مؤلف این فصل: فرهاد حامی

فصل اول

جبر و معادله

(۴۳ پیمانه)

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.

آبی: مسلطم.

سبز: نسبتاً مسلطم.

زرد: مسلط نیستم.

گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

جبر و معادله

۴۳۰ سؤال شناسنامه‌دار

- ۱۶۹ سؤال از کنکورهای سراسری
- ۱۴۶ سؤال تألیفی و طراحی شده از کتاب درسی
- ۱۱۵ سؤال از آزمون‌های کانون

در درسنامه می‌بینید ۹۶ سؤال

- ۵۶ تست طراحی شده با نگاه به رویکرد کنکورهای جدید
- ۴۰ مثال برای ادراک و تثبیت

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

آبی / سبز / زرد

۵ پیمانه — ۵۰ تست

۱ مجموع جملات دنباله‌ی حسابی
۲ مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

۲ معادله‌ی درجه‌ی دوم

آبی / سبز / زرد

۵ پیمانه — ۵۰ تست

۱ مجموع، حاصلضرب و روابط بین ریشه‌های معادله
۲ تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم با S و P
۳ تعداد و علامت ریشه‌های معادله

۳ تابع درجه‌ی دوم

آبی / سبز / زرد

۸ پیمانه — ۸۰ تست

۱ رأس (ماکزیمم یا می‌نیمم)، محور تقارن و ویژگی‌های آنها
۲ صفرهای تابع و وضعیت نمودار تابع با محور xها
۳ تلاقی خط و سهمی و دو سهمی با هم
۴ نمودارشناسی (رابطه‌ی ضرایب معادله با نمودار)
۵ ماکزیمم (می‌نیمم) سازی با تابع درجه‌ی دوم

۴ روش‌های کلی حل معادلات (تجزیه، تغییر متغیر و هندسی)

آبی / سبز / زرد

۲ پیمانه — ۲۰ تست

۵ معادلات گویا و گنگ

آبی / سبز / زرد

۶ پیمانه — ۶۰ تست

۱ معادلات شامل عبارات گویا
۲ معادلات شامل عبارات گنگ

۶ قدرمطلق و ویژگی‌های آن

آبی / سبز / زرد

۶ پیمانه — ۶۰ تست

۱ ویژگی‌های قدرمطلق
۲ نمودار توابع شامل قدرمطلق
۳ معادلات قدرمطلقی

۷ آشنایی با هندسه‌ی تحلیلی

آبی / سبز / زرد

۹ پیمانه — ۹۰ تست

۱ اوضاع نسبی دو خط
۲ فاصله‌ی بین دو نقطه
۳ مختصات نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط
۴ فاصله‌ی یک نقطه از یک خط

سؤال‌های ویژه‌ی برترها

آبی / سبز / زرد

۱ پیمانه — ۱۰ تست

آزمون جمع‌بندی پایان فصل

آبی / سبز / زرد

۱ پیمانه — ۱۰ تست

حسابان ۱ یازدهم	فصل اول
	صفحه‌های: ۲ تا ۶

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱ مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n ◄ اگر بخواهیم مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n را که با S_n نمایش می‌دهیم محاسبه کنیم، کافی است این مجموع را یک بار از اول به آخر و بار دیگر از آخر به اول نوشته و با هم جمع کنیم.

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & S_n = & ۱ & + & ۲ & + & ۳ & + & \dots & + & (n-۱) & + & n \\ + & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & S_n = & n & + & n-۱ & + & n-۲ & + & \dots & + & ۲ & + & ۱ \end{array}$$

$$۲S_n = \underbrace{(n+۱)+(n+۱)+\dots+(n+۱)+(n+۱)}_{\text{مرتبه } n} \Rightarrow ۲S_n = n(n+۱) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

به فرمول‌های زیر توجه کنید:

مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n	$(۱)\ ۱+۲+۳+\dots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$
مجموع اعداد طبیعی فرد متوالی از ۱ تا $۲n-۱$	$(۲)\ ۱+۳+۵+\dots+(۲n-۱) = n^۲$
مجموع اعداد طبیعی زوج متوالی از ۲ تا $۲n$	$(۳)\ ۲+۴+۶+\dots+۲n = n(n+۱)$

تست حاصل $S = ۱۰^۲ - ۹^۲ + ۸^۲ - ۷^۲ + \dots + ۲^۲ - ۱^۲$ کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۵۵ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۳۰

پاسخ گزینه‌ی «۲» با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$S = \underbrace{۱۰^۲-۹^۲}+\underbrace{۸^۲-۷^۲}+\dots+\underbrace{۲^۲-۱^۲} = \underbrace{(۱۰-۹)}_{۱}(۱۰+۹)+\underbrace{(۸-۷)}_{۱}(۸+۷)+\dots+\underbrace{(۲-۱)}_{۱}(۲+۱)$$

$$\Rightarrow S = ۱۰+۹+۸+۷+\dots+۲+۱ \xrightarrow{\text{مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰}} S = \frac{۱۰(۱۰+۱)}{۲} = \frac{۱۰\times۱۱}{۲} = ۵۵$$

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی ◄ همانند روشی که در تعیین مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n به‌کار بردیم، می‌توانیم مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی را بیابیم. در یک دنباله‌ی حسابی، با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدر نسبت d و جمله‌ی عمومی a_n، مجموع n جمله‌ی اول با S_n نمایش داده می‌شود و می‌نویسیم:

$$S_n = a_۱ + a_۲ + a_۳ + \dots + a_{n-۱} + a_n$$

مجموع این جملات از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$(۱)\ \ S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \qquad (۲)\ \ S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$

از رابطه‌ی (۲)، معمولاً وقتی استفاده می‌کنیم که جمله‌ی اول و آخر در اختیار باشد و در بقیه‌ی موارد از فرمول (۱) استفاده می‌کنیم. برای یافتن تعداد جملات از رابطه‌ی جمله‌ی عمومی یا $n = ۱ + \frac{a_n - a_۱}{d}$ استفاده می‌کنیم.

● **مثال:** مجموع جمله‌های دنباله‌ی حسابی $-۵\ ,\ -۱\ ,\ ۳\ ,\ \dots\ ,\ ۱۱۱$ را بیابید.

○ **حل:** جمله‌ی اول $a_۱ = -۵$ و جمله‌ی آخر $a_n = ۱۱۱$ باید تعداد جملات را بیابیم. از آنجا که قدر نسبت جملات $d = -۱-(-۵) = ۴$ است، پس:

$$n = ۱ + \frac{a_n - a_۱}{d} \xrightarrow{a_۱=-۵\ ,\ a_n=۱۱۱\ ,\ d=۴} n = ۱ + \frac{۱۱۱-(-۵)}{۴} = ۱ + \frac{۱۱۶}{۴} = ۱ + ۲۹ = ۳۰$$

$$\Rightarrow\ S_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲}(-۵+۱۱۱) = ۱۵\times۱۰۶ = ۱۵۹۰$$

تذکر ◄ اگر S_n (مجموع جملات) معلوم باشد و n (تعداد جملات) را بخواهند، در این حالت با استفاده از فرمول $S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$، به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم خواهیم رسید که با حل آن، مقدار طبیعی n را می‌پذیریم.

تست چند جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی $\dots , ۹ , ۷ , ۵$ را با هم جمع کنیم تا حاصل مجموع ۵۷۲ باشد؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

پاسخ گزینه‌ی «۱» در سؤال از ما خواسته شده nای را بیابیم که به ازای آن $S_n = ۵۷۲$ باشد. از آنجا که $a_۱ = ۵$ و $d = ۷-۵ = ۲$، پس با استفاده از فرمول (۱) خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \Rightarrow ۵۷۲ = \frac{n}{۲}(۲\times۵ + (n-۱)\times۲) \Rightarrow n(n+۴) = ۵۷۲$$

$$\Rightarrow n^۲ + ۴n - ۵۷۲ = ۰ \xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله‌ی مشترک}} (n-۲۲)(n+۲۶) = ۰ \xrightarrow{n\in N} n = ۲۲$$

تذکر ◄ برای تعیین مجموع اعداد طبیعی مضرب عدد a (مثلاً مجموع مضارب دو رقمی عدد ۴ یا مجموع مضارب عدد ۴ بین ۲۲۵ و ۳۰۰) نیاز به یافتن تعداد اعداد دارید، دو روش اینجا مطرح می‌کنیم.

روش اول: تعداد جملات را از فرمول $n=1+\frac{a_n-a_1}{d}$ به دست می‌آوریم.

روش دوم: توجه کنید که مضارب طبیعی عدد a را با $ka\ \ (k\in\mathbb{N})$ نمایش می‌دهیم. در این حالت، مضرب موردنظر را بین دو عدد فرض سؤال قرار داده، نامعادله‌ی حاصل را حل کرده و تعداد اعداد طبیعی بین آن‌ها را می‌یابیم.

توجه کنید وقتی می‌گوییم مضارب طبیعی سه رقمی عدد ۵، یعنی $100\le 5k<1000$ یا وقتی می‌گوییم اعداد طبیعی دو رقمی بخش‌پذیر بر ۷، یعنی $10\le 7k<100$ که در هر دو حالت k عددی طبیعی است.

تست مجموع اعداد طبیعی بخش‌پذیر بر ۷ که کوچکتر از ۳۱۲ هستند، کدام است؟

۱) ۶۶۰۰ ۲) ۷۵۰۰ ۳) ۸۱۲۵ ۴) ۶۹۳۰

پاسخ گزینه‌ی «۴» اعداد طبیعی بخش‌پذیر بر ۷ به صورت $7k$ هستند که در آن، $k\in\mathbb{N}$ و قدر نسبت آنها برابر $d=7$ است و دنباله‌ی زیر را می‌سازند:

$7\ ,\ 14\ ,\ 21\ ,\ \dots$

باید آخرین عدد این دنباله و تعداد جملات آن را بیابیم. برای این منظور می‌نویسیم $7\le 7k<312$، بنابراین:

$$7\le 7k<312 \xrightarrow{\div 7} 1\le k<\frac{312}{7}\simeq 44/5 \xrightarrow{k\in\mathbb{N}} 1\le k\le 44$$

بنابراین تعداد جملات این دنباله که کوچکتر از ۳۱۲ هستند، برابر ۴۴ جمله است. برای یافتن مجموع این ۴۴ جمله داریم:

$$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)\xrightarrow{a_1=7\ ,\ d=7\ ,\ n=44} S_{44}=\frac{44}{2}(2\times 7+(44-1)\times 7)=22(\underbrace{2\times 7+43\times 7}_{45\times 7=315})=22\times 315=6930$$

تذکر ◄ توجه به مفهوم مجموع n جمله‌ی اول، یعنی S_n در مواردی کارساز است. می‌دانیم در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی a_n حاصل S_n به صورت زیر است:

$S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$

به حاصل هر یک از عبارت‌های روبه‌رو توجه کنید:

$S_1=a_1$

$S_2=a_1+a_2$

$S_3=a_1+a_2+a_3$

به عنوان مثال:

$$S_{10}-S_9=(a_1+a_2+\dots+a_9+a_{10})-(a_1+a_2+\dots+a_9)=a_{10}$$

$$S_8-S_6=(a_1+a_2+\dots+a_6+a_7+a_8)-(a_1+a_2+\dots+a_6)=a_8+a_7$$

● مثال: اگر مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی به صورت $S_n=3n^2-n$ داده شده باشد، آنگاه جمله‌ی اول، قدر نسبت و جمله‌ی عمومی دنباله را بیابید.

○ حل: جمله‌ی اول همان S_1 است، یعنی $S_1=a_1$، پس:

$$S_1=a_1\xrightarrow{S_1=3-1=2} a_1=2$$

با داشتن a_1، برای یافتن قدر نسبت کافی است S_2 را بیابیم که همان a_1+a_2 است، پس:

$$S_2=a_1+a_2\xrightarrow{S_2=3(2)^2-2=10} a_1+a_2=10\xrightarrow{a_2=a_1+d} a_1+(a_1+d)=10\Rightarrow 2a_1+d=10\xrightarrow{a_1=2} 2\times 2+d=10\Rightarrow d=6$$

با در اختیار بودن $a_1=2$ و $d=6$، جمله‌ی عمومی را می‌یابیم:

$$a_n=a_1+(n-1)d\xrightarrow{a_1=2\ ,\ d=6} a_n=2+(n-1)\times 6=2+6n-6\Rightarrow a_n=6n-4$$

تذکر ◄ اگر مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی داده شده باشد، آنگاه جمله‌ی عمومی دنباله از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+a_n\\ S_{n-1}&=a_1+a_2+\dots+a_{n-1}\end{aligned}\ \xrightarrow{\text{تفاضل}}\ \boxed{S_n-S_{n-1}=a_n}$$

توجه کنید که با در اختیار داشتن a_n می‌توانیم جمله‌ی اول، قدر نسبت یا هر جمله‌ای از دنباله را بیابیم.

تست در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌ی $S_n=\frac{n^2}{3}$ به دست می‌آید. جمله‌ی عمومی دنباله کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}(2n-1)$ ۲) $\frac{n}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}(4n-3)$ ۴) $\frac{2n}{3}-1$

پاسخ گزینه‌ی «۱»

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n^2}{3}-\frac{(n-1)^2}{3}=\frac{1}{3}(\underbrace{n^2-(n-1)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}})=\frac{1}{3}(n-(n-1))(n+(n-1))=\frac{1}{3}(2n-1)$$

نکته می‌توان نشان داد که مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی دوم بر حسب n (فاقد عدد ثابت)، به‌شکل $S_n=an^2+bn$ است. در این‌صورت قدر نسبت برابر $d=2a$ (دو برابر ضریب n^2) و جمله‌ی اول برابر $a_1=S_1$ است.

تست مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n=5n^2-n$ به‌دست می‌آید، اختلاف جمله‌ی اول و قدر نسبت کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ گزینه‌ی «۴» به ازای $n=1$ در رابطه، جمله‌ی اول برابر $S_1=a_1=5-1=4$ است. همچنین قدر نسبت برابر $d=2\times 5=10$ است، بنابراین اختلاف جمله‌ی اول و قدر نسبت برابر $d-a_1=10-4=6$ است.

۲ مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی ◀ دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدر نسبت q را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مجموع n جمله‌ی اول این دنباله را که با S_n نمایش می‌دهیم، پیدا کنیم. جملات این دنباله به صورت روبه‌رو است: $a_۱ , a_۱q , a_۱q^۲ , \dots , a_۱q^{n-۱}$

که در آن $a_n = a_۱q^{n-۱}$. مجموع n جمله‌ی اول این دنباله برابر است با:

$$(۱)\ S_n = a_۱ + a_۱q + a_۱q^۲ + \dots + a_۱q^{n-۱}$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی (۱) در $q \neq ۱$ داریم:

$$(۲)\ qS_n = a_۱q + a_۱q^۲ + a_۱q^۳ + \dots + a_۱q^{n-۱} + a_۱q^n$$

$$(۱)-(۲) : S_n - qS_n = a_۱ - a_۱q^n \Rightarrow (۱-q)S_n = a_۱(۱-q^n) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} , q \neq ۱}$$

تست مجموع چند جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $۸ , -۱۶ , ۳۲ , \dots$ برابر ۱۳۶۸ است؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۰

پاسخ گزینه‌ی «۲» در دنباله‌ی داده شده، جمله‌ی اول $a_۱ = ۸$ و قدرنسبت $q = \frac{a_۲}{a_۱} = \frac{-۱۶}{۸} = -۲$ است. با توجه به اینکه $S_n = ۱۳۶۸$ است، پس:

$$S_n = \frac{۸(۱-(-۲)^n)}{۱-(-۲)} = ۱۳۶۸ \Rightarrow ۸(۱-(-۲)^n) = ۱۳۶۸ \times ۳ \Rightarrow ۱-(-۲)^n = ۵۱۳ \Rightarrow (-۲)^n = -۵۱۲ = (-۲)^۹ \Rightarrow n = ۹$$

● **مثال:** با محاسبه‌ی $S = a^{n-۱} + a^{n-۲} + \dots + ۱$ به کمک مجموع جملات دنباله‌ی هندسی نشان دهید:

$$a^n - ۱ = (a-۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + \dots + a + ۱)$$

○ **حل:** مجموع داده شده را بازنویسی کرده و محاسبه می‌کنیم:

$$S = ۱ + a + \dots + a^{n-۱} \Rightarrow a_۱ = ۱ ,\ q = a \Rightarrow S = \frac{۱(۱-a^n)}{۱-a} = \frac{a^n - ۱}{a-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{a^n-۱}{a-۱} = a^{n-۱} + a^{n-۲} + \dots + ۱ \Rightarrow a^n - ۱ = (a-۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + \dots + ۱)$$

به اتحادها توجه کنید:

$$(۱)\ a^n - ۱ = (a-۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + \dots + a + ۱)$$ (n عدد طبیعی)

$$(۲)\ a^n + ۱ = (a+۱)(a^{n-۱} - a^{n-۲} + \dots - a + ۱)$$ (n عدد طبیعی و فرد)

رابطه‌ی بین $S_{۲n}$ و S_n در دنباله‌ی هندسی ◀ در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدر نسبت q، رابطه‌ی بین $S_{۲n}$ (مجموع $۲n$ جمله‌ی اول) و S_n (مجموع n جمله‌ی اول) دنباله به‌صورت زیر است:

$$\frac{S_{۲n}}{S_n} = ۱ + q^n$$

● **مثال:** در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت ۲، مجموع شش جمله‌ی اول چند برابر مجموع سه جمله‌ی اول است؟

○ **حل:**

$$\frac{S_۶}{S_۳} = ۱ + q^۳ \Rightarrow \frac{S_۶}{S_۳} = ۱ + ۲^۳ = ۹ \Rightarrow S_۶ = ۹S_۳$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پیمانه‌های ۱ تا ۵ | **۵ پیمانه** | **۵۰ تست**

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n | تیپ ۱ | صفحه‌های ۲ و ۳ و تمرین‌های صفحه‌ی ۶ حسابان ۱

۱. مجموع همه‌ی اعداد موجود در جدول ضرب ۱۰×۱۰ چقدر است؟ (صفحه‌ی ۲-فعالیت-مرتبط با ۳)

۱) ۵۰۵۰ ۲) ۵۵۰۰ ۳) ۳۰۲۵ ۴) ۶۰۵۰

۲. جواب معادله‌ی $\frac{۱۱۵}{۱۱۶} = \frac{۱+۳+۵+\dots+(۲n-۱)}{۲+۴+۶+\dots+۲n}$، کدام است؟ (صفحه‌ی ۶- نتیجه‌ی تمرین ۲)

۱) ۱۱۰ ۲) ۱۱۵ ۳) ۱۱۶ ۴) ۲۳۱

۳. اگر $S_۱ = ۵۰^۲ + ۴۸^۲ + ۴۶^۲ + \dots + ۲^۲$ و $S_۲ = ۴۹^۲ + ۴۷^۲ + \dots + ۳^۲ + ۱^۲$، در این صورت $S_۱ - S_۲$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۲-فعالیت- مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۹۱)

۱) ۱۲۲۵ ۲) ۱۷۲۵ ۳) ۱۲۷۵ ۴) ۱۲۵۷

۴. بر محیط دایره‌ای ۳۱ نقطه‌ی متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز کدام است؟ (صفحه‌ی ۳- مشابه مثال)

۱) ۴۸۰ ۲) ۴۶۵ ۳) ۹۶۱ ۴) ۹۰۰

۵. اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد، یعنی $\{۱\} , \{۳ , ۵\} , \{۷ , ۹ , ۱۱\} , \dots$. در این‌صورت جمله‌ی آخر واقع در دسته‌ی شماره‌ی چهل، کدام است؟ (صفحه‌ی ۲-فعالیت- مرتبط با ۳) **(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۹)**

۱) ۱۵۶۳ ۲) ۱۵۸۹ ۳) ۱۶۳۹ ۴) ۱۶۵۱

۶. مجموع ۲۰ جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n=(-1)^n\frac{n+1}{2}$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- فعالیت- مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۲۳ شهریور ۹۷)

۱) ۱۰- ۲) ۵- ۳) ۵ ۴) ۱۰

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی | تیپ ۲ | صفحه‌های ۳ و ۴ تمرین‌های صفحه‌ی ۶ حسابان ۱

۷. اعداد ... , $\frac{5}{2}$, y , x , ۱، چهار جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی‌اند. مجموع پانزده جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

(صفحه‌ی ۳- مشابه مثال) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۶)

۱) ۵۷ ۲) ۶۲/۵ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۸

۸. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله‌ی ماقبل خود به اندازه‌ی $\frac{1}{2}$ کم‌تر است. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول آن کدام است؟

(صفحه‌ی ۳- مکمل مثال) (سراسری تجربی - ۸۲)

۱) ۲۲/۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۳۰

۹. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی nاُم به صورت $a_n=\frac{3}{2}n-5$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این دنباله، کدام است؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری تجربی- ۸۹)

۱) ۹۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵

۱۰. در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a، اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چقدر افزوده خواهد شد؟
(صفحه‌ی ۳- فعالیت- مرتبط با ۱) (سراسری ریاضی - ۸۳)

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۱۱. اگر به جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی ۲ واحد بیفزاییم، چقدر از قدر نسبت آن کم کنیم تا مجموع ۱۰ جمله‌ی اول آن ثابت بماند؟
(صفحه‌ی ۳- فعالیت- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۵ آبان ۹۶)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۱۰}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۱۰}$

۱۲. مجموع n جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی به صورت $S_n=\frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله‌ی هفتم و ختم به جمله‌ی هجدهم، کدام است؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

۱) ۹ ۲) $\frac{۲۹}{۳}$ ۳) $\frac{۴۹}{۳}$ ۴) ۱۸

۱۳. در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هفتم نصف جمله‌ی سوم است. مجموع چند جمله‌ی اول از این دنباله، صفر است؟

(صفحه‌ی ۶ - مکمل تمرین ۱) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۸)

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۴. در دنباله‌ی حسابی ...,۵,۸,۱۱ حداقل چند جمله‌ی اول آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟ (صفحه‌ی ۶ - مشابه تمرین ۱)

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

۱۵. مجموع تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷، کدام است؟ (صفحه‌ی ۶- مشابه تمرین۳) **(سراسری ریاضی - ۹۸)**

۱) ۷۲۱ ۲) ۷۲۸ ۳) ۷۳۵ ۴) ۷۴۲

۱۶. مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش‌پذیر بر ۳ و کوچک‌تر از ۱۰۱ کدام است؟ (صفحه‌ی ۶- مشابه تمرین۳) (سراسری تجربی - ۸۵)

۱) ۸۱۶ ۲) ۸۵۲ ۳) ۸۶۷ ۴) ۸۸۴

۱۷. مجموع اعداد طبیعی دو رقمی که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۱ باشد، کدام است؟ (صفحه‌ی ۶- مشابه تمرین ۳)

۱) ۱۴۵۲ ۲) ۱۱۳۲ ۳) ۱۳۵۲ ۴) ۱۲۱۰

۱۸. اعداد طبیعی را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره‌ی آن دسته باشد، یعنی ...,{۴,۵,۶} , {۲,۳} , {۱}. مجموع اعداد واقع در دسته‌ی بیستم، کدام است؟
(صفحه‌های ۲ و ۴) **(سراسری ریاضی - ۹۹)**

۱) ۴۱۲۰ ۲) ۴۰۲۰ ۳) ۴۰۱۰ ۴) ۳۹۸۰

۱۹. اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جمله‌ی هر دسته، مجذور کامل باشد: (۱) , (۲ , ۳ , ۴) , (۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹) , ...
مجموع جملات در دسته‌ی دهم کدام است؟ (صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

۱) ۱۶۹۱ ۲) ۱۷۱۰ ۳) ۱۷۲۹ ۴) ۱۷۴۸

۲۰. اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (بجز دسته‌ی اول و دوم)، برابر بزرگ‌ترین عضو دسته‌ی قبل است؛ یعنی ... , {۷ , ۸ , ۹ , ۱۰ , ۱۱ , ۱۲} , {۴ , ۵ , ۶} , {۲ , ۳} , {۱} . میانگین عضوهای دسته‌ی سیزدهم، کدام است؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) **(سراسری ریاضی -تیر ۱۴۰۱)**

۱) ۲۳۰۴/۵ ۲) ۳۰۷۲/۵ ۳) ۴۶۰۸/۵ ۴) ۶۱۴۴/۵

۲۱. در بیست جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد، جمله‌ی اول کدام است؟
(صفحه‌ی ۶- تمرین ۴) (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۲. در یک دنباله‌ی حسابی مجموع بیست جمله‌ی اول، سه برابر مجموع دوازده جمله‌ی اول آن است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۶ باشد، جمله‌ی دهم کدام است؟
(صفحه‌ی ۳- مرتبط با مثال) (سراسری ریاضی - ۹۰)

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۶ ۴) ۳۸

۲۳. در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع ۵ جمله‌ی اول، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله‌ی بعدی است. جمله‌ی دوم چند برابر جمله‌ی اول است؟
(صفحه‌ی ۳- فعالیت- مرتبط با ۱) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۱)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۴. اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به‌صورت $a_n = 2n+1$ باشد، آن‌گاه مجموع پنج جمله‌ی سوم این دنباله کدام است؟
(صفحه‌ی ۴- کار درکلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۲۱ مهر ۹۶)

۱) ۱۳۵ ۲) ۲۵۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۵

۲۵. در یک دنباله‌ی حسابی با n جمله، $S_n = 576$ و $S_6 = 16$ می‌باشد. اگر مجموع شش جمله‌ی آخر این دنباله برابر ۲۰۰ باشد، n کدام است؟
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون – ۶ مهر ۹۷)

۱) ۱۲ ۲) ۹۶ ۳) ۳۲ ۴) ۴۵

۲۶. در یک دنباله‌ی حسابی $S_{16} - S_9 = 49$ است. مجموع بیست و پنج جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟ (S_n، مجموع n جمله‌ی اول دنباله است.)
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) ۱۴۵ ۲) ۱۵۵ ۳) ۱۶۵ ۴) ۱۷۵

۲۷. مجموع n جمله‌ی ابتدایی از یک دنباله‌ی حسابی برابر با $S_n = 2n^2 + n$ است. حاصل $a_{30}^2 - a_{29}^2 + a_{28}^2 - a_{27}^2 + \dots + a_2^2 - a_1^2$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۳- مرتبط با فعالیت) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) ۲۱۶۰۰ ۲) ۵۴۹۰ ۳) ۲۷۴۵ ۴) ۷۳۲۰

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی | تیپ ۳ | صفحه‌های ۴ تا ۶ حسابان ۱

۲۸. در یک دنباله‌ی هندسی افزایشی به صورت $\dots, b, 9, a, 4$، مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟
(صفحه‌ی ۵- مکمل کار در کلاس) (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۹)

۱) $81\frac{3}{8}$ ۲) $81\frac{7}{8}$ ۳) $82\frac{3}{8}$ ۴) $83\frac{1}{8}$

۲۹. در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله‌ی اول آن ۳ می‌باشد. مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟
(صفحه‌ی ۵- مکمل کار در کلاس) (سراسری ریاضی –۸۸)

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

۳۰. اگر مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی $(1), (1+2), (1+2+2^2), \dots, (1+2+2^2+\dots+2^{n-1}), \dots$ را با S_n نمایش دهیم، آن‌گاه S_9 کدام است؟
(صفحه‌ی ۵- فعالیت- مرتبط با نتیجه‌ی ۲- ب) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

۱) ۵۱۲ ۲) ۵۰۳ ۳) ۱۰۱۵ ۴) ۱۰۱۳

۳۱. جمله‌ی عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = 3 \times 2^{n+1}$ است. حداقل چند جمله‌ی اول از این دنباله را جمع کنیم تا حاصل از ۹۶۰۰۰ بیش‌تر شود؟
(صفحه‌ی ۶- مشابه تمرین ۵) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۳۲. حاصل $S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{n\ \text{تا}}$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۵- مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون – ۹۰)

۱) $\frac{10^{n+1}-10}{9}$ ۲) $\frac{10^{n+1}-10}{9} - n$ ۳) $\frac{10^{n+1}-10}{9} + n$ ۴) $\frac{10^{n-1}-10}{9} - n$

۳۳. مجموع یازده جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با مجموع چهار جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی برابر است. اگر قدرنسبت دنباله‌ی هندسی ۴/۵ و مجموع جملات سوم و نهم دنباله‌ی حسابی ۸۵ باشد، جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی کدام است؟
(صفحه‌های ۳ و ۵- ترکیبی) (آزمون کانون- ۵ آذر ۹۶)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۴. حاصل $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۶- مشابه تمرین ۷) (سراسری ریاضی – ۸۲)

۱) ۵۰۷ ۲) ۵۱۱ ۳) ۵۱۲ ۴) ۵۱۶

۳۵. اگر $(1+a^8)(1+a^4)(1+a^2)(1+a) = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$، n کدام است؟
(صفحه‌ی ۶- نتیجه‌ی تمرین ۷)

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

۳۶. حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$، به ازای $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۶- نتیجه‌ی تمرین ۷) (سراسری ریاضی – ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۷. حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^6 - t^3 + 1}$، به ازای $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۶- نتیجه‌ی تمرین ۷) (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۸. در دنباله‌ی هندسی $\dots, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}$، مجموع n جمله‌ی اول برابر با $\frac{255}{4}$ است. مجموع $n+2$ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟
(صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) $\frac{1023}{4}$ ۲) $-\frac{1023}{4}$ ۳) $\frac{2047}{4}$ ۴) $-\frac{2047}{4}$

۳۹. در یک دنباله‌ی هندسی که جملات آن روند افزایشی دارند، مجموع دوازده جمله‌ی اول ۲۷۳ برابر مجموع چهار جمله‌ی اول است. جمله‌ی پنجم چند برابر جمله‌ی دوم است؟
(صفحه‌ی ۵- فعالیت- مرتبط با ۲- ب) (آزمون کانون- ۲۱ مهر ۹۶)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۶ ۴) ۴

۴۰. تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟
(صفحه‌ی ۵- فعالیت- نتیجه‌ی ۲-ب) (سراسری ریاضی – ۹۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۱. در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت q که تعداد جملات آن زوج است، حاصل تقسیم مجموع جملات ردیف زوج بر مجموع جملات ردیف فرد، همواره کدام است؟ $(q \neq 1)$
(صفحه‌ی ۵- فعالیت- نتیجه‌ی ۲- ب) (آزمون کانون – ۲۱ آبان ۹۵)

۱) q^2 ۲) q ۳) $\frac{1}{q^2}$ ۴) $\frac{1}{q}$

۴۲. بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنباله‌ی هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟
(صفحه‌ی ۵- فعالیت- نتیجه‌ی ۲-ب) (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۸)

۱) $30(2+\sqrt{2})$ ۲) $48\sqrt{2}$ ۳) $30(\sqrt{2}+1)$ ۴) $36(\sqrt{2}+1)$

۴۳. به یک ظرف بسیار بزرگ در ابتدا ۲ لیتر آب اضافه می‌کنیم و پس از آن در هر مرحله، دو برابر حجم آب اضافه‌شده در مرحله‌ی قبل به آن آب اضافه می‌کنیم. پس از چند مرحله، حداقل ۵۰۰ لیتر آب به ظرف اضافه کرده‌ایم؟
(صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

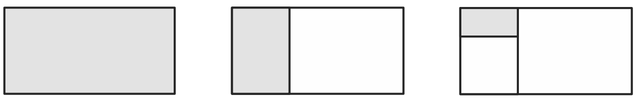
۴۴. برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟
(صفحه‌ی ۵- مشابه مثال)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۵. دایره‌ای رنگ نشده به شعاع واحد مفروض است. در مرحله‌ی اول نصف آن و در مرحله‌ی بعد نصف قسمت باقی‌مانده‌ی آن و به همین ترتیب قسمت‌های باقیمانده را رنگ می‌کنیم. در پایان مرحله‌ی هفتم، در مجموع چه کسری از دایره رنگ شده است؟
(صفحه‌ی ۶- مشابه تمرین ۶)

۱) $1-\frac{1}{2^6}$ ۲) $1-\frac{1}{2^7}$ ۳) $\frac{1}{2^6}$ ۴) $\frac{1}{2^7}$

۴۶. مستطیلی در نظر می گیریم که طول و عرض آن به‌ترتیب ۲ و ۱ سانتی‌متر باشد. در داخل آن مجدداً مستطیلی در نظر می‌گیریم که نسبت طول به عرض آن ۲ باشد و در داخل مستطیل پدید آمده این عمل را مجدداً تکرار می‌کنیم. مجموع محیط‌های مستطیل‌ها تا مرحله‌ی ششم، چند برابر محیط مستطیل اول است؟
(صفحه‌ی ۶- مشابه کار در کلاس)


مرحله‌ی (۱) مرحله‌ی (۲) مرحله‌ی (۳)

۱) $\frac{31}{8}$ ۲) $\frac{63}{32}$ ۳) $\frac{31}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴۷. از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر توپی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازه‌ی ۰/۸ ارتفاع قبلی از زمین به صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟
(صفحه‌ی ۶- مکمل کار در کلاس) **(سراسری تجربی خارج از کشور – ۱۴۰۰)**

۱) ۵۴ ۲) ۵۷ ۳) ۶۰ ۴) ۶۶

رابطه‌ی بین S_n و S_{2n} در دنباله‌ی هندسی | تیپ ۴ | صفحه‌های ۴ تا ۶ حسابان ۱

۴۸. در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ است. جمله‌ی اول، چند برابر جمله‌ی پنجم است؟
(صفحه‌ی ۵- فعالیت- مرتبط با ۲-ب) (سراسری ریاضی- ۸۹)

۱) $\frac{81}{16}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۴۹. در یک دنباله‌ی هندسی مجموع هشت جمله‌ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله‌ی اول آن است. جمله‌ی هفتم چند برابر جمله‌ی اول است؟
(صفحه‌ی ۵- فعالیت- مرتبط با ۲-ب) (سراسری ریاضی – ۸۵)

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۵۰. در دنباله‌ی هندسی $\dots,\sqrt[6]{32},2,\sqrt{2}$، مجموع شش جمله‌ی دوم چند برابر مجموع شش جمله‌ی اول است؟
(صفحه‌ی ۵- فعالیت- مرتبط با ۲-ب) (آزمون کانون – ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حسابان ۱ یازدهم	فصل اول صفحه‌های: ۷ تا ۹

۲ معادله‌ی درجه‌ی دوم

۱ مجموع، حاصلضرب و روابط بین ریشه‌های معادله

مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم ◄ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad (1)$$
$$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } a} x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad (2)$$
$$\xrightarrow{(1)=(2)} \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \\ \alpha\beta=\frac{c}{a} \end{cases}$$

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آنگاه:

مجموع ریشه‌ها $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ حاصلضرب ریشه‌ها $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

به عنوان مثال در معادله‌ی $3x^2-5x-1=0$، با توجه به این‌که $\Delta=(-5)^2-4(3)(-1)>0$، پس معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است که در آن:

مجموع ریشه‌ها : $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{3}=\frac{5}{3}$ و حاصلضرب ریشه‌ها : $P=\frac{c}{a}=\frac{-1}{3}$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم ◄ در تست‌ها، دو نوع رابطه بین ریشه خواسته (داده) می‌شود. در زیر به آنها می‌پردازیم:

نوع اول: رابطه‌ی بین دو ریشه متقارن است. رابطه‌ی متقارن، رابطه‌ای است که اگر جای دو ریشه را عوض کنیم عبارت تغییری نکند. نمونه‌های روابط متقارن عبارتند از $\alpha^2+\beta^2$ یا $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ یا $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$. در این حالت برای حل مسأله باید با استفاده از اتحادها، عبارت خواسته را برحسب S و P بیان کنیم.

به عنوان مثال، اگر $\alpha^2+\beta^2$ خواسته شده باشد، با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=S^2-2P$$

یا وقتی $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ را بخواهند، فرض می‌کنیم $A=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$، طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$A^2=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 \Rightarrow A^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}=S+2\sqrt{P} \xrightarrow{A>0} A=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$$

به خاطر سپردن روابط زیر در تست‌ها کمک می‌نماید:

① $\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$ ② $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$ ③ $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ ④ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

تذکر ◄ قبل از حل چند تست به این نکته توجه کنید که تسلط در بیان فارسی به ریاضی در تست‌های این قسمت مهم است. به نمونه‌های زیر توجه کنید:

① مجموع مربعات ریشه‌ها یعنی $\alpha^2+\beta^2$
② مربع مجموع دو ریشه یعنی $(\alpha+\beta)^2$
③ قدرمطلق تفاضل دو ریشه یعنی $|\alpha-\beta|$
④ مجموع مکعبات دو ریشه یعنی $\alpha^3+\beta^3$
⑤ مجموع جذر دو ریشه یعنی $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
⑥ یک ریشه ۲ واحد بیشتر از ۳ برابر ریشه‌ی دیگر یعنی $\alpha=3\beta+2$
⑦ یک ریشه مجذور ریشه‌ی دیگر یعنی $\alpha=\beta^2$

توجه ◄◄ در مسائلی که مقادیر یک پارامتر مجهول (a، m و ...) را می‌یابیم باید حتماً شرط Δ را در پایان بررسی کنیم.

تست اگر مجموع معکوس مربعات دو ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^2-(m+2)x+1=0$ برابر ۷ باشد، m کدام است؟

۱) -5 ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -3

پاسخ گزینه‌ی «۳» اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، آنگاه معکوس مربعات $\frac{1}{\alpha^2}$ و $\frac{1}{\beta^2}$ و مجموع معکوس مربعات $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$ است، بنابراین:

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=7 \Rightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha\beta)^2}=7 \Rightarrow \frac{S^2-2P}{P^2}=7$$

از طرفی $S=\frac{-b}{a}=m+2$ و $P=\frac{c}{a}=1$ در نتیجه:

$$\frac{(m+2)^2-2}{1}=7 \Rightarrow (m+2)^2=9 \begin{cases} m+2=3 \rightarrow m=1 \\ m+2=-3 \rightarrow m=-5 \end{cases}$$

وقتی هر دو ریشه مثبت‌اند، پس مجموع آنها نیز مثبت است، بنابراین باید $S>0$ باشد که فقط به ازای $m=1$ ممکن است.

نوع دوم: رابطه‌ی داده شده بین دو ریشه غیرمتقارن باشد، یعنی با تعویض جای دو ریشه در رابطه، عبارت تغییر کند، مثلاً $\alpha+2\beta$ یا $\alpha^2\beta$ متقارن نیستند. در این حالت برای حل مسأله، یک ریشه‌ی معادله را به کمک تولید S یا P در رابطه‌ی داده شده یافته و با قرار دادن این ریشه در معادله، مجهول خواسته شده را می‌یابیم.

تست در معادله‌ی $۲x^۲ - ۱۰x + a = ۰$، یک ریشه‌ی معادله از دو برابر دیگری یک واحد بیشتر است، a کدام است؟

۱) $\frac{۸۸}{۹}$ ۲) $\frac{۸۳}{۷}$ ۳) $\frac{۴۴}{۹}$ ۴) $\frac{۸۸}{۳}$

پاسخ گزینه‌ی «۱» اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، آنگاه طبق فرض $\alpha = ۲\beta + ۱$، چون رابطه نامتقارن است، باید مقدار یک ریشه را بیابیم (نوع دوم)، داریم:

$$\alpha = ۲\beta + ۱ \xrightarrow{\text{به طرفین اضافه } \beta} \alpha + \beta = ۳\beta + ۱ \xrightarrow{\alpha+\beta=۵} ۵ = ۳\beta + ۱ \Rightarrow \beta = \frac{۴}{۳}$$

ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس:

$$۲(\frac{۴}{۳})^۲ - ۱۰(\frac{۴}{۳}) + a = ۰ \Rightarrow \frac{۳۲}{۹} - \frac{۴۰}{۳} + a = ۰ \Rightarrow a = \frac{۸۸}{۹}$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۴x - ۲ = ۰$ باشند، آنگاه حاصل عبارت $\alpha^۲ - ۵\alpha - \beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۱

پاسخ گزینه‌ی «۳» عبارت $\alpha^۲ - ۵\alpha - \beta$ نامتقارن است بنابراین باید از اینکه ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند استفاده کنیم. α ریشه‌ی معادله است، پس با قرار دادن آن در خود معادله داریم:

$$\alpha^۲ - ۴\alpha - ۲ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ = ۴\alpha + ۲$$

در عبارت خواسته شده به جای $\alpha^۲$ جایگذاری می‌کنیم:

$$\alpha^۲ - ۵\alpha - \beta = ۴\alpha + ۲ - ۵\alpha - \beta = -\alpha + ۲ - \beta = -\underbrace{(\alpha + \beta)}_{S} + ۲ = -(۴) + ۲ = -۲$$

۲ تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم با S و P

تشکیل معادله‌ی درجه دوم با S و P ◄ در معادله‌ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، با تقسیم طرفین معادله بر $a \neq ۰$ خواهیم داشت:

$$x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \Rightarrow x^۲ - \underbrace{(\frac{-b}{a})}_{S}x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{P} = ۰ \quad \Rightarrow \boxed{x^۲ - Sx + P = ۰}$$

بنابراین اگر S مجموع ریشه‌ها و P حاصلضرب ریشه‌ها باشند، آنگاه معادله به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ نوشته می‌شود.

● **مثال:** معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۷ - ۴\sqrt{۳}$ و $۷ + ۴\sqrt{۳}$ باشند.

○ حل:

$S = x' + x'' = (۷ - ۴\sqrt{۳}) + (۷ + ۴\sqrt{۳}) = ۱۴$: مجموع ریشه‌ها

$P = x'x'' = (۷ - ۴\sqrt{۳})(۷ + ۴\sqrt{۳}) = ۷^۲ - (۴\sqrt{۳})^۲ = ۴۹ - ۴۸ = ۱$: حاصلضرب ریشه‌ها

$$\xrightarrow{S=۱۴\ ,\ P=۱} x^۲ - ۱۴x + ۱ = ۰$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ و $\alpha > \beta$ باشند، آنگاه معادله‌ای که ریشه‌هایش ۵α و ۴β باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ - ۱۵x + ۹ = ۰$ ۲) $x^۲ + ۷x + ۱۰ = ۰$ ۳) $x^۲ - ۷x + ۱۰ = ۰$ ۴) $x^۲ + ۱۵x + ۹ = ۰$

پاسخ گزینه‌ی «۳» چون مجموع ضرایب صفر است، پس ریشه‌ها $x' = ۱$ و $x'' = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲}$ است. چون $\alpha > \beta$ پس $\alpha = ۱$ و $\beta = \frac{۱}{۲}$ است. پس $۵\alpha = ۵$ و $۴\beta = ۲$ است و خواهیم داشت:

$$S = x_۱ + x_۲ = ۵ + ۲ = ۷ \quad \text{و} \quad P = x_۱x_۲ = ۵ \times ۲ = ۱۰$$

بنابراین معادله‌ی مطلوب $x^۲ - ۷x + ۱۰ = ۰$ است.

تذکر ◄ در بعضی از تست‌ها، ریشه‌های یک معادله برحسب ریشه‌های معادله‌ی دیگر داده می‌شوند، در این حالت، مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی جدید را S' و P' نامیده و آنها را برحسب S و P معادله‌ی اول یافته و سپس معادله‌ی جدید را به صورت $x^۲ - S'x + P' = ۰$ می‌نویسیم.

● **مثال:** معادله‌ی درجه‌ی دومی را بیابید که ریشه‌هایش .... معادله‌ی $x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ باشند.

الف) دو واحد بیشتر از ریشه‌های

ب) یک واحد کمتر از دو برابر معکوس ریشه‌های

○ حل: الف) اگر α و β را ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ در نظر بگیریم، ریشه‌های معادله‌ی جدید $\alpha + ۲$ و $\beta + ۲$ است، پس:

$$S' = (\alpha + ۲) + (\beta + ۲) = (\alpha + \beta) + ۴ = S + ۴ = ۵ + ۴ = ۹$$
$$P' = (\alpha + ۲)(\beta + ۲) = \alpha\beta + ۲(\alpha + \beta) + ۴ = P + ۲S + ۴ = ۱ + ۱۰ + ۴ = ۱۵$$
$$\xrightarrow{S'=۹\ ,\ P'=۱۵} x^۲ - ۹x + ۱۵ = ۰$$

ب) اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ باشند، دو برابر معکوس یعنی $\frac{۲}{\alpha}$ و یک واحد کمتر از آن یعنی $\frac{۲}{\alpha} - ۱$، پس ریشه‌های معادله‌ی جدید $\frac{۲}{\alpha} - ۱$ و $\frac{۲}{\beta} - ۱$ است و خواهیم داشت:

$$S' = (\frac{۲}{\alpha} - ۱) + (\frac{۲}{\beta} - ۱) = ۲(\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}) - ۲ = ۲(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}) - ۲ = ۲(\frac{S}{P}) - ۲ = ۲(\frac{۵}{۱}) - ۲ = ۸$$
$$P' = (\frac{۲}{\alpha} - ۱)(\frac{۲}{\beta} - ۱) = \frac{۴}{\alpha\beta} - ۲(\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}) + ۱ = \frac{۴}{P} - ۲(\frac{S}{P}) + ۱ = \frac{۴}{۱} - ۲(\frac{۵}{۱}) + ۱ = -۵$$
$$\xrightarrow{S'=۸\ ,\ P'=-۵} x^۲ - ۸x - ۵ = ۰$$

تست اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲-۶x+۱=۰$ باشند، به ازای کدام مقدار k ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲+kx+۱=۰$ به صورت $\{\frac{\alpha^۲}{\beta}, \frac{\beta^۲}{\alpha}\}$ است؟

۱) ۳۶- ۲) ۳۶ ۳) ۱۸ ۴) ۱۸-

پاسخ گزینه‌ی «۱» ریشه‌های معادله‌ی جدید $\frac{\alpha^۲}{\beta}$ و $\frac{\beta^۲}{\alpha}$ است. در معادله‌ی $۴x^۲-۶x+۱=۰$، $S=\frac{۳}{۲}$ و $P=\frac{۱}{۴}$ است، پس:

$$S'=\frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha\beta}=\frac{S^۳-۳PS}{P}=\frac{(\frac{۳}{۲})^۳-۳(\frac{۱}{۴})(\frac{۳}{۲})}{\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۲۷}{۸}-\frac{۹}{۸}}{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱۸}{۲}=۹ \quad , \quad P'=(\frac{\beta^۲}{\alpha})(\frac{\alpha^۲}{\beta})=\alpha\beta=P=\frac{۱}{۴}$$

بنابراین معادله‌ی جدید برابر است با:

$$\xrightarrow{S'=۹\ ,\ P'=\frac{۱}{۴}} x^۲-۹x+\frac{۱}{۴}=۰ \Rightarrow ۴x^۲-۳۶x+۱=۰ \Rightarrow k=-۳۶$$

۳ تعداد و علامت ریشه‌های معادله

برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی معادله بدون یافتن آنها، از Δ و S و P کمک می‌گیریم.

● **مثال:** تعداد و علامت ریشه‌های معادلات زیر را بیابید.

$(۲)\ ۳x^۲-۷x-۱=۰$

○ حل:

گام اول: $\Delta=(-۷)^۲-۴(۳)(-۱)>۰\Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی داریم.

گام دوم: $P=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۳}<۰\Rightarrow$ ریشه‌ها مختلف‌العلامت‌اند.

گام سوم: $S=\frac{-b}{a}=\frac{۷}{۳}>۰\Rightarrow$ ریشه‌ی مثبت بزرگ‌تر از قدرمطلق ریشه‌ی منفی است.

$(۱)\ x^۲+۷x+۳=۰$

○ حل:

گام اول: $\Delta=۷^۲-۴(۱)(۳)>۰\Rightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی داریم.

گام دوم: $P=\frac{c}{a}=۳>۰\Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند.

گام سوم: $S=\frac{-b}{a}=-\frac{۷}{۱}=-۷<۰\Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند.

توجه تست‌های تعیین علامت ریشه‌ها در کنکور به صورت پارامتری است، برای تعیین حدود تغییرات پارامتر باید سه شرط Δ، P و S را بررسی کرده و بین جواب‌ها، اشتراک بگیریم. در تعیین شرط مثلاً وقتی خواسته‌ی مسأله «دو ریشه‌ی مثبت حقیقی و متمایز» است، دو ریشه متناسب با شرط خواسته شده در نظر بگیرید، سپس علامت‌های Δ، P و S را تعیین کنید. در اینجا مثلاً $\alpha=۱$ و $\beta=۴$ را در نظر می‌گیریم، پس $\Delta>۰$، $P>۰$ و $S>۰$.

تست به ازای چه حدودی از a، معادله‌ی درجه‌ی دوم $a(x^۲+۱)+۲(x+۱)^۲-۳=۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی و متمایز است؟

۱) $-۳<a<۲$ ۲) $۱<a<۲$ ۳) $a>۱$ ۴) $-۲<a<۲$

پاسخ گزینه‌ی «۲» ابتدا معادله را برحسب x مرتب می‌کنیم:

$$a(x^۲+۱)+۲(x^۲+۲x+۱)-۳=۰\Rightarrow(a+۲)x^۲+۴x+a-۱=۰$$

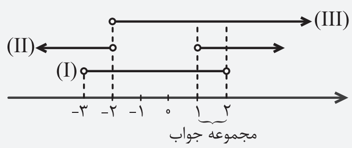
برای آنکه دو ریشه‌ی حقیقی، منفی و متمایز باشند، باید $\Delta>۰$، ضربشان مثبت یعنی $P>۰$ و جمعشان منفی یعنی $S<۰$ باشد، پس:

$$(۱)\ \Delta>۰\Rightarrow ۴^۲-۴(a+۲)(a-۱)>۰\Rightarrow ۴-(a^۲+a-۲)>۰\Rightarrow a^۲+a-۶<۰\Rightarrow(a+۳)(a-۲)<۰\Rightarrow -۳<a<۲ \quad (I)$$

$$(۲)\ P=\frac{c}{a}=\frac{a-۱}{a+۲}>۰\Rightarrow a<-۲ \text{ یا } a>۱ \quad (II)$$

$$(۳)\ S=\frac{-۴}{a+۲}<۰\Rightarrow a+۲>۰\Rightarrow a>-۲ \quad (III)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک } I, II, III} ۱<a<۲$$



تذکر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$:

۱ اگر معادله دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت باشد، آنگاه $P=\frac{c}{a}<۰$ یا $ac<۰$. (نیازی به بررسی Δ نیست چون مثبت است.)

۲ اگر دو ریشه، قرینه‌ی هم باشند، آنگاه $S=x'+x''=\frac{-b}{a}=۰$، پس $b=۰$ و $\Delta>۰$.

۳ اگر دو ریشه، عکس هم باشند، آنگاه $P=x'x''=\frac{c}{a}=۱$، پس $a=c$ و $\Delta>۰$.

تست به ازای چند مقدار m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m^۲+۱)x^۲+(m^۲-۱)x+m^۲+۳m-۲=۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه‌ی هم است؟

۱) یک مقدار ۲) دو مقدار ۳) هیچ مقداری ۴) هر مقداری

پاسخ گزینه‌ی «۱» باید ضریب x، یعنی $b=۰$ باشد، پس $m^۲-۱=۰$ و از آنجا $m=۱$ و $m=-۱$. از طرفی باید دو ریشه حقیقی باشند، پس $\Delta>۰$، با جایگذاری این مقادیر m، معادله را یافته و شرط وجود را بررسی می‌کنیم:

$m=۱:\ ۲x^۲+۲=۰\Rightarrow\Delta=۰-۱۶<۰$ ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$m=-۱:\ ۲x^۲-۴=۰\Rightarrow\Delta=۰+۳۲>۰$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

پس $m=-۱$ قابل قبول است و یک مقدار m وجود دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵ پیمانه — ۵۰ تست — پیمانه‌های ۶ تا ۱۰

مجموع، حاصلضرب و روابط بین ریشه‌های معادله — تیپ ۵ — صفحه‌های ۷ تا ۹ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ حسابان ۱

۵۱. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+ax-3=0$ باشند و $x_1=-3$، آنگاه حاصل ax_2^2 کدام است؟ (صفحه‌ی ۸- مکمل مثال)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{8}{9}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۵۲. معادله‌های $x^2+6x+m=0$ و $x^2+2x-3m=0$ یک ریشه‌ی مشترک غیرصفر دارند. اختلاف ریشه‌های غیرمشترک کدام است؟
(صفحه‌ی ۸- مکمل مثال) **(سراسری ریاضی – دی ۱۴۰۱)**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۷

۵۳. ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(a+1)x+a=0$ دو عدد فرد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(3a+1)x+b=0$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصلضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟ (صفحه‌ی ۸- مکمل مثال) **(سراسری تجربی خارج از کشور – تیر ۱۴۰۲)**

۱) ۳۳ ۲) ۲۱ ۳) ۱۳ ۴) ۹

۵۴. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+7x-3=0$ و $\alpha>0$ باشد، حاصل $|\alpha+2\beta|+|\alpha|-|\beta|$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۸- فعالیت- نتیجه‌ی ۳) (سراسری انسانی- دی ۱۴۰۱)

۱) $2\alpha+3\beta$ ۲) $-2\alpha-3\beta$ ۳) $-\beta$ ۴) β

۵۵. به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه‌ی حسابی بین دو ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟
(صفحه‌ی ۸- مکمل مثال) (سراسری ریاضی- ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۴ ۴) ۴-

۵۶. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+2(a+1)x+2a-1=0$ باشند، به ازای کدام مقدار a، به‌ترتیب سه عدد α، a و β تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند؟ (صفحه‌ی ۸- مکمل مثال) **(سراسری ریاضی خارج از کشور–تیر ۱۴۰۱)**

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۱

۵۷. به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{2}$ واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2-5x+m^2-3=0$ است؟
(صفحه‌ی ۸- مکمل مثال) (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۸۴)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

۵۸. معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2+(2m-1)x+2-m=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (صفحه‌ی ۸- مکمل مثال) **(سراسری تجربی – ۹۹)**

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۱- ۴) $-\frac{5}{2}$

۵۹. به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2-(m+3)x+5=0$، برابر ۶ می‌باشد؟
(صفحه‌ی ۸- مکمل مثال) (سراسری تجربی - ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$ و ۱-

۶۰. اگر a و b اعداد طبیعی و حاصلضرب ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3ax+a^2-4b^2=0$ برابر ۵ باشد، آنگاه مجموع مکعبات ریشه‌های معادله کدام است؟ (صفحه‌ی ۸- مکمل مثال)

۱) ۵۹۴ ۲) ۳۷۸ ۳) ۱۷۸ ۴) ۴۲۴

۶۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟
(صفحه‌ی ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۶۲. اگر α و β اعداد حقیقی و $\frac{1}{\alpha^2\beta}$ و $\frac{1}{\beta^2\alpha}$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2-6x-8=0$ باشند، آنگاه $\alpha+\beta$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۶۳. در معادله‌ی $3x^2-15x+m=0$، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟
(صفحه‌ی ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) (سراسری ریاضی - ۸۲)

۱) $\frac{59}{5}$ ۲) $\frac{63}{5}$ ۳) $\frac{59}{4}$ ۴) $\frac{63}{4}$

۶۴. اگر در معادلهٔ $3x^2 - ax + b = 0$، بین اعداد a و b رابطهٔ $2a + b = -12$ برقرار باشد، یکی از ریشه‌های معادله کدام است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) $-b$ ۲) $-\frac{b}{2}$ ۳) $-\frac{b}{3}$ ۴) $-\frac{b}{6}$

۶۵. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 2ax + b = 0$ و رابطهٔ $\frac{x_1}{x_2} = 3 + 2x_1$ بین ریشه‌ها برقرار باشد، آنگاه یک ریشهٔ معادله همواره کدام است؟ $(a, b \in R)$
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب)

۱) $\frac{a+b}{2}$ ۲) $-\frac{a+b}{2}$ ۳) ab ۴) $-ab$

۶۶. اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^2 - 2x - 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 - \alpha + \beta$ کدام است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۲-

۶۷. به ازای کدام مقدار k در معادلهٔ درجه دوم $2x^2 - x + k = 0$ بین ریشه‌ها رابطهٔ $x_1 + 2x_2 = 3$ برقرار است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) (سراسری تجربی - ۷۹)

۱) ۱۲- ۲) ۱۰- ۳) ۸ ۴) ۶

۶۸. به ازای دو مقدار a، یک ریشهٔ معادلهٔ $3x^2 - ax + 4 = 0$، سه برابر ریشهٔ دیگر است. اختلاف این دو مقدار a، کدام است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) **(سراسری تجربی–تیر ۱۴۰۱)**

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۶۹. در معادلهٔ $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۷۰. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2 - x - 3 = 0$ باشند، مقدار عبارت $(3x_1 - \frac{6}{x_2})^3 + (3x_2 - \frac{6}{x_1})^3$ کدام است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب)

۱) ۱۲۵ ۲) ۲۵۰ ۳) ۱۲۵۰ ۴) ۲۵۰۰

۷۱. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2 + x - 1 = 0$ باشند و $x_2 > x_1$، مقدار عبارت $5x_1^2 + 3x_2^2$ کدام است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) (سراسری تجربی - ۶۹)

۱) $12 + \sqrt{5}$ ۲) $12 - \sqrt{5}$ ۳) $24 + \sqrt{5}$ ۴) $24 - \sqrt{5}$

۷۲. اگر α و β ریشه‌های متمایز معادلهٔ $ax^2 - ax - b = 0$ و $40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟
(صفحهٔ ۱۳- مرتبط با کار در کلاس) **(سراسری ریاضی - تیر ۱۴۰۲)**

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۷۳. α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\alpha < \beta < 0$ و $3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$ باشد، مقدار a چقدر است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) **(سراسری ریاضی–تیر ۱۴۰۱)**

۱) ۱ ۲) $\frac{13}{4}$ ۳) $\frac{21}{5}$ ۴) ۲

۷۴. α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\beta < \alpha < 0$ و $\alpha^3 + \beta^3 + \beta^2 = -\frac{21}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}$ باشد، مقدار a چقدر است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) **(سراسری ریاضی –آزمون مجدد–آذر ۱۴۰۱)**

۱) $\frac{33}{4}$ ۲) $\frac{11}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۵

۷۵. اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟
(صفحهٔ ۱۵- مکمل تمرین ۱- ب) **(سراسری تجربی خارج از کشور–تیر ۱۴۰۱)**

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۷۶. فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$، باشند. مقدار $x_1 + x_2$ کدام است؟
(اتحادها و روابط بین ریشه‌های معادله- سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی – ۱۴۰۰)**

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۷۷. فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. چند معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان تشکیل داد، به‌طوری‌که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصلضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟
(صفحهٔ ۸- مکمل مثال) **(سراسری تجربی – ۱۴۰۰)**

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ تشریحی جبر و معادله

پاسخ تشریحی: ایمان چینی‌فروشان
حسین حاجیلو، فرهاد حامی، فرزانه دانایی

راهبرد حل تیپ (۱)

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

۱. گزینهٔ ۳

سطر اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ... ۱۰

$\Rightarrow$ مجموع سطر اول $=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{10\times 11}{2}=55$

در سطر دوم، این اعداد در ۲ و در سطر سوم در ۳ و ... ضرب می‌شوند. پس:

مجموع $=1\times 55+2\times 55+3\times 55+...+10\times 55$

مجموع $=55(1+2+...+10)=55(55)=3025$

۲. گزینهٔ ۲

می‌دانیم:

مجموع اعداد طبیعی فرد: $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

مجموع اعداد طبیعی زوج: $2+4+6+...+2n=n(n+1)$

بنابراین:

$$\frac{115}{116}=\frac{n^2}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\Rightarrow n=115$$

۳. گزینهٔ ۳

$$S_1-S_2=(50^2+48^2+...+2^2)$$
$$-(49^2+47^2+...+3^2+1^2)$$
$$S_1-S_2=(50^2-49^2)+(48^2-47^2)$$
$$+...+(4^2-3^2)+(2^2-1^2)$$
$$S_1-S_2=(50+49)\underbrace{(50-49)}_{1}+(48+47)\underbrace{(48-47)}_{1}$$
$$+...+(2+1)\underbrace{(2-1)}_{1}$$
$$S_1-S_2=50+49+48+47+...+2+1$$

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است:

$$\Rightarrow S_1-S_2=\frac{50(50+1)}{2}=1275$$

۴. گزینهٔ ۲

وقتی نقطه‌ی اول را به نقاط دیگر وصل کنیم، ۳۰ وتر پدید می‌آید. با وصل کردن نقطه‌ی دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه‌ی اول)، ۲۹ وتر پدید می‌آید و به همین ترتیب با وصل کردن نقطه‌ی سوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه‌ی اول و دوم)، ۲۸ وتر و ... پدید می‌آید، پس با ادامه‌ی این عمل، تعداد کل وترها برابر است با:

$$30+29+28+...+1$$

که مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا ۳۰ است، لذا:

$$S_{30}=\frac{30(30+1)}{2}=15\times 31=465$$

۵. گزینهٔ ۳

اعداد طبیعی فرد، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۱ و قدرنسبت ۲ می‌دهند. با توجه به دسته‌بندی مورد نظر:

$$\begin{array}{ccccccc} \{1\} & , & \{3,5\} & , & \{7,9,11\} & , & ... \\ \downarrow & & \downarrow\ \downarrow & & \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & & \\ a_1 & & a_2\ a_3 & & a_4\ a_5\ a_6 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & a_{1+2} & & a_{1+2+3} & & \end{array}$$

شماره‌ی جمله‌ی آخر دسته‌ی چهلم، برابر است با:

$$1+2+3+...+40=\frac{40\times 41}{2}=820$$

پس باید جمله‌ی ۸۲۰ اُم از یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۱ و قدرنسبت ۲ را محاسبه کنیم:

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_{820}=1+(820-1)\times 2=1639$$

۶. گزینهٔ ۳

جملات فرد و زوج دنباله را جدا می‌کنیم:

جملات فرد: $a_{2k-1}=O_k=(-1)^{2k-1}k=-k\ ;\ k=1,...,10$

$$\Rightarrow O_1+O_2+...+O_{10}=-1-2-3-...-10$$
$$=-\frac{10\times 11}{2}=-55$$

جملات زوج: $a_{2k}=E_k=(-1)^{2k}\frac{2k+1}{2}=k+\frac{1}{2}\ ;\ k=1,...,10$

$$\Rightarrow E_1+E_2+...+E_{10}=(1+2+...+10)+10(\frac{1}{2})=60$$
$$\Rightarrow a_1+a_2+...+a_{20}=-55+60=5$$

راهبرد حل تیپ (۲)

در یک دنباله‌ی حسابی، با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d و جمله‌ی عمومی a_n، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$(1)\quad S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$
$$(2)\quad S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

از رابطه‌ی (۱) معمولاً وقتی جمله‌ی اول و قدر نسبت موجود است استفاده می‌کنیم و از رابطه‌ی (۲) وقتی جمله‌ی عمومی داده شده یا جملات اول و آخر مشخص است، استفاده می‌کنیم.

تذکر: اگر مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی داده شده باشد، آنگاه جمله‌ی عمومی دنباله از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n-S_{n-1}=a_n$$

۷. گزینهٔ ۳

در این دنباله $a_1=1$ و $a_4=\frac{5}{2}$ است، پس:

$$a_4=a_1+3d\Rightarrow \frac{5}{2}=1+3d\Rightarrow d=\frac{1}{2}$$
$$S_{15}=\frac{15}{2}(2a_1+(15-1)d)=\frac{15}{2}(2+14\times\frac{1}{2})=7/5\times 9=67/5$$

۸. گزینهٔ ۳

$$\left.\begin{array}{l} a_5=3\Rightarrow a_1+4d=3 \\ a_{n+1}-a_n=\frac{-1}{2}\Rightarrow d=\frac{-1}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow a_1=5$$

$S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، پس:

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2a_1+9d)=5(2(5)+9(\frac{-1}{2}))$$
$$=5(10-4/5)=5\times 5/5=27/5$$

۹. گزینهٔ ۲

$$a_n=\frac{۳}{۲}n-۵ \Rightarrow a_۱=\frac{۳}{۲}-۵ \text{ و } a_{۱۵}=\frac{۳}{۲}\times ۱۵-۵$$

$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$، پس:

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(a_۱+a_{۱۵})\Rightarrow S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(\frac{۳}{۲}-۵+\frac{۳}{۲}\times ۱۵-۵)$$

$$\Rightarrow S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}\times ۱۴=۱۵\times ۷=۱۰۵$$

۱۰. گزینهٔ ۴

می‌دانیم $S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)$، اگر مجموع ۲۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی اولیه را با $S_{۲۰}$ و مجموع ۲۰ جمله‌ی اول دنباله‌ی جدید را با $S'_{۲۰}$ نمایش دهیم، آنگاه:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a+۱۹d)\Rightarrow S_{۲۰}=۱۰(۲a+۱۹d)$$

$$S'_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a+۱۹(d+۱))=۱۰(۲a+۱۹d+۱۹)$$

$$\Rightarrow S'_{۲۰}=۱۰(۲a+۱۹d)+۱۹۰$$

$$\Rightarrow S'_{۲۰}=S_{۲۰}+۱۹۰$$

۱۱. گزینهٔ ۳

در حالت اول جمله‌ی اول را $a_۱$ و قدر نسبت را d در نظر می‌گیریم. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\Rightarrow S_{۱۰}=۵(۲a_۱+۹d)$$

در حالت دوم جمله‌ی اول را $a_۱+۲$ و قدر نسبت را $d-k$ در نظر می‌گیریم. مجموع ۱۰ جمله‌ی اول در این حالت برابر است با:

$$S'_{۱۰}=۵(۲(a_۱+۲)+۹(d-k))=۵(۲a_۱+۹d+۴-۹k)$$

برای آن که $S_{۱۰}=S'_{۱۰}$ باشد، باید داشته باشیم:

$$۴-۹k=۰\Rightarrow k=\frac{۴}{۹}$$

۱۲. گزینهٔ ۴

خواسته‌ی مسأله مجموع جملات از $a_۷$ تا $a_{۱۸}$ است، یعنی:

$$S=a_۷+a_۸+\dots+a_{۱۸}$$

با توجه به این که $S_n=\frac{n(n-۱۵)}{۶}$ را داریم، برای محاسبه‌ی S کافی است مجموع شش جمله‌ی اول را از مجموع ۱۸ جمله‌ی اول کم کنیم. بنابراین:

$$S=S_{۱۸}-S_۶\Rightarrow S=\frac{۱۸(۱۸-۱۵)}{۶}-\frac{۶(۶-۱۵)}{۶}$$

$$=۹-(-۹)=۱۸$$

۱۳. گزینهٔ ۴

جمله‌ی هفتم، نصف جمله‌ی سوم است، پس:

$$a_۷=\frac{۱}{۲}a_۳\Rightarrow a_۱+۶d=\frac{۱}{۲}(a_۱+۲d)$$

$$\Rightarrow ۲a_۱+۱۲d=a_۱+۲d\Rightarrow a_۱=-۱۰d \quad (۱)$$

و می‌دانیم $S_n=۰$، $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)$، پس:

$$\frac{n}{۲}(۲(-۱۰d)+(n-۱)d)=۰$$

$$\Rightarrow -۲۰d+nd-d=۰\Rightarrow -۲۱d=-nd\Rightarrow n=۲۱$$

۱۴. گزینهٔ ۲

دنباله‌ی داده شده یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۵ و قدر نسبت $d=۸-۵=۳$ است که باید در آن $S_n>۵۰۰$ شود بنابراین:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{n}{۲}(۲(۵)+(n-۱)(۳))$$

$$=\frac{۳n^۲+۷n}{۲}>۵۰۰\Rightarrow ۳n^۲+۷n-۱۰۰۰>۰$$

$$\Rightarrow n=\frac{-۷\pm\sqrt{۱۲۰۴۹}}{۶}\Rightarrow\begin{cases}n\simeq ۱۷/۱۳\\ n\simeq -۱۹/۴۶ \quad \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

بنابراین نامساوی فوق به ازای $n>۱۷/۱۳$ برقرار است یعنی باید حداقل ۱۸ جمله از دنباله‌ی فوق را با هم جمع کنیم که بزرگتر از ۵۰۰ شود.

۱۵. گزینهٔ ۲

راه حل اول: اولین عدد دو رقمی مضرب ۷، عدد ۱۴ و آخرین آنها عدد ۹۸ است، پس باید مجموع $۱۴+۲۱+\dots+۹۸$ را حساب کنیم که مجموع جملات یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۱۴ و قدرنسبت ۷ است. تعداد این جملات را به‌دست می‌آوریم:

$$n=\frac{\text{جمله‌ی آخر}-\text{جمله‌ی اول}}{\text{قدرنسبت}}+۱=\frac{۹۸-۱۴}{۷}+۱=۱۲+۱=۱۳$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}(۱۴+۹۸)=\frac{۱۳}{۲}\times ۱۱۲=۷۲۸$$

راه حل دوم:

$$S=۱۴+۲۱+\dots+۹۸=۷\times ۲+۷\times ۳+\dots+۷\times ۱۴$$

$$=۷\times(۲+۳+\dots+۱۴)=۷\times((۱+۲+\dots+۱۴)-۱)$$

می‌دانیم $۱+۲+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$، پس:

$$S=۷\times(\frac{۱۴\times ۱۵}{۲}-۱)=۷\times(۱۰۵-۱)=۷۲۸$$

۱۶. گزینهٔ ۳

در واقع باید مجموع جملات دنباله‌ی حسابی متناهی زیر را حساب کنیم:

۳ و ۹ و ۱۵ و ... و ۹۹

$$n=\frac{\text{جمله‌ی آخر}-\text{جمله‌ی اول}}{\text{قدرنسبت}}+۱\Rightarrow n=\frac{۹۹-۳}{۶}+۱=۱۷$$

$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$، پس: $S_{۱۷}=\frac{۱۷(۳+۹۹)}{۲}=۸۶۷$

۱۷. گزینهٔ ۴

یک دنباله‌ی حسابی داریم با جمله عمومی $a_n=۴n+۱$ که باید در آن $۱۰\le a_n\le ۹۹$ باشد. پس:

$$۱۰\le ۴n+۱\le ۹۹\Rightarrow ۹\le ۴n\le ۹۸$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۴}\le n\le\frac{۹۸}{۴}\xrightarrow{n\in N}۳\le n\le ۲۴$$

$$\text{تعداد}=۲۴-۳+۱=۲۲$$

اولین جمله $a_۳=۴\times ۳+۱=۱۳$ و آخرین جمله $a_{۲۴}=۴\times ۲۴+۱=۹۷$ است، پس:

$$\Rightarrow S_{۲۲}=\frac{۲۲}{۲}\underbrace{(۱۳+۹۷)}_{۱۱۰}=۱۱\times ۱۱۰=۱۲۱۰$$

۱۸. گزینهٔ ۳

$$\{۱\},\{۲,۳\},\{۴,۵,۶\},\dots$$

در دسته‌ی اول ۱ عدد، در دسته‌ی دوم ۲ عدد، در دسته‌ی سوم ۳ عدد و... قرار دارد پس آخرین عدد در دسته‌ی نوزدهم برابر است با:

$$۱+۲+۳+\dots+۱۹=\frac{۱۹\times(۱۹+۱)}{۲}=۱۹۰$$

پس دسته‌ی بیستم که شامل ۲۰ عدد است، از ۱۹۱ شروع و به ۲۱۰ ختم می‌شود، این اعداد تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند که جمله‌ی اول و آخر آن معلوم است، پس داریم:

$$S=\frac{n}{۲}(a_{۱}+a_{۲۰})$$

$$\Rightarrow S=\frac{۲۰}{۲}(۱۹۱+۲۱۰)=۱۰\times ۴۰۱=۴۰۱۰$$

۱۹. گزینهٔ ۳

از آنجایی که آخرین جمله‌ی هر دسته مربع کامل است، پس:

$$۱^{۲}, ۲^{۲}, ۳^{۲}, \ldots, ۹^{۲}, \underbrace{۱۰^{۲}}_{\text{جمله‌ی آخر دسته‌ی دهم}}$$

پس جملات در دسته‌ی دهم عبارتند از: $۸۲, ۸۳, \ldots, ۱۰۰$

که یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a_{۱}=۸۲$ و جمله‌ی آخر $a_n=۱۰۰$ و قدر نسبت (۱) است، این دنباله ۱۹ جمله دارد، لذا:

$$S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}(a_{۱}+a_{۱۹})\Rightarrow S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}(۸۲+۱۰۰)$$

$$\Rightarrow S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}(۱۸۲)=۱۹\times ۹۱=۱۷۲۹$$

۲۰. گزینهٔ ۳

به آخرین عدد هر دسته (به جز دسته‌ی اول) دقت کنید:

$$\{۱\}, \{۲,\underline{۳}\}, \{۴,۵,\underline{۶}\}, \{۷,۸,۹,۱۰,۱۱,\underline{۱۲}\}, \{۱۳,\ldots,\underline{۲۴}\}$$

عدد آخر دسته‌ها (به جز دسته‌ی اول) عبارتند از: $۳, ۶, ۱۲, ۲۴, \ldots$

که تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $t_{۱}=۳$ و قدر نسبت $r=۲$ می‌دهند که جمله‌ی آخر دسته‌ی سیزدهم، جمله‌ی دوازدهم این دنباله است.

$$t_n=t_{۱}r^{n-۱}\Rightarrow t_{۱۲}=۳\times ۲^{۱۱}$$

و جمله‌ی آخر دسته‌ی دوازدهم برابر با $t_{۱۱}=۳\times ۲^{۱۰}$ است، پس جمله‌ی اول دسته‌ی سیزدهم برابر می‌شود با: $۱+۳\times ۲^{۱۰}$، پس میانگین اعداد طبیعی زیر را می‌خواهیم:

$$۱+۳\times ۲^{۱۰}, ۲+۳\times ۲^{۱۰}, \ldots, ۳\times ۲^{۱۱}$$

که این اعداد تشکیل یک دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ با قدرنسبت یک می‌دهند، مجموع آنها برابر است با $S_n=\frac{n}{۲}(a_{۱}+a_n)$، بنابراین میانگین آنها برابر است با:

$$\frac{S_n}{n}=\frac{\frac{n}{۲}(a_{۱}+a_n)}{n}=\frac{a_{۱}+a_n}{۲}$$

$$\xrightarrow[a_n=۳\times ۲^{۱۱}]{a_{۱}=۱+۳\times ۲^{۱۰}}\frac{a_{۱}+a_n}{۲}=\frac{(۱+۳\times ۲^{۱۰})+(۳\times ۲^{۱۱})}{۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}+\frac{۲^{۱۰}(۳+۳\times ۲)}{۲}=۰/۵+۲^{۹}\times ۹=۰/۵+۵۱۲\times ۹$$

$$=۴۶۰۸/۵$$

۲۱. گزینهٔ ۱

اگر در این دنباله جمله‌ی اول را $a_{۱}$ و قدر نسبت را d در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\begin{cases}a_{۱}+a_{۳}+a_{۵}+\ldots+a_{۱۹}=۱۳۵ & (۱)\\ a_{۲}+a_{۴}+a_{۶}+\ldots+a_{۲۰}=۱۵۰ & (۲)\end{cases}$$

مجموع جملات ردیف فرد را با S و مجموع جملات ردیف زوج را با S' نمایش می‌دهیم، در هر یک از معادلات (۱) و (۲)، قدر نسبت $(۲d)$ است و تعداد جملات هر یک از آنها ۱۰ تاست، پس:

$$S=\frac{۱۰}{۲}(۲a_{۱}+(۱۰-۱)(۲d))=۱۳۵\ (۱)$$

$$S'=\frac{۱۰}{۲}(۲a_{۲}+(۱۰-۱)(۲d))=۱۵۰\ (۲)$$

بنابراین:

$$\begin{cases}۲a_{۱}+۱۸d=۲۷\\ ۲a_{۲}+۱۸d=۳۰\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}}۲(\overbrace{a_{۲}-a_{۱}}^{d})=۳\Rightarrow d=\frac{۳}{۲}$$

با قرار دادن $d=\frac{۳}{۲}$ در رابطه‌ی $۲a_{۱}+۱۸d=۲۷$، $a_{۱}$ را می‌یابیم:

$$۲a_{۱}+۱۸(\frac{۳}{۲})=۲۷\Rightarrow a_{۱}=۰$$

۲۲. گزینهٔ ۲

از آنجایی که:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_{۱}+(n-۱)d)$$

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲a_{۱}+۱۹d)=۱۰(۲a_{۱}+۱۹d)$$

$$S_{۱۲}=\frac{۱۲}{۲}(۲a_{۱}+۱۱d)=۶(۲a_{۱}+۱۱d)$$

$$S_{۲۰}=۳S_{۱۲}\Rightarrow ۱۰(۲a_{۱}+۱۹d)=۳\times ۶(۲a_{۱}+۱۱d)$$

$$\Rightarrow ۱۰a_{۱}+۹۵d=۱۸a_{۱}+۹۹d$$

$$\Rightarrow ۸a_{۱}=-۴d\Rightarrow d=-۲a_{۱}$$

$a_{۳}=۶$، پس $a_{۱}+۲d=۶$، بنابراین:

$$a_{۱}+۲(-۲a_{۱})=۶\Rightarrow a_{۱}=-۲$$

و در نتیجه $d=۴$ و از آنجا:

$$a_{۱۰}=a_{۱}+۹d=-۲+۹(۴)=۳۴$$

۲۳. گزینهٔ ۳

اگر مجموع n جمله‌ی اول این دنباله را با S_n نشان دهیم، آنگاه مجموع پنج جمله‌ی اول آن برابر با $S_{۵}$ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی برابر با $S_{۱۰}-S_{۵}$ است. طبق فرض سؤال:

$$S_{۵}=\frac{۱}{۳}(S_{۱۰}-S_{۵})\Rightarrow ۳S_{۵}=S_{۱۰}-S_{۵}$$

$$\Rightarrow S_{۱۰}=۴S_{۵}\ (*)$$

از طرفی در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a_{۱}$ و قدر نسبت d، داریم $S_n=\frac{n}{۲}(۲a_{۱}+(n-۱)d)$، بنابراین از معادله‌ی $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱۰}{۲}(۲a_{۱}+۹d)=۴\times\frac{۵}{۲}(۲a_{۱}+۴d)$$

$$\Rightarrow ۵(۲a_{۱}+۹d)=۱۰(۲a_{۱}+۴d)\Rightarrow d=۲a_{۱}\ (**)$$

در نتیجه با فرض $a_{۱}\neq ۰$، می‌توان نوشت:

$$\frac{a_{۲}}{a_{۱}}=\frac{a_{۱}+d}{a_{۱}}\overset{(**)}{=}\frac{a_{۱}+۲a_{۱}}{a_{۱}}=\frac{۳a_{۱}}{a_{۱}}=۳$$

۲۴. گزینهٔ ۱

مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی a_n برابر با $S_n=\frac{n}{۲}(a_{۱}+a_n)$ است. مجموع پنج جمله‌ی سوم را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

مجموع پنج جمله‌ی سوم $=S_{۱۵}-S_{۱۰}$

جمله‌ی عمومی دنباله $a_n=۲n+۱$ است، بنابراین خواهیم داشت:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_{۱}+a_n)=\frac{n}{۲}(۲\times ۱+۱+۲n+۱)=\frac{n}{۲}(۲n+۴)$$

$$\Rightarrow S_n=n(n+۲)$$

$$S_{۱۵}-S_{۱۰}=۱۵(۱۵+۲)-۱۰(۱۰+۲)=۱۵\times ۱۷-۱۰\times ۱۲$$

$$=۲۵۵-۱۲۰=۱۳۵$$

۲۵. گزینهٔ ۳

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=16$$
$$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}+a_{n-5}=200$$

با جمع دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$\Rightarrow (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\dots+(a_6+a_{n-5})=216$$

از طرفی از جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی یعنی $a_n=a_1+(n-1)d$ تساوی‌های زیر حاصل می‌شود:

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\dots=a_6+a_{n-5}$$

بنابراین: $6(a_1+a_n)=216 \Rightarrow a_1+a_n=\frac{216}{6}=36$

$$S_n=576 \Rightarrow \frac{n}{2}(a_1+a_n)=576 \Rightarrow \frac{n}{2}(36)=576$$
$$\Rightarrow n=32$$

۲۶. گزینهٔ ۴

$$S_{16}-S_9=a_{10}+\dots+a_{16}=49$$
$$\Rightarrow \frac{7}{2}(a_{10}+a_{16})=49 \Rightarrow a_{10}+a_{16}=14$$
$$S_{25}=\frac{25}{2}(a_1+a_{25})=\frac{25}{2}(a_{10}+a_{16})=\frac{25}{2}\times 14=175$$

۲۷. گزینهٔ ۴

می‌دانیم مجموع n جمله‌ی اول هر دنباله‌ی حسابی به‌صورت $S_n=An^2+Bn$ است که درآن $A=\frac{d}{2}$ است. پس در این دنباله $d=4$ است و داریم:

$$\underbrace{(a_{30}-a_{29})}_{d}(a_{30}+a_{29})+\underbrace{(a_{28}-a_{27})}_{d}(a_{28}+a_{27})+\dots+\underbrace{(a_2-a_1)}_{d}(a_2+a_1)=d(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{29}+a_{30})$$
$$=d(S_{30})=4(2\times 900+30)=7320$$

راهبرد حل تیپ (۳)

در یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت q، مجموع n جمله‌ی اول S_n برابر است با:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ ,\ q\neq 1$$

۲۸. گزینهٔ ۴

دنباله افزایشی است، پس قدرنسبت آن بزرگتر از یک است، داریم:

$$4, a, 9, b, \dots$$

بنا به تعریف دنباله‌ی هندسی: $\frac{a}{4}=\frac{9}{a} \Rightarrow a^2=36 \Rightarrow a=6$

قدر نسبت دنباله برابر است با: $q=\frac{a}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$$
$$\Rightarrow S_6=\frac{4\left(1-(\frac{3}{2})^6\right)}{1-\frac{3}{2}}=8\left((\tfrac{3}{2})^6-1\right)$$
$$\Rightarrow S_6=8\left(\frac{729}{64}-1\right)=\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$$

۲۹. گزینهٔ ۳

با توجه به مفروضات مسئله داریم: $\begin{cases} a_1+a_3=1 \\ S_4=3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+a_1q^2=1 \Rightarrow a_1(1+q^2)=1 \quad (*) \\ \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=3 \Rightarrow \frac{\overbrace{a_1(1+q^2)}^{1}(1-q^2)}{1-q}=3 \end{cases}$$

$$\frac{1-q^2}{1-q}=3 \Rightarrow \frac{(1-q)(1+q)}{1-q}=3 \Rightarrow 1+q=3 \Rightarrow q=2$$

$$\xrightarrow{(*)} a_1(1+q^2)=1 \xrightarrow{q=2} a_1(1+2^2)=1 \Rightarrow a_1=\frac{1}{5}$$

$$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{\frac{1}{5}(1-2^6)}{1-2}=\frac{\frac{1}{5}(1-64)}{-1}=\frac{63}{5}=12.6$$

۳۰. گزینهٔ ۴

$$1, (1+2), (1+2+2^2), \dots, (1+2+2^2+\dots+2^{n-1}), \dots$$

جمله‌ی nام دنباله‌ی فوق برابر است با مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۱ و قدر نسبت ۲، پس:

$$a_n=1+2+2^2+\dots+2^{n-1}=\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

بنابراین مجموع n جمله‌ی اول این دنباله، برابر است با:

$$S_n=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\dots+(2^n-1)$$
$$=(\underbrace{2^1+2^2+2^3+\dots+2^n}_{\text{مجموع } n \text{ جمله‌ی دنباله‌ی هندسی}})-(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ تا}})$$
$$=\frac{2\times(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

لذا مجموع ۹ جمله‌ی اول برابر است با:

$$S_9=2^{(9+1)}-9-2=1024-11=1013$$

۳۱. گزینهٔ ۲

$a_n=3\times 2^{n+1}$ یک دنباله‌ی هندسی است که قدرنسبت آن پایه‌ی عدد توان‌دار یعنی $q=2$ و جمله‌ی اول آن $a_1=3\times 2^2=12$ است.

$$S_n>96000 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}>96000 \Rightarrow \frac{12(1-2^n)}{1-2}>96000$$
$$\Rightarrow 2^n-1>8000 \Rightarrow 2^n>8001 \Rightarrow n\geq 13$$

۳۲. گزینهٔ ۲

$$S_n=9+99+999+\dots+\underbrace{99\dots9}_{n \text{ تا}}$$

می‌نویسیم:

$$\Rightarrow S_n=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\dots+(10^n-1)$$

با مرتب کردن عبارت داریم:

$$S_n=(\underbrace{10+10^2+\dots+10^n}_{\text{مجموع جملات دنباله‌ی هندسی}})-(\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ تا}})$$

عبارت اول مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۱۰ و قدر نسبت ۱۰ است.

$$S_n=\frac{10\times(10^n-1)}{10-1}-n(1)=\frac{10^{n+1}-10}{9}-n$$

۳۳. گزینهٔ ۱

مجموع ۱۱ جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی برابر است با:

$$S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}(a_۱+a_{۱۱})$$

از طرفی داریم $a_۳+a_۹=۸۵$ بنابراین:

$$a_۱+a_{۱۱}=a_۳+a_۹=۸۵$$

$$S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}(a_۱+a_{۱۱})=\frac{۱۱}{۲}\times ۸۵$$

مجموع ۴ جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $t_۱$ و قدرنسبت q برابر است با:

$$S'_۴=\frac{t_۱(q^۴-۱)}{q-۱}=\frac{t_۱(q^۲-۱)(q^۲+۱)}{q-۱}$$

$$=\frac{t_۱(q-۱)(q+۱)(q^۲+۱)}{q-۱}\Rightarrow S'_۴=t_۱(q+۱)(q^۲+۱)$$

از آنجا که $q=۴/۵$ و $S'_۴=S_{۱۱}=\frac{۱۱}{۲}\times ۸۵$ است، داریم:

$$\frac{۱۱}{۲}\times ۸۵=t_۱(\frac{۹}{۲}+۱)(\frac{۸۱}{۴}+۱)$$

$$\Rightarrow \frac{۱۱}{۲}\times ۸۵=t_۱(\frac{۱۱}{۲})(\frac{۸۵}{۴})\Rightarrow t_۱=۴$$

۳۴. گزینهٔ ۲

فرض می‌کنیم: $B=۱+x+x^۲+...+x^۸$، بنابراین B مجموع ۹ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت x می‌باشد و در نتیجه $B=\frac{(۱-x^۹)}{۱-x}$ است. هم‌چنین اگر $C=۱-x+x^۲-...+x^۸$ را فرض کنیم، C مجموع ۹ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $(-x)$ و در نتیجه $C=\frac{۱(۱-(-x)^۹)}{۱+x}=\frac{۱+x^۹}{۱+x}$ است.

$$A=BC=(\frac{۱-x^۹}{۱-x})(\frac{۱+x^۹}{۱+x})=\frac{۱-x^{۱۸}}{۱-x^۲}\xrightarrow{x=\sqrt{۲}}A=۵۱۱$$

۳۵. گزینهٔ ۲

سمت چپ، مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت a و جمله‌ی اول (۱) است. بنابراین:

$$\frac{۱-a^n}{۱-a}=(۱+a)(۱+a^۲)...(۱+a^۸)$$

$$\Rightarrow ۱-a^n=(۱-a)(۱+a)(۱+a^۲)(۱+a^۴)(۱+a^۸)$$

$$\Rightarrow ۱-a^n=۱-a^{۱۶}\Rightarrow n=۱۶$$

۳۶. گزینهٔ ۱

صورت و مخرج کسر، مجموع دو دنباله‌ی هندسی هستند.

$$\frac{t^{۱۱}+t^{۱۰}+t^۹+...+t+۱}{t^۹+t^۶+t^۳+۱}\xrightarrow[b_۱=۱\,,\ q'=t^۳]{a_۱=۱\,,\ q=t}\frac{\frac{۱(۱-t^{۱۲})}{۱-t}}{\frac{۱(۱-(t^۳)^۴)}{۱-t^۳}}$$

$$=\frac{۱-t^۳}{۱-t}=\frac{(۱-t)(۱+t+t^۲)}{۱-t}=۱+t+t^۲\quad(*)$$

با توجه به اینکه $t=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$، داریم:

$$۲t+۱=\sqrt{۵}\xrightarrow{\text{طرفین به توان دو}}(۲t+۱)^۲=(\sqrt{۵})^۲$$

$$\Rightarrow ۴t^۲+۴t+۱=۵\Rightarrow ۴(t^۲+t)=۴\Rightarrow t^۲+t=۱$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با:

$$\xrightarrow{(*)}\underbrace{t+t^۲}_{۱}+۱=۱+۱=۲$$

۳۷. گزینهٔ ۳

صورت کسر را می‌توان مجموع ۹ جمله‌ی دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_۱=۱$ و قدر نسبت $q=-t$ در نظر گرفت. همچنین مخرج را می‌توان مجموع سه جمله‌ی دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $b_۱=۱$ و قدرنسبت $q'=-t^۳$ در نظر گرفت و سپس از رابطه‌ی $S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ حاصل آنها را به‌دست آورد.

$$\frac{۱-t+t^۲-...-t^۷+t^۸}{۱-t^۳+t^۶}=\frac{\frac{۱(۱-(-t)^۹)}{۱-(-t)}}{\frac{۱(۱-(-t^۳)^۳)}{۱-(-t^۳)}}=\frac{\frac{۱+t^۹}{۱+t}}{\frac{۱+t^۹}{۱+t^۳}}$$

$$=\frac{۱+t^۳}{۱+t}=\frac{(۱+t)(۱-t+t^۲)}{(۱+t)}=۱-t+t^۲$$

$$\xrightarrow{t=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}}۱-(\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲})+(\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲})^۲=۵$$

۳۸. گزینهٔ ۱

در دنباله‌ی هندسی «$-\frac{۳}{۴}, \frac{۳}{۲}, -۳, ...$» داریم: $\begin{cases}a_۱=-\frac{۳}{۴}\\ q=-۲\end{cases}$

S_n را حساب می‌کنیم و برابر با $\frac{۲۵۵}{۴}$ قرار می‌دهیم تا n به‌دست آید:

$$S_n=\frac{۲۵۵}{۴}\Rightarrow \frac{a_۱(q^n-۱)}{q-۱}=\frac{۲۵۵}{۴}\Rightarrow \frac{-\frac{۳}{۴}((-۲)^n-۱)}{-۲-۱}=\frac{۲۵۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{۳}{۴}((-۲)^n-۱)}{-۳}=\frac{۲۵۵}{۴}\Rightarrow (-۲)^n-۱=۲۵۵$$

$$\Rightarrow (-۲)^n=۲۵۶\Rightarrow n=۸$$

حال مجموع $n+۲=۱۰$ جمله‌ی اول را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}=\frac{-\frac{۳}{۴}((-۲)^{۱۰}-۱)}{-۲-۱}=\frac{۱}{۴}\times ۱۰۲۳=\frac{۱۰۲۳}{۴}$$

۳۹. گزینهٔ ۱

$$S_{۱۲}=۲۷۳S_۴\Rightarrow a_۱\times\frac{۱-q^{۱۲}}{۱-q}=۲۷۳a_۱\times\frac{۱-q^۴}{۱-q}$$

$$\xrightarrow{q\neq ۱}۱-q^{۱۲}=۲۷۳(۱-q^۴)$$

$$\Rightarrow (۱-q^۴)(۱+q^۴+q^۸)=۲۷۳(۱-q^۴)$$

$$\Rightarrow q^۸+q^۴+۱=۲۷۳\xrightarrow{q^۴=t}t^۲+t-۲۷۲=۰$$

$$\Rightarrow (t-۱۶)(t+۱۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۱۶\\ t=-۱۷\quad \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow t=۱۶\Rightarrow q^۴=۱۶\Rightarrow q=\pm ۲$$

چون جملات دنباله روند افزایشی دارند، پس $q=۲$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow \frac{a_۵}{a_۲}=\frac{a_۱q^۴}{a_۱q}=q^۳=(۲)^۳=۸$$

۴۰. گزینه ۳

برای محاسبه‌ی مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی از رابطه‌ی $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ استفاده می‌کنیم و برای محاسبه‌ی مجموع جملات با ردیف فرد از همان رابطه استفاده می‌کنیم، فقط در این حالت قدر نسبت q^2 و تعداد جملات $\frac{n}{2}$ خواهد بود. پس خواهیم داشت:

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n=3(a_1+a_3+a_5+...+a_{n-1})$$

$$a_1+a_1q+a_1q^2+...+a_1q^{n-1}=3(a_1+a_1q^2+a_1q^4+...+a_1q^{n-2})$$

$$\Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{3a_1(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^n}{1-q}=\frac{3(1-q^n)}{(1-q)(1+q)}\xrightarrow{q\neq 1}1=\frac{3}{1+q}\Rightarrow q=2$$

۴۱. گزینه ۲

جملات دنباله را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم، در این دنباله، جمله‌ی اول جملات ردیف زوج برابر با aq و جمله‌ی اول جملات ردیف فرد برابر با a و در هر دو دنباله، قدر نسبت q^2 است، از طرفی تعداد جملات هر دو دنباله $\frac{n}{2}$ است، بنابراین:

جملات ردیف فرد : $a,\ aq^2,\ aq^4,\ ...$

جملات ردیف زوج : $aq,\ aq^3,\ aq^5,\ ...$

$$\frac{\text{مجموع جملات ردیف زوج}}{\text{مجموع جملات ردیف فرد}}=\frac{\frac{aq(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2}}{\frac{a(1-(q^2)^{\frac{n}{2}})}{1-q^2}}=q$$

۴۲. گزینه ۳

اگر بین دو عدد a و b، n واسطه‌ی هندسی قرار دهیم، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی حاصل از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$q^{n+1}=\frac{b}{a}\Rightarrow q^7=\frac{16\sqrt{2}}{2}\Rightarrow q=\sqrt[7]{\frac{16\sqrt{2}}{2}}=\sqrt[7]{8\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow q=(8\sqrt{2})^{\frac{1}{7}}=(2^3\sqrt{2})^{\frac{1}{7}}=(2^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{7}}=\sqrt{2}$$

می‌توانیم S_8 را بیابیم:

$$S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}\Rightarrow S_8=\frac{2(1-(\sqrt{2})^8)}{1-\sqrt{2}}=\frac{30}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Rightarrow S_8=\frac{30(\sqrt{2}+1)}{2-1}=30(\sqrt{2}+1)$$

۴۳. گزینه ۲

می‌توان مراحل اضافه کردن آب را دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت و جمله‌ی اول ۲ در نظر گرفت. حال داریم:

$$S_n=\frac{t_1(r^n-1)}{r-1}=2(2^n-1)\Rightarrow 2(2^n-1)>500$$

$$\Rightarrow 2^n>251\Rightarrow n\geq 8$$

۴۴. گزینه ۳

باید شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد، بنابراین جمع کاهش شدت تابش‌ها باید بزرگتر یا مساوی ۹۹ درصد شدت تابش اولیه باشد بنابراین خواهیم داشت: (فرض کنیم شدت تابش اولیه A باشد)

$$\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+\frac{A}{2^3}+...+\frac{A}{2^n}\geq\frac{99}{100}A$$

$$\xrightarrow{\div A}\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}\geq\frac{99}{100}$$

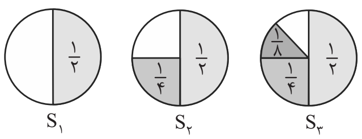
سمت چپ نامساوی فوق یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $\frac{1}{2}$ و قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است که مجموع آن از رابطه‌ی $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ محاسبه می‌شود.

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\geq\frac{99}{100}\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq\frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{100}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^n\Rightarrow 100\leq 2^n\Rightarrow n\geq 7\Rightarrow \min(n)=7$$

۴۵. گزینه ۲

در مرحله‌ی اول $\frac{1}{2}$ دایره را رنگ کرده‌ایم و در مرحله‌ی دوم $\frac{1}{2}(\frac{1}{2})$ دایره رنگ می‌شود، لذا:



$$S_1=\frac{1}{2}\qquad=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\qquad=\frac{3}{4}=1-\frac{1}{2^2}$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\qquad=\frac{7}{8}=1-\frac{1}{2^3}$$

$$S_7=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^7}=1-\frac{1}{2^7}$$

پس در مرحله‌ی هفتم مجموع قسمت‌های رنگ شده‌ی دایره $1-\frac{1}{2^7}$ است.

۴۶. گزینه ۲

محیط مستطیل اول، ۶ سانتی‌متر و محیط مستطیل دوم به دلیل آن‌که اضلاعش، ۱ و $\frac{1}{2}$ است، برابر ۳، پس محیط مستطیل‌ها در هر مرحله عبارتند از:

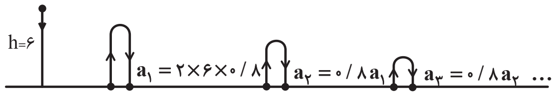
$$6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ ...$$

بنابراین یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a_1=6$ و قدر نسبت $\frac{1}{2}$ داریم، با توجه به خواسته‌ی مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{S_6}{a_1}=\frac{\frac{a_1(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}}}{a_1}=\frac{1-\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{32}$$

۴۷. گزینهٔ (۱)

به شکل زیر توجه کنید:



با توجه به شکل:

$$S_{۱۰۰}=h+a_۱+a_۲+...+a_{۹۹}$$

$$\Rightarrow S_{۱۰۰}=۶+\frac{a_۱(۱-q^{۹۹})}{۱-q}$$

از آنجا که $q=۰/۸$ و $a_۱=۲\times۶\times(۰/۸)$، پس:

$$\Rightarrow S_{۱۰۰}=۶+\frac{۲\times۶\times(۰/۸)(۱-(۰/۸)^{۹۹})}{۱-(۰/۸)}$$

از آنجا که $(۰/۸)^{۹۹}$ عددی نزدیک به صفر است، پس با صرف‌نظر کردن از آن داریم:

$$\Rightarrow S_{۱۰۰}<۶+\frac{۲\times۶\times۰/۸}{۱-۰/۸}=۶+(۲\times۶\times۴)=۵۴$$

یعنی در تعداد دفعات بسیار زیاد برخورد به زمین، در مجموع، توپ ۵۴ متر بالا و پایین می‌رود، پس اگر صد بار برخورد به زمین را در نظر بگیریم، مجموع بالا و پایین رفتن‌ها نمی‌تواند بیش از ۵۴ متر باشد و با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۱) را انتخاب می‌کنیم (مابقی گزینه‌ها از ۵۴ بیشتر هستند).

راهبرد حل تیپ (۴)

در یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدر نسبت q، رابطهٔ بین $S_{۲n}$ (مجموع $۲n$ جملهٔ اول) و S_n (مجموع n جملهٔ اول) دنباله به‌صورت روبه‌روست:

$$\frac{S_{۲n}}{S_n}=۱+q^n$$

۴۸. گزینهٔ (۴)

در هر دنبالهٔ هندسی، $S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ بنابراین: $\begin{cases}S_۳=۱۳۶\\ S_۶=۱۵۳\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}S_۳=a_۱\times\frac{۱-q^۳}{۱-q}=۱۳۶\\ S_۶=a_۱\times\frac{۱-q^۶}{۱-q}=۱۵۳\end{cases}\Rightarrow \frac{S_۳}{S_۶}=\frac{۱۳۶}{۱۵۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۱-q^۳}{۱-q^۶}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow \frac{۱-q^۳}{(۱-q^۳)(۱+q^۳)}=\frac{۸}{۹}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۱+q^۳}=\frac{۸}{۹}\Rightarrow q^۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{a_۱}{a_۵}=\frac{a_۱}{a_۱q^۴}=\frac{۱}{q^۴}=\frac{۱}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴}=۱۶$$

۴۹. گزینهٔ (۲)

$$S_۸=\frac{۵}{۴}S_۴\Rightarrow \frac{a_۱(q^۸-۱)}{q-۱}=\frac{۵}{۴}\left(\frac{a_۱(q^۴-۱)}{q-۱}\right)$$

$$\Rightarrow (q^۴-۱)(q^۴+۱)=\frac{۵}{۴}(q^۴-۱)$$

$$\Rightarrow q^۴+۱=\frac{۵}{۴}\Rightarrow q^۴=\frac{۱}{۴}\Rightarrow q^۲=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{a_۷}{a_۱}=\frac{a_۱q^۶}{a_۱}=q^۶=(q^۲)^۳=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳=\frac{۱}{۸}$$

۵۰. گزینهٔ (۴)

$$q=\frac{\sqrt[۶]{۳۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt[۶]{\frac{۳۲}{۸}}=\sqrt[۶]{۴}=\sqrt[۶]{۲^۲}=\sqrt[۳]{۲}$$

مجموع شش جملهٔ اول: $S_۶=\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}$

مجموع شش جملهٔ دوم: $S'_۶=\frac{a_۷(۱-q^۶)}{۱-q}$

$$\Rightarrow \frac{S'_۶}{S_۶}=\frac{a_۷}{a_۱}=q^۶\Rightarrow \frac{S'_۶}{S_۶}=(\sqrt[۳]{۲})^۶=۴$$

راهبرد حل تیپ (۵)

[۱] در معادله‌های درجهٔ دوم، بدون به دست آوردن ریشه‌های معادله، می‌توان مجموع (S) و حاصلضرب (P) ریشه‌ها را با توجه به ضرایب معادله به دست آورد:

$$ax^۲+bx+c=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\frac{-b}{a}\\ P=\frac{c}{a}\end{cases}$$

توجه کنید که در صورتی می‌توان از فرمول‌های بالا استفاده کرد که $\Delta\geq ۰$ باشد.

[۲] در تست‌هایی که مقداری برحسب ریشه‌ها خواسته می‌شود، معمولاً این عبارت‌ها به صورت زیر هستند: (α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم‌اند.)

شامل جذر ریشه‌ها باشد؛ مثال: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=?$

روش حل: عبارت را به توان دو رسانده و از S و P استفاده می‌کنیم.

******

ضرایب عددی ریشه‌ها یکسان نباشد؛ مثال: $۲\alpha+۳\beta=?$

روش حل: با استفاده از S و P، عبارت را شامل یک ریشه می‌کنیم.

******

توان یک ریشه، بیشتر از ریشهٔ دیگر باشد؛ مثال: $x^۲-۵x+۳=۰$

$\alpha^۲-۳\alpha+۲\beta=?$

روش حل: از خود معادله استفاده کرده و ریشهٔ شامل توان بزرگتر را جایگزین می‌کنیم:

$$\alpha^۲-۵\alpha+۳=۰\to\alpha^۲=۵\alpha-۳$$
$$(۵\alpha-۳)-۳\alpha+۲\beta=۲\alpha+۲\beta-۳$$

۵۱. گزینهٔ (۳)

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند:

$$۳x^۲+ax-۳=۰\xrightarrow{x_۱=-۳}۳(-۳)^۲+a(-۳)-۳=۰$$

$$\Rightarrow ۳a=۲۴\Rightarrow a=۸$$

از طرفی حاصلضرب ریشه‌ها $P=\frac{-۳}{۳}=-۱$ است، بنابراین:

$$P=x_۱x_۲\Rightarrow -۱=-۳\times x_۲\Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ax_۲^۲=۸\times\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

۵۲. گزینهٔ (۳)

ریشهٔ مشترک دو معادله را α در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}x^۲+۶x+m=۰\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}:\ \alpha+\beta_۱=-۶\\ x^۲+۲x-۳m=۰\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}:\ \alpha+\beta_۲=-۲\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تفاضل طرفین}}(\alpha+\beta_۱)-(\alpha+\beta_۲)=-۶-(-۲)$$

$$\Rightarrow \beta_۱-\beta_۲=-۴\Rightarrow|\beta_۱-\beta_۲|=۴$$

۵۳. گزینهٔ ۲

$$x^2-(a+1)x+a=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} x=1\ ,\ x=a$$

طبق فرض، ریشه‌های معادلهٔ بالا، دو عدد فرد متوالی‌اند پس باید $a=3$ باشد. با قرار دادن $a=3$ در معادلهٔ دوم به معادلهٔ زیر خواهیم رسید:

$$x^2-(3a+1)x+b=0 \xrightarrow{a=3} x^2-10x+b=0$$

ریشه‌های این معادله دو عدد زوج متوالی‌اند، از آنجا که مجموع ریشه‌های این معادله $S=10$ است، پس دو عدد ۴ و ۶ قابل قبول‌اند، یعنی $x=4$ و $x=6$. حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ اول $1\times3=3$ و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ دوم $4\times6=24$ است که اختلافشان $24-3=21$ است.

۵۴. گزینهٔ ۳

$$x^2+7x-3=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=-7\\ \alpha\beta=-3 \xrightarrow{\alpha>0} \beta<0\end{cases}$$

با توجه به علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق، داریم:

$$|\alpha+2\beta|+|\alpha|-|\beta|=|\underbrace{\alpha+\beta}_{\text{منفی}}+\underbrace{\beta}_{\text{منفی}}|+|\underbrace{\alpha}_{\text{مثبت}}|-|\underbrace{\beta}_{\text{منفی}}|$$

$$=-(\alpha+2\beta)+\alpha-(-\beta)=-\alpha-2\beta+\alpha+\beta=-\beta$$

۵۵. گزینهٔ ۴

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله و $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین ریشه‌ها باشد، آنگاه:

$$\frac{x'+x''}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow x'+x''=\frac{1}{4}$$

از طرفی مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ برابر $S=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{m^2-4}$ است، بنابراین داریم:

$$-\frac{-3}{m^2-4}=\frac{1}{4}\Rightarrow m^2-4=12$$

$$\Rightarrow m^2=16\Rightarrow m=\pm4$$

اما به ازای $m=4$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، زیرا Δی آن منفی خواهد بود، پس $m=-4$ قابل قبول است.

۵۶. گزینهٔ ۴

اگر سه عدد α، a و β تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، آنگاه $a^2=\alpha\beta$. از طرفی در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2+2(a+1)x+(2a-1)=0$، داریم:

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها}:\ \alpha\beta=\frac{2a-1}{1}=2a-1$$

با جایگذاری در $a^2=\alpha\beta$ داریم:

$$a^2=2a-1\Rightarrow a^2-2a+1=0\Rightarrow(a-1)^2=0\Rightarrow a=1$$

۵۷. گزینهٔ ۲

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله و $\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه‌ها باشد، آنگاه:

$$x_1x_2=(\sqrt{2})^2\Rightarrow x_1x_2=2$$

از طرفی حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ $mx^2-5x+m^2-3=0$ برابر $P=\frac{c}{a}=\frac{m^2-3}{m}$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{m^2-3}{m}=2\Rightarrow m^2-3=2m\Rightarrow m^2-2m-3=0$$

$$\Rightarrow(m+1)(m-3)=0\Rightarrow m=-1\ ,\ m=3$$

اما به ازای $m=3$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، زیرا Δی آن منفی خواهد بود، پس $m=-1$ قابل قبول است.

۵۸. گزینهٔ ۱

مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل‌ضرب آن دو ریشه برابر است، یعنی $S=\frac{1}{P}$، بنابراین:

$$3x^2+(2m-1)x+(2-m)=0\Rightarrow\begin{cases}S=-\frac{b}{a}=-\frac{2m-1}{3}\\ P=\frac{c}{a}=\frac{2-m}{3}\end{cases}$$

$$S=\frac{1}{P}\Rightarrow-\frac{2m-1}{3}=\frac{3}{2-m}\Rightarrow(2m-1)(m-2)=9$$

$$\Rightarrow2m^2-4m-m+2=9\Rightarrow2m^2-5m-7=0$$

$$\Rightarrow(2m-7)(m+1)=0\Rightarrow m=-1\ ,\ m=\frac{7}{2}$$

اما به ازای $m=-1$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، زیرا Δی آن منفی خواهد بود، پس $m=\frac{7}{2}$ قابل قبول است.

۵۹. گزینهٔ ۱

اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، آنگاه مجموع مربعات ریشه‌ها $\alpha^2+\beta^2$ است، بنابراین:

$$\alpha^2+\beta^2=6\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=6$$

$$\Rightarrow S^2-2P=6$$

$$mx^2-(m+3)x+5=0\Rightarrow\begin{cases}S=\frac{-b}{a}=\frac{m+3}{m}\\ P=\frac{c}{a}=\frac{5}{m}\end{cases}$$

$$S^2-2P=6\Rightarrow(\frac{m+3}{m})^2-2(\frac{5}{m})=6$$

$$\Rightarrow\frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}=6$$

طرفین رابطه را در $m^2\neq0$ ضرب می‌کنیم:

$$m^2+6m+9-10m=6m^2\Rightarrow5m^2+4m-9=0$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0}m=1\ ,\ m=-\frac{9}{5}$$

اما به ازای $m=1$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، زیرا Δی آن منفی خواهد بود، پس $m=-\frac{9}{5}$ قابل قبول است.

۶۰. گزینهٔ ۱

در معادلهٔ $x^2-3ax+a^2-4b^2=0$ داریم:

$$P=x_1x_2=a^2-4b^2=5\Rightarrow(a-2b)(a+2b)=5$$

اما ۵ یک عدد اول است، پس حاصلضرب $a+2b$ در $a-2b$ باید به‌صورت زیر باشد:

$$(a-2b)(a+2b)=1\times5\Rightarrow\begin{cases}a-2b=1\\ a+2b=5\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع دو رابطه}}a=3\ ,\ b=1$$

بنابراین معادله به‌شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$x^2-3ax+a^2-4b^2=0\xrightarrow{a=3\ ,\ b=1}x^2-9x+5=0$$

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آنگاه مجموع مکعبات ریشه‌های معادله برابر است با:

$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS=9^3-3\times5\times9=729-135=594$$

۶۱. گزینهٔ ۳

با فرض $A=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$، طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم (بدیهی است که α و β مثبت هستند.):

$$A^2=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+2\times\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{S}{P}+\frac{2}{\sqrt{P}}$$

از طرفی در معادلهٔ $4x^2-12x+1=0$، مجموع ریشه‌ها برابر $S=-\frac{-12}{4}=3$ و حاصلضرب ریشه‌ها برابر $P=\frac{1}{4}$ است، لذا:

$$\Rightarrow A^2=\frac{3}{\frac{1}{4}}+\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}}=12+4\Rightarrow A^2=16\xrightarrow{A>0}A=4$$

۶۲. گزینهٔ ۳

$$x^2-6x-8=0\Rightarrow S=6 \quad \text{و} \quad P=-8$$

از طرفی $\frac{1}{\alpha^2\beta}$ و $\frac{1}{\beta^2\alpha}$ ریشه‌های معادله هستند، پس:

$$P=-8\Rightarrow P=\frac{1}{\alpha^2\beta}\times\frac{1}{\beta^2\alpha}=-8\Rightarrow\frac{1}{(\alpha\beta)^3}=-8$$

$$\Rightarrow(\alpha\beta)^3=-\frac{1}{8}\Rightarrow\alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

$$S=6\Rightarrow S=\frac{1}{\alpha^2\beta}+\frac{1}{\beta^2\alpha}=6\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2\beta^2}=6$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=-\frac{1}{2}}\alpha+\beta=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

۶۳. گزینهٔ ۴

اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، آنگاه:

$$\alpha=\beta+2\Rightarrow\alpha-\beta=2\Rightarrow\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=2$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{15^2-4(3)(m)}}{3}=2\Rightarrow225-12m=36$$

$$\Rightarrow12m=189\Rightarrow m=\frac{189}{12}=\frac{63}{4}$$

۶۴. گزینهٔ ۴

$$2a+b=-12\Rightarrow\begin{cases}3x^2-ax+b=0\\12+2a+b=0\end{cases}\xrightarrow{\text{مقایسه}}x=-2$$

پس یکی از ریشه‌ها $x_1=-2$ است، از طرفی حاصلضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{b}{3}$ است، پس داریم:

$$(-2)(x_2)=\frac{b}{3}\Rightarrow x_2=\frac{-b}{6}$$

۶۵. گزینهٔ ۲

$$\frac{x_1}{x_2}=3+2x_1\xrightarrow{\times x_2}x_1=3x_2+2x_1x_2$$

$$\xrightarrow{+x_2}x_1+x_2=4x_2+2x_1x_2$$

از طرفی داریم: $\begin{cases}x_1+x_2=-2a\\x_1x_2=b\end{cases}$، بنابراین:

$$-2a=4x_2+2b\Rightarrow4x_2=-2a-2b$$

$$\Rightarrow x_2=-\frac{a+b}{2}$$

۶۶. گزینهٔ ۳

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس داریم:

$$\alpha^2-2\alpha-2=0\Rightarrow\alpha^2=2\alpha+2$$

با جایگذاری در رابطهٔ $\alpha^2-\alpha+\beta$ خواهیم داشت:

$$\alpha^2-\alpha+\beta=(2\alpha+2)-\alpha+\beta=\alpha+\beta+2$$

$$\xrightarrow{S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=2}\alpha+\beta+2=2+2=4$$

۶۷. گزینهٔ ۲

$$x_1+2x_2=3\Rightarrow(x_1+x_2)+x_2=3$$

از آن‌جایی‌که در معادلهٔ $2x^2-x+k=0$ مجموع ریشه‌ها برابر $S=-\frac{b}{a}=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$ است، پس:

$$\Rightarrow\frac{1}{2}+x_2=3\Rightarrow x_2=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، لذا:

$$2(\frac{5}{2})^2-\frac{5}{2}+k=0\Rightarrow\frac{25}{2}-\frac{5}{2}+k=0\Rightarrow k=-10$$

۶۸. گزینهٔ ۳

ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-ax+4=0$ را α و β می‌نامیم، داریم:

$$P=\alpha\beta=\frac{4}{3}\quad(1)\qquad S=\alpha+\beta=\frac{a}{3}\quad(2)$$

$$\alpha=3\beta\xrightarrow{\times\alpha}\alpha^2=3\alpha\beta\xrightarrow{(1)}\alpha^2=3(\frac{4}{3})$$

$$\Rightarrow\alpha^2=4\Rightarrow\alpha=\pm2\xrightarrow{(1)}\beta=\pm\frac{2}{3}$$

اگر $\alpha=2$ و $\beta=\frac{2}{3}$، آنگاه داریم:

$$S=2+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}\xrightarrow{(2)}\frac{a}{3}=\frac{8}{3}\Rightarrow a=8$$

اگر $\alpha=-2$ و $\beta=-\frac{2}{3}$، آنگاه داریم:

$$S=-2-\frac{2}{3}=-\frac{8}{3}\xrightarrow{(2)}\frac{a}{3}=-\frac{8}{3}\Rightarrow a=-8$$

پس اختلاف دو مقدار قابل قبول برای a، برابر است با:

$$8-(-8)=16$$

۶۹. گزینهٔ ۲

اگر α و β را ریشه‌های معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ در نظر بگیریم، از آنجا که یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است، داریم:

$$\alpha=\frac{\beta}{2}+5\quad(*)$$

از طرفی مجموع ریشه‌ها برابر $S=\alpha+\beta=8$ است، بنابراین:

$$\alpha+\beta=8\xrightarrow{(*)}\frac{\beta}{2}+5+\beta=8\Rightarrow\frac{3\beta}{2}=3$$

$$\Rightarrow\beta=2$$

β ریشهٔ معادله است، پس در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$$(2)^2-8(2)+m=0\Rightarrow m=12$$

۷۰. گزینهٔ ۳

با توجه به معادله $x_1x_2=-3$، بنابراین:

$$x_1=\frac{-3}{x_2}\quad\text{و}\quad x_2=\frac{-3}{x_1}$$

با جایگذاری در عبارت خواسته شده داریم:

$$(3x_1-\underbrace{\frac{6}{x_2}}_{2x_1})^3+(3x_2-\underbrace{\frac{6}{x_1}}_{2x_2})^3=(3x_1+2x_1)^3+(3x_2+2x_2)^3$$

$$=(5x_1)^3+(5x_2)^3=125(x_1^3+x_2^3)$$

از آنجاکه $S=1$ و $P=-3$، با استفاده از اتحاد داریم:

$$125(x_1^3+x_2^3)=125(S^3-3PS)$$

$$\xrightarrow{S=1\ ,\ P=-3}=125(1-3\times1(-3))=1250$$

۷۱. گزینهٔ ۱

عبارت $5x_1^2+3x_2^2$ نامتقارن است، باید از این خاصیت که ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، استفاده کنیم. با قرار دادن x_1 و x_2 در خود معادله داریم:

$$\begin{cases}x_1^2+x_1-1=0\Rightarrow x_1^2=-x_1+1\\ x_2^2+x_2-1=0\Rightarrow x_2^2=-x_2+1\end{cases}$$

با جایگذاری x_1^2 و x_2^2 داریم:

$$\begin{aligned}5x_1^2+3x_2^2&=5(-x_1+1)+3(-x_2+1)\\&=-5x_1+5-3x_2+3\\&=-3(x_1+x_2)-2x_1+8\quad(*)\end{aligned}$$

با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-1$ است، با استفاده از روش Δ، x_1 را می‌یابیم:

$$x^2+x-1=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}$$

$$\xrightarrow{x_1<x_2}x_1=\frac{-1-\sqrt5}{2}$$

با جایگذاری در رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$\begin{aligned}5x_1^2+3x_2^2&=-3(-1)-2(\frac{-1-\sqrt5}{2})+8\\&=3+1+\sqrt5+8=12+\sqrt5\end{aligned}$$

۷۲. گزینهٔ ۴

ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$ax^2-ax-b=0\xrightarrow{\div a}x^2-x-\frac{b}{a}=0$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1\quad,\quad\alpha\beta=-\frac{b}{a}$$

همچنین رابطه‌ی داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$40\beta^2+20\alpha^2-20\beta=17\xrightarrow{\div 20}2\beta^2+\alpha^2-\beta=\frac{17}{20}$$

$$\Rightarrow(\alpha^2+\beta^2)+\beta^2-\beta=\frac{17}{20}\quad(*)$$

β ریشه‌ی معادله است و در خود معادله صدق می‌کند، پس: $\beta^2-\beta-\frac{b}{a}=0$، در نتیجه: $\beta^2-\beta=\frac{b}{a}$، از طرفی داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2(-\frac{b}{a})=1+\frac{2b}{a}$$

با جایگذاری در رابطه‌ی $(*)$ خواهیم داشت:

$$1+\frac{2b}{a}+\frac{b}{a}=\frac{17}{20}\Rightarrow\frac{3b}{a}=-\frac{3}{20}\Rightarrow\frac{b}{a}=-\frac{1}{20}$$

بنابراین معادله به صورت $x^2-x+\frac{1}{20}=0$ است و داریم:

$$\text{اختلاف ریشه‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(-1)^2-4(\frac{1}{20})}}{1}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt5}$$

۷۳. گزینهٔ ۱

ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس:

$$\begin{cases}\alpha^2+6\alpha+a=0\Rightarrow\alpha^2=-6\alpha-a\\ \beta^2+6\beta+a=0\Rightarrow\beta^2=-6\beta-a\end{cases}$$

با جایگذاری α^2 و β^2 داریم:

$$\begin{aligned}3\alpha^2+2\beta^2&=3(-6\alpha-a)+2(-6\beta-a)\\&=-18\alpha-12\beta-5a\\&=-6\alpha-12(\alpha+\beta)-5a\quad(*)\end{aligned}$$

با توجه به معادله، مجموع ریشه‌ها برابر $\alpha+\beta=-\frac{6}{1}=-6$ است، با استفاده از روش Δ، α را می‌یابیم:

$$\alpha,\beta=\frac{-6\pm\sqrt{36-4a}}{2\times1}=\frac{-6\pm\sqrt{4(9-a)}}{2}=\frac{-6\pm2\sqrt{9-a}}{2}$$

$$\xrightarrow{\alpha<\beta}\alpha=-3-\sqrt{9-a}$$

با جایگذاری در رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$\begin{aligned}3\alpha^2+2\beta^2&=-6(-3-\sqrt{9-a})-12(-6)-5a\\&=90-5a+6\sqrt{9-a}\end{aligned}$$

با توجه به فرض مسئله $3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt2+85$ خواهیم داشت:

$$90-5a+6\sqrt{9-a}=12\sqrt2+85\Rightarrow a=1$$

۷۴. گزینهٔ ۳

$$2x^2+6x+a=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{6}{2}=-3\\ P=\alpha\beta=\frac{a}{2}\end{cases}$$

ابتدا عبارت $\alpha^3+\beta^3$ را می‌یابیم:

$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3SP=(-3)^3-3(-3)(\frac{a}{2})=-27+\frac{9a}{2}$$

با استفاده از روش دلتا، β که ریشه‌ی کوچکتر است را می‌یابیم:

$$\Delta=6^2-4(2)(a)=36-8a=4(9-2a)$$

$$\Rightarrow\beta=\frac{-6-\sqrt{4(9-2a)}}{2\times2}=\frac{-6-2\sqrt{9-2a}}{4}=\frac{-3-\sqrt{9-2a}}{2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\beta^2=(\frac{-3-\sqrt{9-2a}}{2})^2&=\frac{9+9-2a+6\sqrt{9-2a}}{4}\\&=\frac{9-a+3\sqrt{9-2a}}{2}\end{aligned}$$

با جایگذاری در تساوی $\alpha^3+\beta^3+\beta^2=-\frac{21}{2}+\frac{3\sqrt3}{2}$ داریم:

$$-27+\frac{9a}{2}+\frac{9-a+3\sqrt{9-2a}}{2}=\frac{-21+3\sqrt3}{2}\quad(*)$$

$$\xrightarrow{\times2}-54+9a+9-a+3\sqrt{9-2a}=-21+3\sqrt3$$

در همین جا می‌توان گفت که $\sqrt{9-2a}=\sqrt3$، در نتیجه: $9-2a=3$، پس: $a=3$، که با جایگذاری در $(*)$ می‌توان دید که تساوی برقرار است.

۷۵. گزینهٔ ۲

از اینکه a و b ریشه‌های معادله هستند، داریم:

$P=ab$: حاصلضرب ریشه‌ها، $S=a+b$: مجموع ریشه‌ها

می‌دانیم اگر معادله‌ی درجه دوم $Ax^2+Bx+C=0$ دو ریشه داشته باشد، مجموع این دو ریشه $S=-\frac{B}{A}$ و حاصلضرب آنها $P=\frac{C}{A}$ است، بنابراین از معادله‌ی $x^2-(a^2+b^2-12)x+(a+b-1)=0$ داریم:

$S=a^2+b^2-12$: مجموع ریشه‌ها

$P=a+b-1$: حاصلضرب ریشه‌ها

دو S به‌دست آمده با هم و دو P به‌دست آمده هم با هم برابرند، یعنی:

برابری Pها : $a+b-1=ab\Rightarrow b-1=ab-a$

$$\Rightarrow (b-1)=a(b-1)\xrightarrow[\div(b-1)]{b\neq 1}1=a$$

برابری Sها : $a^2+b^2-12=a+b\xrightarrow{a=1}b^2-11=1+b$

$$\Rightarrow b^2-b-12=0\Rightarrow (b-4)(b+3)=0$$

$$\xrightarrow{\text{b طبیعی است}}b=4\Rightarrow a+b=5$$

همچنین حالتی‌که b = ۱ باشد و a = ۴ نیز قابل قبول است.

۷۶. گزینهٔ ۴

ابتدا طرف چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1)(\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow (\frac{\sqrt[3]{x^2}\times\sqrt[3]{x^2}+1+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}})(\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow (\frac{(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1)(\sqrt[3]{x^2}-1)}{\sqrt[3]{x^2}})=2\sqrt[3]{x}$$

با استفاده از اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ در صورت کسر، داریم:

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^3-1^3}{\sqrt[3]{x^2}}=2\sqrt[3]{x}\Rightarrow x^2-1=(2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x^2})$$

$$\Rightarrow x^2-1=2x\Rightarrow x^2-2x-1=0\Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-2)}{1}=2$$

۷۷. گزینهٔ ۳

$$ax^2+bx-c=0\Rightarrow\begin{cases}S=\frac{-b}{a}\ :\ \text{مجموع ریشه‌ها}\\ P=\frac{-c}{a}\ :\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها}\end{cases}$$

$$S=P+2\Rightarrow\frac{-b}{a}=\frac{-c}{a}+2\xrightarrow{\times a}-b=-c+2a$$

$$\Rightarrow c-b=2a$$

سمت راست تساوی $c-b=2a$ عددی زوج است، پس سمت چپ آن هم باید عددی زوج باشد، پس b و c باید هر دو فرد یا هر دو زوج باشند. از آنجاکه b و c باید از مجموعه‌ی $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ انتخاب شوند، تعداد راه‌های انتخاب آنها برابر است با:

$$\overset{\text{هر دو فرد}}{\binom{5}{2}}+\overset{\text{هر دو زوج}}{\binom{4}{2}}=\frac{5\times4}{2}+\frac{4\times3}{2}=10+6=16$$

با انتخاب b و c مناسب، از تساوی $b-c=2a$، مقدار a هم به‌دست می‌آید که حتماً یک عدد طبیعی تک رقمی است.

توجه کنید که b و c نمی‌توانند برابر باشند، زیرا در این صورت $a=0$ خواهد بود و معادله، درجه دوم نخواهد شد.

راهبرد حل تیپ (۶)

با داشتن مجموع (S) و حاصلضرب (P) ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم، معادله‌ی آن به صورت $x^2-Sx+P=0$ خواهد بود.
اگر یک معادله‌ی درجه‌ی دوم داشته باشیم و بخواهیم یک معادله‌ی جدید تشکیل دهیم که ریشه‌هایش برحسب ریشه‌های معادله‌ی اولیه باشد، باید مجموع (S') و حاصلضرب (P') ریشه‌های معادله‌ی جدید را با استفاده از مجموع (S) و حاصلضرب (P) ریشه‌های معادله‌ی اولیه بیابیم. در این صورت معادله‌ی جدید برابر با $x^2-S'x+P'=0$ است.

۷۸. گزینهٔ ۱

$$x_1=2-\sqrt{4-a}\quad,\quad x_2=2+\sqrt{4-a}$$

مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را به‌دست آورده، سپس معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=(2-\sqrt{4-a})+(2+\sqrt{4-a})=4\\ P=x_1.x_2=(2-\sqrt{4-a})(2+\sqrt{4-a})=a\end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2-Sx+P=0}x^2-4x+a=0$$

۷۹. گزینهٔ ۲

$$x^2-x-1=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=1\\ P=\alpha\beta=-1\end{cases}$$

ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر $\alpha^2+\alpha\beta$ و $\beta^2+\alpha\beta$ است، بنابراین:

$$S'=(\alpha^2+\alpha\beta)+(\beta^2+\alpha\beta)=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$$
$$=(\alpha+\beta)^2=1$$

$$P'=(\alpha^2+\alpha\beta)(\beta^2+\alpha\beta)=\alpha(\alpha+\beta)\beta(\beta+\alpha)$$
$$=\alpha\beta(\alpha+\beta)^2=-1\times1=-1$$

بنابراین معادله به صورت زیر است:

$$\xrightarrow{x^2-S'x+P'=0}x^2-x-1=0$$

۸۰. گزینهٔ ۲

$$3x^2-2x-1=0\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0}x_1=1\ ,\ x_2=-\frac{1}{3}$$

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2+ax+b=0$ باشند، طبق فرض داریم:

$$\begin{cases}\frac{3}{x_1}=\alpha+2\Rightarrow 3=\alpha+2\Rightarrow\alpha=1\\ \frac{3}{x_2}=\beta+2\Rightarrow -9=\beta+2\Rightarrow\beta=-11\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-10\\ P=\alpha\beta=-11\end{cases}\xrightarrow{x^2-Sx+P=0}x^2+10x-11=0$$

$$\xrightarrow{x^2+ax+b=0}a=10\ ,\ b=-11\Rightarrow a-b=21$$

۸۱. گزینهٔ ۳

با بازنویسی معادله‌ی $x(5x+3)=2$ خواهیم داشت:

$$5x^2+3x-2=0$$

در این معادله $a+c=b$، پس ریشه‌های معادله $\alpha=-1$ و $\beta=\frac{2}{5}$ است.