ریاضیات

آزمون اول (سراسری ۹۸)

۱. گزینهٔ ۴ (مجموعه، الگو و دنباله)

برای آنکه تعداد افرادی را که عضو هیچ گروهی نیستند پیدا کنیم، باید تعداد افرادی را که عضو حداقل یک گروه هستند، یعنی اجتماع دو گروه مورد نظر را، حساب کنیم. داریم:

S: گروه ورزش و J: گروه روزنامه دیواری

$$n(S\cup J)=n(S)+n(J)-n(S\cap J)$$

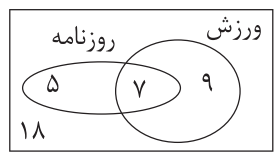
$$=n(J)+\underbrace{(n(S)-n(S\cap J))}_{\text{تعداد افرادی که فقط در گروه ورزش هستند.}}$$

$$\Rightarrow n(S\cup J)=۱۲+۹=۲۱$$

حال با تفریق عدد حاصل از تعداد افراد کلاس، تعداد افراد مورد نظر به دست می‌آید.

$۳۹-۲۱=۱۸$ = تعداد افرادی که عضو هیچ گروهی نیستند.

نمودار زیر وضعیت این کلاس را نشان می‌دهد.



۲. گزینهٔ ۲ (توان‌های گویا و عبارت‌های جبری)

با توجه به اینکه $(a^n)^m=a^{nm}$ و $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$ است، A را برحسب توان‌های ۲ به‌دست می‌آوریم:

$$A=\sqrt[۵]{۲^۲\times\sqrt[۳]{۲^۴}}\times(۲^{-۱})^{-\frac{۴}{۳}}=\sqrt[۵]{۲^۲}\times\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{۲^۴}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}}$$

$$=۲^{\frac{۲}{۵}+\frac{۴}{۱۵}}\times ۲^{\frac{۴}{۳}}=۲^۲$$

$$\Rightarrow (۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=(۲^۳)^{-\frac{۱}{۳}}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$$

۳. گزینهٔ ۳ (معادله‌ها و نامعادله‌ها)

باید Δ ی معادله، مثبت باشد:

$$\Delta=۶^۲-۴(۲m-۱)(m-۲)=-۴(۲m^۲-۵m-۷)$$

$$\Delta>۰\Rightarrow ۲m^۲-۵m-۷<۰\Rightarrow (m+۱)(۲m-۷)<۰$$

$$\Rightarrow -۱<m<۳/۵$$

اما $m=\frac{۱}{۲}$ غیرقابل قبول است، زیرا به ازای آن، معادله درجهٔ یک خواهد شد و فقط یک جواب حقیقی دارد. بنابراین پاسخ صحیح تست $m\in(-۱,۳/۵)-\{\frac{۱}{۲}\}$ است.

۴. گزینهٔ ۱ (تابع)

ابتدا ضابطهٔ تابع را با استفاده از روش مربع کامل بازنویسی می‌کنیم. داریم:

$$y_۱=-x^۲+۲x+۵=-(x-۱)^۲+۶$$

حال با انتقال ۳ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین داریم:

$$y_۲=-(x-۳-۱)^۲+۶-۲=-(x-۴)^۲+۴$$

نیمساز ناحیهٔ اول خط $y=x$ است $(x>۰)$، بنابراین باید نامعادلهٔ $y_۲>x$ را حل کنیم:

$$\Rightarrow y_۲=-(x-۴)^۲+۴=-x^۲+۸x-۱۲>x$$

$$\Rightarrow x^۲-۷x+۱۲<۰\Rightarrow (x-۳)(x-۴)<۰\Rightarrow ۳<x<۴$$

۵. گزینهٔ ۲ (جبر و معادله)

دنبالهٔ اعداد طبیعی مضرب ۷ را به صورت $a_n=۷n$ در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{a_n\ \text{دو رقمی}}۱۰\le a_n\le ۹۹\Rightarrow ۱۰\le ۷n\le ۹۹\Rightarrow \frac{۱۰}{۷}\le n\le\frac{۹۹}{۷}$$

$$\xrightarrow{n\in\mathbb{N}}۲\le n\le ۱۴$$

$$\Rightarrow a_۲=۷\times ۲=۱۴\ ,\ a_{۱۴}=۷\times ۱۴=۹۸$$

بنابراین اعداد دو رقمی مضرب ۷، دنباله‌ای ۱۳ جمله‌ای $(۱۴-۲+۱)$ به‌صورت مقابل است: $\underbrace{۱۴,۲۱,\dots,۹۸}_{\text{۱۳ جمله‌ای}}$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S=\frac{۱۳}{۲}(۱۴+۹۸)=۷۲۸$$

۶. گزینهٔ ۴ (جبر و معادله)

متغیرها را به صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم.

t_b: مدت زمانی که بهروز کار را به تنهایی انجام می‌دهد.

t_f: مدت زمانی که فرهاد کار را به تنهایی انجام می‌دهد.

طبق اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$t_f=t_b+۹\quad(*)$$

$$\frac{۱}{t_b}+\frac{۱}{t_f}=\frac{۱}{۲۰}\xrightarrow{*}\frac{۱}{t_b}+\frac{۱}{t_b+۹}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow t_b^۲-۳۱t_b-۱۸۰=۰$$

$$\Rightarrow (t_b-۳۶)(t_b+۵)=۰$$

$$\xrightarrow{t_b>۰}t_b=۳۶\ \text{ساعت}$$

۷. گزینهٔ ۱ (تابع)

ابتدا $f^{-۱}$ را حساب می‌کنیم. می‌دانیم برای این کار باید جای مؤلفه‌های اول و دوم را در هر زوج مرتب عوض کنیم.

$$\Rightarrow f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

حال با توجه به رابطهٔ دامنهٔ ترکیب دو تابع داریم:

$$D_{gof^{-۱}}=\{x\in D_{f^{-۱}}\mid f^{-۱}(x)\in D_g\}$$

حال با توجه به دامنهٔ تابع g یعنی $D_g=\{۲,۴,۵,۳\}$، داریم:

$$D_{gof^{-۱}}=\{۴,۵,۶\}\Rightarrow gof^{-۱}=\{(۴,۱),(۵,۳),(۶,۲)\}$$

از طرفی برای دامنهٔ حاصل تقسیم دو تابع داریم:

$$D_{\frac{g}{gof^{-۱}}} = D_g \cap D_{gof^{-۱}} ; gof^{-۱} \neq ۰ \Rightarrow D_{\frac{g}{gof^{-۱}}} = \{۴,۵\}$$

با مشاهدهٔ دامنهٔ توابع گزینه‌ها، به‌سادگی به جواب گزینهٔ «۱» می‌رسیم. اما برای محاسبهٔ مؤلفه‌های دوم این تابع نیز داریم:

$$\frac{g}{gof^{-۱}} = \left\{\left(۴,\frac{g(۴)}{gof^{-۱}(۴)}\right),\left(۵,\frac{g(۵)}{gof^{-۱}(۵)}\right)\right\}$$

$$=\left\{\left(۴,\frac{۲}{۱}\right),\left(۵,\frac{۶}{۳}\right)\right\} \Rightarrow \frac{g}{gof^{-۱}} = \{(۴,۲),(۵,۲)\}$$

۸. گزینهٔ ۴ (توابع نمایی و لگاریتمی)

نقاط $(۱,۰)$ و $(۲,۲)$ روی نمودار تابع f و سهمی $y = x^۲ - x$ هستند.

بنابراین:

$$f(۱)=۰ \Rightarrow -۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{A+B}=۰ \Rightarrow (۲^{-۱})^{A+B}=۲$$

$$\Rightarrow A+B=-۱ \quad (۱)$$

$$f(۲)=۲ \Rightarrow -۲+\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲A+B}=۲ \Rightarrow (۲^{-۱})^{۲A+B}=۴=۲^۲$$

$$\Rightarrow ۲A+B=-۲ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} A=-۱, B=۰ \Rightarrow f(x)=۲^x-۲ \Rightarrow f(۳)=۶$$

۹. گزینهٔ ۲ (مثلثات)

$$\tan\left(\frac{۱۱\pi}{۴}\right) = \tan\left(۳\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴} = \sin\left(۴\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right) = -\sin\frac{\pi}{۴} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴} = \cos\left(۳\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{۱۱\pi}{۴}\right) + \sin\left(\frac{۱۵\pi}{۴}\right)\cos\left(\frac{۱۳\pi}{۴}\right) = -۱ + \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۰. گزینهٔ ۳ (مشتق)

راه حل اول:

عبارت صورت سوال را به دو عبارت حدی به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin a\cos x + \cos a\sin x - \sin a}{x}$$

$$= \lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin a\cos x - \sin a}{x} + \frac{\cos a\sin x}{x}\right)$$

$\sin a$ و $\cos a$، اعداد ثابت هستند و حکم ضریب را دارند. بنابراین خواهیم داشت:

$$= \sin a \underbrace{\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x - ۱}{x}}_{\text{تعریف مشتق } \cos x \text{ در } x=۰} + \cos a \underbrace{\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}}_{=۱}$$

$$= \sin a(-\sin(۰)) + \cos a = \cos a$$

راه حل دوم:

با استفاده از رابطهٔ $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$، عبارت را بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin a\cos x + \cos a\sin x - \sin a}{x} = \lim_{x\to ۰}\frac{\sin(a+x) - \sin a}{x}$$

رابطهٔ جدید همان تعریف مشتق $\sin x$ به ازای $x = a$ است.

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(a) = \cos a$$

۱۱. گزینهٔ ۳ (حد و پیوستگی)

با توجه به دامنهٔ تعریف ضابطه‌ها، برای پیوستگی تابع f در مجموعهٔ اعداد حقیقی، کافی است پیوستگی آن را در $x = ۲$ بررسی کنیم. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲) = ۲a - ۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+}\frac{۳x-۶}{x-\sqrt{x+۲}}$$

صورت و مخرج کسر فوق را در مزدوج عبارت مخرج یعنی $x + \sqrt{x+۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)\times(x+\sqrt{x+۲})}{(x-\sqrt{x+۲})\times(x+\sqrt{x+۲})}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{x^۲-x-۲} = \lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}{(x-۲)(x+۱)}$$

$$= \lim_{x\to ۲^+}\frac{۳(x+\sqrt{x+۲})}{x+۱} = \frac{۳\times(۲+۲)}{۳} = ۴$$

$$x = ۲ \text{ شرط پیوستگی در } : \lim_{x\to ۲^-} f(x) = f(۲) = \lim_{x\to ۲^+} f(x)$$

$$\Rightarrow ۲a - ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۲/۵$$

۱۲. گزینهٔ ۳ (مثلثات)

با استفاده از رابطهٔ $\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta$، ضابطهٔ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y = ۱ + \frac{a}{۲}\sin ۲bx$$

دورهٔ تناوب تابع، فاصلهٔ طولی دو ماکزیمم متوالی یا دو مینیمم متوالی است. با توجه به شکل داریم:

$$\text{دورهٔ تناوب} : T = \pi \xrightarrow{T=\frac{۲\pi}{\text{قدر مطلق ضریب } x}} T = \frac{۲\pi}{۲|b|} \Rightarrow |b| = ۱$$

از طرفی مقدار ماکزیمم تابع برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

$$\Rightarrow y_{max} = ۱ + \frac{|a|}{۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |a| = ۱$$

اما با توجه به نمودار، مشخص است که در همسایگی $x = ۰$ تابع فرم صعودی دارد، بنابراین a و b باید هم علامت باشند یعنی داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a=-۱ \,,\, b=-۱ \\ a=۱ \,,\, b=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=\pm ۲$$

۱۳. گزینهٔ ۱ (مثلثات)

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، عبارت سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}-\underbrace{\sin x.\cos x}_{\frac{1}{2}\sin 2x})$$

$$=(\sin x+\cos x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)$$

در نتیجه معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$\Rightarrow (\sin x+\cos x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1-\frac{1}{2}\sin 2x=0\Rightarrow \sin 2x=2 & \text{غ.ق.}\\ \sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$، $x=0$ ،$x=\frac{\pi}{2}$ و $x=2\pi$ است که مجموع آن‌ها برابر است با $\frac{5\pi}{2}$.

دقت کنید که با استفاده از بسط‌های مربوط به $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ می‌توان نوشت:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

۱۴. گزینهٔ ۲ (حدهای نامتناهی – حد در بی‌نهایت)

حد عبارت صورت وقتی $x\to 2$ میل کند، برابر -1 است. بنابراین برای اینکه حاصل حد مورد نظر $-\infty$ باشد، $x=2$ باید ریشهٔ مضاعف عبارت مخرج باشد.

$$\Rightarrow x^2+ax+b=(x-2)^2=x^2-4x+4$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a=-4\\ b=4\end{cases}\Rightarrow a+b=0$$

۱۵. گزینهٔ ۳ (مشتق)

می‌دانیم:

$$(fog)'(1)=g'(1)f'(g(1)) \qquad (*)$$

$$g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow g'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

از طرفی $g(1)=2$ به دست می‌آید. حال با استفاده از تعریف مشتق می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)\Rightarrow f'(2)=\frac{4}{3}$$

بنابراین داریم:

$$(fog)'(1)=g'(1).f'(2)=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=2$$

۱۶. گزینهٔ ۱ (مشتق)

تابع مشتق‌پذیر، الزاماً پیوسته است. بنابراین ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}|x^2-2x|=0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=2+2a+b$$

شرط پیوستگی: $2+2a+b=0\Rightarrow 2a+b=-2 \quad (*)$

حال ضابطهٔ مشتق را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & ;x<0\\ -x^2+2x & ;0\le x<2\\ \frac{1}{2}x^2+ax+b & ;x\ge 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x-2 & ;x<0\\ -2x+2 & ;0<x<2\\ x+a & ;x>2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}f'(x)=\lim_{x\to 2^-}(-2x+2)=-2$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}f'(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+a)=2+a$$

شرط مشتق‌پذیری: $2+a=-2\Rightarrow a=-4\xrightarrow{*}b=6$

$$\Rightarrow a+b=2$$

۱۷. گزینهٔ ۴ (مشتق)

آهنگ متوسط در بازهٔ $[0,2]$ $=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4\times 3-2}{2}=5$

آهنگ لحظه‌ای در $x=\frac{3}{4}$ $=f'(\frac{3}{4})$

به کمک رابطهٔ $(f(x)g(x))'=g'(x)f(x)+f'(x)g(x)$، مشتق تابع f را می‌یابیم:

$$f'(x)=\sqrt{4x+1}+\frac{2(x+2)}{\sqrt{4x+1}}$$

$$\Rightarrow f'(\frac{3}{4})=2+\frac{11}{4}=4.75$$

$\Rightarrow$ آهنگ متوسط − آهنگ لحظه‌ای $=0.25$

۱۸. گزینهٔ ۱ (کاربردهای مشتق)

برای مشتق اول و دوم تابع f داریم:

$$f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x)=36x^2+6ax+2b$$

$x=0$، طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع است، بنابراین $f'(0)=0$ است.

$$f'(0)=c=0$$

$x=1$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f است. هم‌چنین خط مماس در این نقطه افقی است. بنابراین داریم:

$$f'(1)=f''(1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}f'(1)=12+3a+2b=0\\ f''(1)=36+6a+2b=0\end{cases}\Rightarrow a=-8\ ,\ b=6$$