t)$  را برحسب  $t$  می‌نویسیم و برای محاسبه‌ی  $f(x)$ ، در رابطه‌ی به‌دست آمده به جای  $t$ ،  $x$  قرار می‌دهیم.

● مثال: اگر  $g(x) = 3x - 2$  و  $(f \circ g)(x) = 5x - 3$ ، آنگاه  $f(x)$  را بیابید.

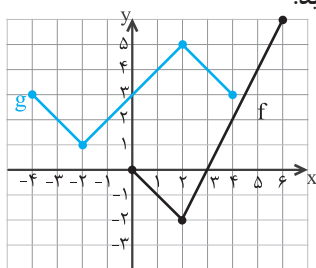
○ حل: با توجه به اینکه  $f(g(x)) = 5x - 3$ ، پس  $f(3x - 2) = 5x - 3$ ، با فرض  $3x - 2 = t$  خواهیم داشت:

$$x = \frac{t+2}{3} \rightarrow f(t) = 5\left(\frac{t+2}{3}\right) - 3 \Rightarrow f(t) = \frac{5}{3}t + \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$$

## مرجع

## سؤالات امتحانی

ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- تمرین ۴- ب	درستی یا نادرستی عبارات‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $f$ و $g$ دو تابع غیرمساوی باشند، آنگاه تساوی $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ هیچ‌گاه برقرار نمی‌شود. (اردبیل- سما- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲ مشابه تمرین ۴- پ	ب) اگر $f(2) = 6$ و $g(1) = 2$ ، آنگاه: $(f \circ g)(1) = 12$ . (سمنان- ریحانه‌النبی- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مشابه تمرین ۶	۱۷. در جاهای خالی، عبارت مناسب بنویسید. الف) تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^2$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x) = (2x^2 - 5x + 1)$ و $g(x) = \dots\dots\dots$ است. (امتحان نهایی- دی ۹۷)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲ مشابه تمرین ۴- ت	ب) اگر $f(x) = \sqrt{x+7}$ و $g(x) = 2x - 1$ ، مقدار عددی $(f \circ g)\left(\frac{3}{4}\right)$ برابر با ..... است. (مشهد- کانون علم- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مکمل تمرین ۸	۱۸. با توجه به نمودار توابع $f$ و $g$ ، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $f(g(2))$ ب) $g(f(0))$ پ) $(g \circ f)(4)$ ت) $(f \circ g)(0)$ ث) $(g \circ g)(-2)$ ج) $(f \circ f)(4)$
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مشابه تمرین ۹	۱۹. اگر $f(x) = 4x - 1$ و $g(x) = 2x + k$ ، آنگاه $k$ را طوری بیابید که داشته باشیم: $(g \circ f)(x) = 8x + 10$ (امتحان نهایی- دی ۹۵)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مکمل تمرین ۹	۲۰. اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = ax^2 + bx$ ، آنگاه $a$ و $b$ را طوری بیابید که داشته باشیم: $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 1$ (امتحان نهایی- شهریور ۹۲)



مرجع

ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۳- مشابه تمرین ۹	۲۱. اگر $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = x^2 + 1$ ، آنگاه مقدار $x$ را از معادله‌ی $(f \circ g)(x) = 8$ بیابید.
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مشابه تمرین ۳	۲۲. اگر $f(x) = 3x + 5$ و $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$ ، آنگاه تابع $g$ را طوری بیابید که $f \circ g = h$ .
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳	۲۳. اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f(x)$ را به دست آورید. (اهواز- نمونه دولتی فدک- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۳	۲۴. اگر $f(x) = \frac{x}{1-x}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x+2}{x}$ باشد، ضابطه‌ی $g(x)$ را به دست آورید. (اصفهان- نمونه دولتی ابن سینا- دی ۹۸)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مثال ۲	۲۵. اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ g(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. (امتحان نهایی- شهریور ۹۸)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مکمل کار در کلاس	۲۶. توابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. (امتحان نهایی- دی ۹۷)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مشابه تمرین ۲- ب	۲۷. دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. (امتحان نهایی- خرداد ۹۸)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مشابه کار در کلاس	۲۸. اگر $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، به کمک تعریف دامنه‌ی $f \circ g$ را به دست آورید. (تهران- قدس- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مشابه تمرین ۲- ب	۲۹. توابع $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-5}$ مفروض‌اند. دامنه و ضابطه‌ی تابع $(f \circ g)(x)$ را به دست آورید. (شیراز- فرزندان حضرت زینب (س)- دی ۹۸)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۱	۳۰. اگر $f = \{(1, 3), (-2, 5), (0, 7), (3, -4)\}$ و $g = \{(1, 4), (3, 1), (0, 0), (5, -2)\}$ آنگاه مقدار عبارت‌های زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $(f \circ g)(0)$ ب) $(g \circ f)(-2)$ پ) $(f \circ f)(1)$ ت) $(g \circ g)(3)$
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۲- کادر پایین صفحه	۳۱. با توجه به ماشین مقابل: خروجی $\rightarrow \sqrt{x+2} \rightarrow \boxed{2x+1} \rightarrow$ ورودی الف) اگر ورودی ۴ باشد، خروجی را بیابید. ب) اگر خروجی ۵ باشد، ورودی را بیابید.
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۱	۳۲. اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (7, 8)\}$ و $g = \{(2, 5), (4, 10), (3, 12)\}$ باشد، دامنه‌ی $f \circ g$ را تعیین کنید. (آرگان- میررحیم- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مشابه تمرین ۱	۳۳. اگر $f = \{(-2, 4), (0, -1), (3, 5), (5, 2)\}$ و $g = \{(-1, 4), (1, 2), (2, 0), (3, -1)\}$ باشد، تابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را در صورت امکان تشکیل دهید. آیا این دو تابع به دست آمده، برابرند؟ (اردبیل- شهید پیرزاده- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۲۲- مکمل تمرین ۱	۳۴. اگر $g(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$ و $f = \{(2, -1), (-3, 0), (-1, 1), (3, -5)\}$ باشند، زوج‌های مرتب $f \circ g$ را بنویسید. (اصفهان- دکتر محمد شفعی- دی ۹۹)
ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۳- مکمل مثال	۳۵. فرض کنید $f(x) = x^3 + 2$ و $g = \{(10, 1), (1, 4), (3, 5)\}$ در صورتی که $(g \circ f)(a) = 4$ ، مقدار $a$ را بیابید.

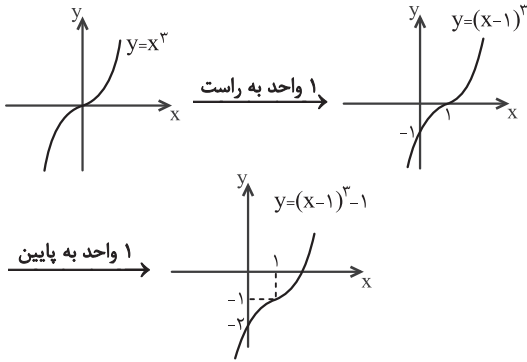


۵. با استفاده از اتحاد مکعب دوجمله‌ای، می‌دانیم:

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

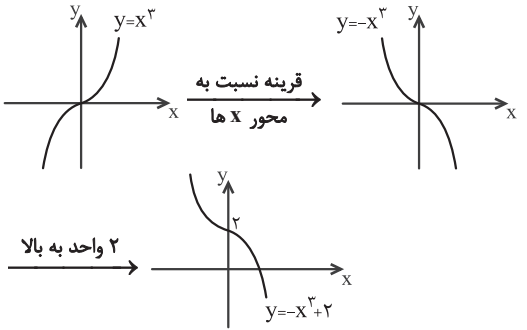
پس:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 1 = (x-1)^3 - 1$$



۶. الف) درست است. تابع ثابت را هم می‌توان صعودی و هم می‌توان نزولی در نظر گرفت.

ب) نادرست است. نمودار تابع  $y = -x^3 + 2$  نشان می‌دهد که این تابع در دامنه‌ی خود نزولی است.



زیرا با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد.

ب) نادرست است. اگر بپذیریم

که تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  در  $\mathbb{R}$

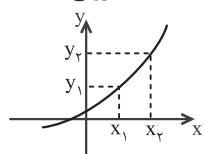
نزولی اکید است، یعنی برای هر  $a, b \in \mathbb{R}$ ، اگر  $b > a$

آنگاه  $f(b) < f(a)$ .

اما به عنوان مثال نقض در نظر بگیرید  $a = -1$  و  $b = 1$  که در این صورت  $f(b) > f(a)$ .

ت) نادرست است. به عنوان مثال نقض، تابع زیر را در نظر بگیرید:  $f = \{(-1, 2), (0, 0), (1, 1)\}$

این تابع یک به یک است ولی نه صعودی است، نه نزولی.



ث) درست است. توابع اکیداً

یکنوا، حتماً یک به یک هستند

زیرا در آنها هر دو  $x$  متمایز،

لزوماً  $y$  های متمایز دارند.

## پاسخ تشریحی فصل اول

### حسین حاجیلو

۱. الف) درست است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، در بازه‌ی  $(0, 1)$  نمودار تابع  $y = x^3$  زیر نمودار تابع  $y = x^2$  قرار دارد.

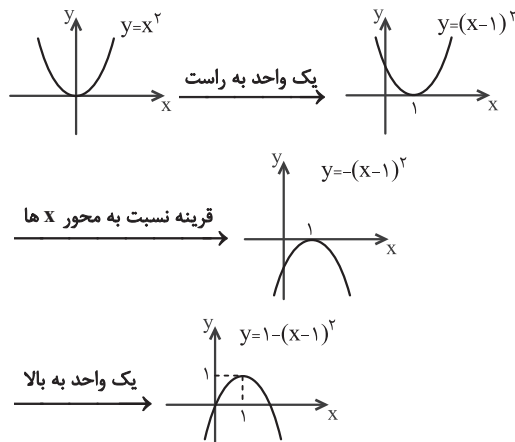
ب) نادرست است. از روی نمودار بالا معلوم است که برای  $x > 1$ ، نمودار تابع  $y = x^3$  بالای نمودار  $y = x^2$  قرار دارد، نه تمام  $x$  های نامنفی.

۲. الف)  $\mathbb{R}$   
ب)  $y = (x+3)^3 + 5$   
توضیح:

$$y = x^3 \xrightarrow{\text{واحد به چپ}} y = (x+3)^3 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = (x+3)^3 + 5$$

۳. الف)  $\mathbb{R}$   
ب)  $y = (x+2)^3$   
توضیح:

۴. الف)  $\mathbb{R}$   
ب)  $y = (x-2)^3$   
توضیح:



**ث) صفر.**  $y = ax + b$  یک تابع خطی است؛ می‌دانیم تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد تابع ثابت است و یک تابع خطی زمانی به تابع ثابت تبدیل می‌شود که شیب آن صفر باشد، یعنی اگر  $y = ax + b$  تابع ثابت باشد، آنگاه:  $a = 0$ .

**۹. الف)** در بازه‌های  $[-\pi, -\frac{\pi}{4}]$  و  $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ ، با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد، پس تابع در این بازه‌ها اکیداً نزولی است. اما در بازه‌ی  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  هم افزایش می‌یابد، پس تابع در این بازه اکیداً صعودی است.

**ب)** تابع در بازه‌ی  $(-\infty, +2]$  یعنی در کل دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

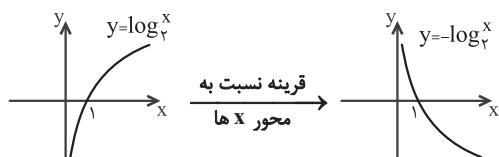
**۱۰. الف)** در بازه‌ی  $[1, -2]$  با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  هم افزایش می‌یابد، پس تابع در این بازه، اکیداً صعودی است.

**ب)** در بازه‌ی  $[2, -2]$  با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند، پس تابع در این بازه، صعودی است.

**پ)** در بازه‌ی  $(1, +\infty)$  با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد یا ثابت باقی می‌ماند، پس تابع در این بازه، نزولی است.

**ث)** در بازه‌ی  $[1, 2]$  مقدار  $y$  ثابت است، پس تابع در این بازه، ثابت است.

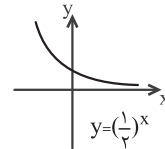
**۱۱.** نمودار تابع  $y = \log_a^x$  وقتی  $a > 1$  است، به شکل نمودار تابع  $y = -\log_a^x$  است، پس:



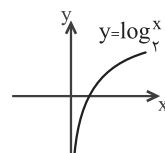
**۷. الف) صعودی.** نمودار این تابع نشان می‌دهد که صعودی است.



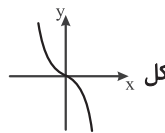
**ب) نزولی - صعودی.** نمودار تابع نمایی  $y = (\frac{1}{p})^x$ ، به صورت مقابل است:



پس تابع  $y = (\frac{1}{p})^x$  تابعی نزولی است.



نمودار تابع لگاریتمی  $y = \log_p^x$  به صورت مقابل است.

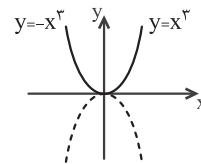


پس تابع  $y = \log_p^x$  تابعی صعودی است.

**پ) نزولی.** نمودار تابع  $y = -x^3$  به شکل است که ملاحظه می‌کنید نزولی است. نمودار  $y = -x^3 - 2$  هم شبیه  $y = -x^3$  است با این تفاوت که دو واحد به پایین منتقل می‌شود که چنین انتقالی تأثیری در صعودی یا نزولی بودن آن ندارد.

**ت) غیریکنوا.** تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته، نمودار آن را رسم می‌کنیم.

$$y = x^2 \mid x \mid = \begin{cases} x^2(x) = x^3 & ; x \geq 0 \\ x^2(-x) = -x^3 & ; x < 0 \end{cases}$$



همانطور که می‌بینید این تابع در  $(-\infty, 0]$  نزولی و در  $[0, +\infty)$  صعودی است، پس در کل دامنه‌اش (یعنی  $\mathbb{R}$ ) غیریکنواست.

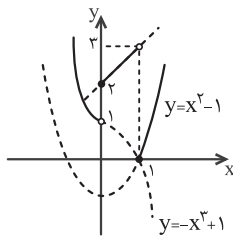
**۸. الف) ثابت.** تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

**ب) اکیداً یکنوا**

**پ)  $[-2, +\infty)$ .** با توجه به نمودار تابع  $y = |x-2|$ ، این تابع در بازه‌ی  $(-\infty, 2]$  نزولی است.



**ت)  $(1, +\infty)$ .** با توجه به نمودار تابع  $y = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$  این تابع در بازه‌ی  $(1, +\infty)$  اکیداً نزولی است.



۱۵. با توجه به نمودار تابع، در دو بازه  $[0, 1)$  و  $(1, +\infty)$  با افزایش  $x$ ، مقدار  $y$  افزایش می‌یابد، پس تابع در این دو بازه اکیداً صعودی است.

اما در بازه  $(-\infty, 0)$  با افزایش  $x$ ، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد، پس تابع در این بازه اکیداً نزولی است.

۱۶. الف) نادرست است. به عنوان مثال نقض، دو تابع  $f(x) = x^3$  و

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 1 \neq 6 \quad \text{ب) نادرست است.}$$

۱۷. الف)  $x^2$

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 5x + 1 \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^2 - 5x + 1) = (2x^2 - 5x + 1)^2$$

ب) ۳

$$f(x) = \sqrt{x+7} \quad \text{و} \quad g(x) = 2x-1$$

$$\Rightarrow (f \circ g)\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right) = f(2) = \sqrt{2+7} = 3$$

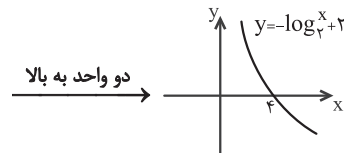
۱۸. الف) با توجه به نمودار، تابع  $g$  از نقطه  $(2, 5)$  می‌گذرد، پس  $g(2) = 5$ ، بنابراین  $f(g(2)) = f(5)$  و از آنجا که تابع  $f$  از نقطه  $(5, 4)$  می‌گذرد  $f(5) = 4$ ، یعنی  $f(g(2)) = 4$ .

ب) با توجه به نمودار، تابع  $f$  از نقطه  $(0, 0)$  می‌گذرد، پس  $f(0) = 0$ ، بنابراین  $g(f(0)) = g(0)$  و از آنجا که تابع  $g$  از نقطه  $(0, 3)$  می‌گذرد  $g(0) = 3$ ، یعنی  $g(f(0)) = 3$ .

پ) می‌دانیم  $(g \circ f)(4) = g(f(4))$ ، با توجه به نمودار، تابع  $f$  از نقطه  $(4, 2)$  می‌گذرد، پس  $f(4) = 2$ ، بنابراین  $g(f(4)) = g(2)$  و از آنجا که تابع  $g$  از نقطه  $(2, 5)$  می‌گذرد  $g(2) = 5$ ، یعنی  $(g \circ f)(4) = 5$ .

ت) می‌دانیم  $(f \circ g)(0) = f(g(0))$ ، با توجه به نمودار، تابع  $g$  از نقطه  $(0, 3)$  می‌گذرد، پس  $g(0) = 3$ ، بنابراین  $f(g(0)) = f(3)$  و از آنجا که تابع  $f$  از نقطه  $(3, 0)$  می‌گذرد  $f(3) = 0$ ، یعنی  $(f \circ g)(0) = 0$ .

ث) می‌دانیم  $(g \circ g)(-2) = g(g(-2))$ ، با توجه به نمودار، تابع  $g$  از نقطه  $(-2, 1)$  می‌گذرد، پس  $g(-2) = 1$ ، بنابراین  $g(g(-2)) = g(1)$  و از آنجا که تابع  $g$  از نقطه  $(1, 4)$  می‌گذرد  $g(1) = 4$ ، یعنی  $(g \circ g)(-2) = 4$ .

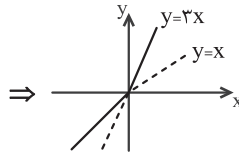


دو واحد به بالا

همانطور که در نمودار مشخص است، با افزایش  $x$ ، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد، پس این تابع نزولی است.

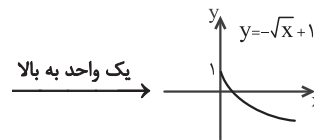
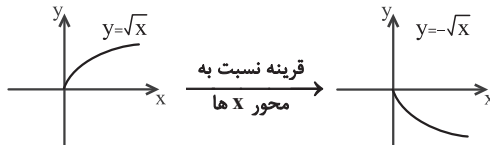
۱۲. الف) برای رسم نمودار این تابع، آن را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$y = 2x + |x| = \begin{cases} 2x + x = 3x & ; x \geq 0 \\ 2x - x = x & ; x < 0 \end{cases}$$



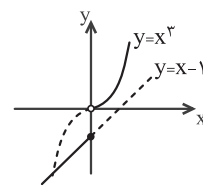
همانطور که در نمودار می‌بینید، با افزایش  $x$ ، مقدار  $y$  هم افزایش می‌یابد، پس این تابع در  $\mathbb{R}$  صعودی است.

ب)



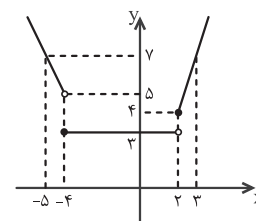
با توجه به نمودار، با افزایش  $x$ ، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد، پس این تابع در بازه  $[0, +\infty)$  نزولی است.

۱۳. از نمودار معلوم است که در  $\mathbb{R}$ ، با افزایش  $x$ ، مقدار  $y$  هم افزایش می‌یابد، پس این تابع روی  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی است.



۱۴. هر سه ضابطه خطی هستند، پس با معلوم بودن دو نقطه از آنها و وصل کردن این دو نقطه به هم، نمودار آنها رسم می‌شود.

با توجه به نمودار رسم شده، تابع در بازه  $(-4, 2)$  ثابت است.



از طرفی در بازه  $(-\infty, 2)$ ، با افزایش مقدار  $x$ ، مقدار  $y$  کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند، پس تابع در این بازه نزولی است. در بازه  $(-4, +\infty)$  با افزایش  $x$ ، مقدار  $y$  ثابت باقی می‌ماند یا افزایش می‌یابد، پس تابع در این بازه صعودی است.

$$f(X) = 4\left(\frac{X+3}{2}\right)^2 - 16\left(\frac{X+3}{2}\right) + 20$$

می‌توانیم ضابطه را ساده‌تر کنیم:

$$f(X) = (X+3)^2 - 8(X+3) + 20 = X^2 - 2X + 5$$

۲۴. با توجه به اینکه  $f(x) = \frac{x}{1-x}$ ، پس:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{1-g(x)}$$

از طرفی طبق فرض سؤال  $(f \circ g)(x) = \frac{x+2}{x}$ ، پس:

$$\Rightarrow \frac{g(x)}{1-g(x)} = \frac{x+2}{x} \quad (*)$$

از معادله‌ی (\*) باید  $g(x)$  را به دست آوریم، با طرفین وسطین کردن، داریم:

$$xg(x) = (1-g(x))(x+2)$$

$$\Rightarrow xg(x) = x+2 - xg(x) - 2g(x)$$

$$\Rightarrow xg(x) + xg(x) + 2g(x) = x+2$$

$$\Rightarrow (2x+2)g(x) = x+2 \Rightarrow g(x) = \frac{x+2}{2x+2}$$

۲۵. ابتدا دامنه‌ی توابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow D_f : x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$g(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

می‌دانیم  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ ، پس:

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{(2x^2 - 1)}_{(*)} \in [1, +\infty)\right\}$$

از (\*) نتیجه می‌گیریم:

$$2x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow 2x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = [1, +\infty) \cup (-\infty, -1]$$

۲۶. ابتدا دامنه‌ی توابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x+3}{2x}$$

ریشه‌ی مخرج:  $x=0 \Rightarrow D_f : x \neq 0$

$$g(x) = 3x - 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

می‌دانیم  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ ، پس:

$$D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{(3x-1)}_{x \neq \frac{1}{3}} \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

ج) می‌دانیم  $(f \circ f)(4) = f(f(4))$ ، با توجه به نمودار، تابع  $f$  از نقطه‌ی  $(4, 2)$  می‌گذرد، پس  $f(4) = 2$ ، بنابراین  $f(f(4)) = f(2)$  و از آنجا که تابع  $f$  از نقطه‌ی  $(2, -2)$  می‌گذرد یعنی  $f(2) = -2$ ،  $(f \circ f)(4) = -2$ .

۱۹. می‌دانیم  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ، پس اگر  $f(x) = 4x - 1$  و  $g(x) = 2x + k$ ، آنگاه:

$$g(f(x)) = 2f(x) + k = 2(4x - 1) + k = 8x + (k - 2) \quad (*)$$

با توجه به فرض سؤال  $(g \circ f)(x) = 8x + 10$  است که از مقایسه‌ی آن با (\*) داریم:

$$k - 2 = 10 \Rightarrow k = 12$$

۲۰. می‌دانیم  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، پس اگر  $f(x) = x + a$  و  $g(x) = ax^2 + bx$ ، آنگاه:

$$f(g(x)) = g(x) + a = ax^2 + bx + a \quad (*)$$

با توجه به فرض سؤال،  $(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 1$  که از مقایسه‌ی آن با (\*) داریم:

$$b = 4, a = 1$$

۲۱. می‌دانیم  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، پس اگر  $f(x) = 3x + 2$  و  $g(x) = x^2 + 1$ ، آنگاه:

$$f(g(x)) = 3g(x) + 2 = 3(x^2 + 1) + 2 = 3x^2 + 5$$

$$\xrightarrow{(f \circ g)(x)=8} 3x^2 + 5 = 8 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(x) = 3x + 5$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 5 \quad (*)$$

طبق فرض سؤال باید  $f \circ g = h$ ، داریم:

$$h(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

$$\xrightarrow{(f \circ g)=h} 3g(x) + 5 = 3x^2 + 3x + 2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow 3g(x) = 3x^2 + 3x - 3 \xrightarrow{\div 3} g(x) = x^2 + x - 1$$

$$g(x) = 2x - 3$$

$$(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5)$$

$$\Rightarrow f(2x - 3) = 4x^2 - 16x + 20 \quad (*)$$

اگر در نظر بگیریم  $2x - 3 = X$ ، آنگاه  $2x - 3 = X$ ، بنابراین  $x = \frac{X+3}{2}$

از معادله‌ی (\*) داریم:

ضابطه‌ی تابع  $f \circ g$  را به دست می‌آوریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-5}) = \sqrt{3-\sqrt{x-5}}$$

الف) داریم  $(f \circ g)(0) = f(g(0))$ . از آنجا که  $(0, 0) \in g$ ، پس  $g(0) = 0$  بنابراین:

$$(f \circ g)(0) = f(0) \stackrel{(0, 0) \in f}{=} 0$$

ب) داریم  $(f \circ g)(-2) = f(g(-2))$ . از آنجا که  $(-2, 5) \in f$ ، پس  $f(-2) = 5$  بنابراین:

$$(f \circ g)(-2) = g(5) \stackrel{(5, -2) \in g}{=} -2$$

پ) داریم  $(f \circ g)(1) = f(g(1))$ . از آنجا که  $(1, 3) \in f$ ، پس  $f(1) = 3$  بنابراین:

$$(f \circ g)(1) = f(3) \stackrel{(3, -4) \in f}{=} -4$$

ت) داریم  $(g \circ g)(3) = g(g(3))$ . از آنجا که  $(3, 1) \in g$ ، پس  $g(3) = 1$  بنابراین:

$$(g \circ g)(3) = g(1) \stackrel{(1, 4) \in g}{=} 4$$

۳۱. الف)

$$4 \rightarrow \sqrt{2x+1} \xrightarrow{2x+1=9} \sqrt{x+2} \rightarrow \sqrt{9}+2=5$$

ب) فرض کنیم به ازای ورودی  $\alpha$ ، خروجی ۵ باشد، داریم:

$$\alpha \rightarrow \sqrt{2x+1} \xrightarrow{2x+1} \sqrt{x+2} \rightarrow \sqrt{2\alpha+1}+2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2\alpha+1}+2=5 \Rightarrow \sqrt{2\alpha+1}=3$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} 2\alpha+1=9 \Rightarrow 2\alpha=8 \Rightarrow \alpha=4$$

۳۲. می‌دانیم  $D_{f \circ g} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ ؛ به عبارت دیگر

دامنه‌ی تابع  $g \circ f$  تشکیل می‌شود از  $x$ هایی که به ازای آنها  $f(x)$  در دامنه‌ی تابع  $g$  قرار داشته باشد؛ پس مؤلفه‌های اول تابع  $f$  را در نظر گرفته، به ازای هر یک از آنها برقراری این شرط را بررسی می‌کنیم:

$$f = \{(1, 2), (3, 4), (7, 8)\}$$

$$g = \{(2, 5), (4, 10), (3, 12)\}$$

$$x=1 \xrightarrow{(1,2) \in f} f(1)=2 \in D_g \Rightarrow 1 \in D_{g \circ f}$$

$$x=3 \xrightarrow{(3,4) \in f} f(3)=4 \in D_g \Rightarrow 3 \in D_{g \circ f}$$

$$x=7 \xrightarrow{(7,8) \in f} f(7)=8 \notin D_g$$

پس داریم  $D_{g \circ f} = \{1, 3\}$

۳۳.

$$f = \{(-2, 4), (0, -1), (3, 5), (5, 2)\}$$

$$g = \{(-1, 4), (1, 2), (2, 0), (3, -1)\}$$

۲۷. ابتدا دامنه‌ی توابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x-4} \Rightarrow D_f : x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow D_g : x^2-1 \neq 0 \Rightarrow D_g : x \neq \pm 1$$

می‌دانیم  $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ ، پس:

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \geq 4 \mid \underbrace{\sqrt{x-4} \neq \pm 1}_{(*)} \right\}$$

با توجه به  $(*)$ ، باید:

$$\sqrt{x-4} \neq -1 \quad (\text{همواره برقرار})$$

$$\sqrt{x-4} \neq 1 \Rightarrow x-4 \neq 1^2 \Rightarrow x \neq 5$$

پس:

$$D_{g \circ f} = \{x \geq 4 \mid x \neq 5\} = [4, +\infty) - \{5\} \\ = [4, 5) \cup (5, +\infty)$$

۲۸. ابتدا دامنه‌ی توابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x+3}{x-4} \Rightarrow D_f : x-4 \neq 0 \Rightarrow D_f : x \neq 4$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow D_g : x-1 \neq 0 \Rightarrow D_g : x \neq 1$$

می‌دانیم  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ ، پس:

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \neq 1 \mid \underbrace{\frac{1}{x-1} \neq 4}_{(*)} \right\}$$

$$\xrightarrow{(*)} 4(x-1) \neq 1 \Rightarrow 4x-4 \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{5}{4}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \neq 1 \mid x \neq \frac{5}{4} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ 1, \frac{5}{4} \right\}$$

۲۹. ابتدا دامنه‌ی توابع  $f$  و  $g$  را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow D_f : 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \sqrt{x-5} \Rightarrow D_g : x-5 \geq 0 \Rightarrow D_g : x \geq 5$$

می‌دانیم  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ ، پس:

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \geq 5 \mid \underbrace{g(x) \in (-\infty, 3]}_{(*)} \right\}$$

از  $(*)$  نتیجه می‌گیریم  $\sqrt{x-5} \leq 3$ ، از آنجا که دو طرف نامساوی مثبت هستند، می‌توانیم آنها را به توان دو برسانیم:

$$(\sqrt{x-5})^2 \leq 3^2 \Rightarrow x-5 \leq 9 \Rightarrow x \leq 14$$

$$D_{f \circ g} = \{x \geq 5 \mid x \leq 14\} = [5, 14]$$

$$\Rightarrow (3, 7) \in \text{gof}$$

$$\Rightarrow \text{gof} = \{(2, 1), (-1, 1), (3, 7)\}$$

۳۵. می‌دانیم  $(\text{gof})(a) = g(f(a))$ . از آنجا که  $f(x) = x^3 + 2$

$$\text{داریم } f(a) = a^3 + 2 \text{ پس:}$$

$$(\text{gof})(a) = g(f(a)) = g(a^3 + 2) \xrightarrow{(\text{gof})(a)=4}$$

$$g(a^3 + 2) = 4 \Rightarrow (a^3 + 2, 4) \in g$$

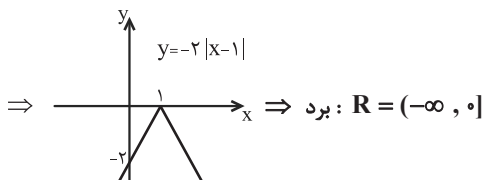
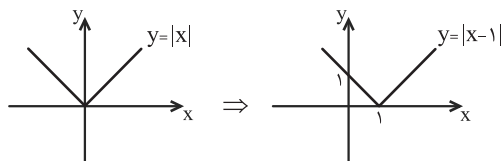
$$\xrightarrow{(1, 4) \in g} a^3 + 2 = 1 \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow a = -1$$

۳۶. الف) درست است. برای رسم نمودار  $y = kf(x)$  از روی

نمودار  $y = f(x)$ ، انبساط یا انقباض در راستای محور  $y$ ‌ها انجام می‌شود و  $x$ ‌ها تغییر نمی‌کنند، پس دامنه تغییر نمی‌کند. ب) نادرست است. برای رسم نمودار  $y = kf(x)$  از روی نمودار  $y = f(x)$ ، انبساط یا انقباض در راستای محور  $y$ ‌ها انجام می‌شود، بنابراین در حالت کلی  $y$ ‌ها و در نتیجه برد تابع تغییر می‌کند.

پ) نادرست است. برای رسم نمودار  $y = -2f(x)$  از روی نمودار  $y = f(x)$ ، عرض تمام نقاط واقع بر  $y = f(x)$  را دو برابر کرده، سپس نسبت به محور  $x$ ‌ها قرینه می‌کنیم، پس در این فرایند، طول نقاط تغییری نمی‌کند بنابراین نقطه‌ی  $(1, 2)$  به نقطه‌ی  $(1, -4)$  تبدیل می‌شود.

ت) درست است. نمودار تابع  $f$  را رسم کرده، برد آن را به‌دست می‌آوریم:



۳۷. الف) انقباض. اگر  $0 < k < 1$ ، آنگاه نمودار تابع  $y = kf(x)$  با

انقباض نمودار تابع  $y = f(x)$  در راستای محور  $y$ ‌ها به‌دست می‌آید.

ب) عمودی-منبسط.  $y$ ‌های تابع  $y = 3f(x)$ ، در مقایسه با تابع  $y = f(x)$ ، سه برابر شده‌اند، یعنی نمودار در جهت محور  $y$ ‌ها (جهت عمودی)، کشیده (منبسط) شده است.

برای تشکیل  $\text{fog}$  از مؤلفه‌های اول تابع  $g$  شروع کرده و مقدار تابع  $\text{fog}$  را به ازای هر یک از آنها (در صورت تعریف) به دست می‌آوریم:

$$\text{تعریف نمی‌شود: } (\text{fog})(-1) = f(g(-1)) \xrightarrow{(-1, 4) \in g} f(4)$$

$$\text{تعریف نمی‌شود: } (\text{fog})(1) = f(g(1)) \xrightarrow{(1, 2) \in g} f(2)$$

$$(\text{fog})(2) = f(g(2)) \xrightarrow{(2, 0) \in g} f(0) = -1$$

$$\Rightarrow (2, -1) \in \text{fog}$$

$$\text{تعریف نمی‌شود: } (\text{fog})(3) = f(g(3)) \xrightarrow{(3, -1) \in g} f(-1)$$

بنابراین داریم:

$$\text{fog} = \{(2, -1)\}$$

برای تشکیل  $\text{gof}$  از مؤلفه‌های اول تابع  $f$  شروع کرده و مقدار تابع  $\text{gof}$  را به ازای هر یک از آنها (در صورت تعریف) به دست می‌آوریم:

$$\text{تعریف نمی‌شود: } (\text{gof})(-2) = g(f(-2)) \xrightarrow{(-2, 4) \in f} g(4)$$

$$(\text{gof})(0) = g(f(0)) \xrightarrow{(0, -1) \in f} g(-1) = 4$$

$$\Rightarrow (0, 4) \in \text{gof}$$

$$\text{تعریف نمی‌شود: } (\text{gof})(3) = g(f(3)) \xrightarrow{(3, 5) \in f} g(5)$$

$$(\text{gof})(5) = g(f(5)) \xrightarrow{(5, 2) \in f} g(2) = 0$$

$$\Rightarrow (5, 0) \in \text{gof}$$

$$\text{پس داریم: } \text{gof} = \{(0, 4), (5, 0)\}$$

ملاحظه می‌کنید که  $\text{fog} \neq \text{gof}$ .

۳۸. برای تشکیل تابع  $\text{gof}$ ، از آنجا که  $f$  به صورت زوج مرتبی داده

شده است، از مؤلفه‌های اول  $f$  شروع کرده و مقدار تابع  $\text{gof}$  را به ازای هر یک از آنها (در صورت تعریف) به دست می‌آوریم:

$$f = \{(2, -1), (-3, 0), (-1, 1), (3, -5)\}$$

$$g(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$$

$$(\text{gof})(2) = g(f(2)) \xrightarrow{(2, -1) \in f} g(-1) = \sqrt{2-1} = 1$$

$$\Rightarrow (2, 1) \in \text{gof}$$

$$\text{تعریف نمی‌شود: } (\text{gof})(-3) = g(f(-3)) \xrightarrow{(-3, 0) \in f} g(0)$$

$$(\text{gof})(-1) = g(f(-1)) \xrightarrow{(-1, 1) \in f} g(1) = \sqrt{2-1} = 1$$

$$\Rightarrow (-1, 1) \in \text{gof}$$

$$(\text{gof})(3) = g(f(3))$$

$$\xrightarrow{(3, -5) \in f} g(-5) = \sqrt{2 \times 25 - 1} = 7$$