مؤلف این فصل: فرهاد حامی

فصل اول

معادلهٔ درجهٔ دوم (دهم)

(۱۷ پیمانه)

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

معادلهٔ درجهٔ دوم

۱ معادله و مسائل توصیفی

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۲ پیمانه — ۲۰ تست

۱ معادلهٔ درجهٔ اول
۲ مسائل توصیفی

۲ حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردها

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۱۰ پیمانه — ۱۰۰ تست

۱ حل معادله به روش تجزیه و ریشه‌گیری
۲ حل معادله به روش مربع کامل
۳ روش کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم (روش دلتا)
۴ تعیین تعداد جواب‌های معادله با Δ
۵ روش تغییر متغیر در حل معادله
۶ مجموع، حاصلضرب و اختلاف ریشه‌های معادله
۷ روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله
۸ تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم با S و P
۹ کاربرد معادلهٔ درجهٔ دوم در مسائل توصیفی

۳ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۵ پیمانه — ۵۰ تست

۱ روش‌های حل معادلات گویا
۲ کاربرد معادلات گویا در مسائل توصیفی

۱۷۰ سؤال شناسنامه‌دار

۸۰ سؤال تألیفی و طراحی شده از کتاب درسی
۵۳ سؤال از آزمون‌های کانون
۳۷ سؤال از کنکورهای سراسری

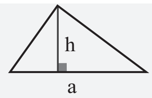
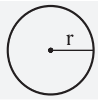
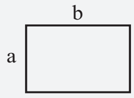
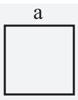
در درسنامه می‌بینید
۳۹ سؤال

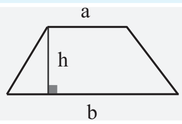
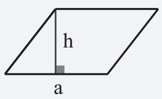
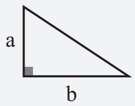
۱۸ تست طراحی شده با نگاه به رویکرد کنکورهای جدید
۲۱ مثال برای ادراک و تثبیت

پیش‌نیازها

برای حل تست‌های این فصل نیاز دارید که «محیط و مساحت اشکال هندسی»، «اتحادهای جبری»، «ک.م.م عبارت‌های جبری» و «اعمال و ساده سازی رادیکال‌ها» را بلد باشید، بنابراین قبل از شروع به درس، از سال‌های گذشته این موضوعات را یادآوری می‌کنیم.

۱ محیط و مساحت شکل‌های هندسی: در جدول زیر، محیط و مساحت اشکال هندسی که برای حل تست‌ها نیاز دارید، یادآوری شده است.

مثلث با ارتفاع h و قاعدهٔ a	دایره به شعاع r	مستطیل به اضلاع a و b	مربع به ضلع a
			
مجموع سه ضلع = محیط $\frac{۱}{۲}a\times h$ = مساحت	$۲\pi r$ = محیط $\pi r^{۲}$ = مساحت	$۲(a+b)$ = محیط ab = مساحت	$۴a$ = محیط $a^{۲}$ = مساحت

ذوزنقه با قاعده‌های a و b و ارتفاع h	متوازی‌الاضلاع با قاعدهٔ a و ارتفاع h	مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع قائمهٔ a و b
		
$\frac{۱}{۲}(a+b)\times h$ = مساحت	$a\times h$ = مساحت	$\frac{۱}{۲}a\times b$ = مساحت

۲ اتحادهای جبری: اگر دو عبارت جبری به‌گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، حاصل یکسانی بدهند، عبارت حاصل از تساوی بین آنها را اتحاد می‌نامیم. در جدول زیر اتحادهایی که برای حل تست‌ها نیاز دارید، یادآوری شده است.

	نام اتحاد	فرمول	مثال
۱	مربع دوجمله‌ای	(۱) $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$ (۲) $(a-b)^{۲}=a^{۲}-۲ab+b^{۲}$	$(۲x+۳)^{۲}=(۲x)^{۲}+۲(۲x)(۳)+۳^{۲}=۴x^{۲}+۱۲x+۹$ $(x^{۲}-x)^{۲}=(x^{۲})^{۲}-۲(x^{۲})(x)+x^{۲}=x^{۴}-۲x^{۳}+x^{۲}$
۲	مزدوج	$a^{۲}-b^{۲}=(a-b)(a+b)$	$۱۶x^{۲}-۸۱=(۴x)^{۲}-۹^{۲}=(۴x-۹)(۴x+۹)$
۳	یک جمله مشترک	$(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$	$(۵y-۱)(۵y+۳)=(۵y)^{۲}+(۳-۱)(۵y)+۳\times(-۱)$ $=۲۵y^{۲}+۱۰y-۳$

۳ ک.م.م عبارت‌های جبری: کوچکترین مضرب مشترک دو عدد A و B (یا عبارت A و B) اولین مضرب مشترک دو عدد A و B (یا عبارت A و B) است که به اختصار آن را با ک.م.م یا $[A\,,\,B]$ نمایش می‌دهیم. برای یافتن آن از تعریف زیر استفاده می‌کنیم:

حاصل‌ضرب عوامل مشترک با توان بیشتر در عوامل غیرمشترک = ک.م.م A و B

برای محاسبهٔ ک.م.م دو عبارت ابتدا هر یک از عبارت‌ها را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه کرده و سپس ک.م.م را می‌یابیم.

ک.م.م دو عدد ۲۴ و ۵۰ به صورت روبه‌رو محاسبه می‌شود:

$$۲۴=۲^{۳}\times ۳ \quad , \quad ۵۰=۵^{۲}\times ۲ \Rightarrow [۲۴\,,\,۵۰]=(۲^{۳})\times(۳\times ۵^{۲})=۸\times ۷۵=۶۰۰$$

ک.م.م برای دو عبارت جبری $A=x^{۲}-۹$ و $B=(x-۳)^{۲}(x+۴)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A=x^{۲}-۹=(x-۳)(x+۳) \quad , \quad B=(x-۳)^{۲}(x+۴) \Rightarrow \text{ک.م.م}=(x-۳)^{۲}\times(x+۳)\times(x+۴)$$

۴ اعمال و ساده سازی رادیکال‌ها: برای ساده سازی عبارت‌هایی مانند $\sqrt{۲۴}$ یا $\sqrt[۳]{۵۴}$ از خواص ضرب دو رادیکال و تجزیهٔ عدد به عامل‌های اول استفاده می‌کنیم:

(۱) $\sqrt{۲۴}=\sqrt{۴\times ۶}=\sqrt{۴}\times\sqrt{۶}=۲\sqrt{۶}$ (۲) $\sqrt[۳]{۵۴}=\sqrt[۳]{۲۷\times ۲}=\sqrt[۳]{۲۷}\times\sqrt[۳]{۲}=۳\sqrt[۳]{۲}$

توجه کنید که برای **هر عدد مثبت a داریم:** $\sqrt{a^{۲}}=a$. مثلاً $\sqrt{۴^{۲}}=۴$ ، همچنین **برای هر عدد حقیقی a داریم:** $\sqrt[۳]{a^{۳}}=a$. مثلاً $\sqrt[۳]{-۱۲۵}=\sqrt[۳]{(-۵)^{۳}}=-۵$.

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توانیم آن‌ها را با هم جمع یا تفریق کنیم. به عنوان مثال:

$$\sqrt{۲۷}-\sqrt{۱۲}+\sqrt{۷۵}-\sqrt{۴۸}=\sqrt{۳^{۳}}-\sqrt{۲^{۲}\times ۳}+\sqrt{۵^{۲}\times ۳}-\sqrt{۴^{۲}\times ۳}=۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}+۵\sqrt{۳}-۴\sqrt{۳}=۲\sqrt{۳}$$

به توان دوم یک عدد مثبت، مجذور عدد و به رادیکال آن، جذر عدد می‌گوییم. در جدول زیر توان دوم و جذر برخی اعداد مربع کامل که در تست‌ها کاربرد دارد را آورده‌ایم.

توان دوم	$۱۱^{۲}=۱۲۱$	$۱۲^{۲}=۱۴۴$	$۱۳^{۲}=۱۶۹$	$۱۴^{۲}=۱۹۶$	$۱۵^{۲}=۲۲۵$	$۱۶^{۲}=۲۵۶$	$۱۷^{۲}=۲۸۹$	$۱۸^{۲}=۳۲۴$	$۱۹^{۲}=۳۶۱$
جذر	$\sqrt{۱۲۱}=۱۱$	$\sqrt{۱۴۴}=۱۲$	$\sqrt{۱۶۹}=۱۳$	$\sqrt{۱۹۶}=۱۴$	$\sqrt{۲۲۵}=۱۵$	$\sqrt{۲۵۶}=۱۶$	$\sqrt{۲۸۹}=۱۷$	$\sqrt{۳۲۴}=۱۸$	$\sqrt{۳۶۱}=۱۹$

۱ معادله و مسائل توصیفی

یک تساوی جبری، شامل یک مجهول، که به ازای یک یا چند عدد مشخص برقرار باشد را یک معادله می‌نامیم. این عدد را **جواب معادله** یا **ریشهٔ معادله** می‌نامیم. منظور از حل یک معادله، یافتن مقدار یا مقدارهایی است که به ازای آن تساوی برقرار باشد.

به عنوان مثال، تساوی $5x+1=16$ یک معادله است، که به ازای $x=3$ برقرار است. در این تساوی $x=3$ را ریشهٔ معادله یا جواب معادله می‌نامیم.

۱ معادلهٔ درجهٔ اول

فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ $4x-1=0$ را حل کنیم. این معادله یک معادلهٔ درجهٔ اول است، زیرا توان متغیر آن یعنی x، یک است. برای حل این معادله، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$4x-1=0 \xrightarrow[\text{و علامتش را عوض می‌کنیم.}]{\text{عدد ۱− را به سمت راست برده}} 4x=1 \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم.}]{\text{طرفین معادله را بر ضریب متغیر، یعنی ۴}} x=\frac{1}{4}$$

معادلهٔ درجهٔ اول

هر معادله‌ای را که پس از ساده‌سازی، به شکل $ax+b=0$ تبدیل شود، معادلهٔ درجهٔ اول می‌نامیم. در این معادله، a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر و تنها جواب (ریشهٔ) آن برابر $x=-\frac{b}{a}$ است.

در حالت کلی مراحل زیر را برای حل معادله به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا پرانتزها را (در صورت وجود) با عملیات ضرب از بین می‌بریم.

۲) در صورت وجود عدد در مخرج‌ها، طرفین را در مخرج مشترک آنها (ک.م.م مخرج‌ها) ضرب می‌کنیم.

۳) جملات شامل مجهول را در یک سمت تساوی و جملات معلوم (اعداد) را به سمت دیگر تساوی منتقل می‌کنیم. (توجه کنید در انتقال به سمت دیگر، علامت جمله عوض می‌شود.) پس از ساده‌سازی، با تقسیم طرفین معادله بر ضریب مجهول، جواب معادله را می‌یابیم.

● **مثال:** معادلات زیر را حل کنید.

$$(a)\ 3x-5=7x+\frac{1}{2} \qquad (b)\ 8(2y-4)-6(\frac{1}{2}y+1)=14 \qquad (c)\ \frac{4t+3}{5}=2-\frac{t}{3}$$

○ **حل:**

$$(a)\ 3x-5=7x+\frac{1}{2} \xrightarrow[\text{به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم.}]{\text{اعداد یک طرف و مجهولات را}} 3x-7x=\frac{1}{2}+5 \Rightarrow -4x=\frac{11}{2} \xrightarrow{\div(-4)} x=-\frac{11}{8}$$

$$(b)\ 8(2y-4)-6(\frac{1}{2}y+1)=14 \Rightarrow (16y-32)-(3y+6)=14 \Rightarrow 13y-38=14 \Rightarrow 13y=38+14 \Rightarrow 13y=52 \xrightarrow{\div 13} y=\frac{52}{13}=4$$

$$(c)\ \frac{4t+3}{5}=2-\frac{t}{3} \xrightarrow[\text{طرفین را در ۱۵ ضرب می‌کنیم.}]{\text{ک.م.م ۳ و ۵ برابر ۱۵ است، پس}} 3(4t+3)=2\times15-5t \Rightarrow 12t+9=30-5t \Rightarrow 12t+5t=30-9 \Rightarrow 17t=21 \Rightarrow t=\frac{21}{17}$$

تذکر ریشهٔ هر معادله‌ای در خود آن معادله صدق می‌کند. این موضوع در تست‌هایی که معادله دارای پارامتر مجهول $(m, n, k, ...)$ است، راهگشاست. همچنین اگر دو معادله دارای ریشهٔ مشترک باشند، این ریشه در هر دو معادله صدق می‌کند.

تست اگر $x=1$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{2x+k}{3}-3x=\frac{x-5}{2}$ باشد، آنگاه جواب معادلهٔ $\frac{x}{2k+1}-\frac{k+3}{2}=3$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۲

پاسخ گزینهٔ «۳» می‌دانیم ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس می‌توانیم در معادله، به جای x ها، عدد ۱ را قرار دهیم:

$$\frac{2x+k}{3}-3x=\frac{x-5}{2} \xrightarrow{x=1} \frac{2+k}{3}-3=\frac{1-5}{2} \Rightarrow \frac{2+k}{3}-3=-2 \Rightarrow \frac{2+k}{3}=-2+3 \Rightarrow \frac{2+k}{3}=1 \Rightarrow 2+k=3 \Rightarrow k=1$$

حال $k=1$ را در معادلهٔ دوم قرار داده و ریشهٔ آن را می‌یابیم:

$$\frac{x}{2k+1}-\frac{k+3}{2}=3 \xrightarrow{k=1} \frac{x}{2+1}-\frac{1+3}{2}=3 \Rightarrow \frac{x}{3}-2=3 \Rightarrow \frac{x}{3}=5 \Rightarrow x=15$$

۲ مسائل توصیفی

در این بخش، با روش‌های تشکیل معادله آشنا می‌شوید. در واقع به دنبال تبدیل یک مسئله، از زبان فارسی (کلامی) به زبان ریاضی و یافتن مجهول (خواستهٔ مسئله) خواهیم بود. در زیر، روش کلی را برای اینکه دچار اشتباه نشویم، ارائه می‌کنیم. در تبدیل کلامی (زبان فارسی) به زبان ریاضی، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱) مجهول عبارت را x فرض می‌کنیم.

۲) در تبدیل کلامی به ریاضی، جدول زیر راهگشاست.

k برابرِ a	تفاضل a از b	k واحد کمتر از a	k واحد بیشتر از a	کلامی (زبان فارسی)
$k\times a$	$b-a$	$a-k$	$a+k$	زبان ریاضی

۳) در نوشتن جملهٔ ریاضی، از آخر جمله، به اول جمله پیش می‌رویم. همواره ضرب، مقدم به جمع و تفاضل است.

به عنوان مثال، برای تبدیل ریاضی جملهٔ **«ثلث یک واحد کمتر از چهار برابر عددی»** اگر عدد را x فرض کنیم، از آخر جمله به اول آن پیش می‌رویم:

چهار برابر عدد $\boxed{4x}$ $\Rightarrow$ یک واحد کمتر از چهار برابر عدد $\boxed{4x-1}$ $\Rightarrow$ ثلث یک واحد کمتر از چهار برابر عدد $\boxed{\frac{1}{3}(4x-1)}$

حال که روش تبدیل یک جمله از زبان کلامی به ریاضی را یاد گرفتیم، **برای حل مسئله کافی است مجهول مسئله را x فرض کرده و هریک از داده‌های کلامی یا عددی را بر حسب x نوشته، معادله را تشکیل داده و حل کنیم.**

تست ۵۲ واحد بیشتر از قرینهٔ سه برابر عددی، مساوی ربع آن عدد است. مجموع ارقام این عدد کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۷

پاسخ گزینهٔ «۴» اگر عدد را x فرض کنیم، سه برابر آن $3x$ و قرینهٔ سه برابر یعنی $-3x$ ، بنابراین «۵۲ واحد بیشتر از قرینهٔ سه برابر عدد» یعنی $-3x+52$ و ربع عدد برابر $\frac{x}{4}$ است، بنابراین:

$$-3x+52=\frac{x}{4}\Rightarrow 52=\frac{x}{4}+3x\Rightarrow 52=\frac{x+12x}{4}\Rightarrow \cancel{52}^{4}=\frac{\cancel{13}^{1}x}{4}\Rightarrow 4=\frac{x}{4}\Rightarrow x=16\Rightarrow \text{مجموع ارقام}: 1+6=7$$

تذکر در مواردی که **دو مجهول** در مسئله داریم، یکی را x و دیگری را y فرض کرده و از **حل دستگاه** دو معادلهٔ دو مجهولی یا با نوشتن یکی برحسب دیگری، مسئله را حل می‌کنیم.

تست نیما از خواهرش ۱۰ سال بزرگتر است. ۱۰ سال بعد، سن نیما از دو برابر سن خواهرش، ۸ سال کمتر است. در حال حاضر سن نیما چند سال است؟

(آزمون کانون - ۲۲ مهر ۱۴۰۱)

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

پاسخ گزینهٔ «۴» فرض کنیم سن نیما x و سن خواهرش y باشد، بنابراین:

$$x-y=10 \quad (I)$$

۱۰ سال بعد، سن نیما $x+10$ و سن خواهرش $y+10$ است. بنابراین طبق فرض مسئله داریم:

$$x+10=2(y+10)-8\Rightarrow x+10=2y+12\Rightarrow x-2y=2 \quad (II)$$

دو معادلهٔ (I) و (II) تشکیل یک دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی داده و با حل آن، x و y را می‌یابیم:

$$\begin{cases}x-y=10\\ x-2y=2\end{cases}\xrightarrow{\times(-1)}\begin{cases}\cancel{x}-y=10\\ \cancel{-x}+2y=-2\end{cases}\xrightarrow{\oplus}y=8\xrightarrow{x-y=10}x=8+10=18$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پیمانه‌های ۱ و ۲ | **۲ پیمانه** | **۲۰ تست**

۱ معادلهٔ درجهٔ اول
(صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ ریاضی و آمار (۱))

۱. جواب معادلهٔ $4(-x+3)=3(\frac{x}{5}+7)$ کدام است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۱) (آزمون کانون - ۲۳ مهر ۱۴۰۰)

۱) $-\frac{45}{17}$ ۲) $-\frac{45}{23}$ ۳) $-\frac{165}{23}$ ۴) $-\frac{165}{17}$

۲. جواب معادلهٔ $6-\frac{5}{2}x=4-3(\frac{1}{2}x-2)$ از جواب معادلهٔ $0/75+0/3x=5(0/04x+0/25)$ چند واحد کمتر است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳. جواب معادلهٔ $(3x-1)^2=9(x+1)^2+16-12x$ ، کدام است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۱)

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -3 ۳) -2 ۴) $-\frac{1}{2}$

۴. اگر $x=2$ ریشهٔ معادلهٔ $\frac{x-18}{4}=\frac{3x+2k}{2}-\frac{kx-1}{3}$ باشد، آنگاه k^2-2k کدام است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۱)

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) -2 ۴) صفر

۵. اگر دو معادلهٔ $8x+3=5x+12$ و $-k-2x+5=\frac{k+x}{3}$ دارای جواب یکسان باشند، k کدام است؟

(مرتبط با صفحهٔ ۱۱) (آزمون کانون - ۲۲ مهر ۱۴۰۱)

۱) -3 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۲ مسائل توصیفی
(صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ ریاضی و آمار (۱))

۶. تفاضل عددی از ۱۵، برابر یک چهارم مجموع همان عدد با ۲۵ است، آن عدد کدام است؟

(مرتبط با صفحهٔ ۱۴- تمرین ۱- الف) (آزمون کانون - ۲۹ خرداد ۱۴۰۰)

۱) ۱۹ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۷

۷. سه برابر نصف قرینهٔ عددی، بعلاوه ۱۸، مساوی ۷ برابر آن عدد، منهای ۱۶ است، آن عدد کدام است؟
(مرتبط با صفحهٔ ۱۴- مشابه تمرین ۱- الف) (آزمون کانون -۲۳ مهر ۱۴۰۰)

۱) ۵/۴ ۲) ۵/۴− ۳) ۴ ۴) ۴−

۸. مجموع چهار عدد متوالی مضرب ۶، برابر ۲۵۲ است، باقی‌ماندهٔ تقسیم کوچکترین آنها بر ۵ کدام است؟
(مرتبط با صفحهٔ ۱۴- تمرین ۱- الف) (آزمون کانون -۲۳ مهر ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۹. طول مستطیلی از سه برابر عرض آن، چهار واحد کمتر است. اگر محیط مستطیل ۴۰ واحد باشد، در این‌صورت مساحت آن کدام است؟
(مرتبط با صفحهٔ ۱۵- تمرین ۴) (آزمون کانون -۲۳ مهر ۱۴۰۰)

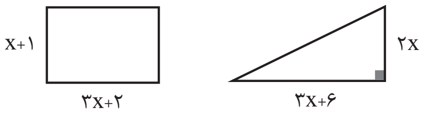
۱) ۸۴ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۵۲ ۴) ۳۱۹

۱۰. طول ضلع دوم مثلثی از دو برابر ضلع اول، ۳ متر کمتر و ضلع دوم از نصف ضلع سوم، ۱/۵ متر بیشتر است. اگر محیط مثلث ۲۳ متر باشد، ضلع کوچکتر چند متر است؟
(مرتبط با صفحهٔ ۱۵- تمرین ۴) (آزمون کانون - ۳ تیر ۱۴۰۱)

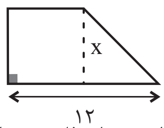
۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

۱۱. مساحت مثلث و مستطیل شکل زیر، با هم برابرند. محیط مستطیل کدام است؟
(مرتبط با صفحهٔ ۳۲- تمرین ۴) (آزمون کانون -۷ دی ۱۴۰۱)

۱) ۱۴
۲) ۱۸
۳) ۲۰
۴) ۲۲



۱۲. در ذوزنقه شکل زیر، اگر مساحت مثلث، $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع باشد، در این‌صورت x کدام است؟
(مرتبط با صفحهٔ ۳۲- تمرین ۴) (آزمون کانون- ۲۲ مهر ۱۴۰۱)



۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۳. از تعداد کتاب‌هایی که احمد در کتابخانه‌اش داشت، نیمی را به رضا و ثلث بقیه‌اش را به حسین و ربع باقی‌مانده را به نیما داده و برای خودش، ۱۲ کتاب باقی‌مانده است. به حسین چند کتاب داده است؟
(مشابه صفحهٔ ۱۱- کار در کلاس)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۴. احمد با خود قرار گذاشته از روز شنبه هر روز پس‌انداز خود را دو برابر کند. در پایان روز پنج‌شنبه، پس‌انداز احمد ۴۸۰ هزار تومان است. اختلاف پس‌انداز احمد در پایان روزهای سه‌شنبه و یکشنبه چند هزار تومان است؟
(صفحهٔ ۱۴- مکمل تمرین ۳)

۱) ۹۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۸۰

۱۵. یک کارگاه تولیدی در یک هفته از روز شنبه، هر روز تولید خود را طوری افزایش می‌دهد که از دو برابر روز قبل، ۲۰ واحد کالا کمتر تولید کند. اگر کل تولید از شنبه تا چهارشنبه ۱۳۴۰ واحد کالا باشد، تولید روز دوشنبه چند واحد است؟
(صفحهٔ ۱۴- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون -۲۳ مهر ۱۴۰۰)

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۸۰

۱۶. در یک کارخانه، حقوق مهندس خط تولید سه برابر کارگر فنی و $\frac{۳}{۵}$ حقوق مدیر خط تولید است. بخش تولید این کارخانه، ۴ مدیر خط تولید، ۶ مهندس خط تولید و ۱۸ کارگر فنی دارد. مدیر عامل این کارخانه برای بخش تولید حقوق ۵۶۰ میلیون تومانی در ماه پرداخت می‌کند، اختلاف حقوق مدیر بخش تولید و مهندس خط تولید چند میلیون تومان است؟
(**منطبق بر کتاب درسی** – صفحهٔ ۱۴- تمرین ۲)

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۲

۱۷. ۵ سال دیگر، مجموع سن حمید و سعید برابر ۳۰ سال خواهد شد. اگر سال گذشته سن حمید دو برابر سن سعید بوده باشد، سن فعلی سعید چند سال است؟
(صفحهٔ ۱۴- مکمل کار در کلاس) (آزمون کانون -۷ بهمن ۱۴۰۱)

۱) ۱۳ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۸. در یک خانوادهٔ ۳ فرزندی، سن فرزند بزرگتر، سه برابر سن فرزند کوچکتر و ۱/۵ برابر سن فرزند وسطی است. ۸ سال قبل، سن فرزند وسطی، چهار برابر سن فرزند کوچکتر بود، در حال حاضر مجموع سن فرزندان این خانواده چند سال است؟
(صفحهٔ ۱۴- مکمل تمرین ۳)

۱) ۶۸ ۲) ۸۴ ۳) ۷۸ ۴) ۷۲

۱۹. یک دبیرستان شامل سه رشتهٔ ریاضی، تجربی و انسانی است. تعداد دانش‌آموزان انسانی از دو برابر تعداد دانش‌آموزان ریاضی، ۳ نفر کمتر و تعداد دانش‌آموزان انسانی از ثلث تعداد دانش‌آموزان تجربی، ۳۶ نفر بیشتر است. اگر این دبیرستان ۱۹۵ دانش‌آموز داشته باشد، تعداد دانش‌آموزان تجربی چند نفر از دانش‌آموزان ریاضی بیشتر است؟
(صفحهٔ ۱۴- مکمل تمرین ۲) (آزمون کانون -۷ بهمن ۱۴۰۱)

۱) ۳۵ ۲) ۴۷ ۳) ۵۸ ۴) ۶۷

۲۰. حروف الفبای فارسی از (الف) تا (ی) را به ترتیب با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۳۲ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر حرف بدون نقطه با شمارهٔ آن حرف و حروف نقطه‌دار به صورت ax^n مشخص شده‌اند که در آن، a شمارهٔ حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. در این‌صورت معادل کلمهٔ «شیوا» کدام است؟
(صفحهٔ ۱۶- مکمل تمرین ۵) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۱۴۰۲)

۱) $۱۵x^{۳}+۳۲x+۳۰+۱$ ۲) $۱۵x^{۳}+۳۲x^{۲}+۲۹+۱$ ۳) $۱۶x^{۳}+۳۲x+۲۹+۱$ ۴) $۱۶x^{۳}+۳۲x^{۲}+۳۰+۱$

۲ حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردها

ریاضی و آمار (۱)- پایهٔ دهم- فصل اول-صفحه‌های ۱۹ تا ۳۲

در بخش قبل با معادلهٔ درجهٔ اول آشنا شدیم. حال به معادلهٔ روبه‌رو توجه کنید: $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$

برای حل این معادله ابتدا با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای خواهیم داشت: $x^2+(x^2+2x+1)=x^2+4x+4$

با ساده سازی و انتقال به سمت چپ همهٔ عبارت‌ها، به معادلهٔ روبه‌رو می‌رسیم: $x^2-2x-3=0$

این معادله که بزرگترین درجهٔ متغیر آن پس از ساده‌سازی ۲ است را یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم. جواب‌های این معادله اعدادی هستند که بـه ازای آن تسـاوی برقـرار باشد. در این بخش به روش‌های حل این‌گونه معادلات می‌پردازیم.

معادلهٔ درجهٔ دوم

هر معادله که پس از ساده‌سازی، به شکل $ax^2+bx+c=0$ تبدیل شود، را معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم. در این معادله a ، b و c اعداد حقیقی و البته a مخالف صفر است. به‌عبارت دیگر، هر معادله که پس از ساده‌سازی بزرگترین درجهٔ مجهولش (متغیر آن) ۲ باشد، یک معادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود.

الف- در معادلهٔ درجهٔ دوم، a ضریب عبارت درجهٔ دوم، b ضریب عبارت درجهٔ اول و c عدد ثابت معادله نامیده می‌شود.

ب- با توجه به ضرایب معادله، معادلهٔ درجهٔ دوم می‌تواند دارای دو ریشهٔ حقیقی یا دارای یک ریشهٔ مضاعف (دو ریشهٔ برابر) باشد یا اصلاً ریشهٔ حقیقی نداشته باشد.

به عنوان مثال $3x^2-5x-4=0$ یک معادلهٔ درجهٔ دوم است که در آن $a=3$ ، $b=-5$ و $c=-4$ است.

همچنین $5x^2-3x=0$ یک معادلهٔ درجهٔ دوم است که در آن $a=5$ ، $b=-3$ و $c=0$ است.

توجه کنید که معادلهٔ $2x^3-4x^2-5=0$، درجهٔ دوم نیست زیرا بزرگترین درجهٔ متغیر آن، دو نیست.

یادآوری: همواره ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند. یعنی اگر $x=k$ یک ریشهٔ معادله باشد، می‌توانیم به‌جای تمام x ها در معادله، k بگذاریم.

● **مثال:** یکی از جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $5x^2+13x+c=0$ برابر -3 است، c را بیابید.

○ **حل:** ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین به جای تمام x ها در معادله، -3 قرار می‌دهیم:

$$5x^2+13x+c=0\xrightarrow{x=-3}5(-3)^2+13(-3)+c=0\Rightarrow 5\times9-39+c=0\Rightarrow 45-39+c=0\Rightarrow 6+c=0\Rightarrow c=-6$$

۱ حل معادله به روش تجزیه و ریشه‌گیری

روش تجزیه ◄ ابتدا به خاصیت زیر که به «خاصیت حاصل‌ضرب صفر» معروف است، توجه کنید:

اگر A و B دو عبارت جبری باشند به طوری‌که حاصل‌ضرب آنها صفر باشد، آنگاه حداقل یکی از آنها برابر صفر است، یعنی:

$$AB=0\Rightarrow A=0 \quad \text{یا} \quad B=0$$

به‌عنوان مثال، در معادلهٔ $(x-1)(2x-3)=0$، باید تک تک پرانتزها را برابر صفر قرار دهیم: $x-1=0\Rightarrow x=1$ یا $2x-3=0\Rightarrow 2x=3\Rightarrow x=\frac{3}{2}$

۱ **اگر دو ریشهٔ معادله مانند α و β در اختیار باشند، برای نوشتن معادلهٔ درجهٔ دوم از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:**

$$ax^2+bx+c=0\xrightarrow{\alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های معادله‌اند.}}a(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

به عنوان مثال، اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم ۴ و ۶ باشند، آنگاه صورت کلی آن را می‌توانیم به صورت $a(x-4)(x-6)=0$ بنویسیم.

۲ **در یک معادله می‌توانیم طرفین را در عددی ضرب کنیم یا از عددی فاکتور بگیریم، این موضوع تغییری در جواب‌ها به وجود نمی‌آورد.**

مثال: $3x^2+3x-9=0\longrightarrow3(x^2+x-3)=0\Rightarrow x^2+x-3=0$

مثال: $-\frac{1}{2}x^2+3x-5=0\xrightarrow{\times(-2)}x^2-6x+10=0$

تست اگر ۲ و -3 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند و a کوچکترین عدد اول باشد، آنگاه $b-c$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۲ ۳) ۷ ۴) ۱۴

پاسخ گزینهٔ «۴» ۲ و -3 ریشه‌های معادله هستند، بنابراین سمت چپ معادله را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$ax^2+bx+c=a(x-2)(x+3)=a(x^2+3x-2x-2\times3)=a(x^2+x-6)\xrightarrow{\text{کوچکترین عدد اول ۲ است.}}2(x^2+x-6)=2x^2+2x-12=0$$

با مقایسهٔ ضرایب معادله، $b=2$ و $c=-12$ و از آنجا $b-c=2-(-12)=14$ به دست می‌آید.

۳ **می‌دانیم تجزیهٔ یک عبارت به این معنی است که آن را به حاصل‌ضرب حداقل دو عامل تبدیل کنیم. این موضوع در حل معادلهٔ درجهٔ دوم کاربرد زیـادی دارد. مهم‌ترین تجزیهٔ عبارت‌هایی که در حل معادلهٔ درجهٔ دوم کاربرد دارند استفاده از فاکتورگیری و اتحادها است.**

اتحاد مزدوج: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

فاکتورگیری: $ax^2+bx=0\Rightarrow x(ax+b)=0$

اتحاد مربع دوجمله‌ای: $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$

اتحاد جمله مشترک: $x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{جمع دو عدد}}x+\overbrace{ab}^{\text{ضرب دو عدد}}=(x+a)(x+b)$

● **مثال:** هر یک از معادلات درجهٔ دوم زیر را با روش مناسب حل کنید.

$$(a)\ ۳x^۲-۵x=۰ \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(۳x-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ ۳x-۵=۰ \Rightarrow ۳x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۳} \end{cases}$$

$$(b)\ x(۲-x)=۴(x-۲) \xrightarrow[\text{و مساوی صفر}]{\text{انتقال به سمت چپ}} x(۲-x)-۴(x-۲)=۰ \xrightarrow{\text{فاکتور از } ۲-x} (۲-x)(\overbrace{x-۴(-۱)}^{x+۴})=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲-x=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x+۴=۰ \Rightarrow x=-۴ \end{cases}$$

$$(c)\ x^۲-۴=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-۲)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \end{cases} \Rightarrow$$ معادله دو ریشهٔ قرینه دارد.

$$(d)\ x^۲-۶x+۹=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (x-۳)^۲=۰ \Rightarrow x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$$ دو جواب یکسان است که آن را ریشهٔ مضاعف می‌نامیم.

$$(e)\ x^۲-۸x+۱۲=۰ \xrightarrow{\text{اتحادجمله‌مشترک}} (x\quad)(x\quad)=۰$$

عبارت $x^۲-۸x+۱۲$ را به صورت $(x.....)(x....)$ نوشته و طبق اتحاد جمله مشترک، دو عدد می‌یابیم که **مجموعشان** -۸ و **ضربشان** ۱۲ باشد، این دو عدد -۲ و -۶ هستند که در جاهای خالی جایگزین می‌کنیم.

$$x^۲-۸x+۱۲=(x-۶)(x-۲)=۰ \Rightarrow x=۲ \quad \text{یا} \quad x=۶$$

$$(f)\ ۴x^۲-۴x-۳=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (۲x)^۲-۲(۲x)-۳=(۲x\quad)(۲x\quad)$$

دو عدد می‌یابیم که **مجموعشان** -۲ و **ضربشان** -۳ باشد، این دو عدد -۳ و $+۱$ هستند که در جاهای خالی جایگزین می‌کنیم.

$$۴x^۲-۴x-۳=(۲x-۳)(۲x+۱)=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \quad \text{یا} \quad x=-\frac{۱}{۲}$$

تذکر ◄◄ **ممکن است معادلهٔ داده شده از درجات بالاتر از ۲ باشد ولی به کمک فاکتورگیری و تجزیه بتوانیم آن را حل کنیم.**

به عنوان مثال برای حل معادلهٔ $x^۴-۹x^۲=۰$، داریم:

$$x^۴-۹x^۲=۰ \xrightarrow{\text{فاکتوراز } x^۲} x^۲(x^۲-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲=۰ \Rightarrow x=۰ \\ x^۲-۹=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-۳)(x+۳)=۰ \Rightarrow x=۳ \text{ یا } x=-۳ \end{cases}$$

روش ریشه‌گیری ◄ دیدیم که با استفاده از تجزیه به کمک اتحاد مزدوج، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۴=۰$ را دو عدد قرینهٔ ۲ و -۲ به دست آوردیم. این معادله را با نوشتن آن به شکل $x^۲=۴$ و یافتن ریشه‌های آن نیز می‌توانیم حل کنیم. به تعریف زیر توجه کنید:

> **اگر a یک عدد بزرگتر یا مساوی صفر باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲=a$ عبارتند از: $x=\sqrt{a}$ و $x=-\sqrt{a}$**
>
> $$x^۲=a \xrightarrow{a\geq ۰} x=\pm\sqrt{a}$$

مثال: $x^۲=۱۶ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۱۶}=\pm۴$

تذکر ◄◄ **اگر a منفی باشد، معادلهٔ $x^۲=a$ جواب ندارد. زیرا مربع هیچ عدد حقیقی، منفی نخواهد بود.** به عنوان مثال معادلهٔ $x^۲=-۱۶$ جواب حقیقی ندارد.

تذکر ◄◄ **معادلهٔ بالا را می‌توانیم تعمیم دهیم، یعنی به‌جای x و a در معادلهٔ $x^۲=a$، یک عبارت درجهٔ اول قرار گیرد. در این حالت، از ویژگی‌های زیر استفاده می‌کنیم:**

$$(۱)\ a^۲=b \Rightarrow a=\pm\sqrt{b} \qquad (۲)\ a^۲=b^۲ \Rightarrow a=\pm b$$

به عنوان مثال برای حل معادلهٔ $(۲x+۱)^۲=۸۱$ با استفاده از خاصیت ریشه‌گیری داریم:

$$(۲x+۱)^۲=۸۱ \Rightarrow ۲x+۱=\pm\sqrt{۸۱} \Rightarrow ۲x+۱=\pm۹ \Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱=۹ \Rightarrow ۲x=۸ \Rightarrow x=۴ \\ ۲x+۱=-۹ \Rightarrow ۲x=-۱۰ \Rightarrow x=-۵ \end{cases}$$

۲ حل معادله به روش مربع کامل

در این روش باید معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را به شکل $(x-h)^۲=k$ تبدیل کرده و سپس از روش ریشه‌گیری جواب‌ها را بیابیم.

فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنیم:

$$۲x^۲+۵x-۳=۰$$

مراحل زیر را برای حل معادله به ترتیب انجام می‌دهیم:

۱. عدد ثابت را به سمت راست تساوی و جملات شامل x و $x^۲$ را در سمت چپ در نظر می‌گیریم. $\quad ۲x^۲+۵x=۳$

۲. اگر ضریب $x^۲$ یک نبود، طرفین را بر آن ضریب تقسیم می‌کنیم. $\quad \xrightarrow{\div ۲} x^۲+\frac{۵}{۲}x=\frac{۳}{۲}$

۳. نصف ضریب x را به توان ۲ رسانده و به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم. یعنی مربع نصف ضریب x را باید به طرفین اضافه کنیم.

$$\xrightarrow{+(\frac{۵}{۴})^۲=\frac{۲۵}{۱۶}} x^۲+\frac{۵}{۲}x+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۳}{۲}+\frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۲۴+۲۵}{۱۶} \Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۴۹}{۱۶}$$

۴ عبارت سمت چپ را به شکل اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌نویسیم.

$$x^۲+\frac{۵}{۲}x+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۴۹}{۱۶}\xrightarrow{\text{مربع کامل کردن سمت چپ}}(x+\frac{۵}{۴})^۲=\frac{۴۹}{۱۶}$$

۵ از خاصیت ریشه‌گیری (جذر از دو طرف) استفاده کرده و ریشه‌ها را می‌یابیم.

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}}x+\frac{۵}{۴}=\pm\frac{۷}{۴}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{۵}{۴}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow x=\frac{۷}{۴}-\frac{۵}{۴}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\\ x+\frac{۵}{۴}=-\frac{۷}{۴}\Rightarrow x=-\frac{۷}{۴}-\frac{۵}{۴}=-\frac{۱۲}{۴}\Rightarrow x=-۳\end{cases}$$

نکته در حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به روش مربع کامل:

الف) عددی که به طرفین تساوی اضافه می‌شود، برابر $\frac{b^۲}{۴a^۲}$ است.

ب) عددی که در سمت راست از آن جذر گرفته می‌شود، برابر $\frac{\Delta}{۴a^۲}$ است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲ پیمانه | ۲۰ تست | پیمانه‌های ۳ و ۴

۱ حل معادله به روش تجزیه و ریشه‌گیری
صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲ ریاضی و آمار (۱)

۲۱. اگر $x=۲$ ریشهٔ معادلهٔ $ax^۲+۵x+a=۰$ باشد، a کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مکمل تمرین ۱) (آزمون کانون- ۳ مرداد ۹۹)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۱ ۳) -۳ ۴) -۲

۲۲. کدام معادله فقط یک جواب حقیقی دارد؟ (منطبق بر کتاب درسی - صفحهٔ ۲۱- تمرین ۱)

۱) $(x+۲)(x-۳)=۳-x$ ۲) $۲x^۲-۸=۰$ ۳) $x^۴-۲x^۲=۰$ ۴) $x^۲=x-\frac{۱}{۴}$

۲۳. در کدام معادله، دو ریشهٔ متمایز معادله، مختلف‌العلامت‌اند؟ (منطبق بر کتاب درسی - صفحهٔ ۲۱- تمرین ۱)

۱) $x^۲+۴x+۴=۰$ ۲) $\frac{x^۲}{۳}=x$ ۳) $x^۲-۵x+۶=۰$ ۴) $۹x^۲+۳x-۲=۰$

۲۴. مجموع جواب‌های معادلهٔ $x^۲(-x+۲)+۵x(x-۲)=۰$ کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مکمل تمرین ۱- ب) (آزمون کانون- ۲۳ مهر ۱۴۰۰)

۱) -۳ ۲) -۵ ۳) صفر ۴) ۷

۲۵. مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $(x-۲)^۲+(x+۲)^۲=۳x^۲$ کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مکمل کار در کلاس- ۲)

۱) ۳۲ ۲) ۱۶ ۳) ۸ ۴) ۴

۲۶. اگر a کوچکترین عدد طبیعی و $\frac{۲}{۳}$ و -۳ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه $b+c$ کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مکمل تمرین ۳)

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۲۷. اگر یک ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۴x+a=۰$ برابر $x=a>۲$ باشد، ریشهٔ دیگر کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مکمل تمرین ۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۸. اگر $x=۲$ یک جواب معادلهٔ $\frac{x(x+۱)}{۲}-x=kx+۷$ باشد، ریشهٔ دیگر کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون -۲۳ مهر ۱۴۰۰)

۱) -۳ ۲) ۷ ۳) -۷ ۴) -۲

۲۹. ریشهٔ کوچکتر معادلهٔ $۲۵x^۲=۱۵x+۴$ کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مشابه تمرین ۱- د) (آزمون کانون -۶ آبان ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $-\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۳۰. اگر جواب‌های معادلهٔ $۲x^۲-۷x+b=۰$ با جواب‌های معادلهٔ $(۴x+a)(x-۲)=۰$ مشترک باشند، آنگاه $a+b$ کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مکمل تمرین ۳)

۱) صفر ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

۳۱. قدرمطلق اختلاف ریشه‌های معادلهٔ $۲۵=(۳-۴x)^۲$ کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مشابه تمرین ۱- ذ) (آزمون کانون -۷ فروردین ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۳۲. مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(۸x+۱۷)^۲=(۳۲x-۷)^۲$ کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱- مشابه تمرین ۱- ذ) (آزمون کانون -۶ آبان ۱۴۰۱)

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۳۳. هر یک از ریشه‌های معادلهٔ $۱۶ = ۹(x-۲)^۲$ یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $۹x^۲+ax+b=۰$ بیشتر است، $a+b$ کدام است؟
(صفحهٔ ۲۱- مرتبط با تمرین ۱)

۱) ۲۵ ۲) ۵- ۳) ۵ ۴) ۲۵-

۳۴. اگر $x=-\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ مشترک دو معادلهٔ $۹ = ۱۶(x-a)^۲$ و $(۱+۸ax)(x-۸a)=۰$ باشد، آنگاه مجموع ریشه‌های غیرمشترک دو معادله کدام است؟
(صفحهٔ ۲۱- مرتبط با تمرین ۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱

۳۵. مثلثی که رئوس آن مبدأ مختصات، نقطه‌ای با عرض c و نقطه‌ای با طول یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۵x+c=۰$ روی محورهای مختصات باشد را در نظر بگیرید. اگر مساحت مثلث برابر $c^۲$ باشد، مقدار c کدام است؟ $(c \neq ۰)$
(سؤال ترکیبی- حل معادلهٔ درجهٔ دوم و مساحت و خط) (سراسری انسانی- تیر ۱۴۰۲)

۱) ۱/۷۵ ۲) ۲/۷۵ ۳) ۱/۷۵- ۴) ۲/۷۵-

۲ حل معادله به روش مربع کامل
صفحه‌های ۲۳ تا ۲۷ ریاضی و آمار (۱)

۳۶. در حل معادلهٔ $۴x^۲+۷x=۲$ به روش مربع کامل کردن، پس از یک شدن ضریب $x^۲$، چه عددی را باید به دو طرف تساوی اضافه کنیم؟
(مکمل صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۱) $\frac{۴۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۴۹}{۶۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۷. در حل معادلهٔ $۲x^۲+۳x=۵$ به روش مربع کامل کردن، به تساوی $(x+a)^۲=k$ رسیده‌ایم. مقدار $\frac{k}{a}$ کدام است؟
(مکمل صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۱) $\frac{۴۹}{۱۲}$ ۲) $\frac{۴۹}{۸}$ ۳) $\frac{۴۹}{۴}$ ۴) $\frac{۴۹}{۱۶}$

۳۸. در حل معادلهٔ $۹x^۲+ax-۲=۰$، پس از مربع کامل کردن طرف چپ تساوی، در سمت راست از عدد $\frac{۱}{۴}$ جذر گرفته شده است، $a^۲$ کدام است؟
(مکمل صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

۳۹. اگر معادلهٔ $۲x^۲-ax-۴=۰$ را به روش مربع کامل حل کنیم، به صورت $(x-\frac{۳}{۴})^۲=b$ در می‌آید. $a-b$ کدام است؟
(مکمل صفحه‌های ۲۳ و ۲۴) (آزمون کانون -۱۹ آذر ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۸۹}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $\frac{۲۹}{۴}$

۴۰. جواب‌های دو معادلهٔ $۵x^۲+۴cx+\frac{۳۱}{a}=۰$ و $a(x+\frac{۲}{c})^۲=۱$ با هم برابرند. $c^۲$ کدام است؟
(مکمل صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۱۰

۲ حل معادلهٔ درجهٔ دوم و کاربردها
ریاضی و آمار (۱)- پایهٔ دهم- فصل اول- صفحه‌های ۱۹ تا ۳۲

۳ روش کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم (روش دلتا)

با استفاده از روش مربع کامل کردن، می‌توانیم روش کلی برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ بیابیم.

فرمول کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم (روش دلتا)

فرمول کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به صورت زیر به‌دست می‌آید که به **فرمول دلتا** معروف است.

$$x_۱,x_۲=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

که در آن $\Delta=b^۲-۴ac$ است. عبارت دلتا (Δ) را **مبیّن** معادله نیز می‌نامیم.

در حل معادله به روش دلتا، همواره باید معادله به **شکل استاندارد** $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، با تعیین ضرایب معادله و تشکیل Δ (در صورت بزرگتر یا مساوی صفر بودن) جواب(ها) را می‌یابیم.

● **مثال:** معادلهٔ $۱۱x = ۳ + ۶x^۲$ را حل کنید.

○ **حل:** ابتدا باید معادله را به شکل استاندارد بنویسیم، پس با انتقال $۱۱x$ به سمت چپ تساوی داریم: $۶x^۲ - ۱۱x + ۳ = ۰$

$$\xrightarrow{a=۶\ ,\ b=-۱۱\ ,\ c=۳} \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱۱)^۲ - ۴(۶)(۳) = ۱۲۱ - ۷۲ = ۴۹$$

$$x_۱, x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{-(-۱۱) \pm \sqrt{۴۹}}{۲ \times ۶} = \frac{۱۱ \pm ۷}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱۱+۷}{۱۲} = \frac{۱۸}{۱۲} = \frac{۶ \times ۳}{۶ \times ۲} = \frac{۳}{۲} \\ x_۲ = \frac{۱۱-۷}{۱۲} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۴}{۳ \times ۴} = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

تست اگر $x = -۳$ یک ریشهٔ معادلهٔ $۲x^۲ + (۲m+۱)x + m = ۰$ باشد، ریشهٔ دیگر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

پاسخ گزینهٔ «۲» می‌دانیم ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$$۲x^۲ + (۲m+۱)x + m = ۰ \xrightarrow{x=-۳} ۲(-۳)^۲ + (۲m+۱)(-۳) + m = ۰ \Rightarrow ۱۸ - ۶m - ۳ + m = ۰ \Rightarrow ۱۵ - ۵m = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

به ازای $m = ۳$ معادله به شکل $۲x^۲ + ۷x + ۳ = ۰$ در می‌آید. برای یافتن ریشهٔ دیگر داریم:

$$\xrightarrow{a=۲\ ,\ b=۷\ ,\ c=۳} \Delta = b^۲ - ۴ac = ۷^۲ - ۴(۲)(۳) = ۴۹ - ۲۴ = ۲۵ \xrightarrow{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}} x = \frac{-۷ \pm \sqrt{۲۵}}{۲(۲)} = \frac{-۷ \pm ۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-۷+۵}{۴} = -\frac{۱}{۲} \\ x = \frac{-۷-۵}{۴} = -۳ \end{cases}$$

تذکر به دو حالت خاص ولی پرکاربرد از رابطهٔ بین ریشه‌های معادله و ضرایب آن در زیر توجه کنید. در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$:

۱ اگر مجموع ضرایب معادله صفر باشد، یعنی $a + b + c = ۰$، آنگاه یک ریشه ۱ و ریشهٔ دیگر برابر $\frac{c}{a}$ است.

۲ اگر ضریب وسطی برابر مجموع ضرایب دو طرف باشد، یعنی $a + c = b$، آنگاه یک ریشه -۱ و ریشهٔ دیگر برابر $-\frac{c}{a}$ است.

در معادلهٔ $۷x^۲ - ۱۹x + ۱۲ = ۰$ از آنجا که مجموع ضرایب صفر است $(۷ - ۱۹ + ۱۲ = ۰)$، یک ریشه برابر $x = ۱$ و ریشهٔ دیگر $x = \frac{c}{a} = \frac{۱۲}{۷}$ است.

همچنین در معادلهٔ $۲۳x^۲ + ۹x - ۱۴ = ۰$ از آنجا که $a + c = b$، $(۲۳ - ۱۴ = ۹)$، یک ریشه برابر $x = -۱$ و ریشهٔ دیگر $x = -\frac{c}{a} = -\frac{-۱۴}{۲۳} = \frac{۱۴}{۲۳}$ است.

۴ تعیین تعداد جواب‌های معادله با Δ

در فرمول کلی حل معادله با توجه به مثبت، صفر یا منفی بودن دلتا، سه حالت برای تعداد جواب‌های معادله خواهیم داشت. (در فرمول می‌بینید که دلتا زیر رادیکال است.) به جدول زیر توجه کنید.

علامت دلتا (Δ)	تعداد جواب‌ها (وضعیت ریشه)	مقدار ریشه	مثال
$\Delta > ۰$	دو ریشهٔ حقیقی و متمایز	$x_۱, x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$	$۵x^۲ - ۴x - ۳ = ۰ \xrightarrow{a=۵\ ,\ b=-۴\ ,\ c=-۳}$ $\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۴)^۲ - ۴(۵)(-۳) = ۱۶ + ۶۰ > ۰$
$\Delta = ۰$	یک ریشهٔ مضاعف (دو ریشهٔ برابر دارد یا اختلاف ریشه‌ها صفر است.)	$x = -\frac{b}{۲a}$	$۹x^۲ - ۶x + ۱ = ۰ \xrightarrow{a=۹\ ,\ b=-۶\ ,\ c=۱}$ $\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۶)^۲ - ۴(۹)(۱) = ۳۶ - ۳۶ = ۰$
$\Delta < ۰$	ریشهٔ حقیقی ندارد. (فاقد جواب)	-	$x^۲ - x + ۳ = ۰ \xrightarrow{a=۱\ ,\ b=-۱\ ,\ c=۳}$ $\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۱)(۳) = ۱ - ۱۲ < ۰$

نکته در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، اگر a و c مختلف‌العلامت باشند، یعنی $ac < ۰$ یا $\frac{c}{a} < ۰$، آنگاه همواره $\Delta > ۰$ و معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز و مختلف‌العلامت است.

در معادلهٔ $۵x^۲ - ۷x - ۱۹ = ۰$ چون $a = ۵$ و $c = -۱۹$ است، پس $ac < ۰$ و معادله همواره دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است و نیازی به تشکیل Δ نیست.

تذکر در حل تست‌های معادلهٔ درجهٔ دوم اگر گفته شود «معادله دارای ریشهٔ حقیقی باشد» یا «معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد» یعنی یا دو ریشه متمایز دارد یا یک ریشهٔ مضاعف بنابراین باید شرط $\Delta \geq ۰$ را در نظر بگیریم. شرط $\Delta > ۰$ فقط برای وقتی است که ذکر شود دو ریشهٔ حقیقی و متمایز.

● **مثال:** به ازای چه حدودی از k، معادلهٔ $\frac{۱}{۲}x^۲ - ۸x + ۴k = ۰$ ریشهٔ حقیقی دارد؟

○ **حل:** باید $\Delta \geq ۰$ باشد:

$$\frac{۱}{۲}x^۲ - ۸x + ۴k = ۰ \xrightarrow{a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=-۸\ ,\ c=۴k} \Delta = b^۲ - ۴ac = (-۸)^۲ - ۴(\frac{۱}{۲})(۴k) = ۶۴ - ۸k \geq ۰ \Rightarrow ۸k \leq ۶۴ \Rightarrow k \leq ۸$$

تذکر در کنکورهای جدید، ممکن است مستقیماً کلمهٔ «ریشهٔ مضاعف» مطرح نشود، هر یک از جملات «معادله دارای دو ریشهٔ برابر است.» یا «اختلاف (تفاضل) دو ریشه صفر است.» یا «معادله یک جواب دارد.» هر سه همان معنای ریشهٔ مضاعف را می‌دهند و باید شرط $\Delta=0$ را اعمال کنیم.

تست اگر k عددی طبیعی و دو ریشهٔ معادلهٔ $4x^2-(k+1)x+1=0$ با هم برابر باشند، آنگاه مقدار این ریشه کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ گزینهٔ «۱» چون دو ریشه با هم برابرند، پس معادله دارای ریشهٔ مضاعف و $\Delta=0$ است، بنابراین:

$$\Delta=b^2-4ac\xrightarrow{a=4,\ b=-(k+1)\ ,\ c=1}\Delta=(-(k+1))^2-4(4)(1)=0\Rightarrow(k+1)^2-16=0$$

$$\Rightarrow(k+1)^2=16\Rightarrow k+1=\pm4\Rightarrow\begin{cases}k+1=4\Rightarrow k=3\\k+1=-4\Rightarrow k=-5\end{cases}$$

چون k عددی طبیعی است، پس $k=3$ قابل قبول است و معادله به شکل $4x^2-4x+1=0$ خواهد بود. برای یافتن ریشهٔ مضاعف خواسته شده داریم:

$$x=-\frac{b}{2a}\xrightarrow{a=4\ ,\ b=-4}x=-\frac{-4}{2\times4}=\frac{1}{2}$$

تذکر اگر $x=k$ به عنوان ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ داده شده باشد، آنگاه دو شرط زیر برقرار است:

۱. $x=k$ در خود معادله صدق می‌کند، یعنی می‌توانیم به‌جای تمام x ها در معادله، k بگذاریم.

۲. از آنجا که ریشهٔ مضاعف برابر $x=-\frac{b}{2a}$ است، پس $-\frac{b}{2a}=k$.

تست معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+27=0$ دارای ریشهٔ مضاعف ۳ است، $a-b$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

پاسخ گزینهٔ «۳» می‌دانیم ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین در معادله به جای x ها، ۳ قرار می‌دهیم:

$$ax^2+bx+27=0\xrightarrow{x=3}9a+3b+27=0\xrightarrow{\div3}3a+b+9=0\quad(*)$$

از طرفی ریشهٔ مضاعف $x=-\frac{b}{2a}=3$ است، پس $b=-6a$. با قرار دادن در معادلهٔ $(*)$ داریم:

$$3a+b+9=0\xrightarrow{b=-6a}3a-6a+9=0\Rightarrow-3a=-9\xrightarrow{\div(-3)}a=3$$

و $b=-6a=-6(3)=-18$، پس $a-b=3-(-18)=21$.

تذکر کتاب درسی در تمرین ۵ صفحهٔ ۲۲ معادله به شکل کلی $(x-a)^2=k$ را حل و بحث کرده است. در این معادله:

۱. اگر $k=0$ باشد، آنگاه دو ریشه با هم برابرند و $x=a$ ریشهٔ مضاعف معادله است. پس معادله به شکل $(x-a)^2=0$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=a$ است.

۲. اگر $k>0$ باشد، آنگاه معادله همواره دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد.

۳. اگر $k<0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

تست اگر معادلهٔ $(3x-k)^2=k-4$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، آنگاه مقدار این ریشه کدام است؟

۱) ۹ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۳» معادله به شکل کلی $(x-m)^2=0$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=m$ است. بنابراین معادلهٔ $(3x-k)^2=k-4$، وقتی دارای ریشهٔ مضاعف است که $k-4=0$ باشد، پس $k=4$، در نتیجه:

$$(3x-k)^2=k-4\xrightarrow{k=4}(3x-4)^2=0\Rightarrow3x-4=0\Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

۵ روش تغییر متغیر در حل معادله

معادلات چندجمله‌ای بر حسب x وجود دارند که با انتخاب یک متغیر جدید می‌توان آنها را به شکل معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل نمود. در این نوع معادلات عبارتی تکرار می‌شود. اگر عبارت تکرار شونده بر حسب x را t فرض کنیم، آنگاه معادله، به یک معادلهٔ درجهٔ دوم به شکل $at^2+bt+c=0$، تبدیل می‌شود، با حل این معادله، مقدار t را یافته و سپس متغیر x را پیدا می‌کنیم.

تذکر در معادلهٔ $ax^4+bx^2+c=0$، با فرض $x^2=t$ معادله را به شکل $at^2+bt+c=0$ تبدیل کرده و حل می‌کنیم.

● **مثال:** معادلهٔ $4x^4+3x^2-1=0$ را حل کنید.

○ **حل:** فرض می‌کنیم $x^2=t$، بنابراین معادله به شکل $4t^2+3t-1=0$ تبدیل می‌شود. در این معادله $a+c=b$، پس یک ریشه -1 و ریشهٔ دیگر $-\frac{c}{a}=-\frac{-1}{4}=\frac{1}{4}$ است، پس:

$$\begin{cases}t=\frac{1}{4}\xrightarrow{x^2=t}x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\\t=-1\xrightarrow{x^2=t}x^2=-1\quad\text{ممکن نیست.}\end{cases}$$

۳ پیمانه	پیمانه‌های
۳۰ تست	۵ تا ۷

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳ روش کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم (روش دلتا)
صفحه‌های ۲۷ تا ۳۲ ریاضی و آمار (۱)

۴۱. مبیّن (دلتای) معادلهٔ $-2x^2+9x+5=0$ کدام است؟ (صفحهٔ ۲۸- مکمل فعالیت) (آزمون کانون -۵ آذر ۱۴۰۰)

۱) ۴۱ ۲) $\sqrt{41}$ ۳) ۱۲۱ ۴) ۱۱

۴۲. جواب‌های کدام معادلهٔ زیر گویا هستند؟ (صفحهٔ ۳۱- مکمل تمرین ۱)

۱) $x^2-4x+2=0$ ۲) $x^2-4x-2=0$ ۳) $2x^2-4x+\frac{7}{8}=0$ ۴) $2x^2-4x-\frac{7}{8}=0$

۴۳. ریشهٔ کوچکتر معادلهٔ $x^2+2x-1=0$ کدام است؟ (صفحهٔ ۳۱- مکمل تمرین ۱)

۱) $\sqrt{2}-1$ ۲) $\sqrt{2}+1$ ۳) $1-\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}-1$

۴۴. ریشه‌های معادلهٔ $\frac{1}{2}x^2-\sqrt{6}x+3=0$ چگونه‌اند؟ (صفحهٔ ۳۱- مکمل تمرین ۱)

۱) قرینهٔ هم هستند. ۲) وارون هم هستند. ۳) برابر و گویا هستند. ۴) برابر و گنگ هستند.

۴۵. اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-kx+28=0$ برابر -4 باشد، ریشهٔ دیگر کدام است؟ (**منطبق بر کتاب درسی** - صفحهٔ ۳۲- تمرین۳)

۱) $-3/5$ ۲) $-1/75$ ۳) $3/5$ ۴) $1/75$

۴۶. اگر مبیّن معادلهٔ $ax^2-2ax+a-1=0$ برابر ۱۶ باشد، آنگاه ریشهٔ بزرگتر آن کدام است؟ (صفحهٔ ۳۱- مکمل تمرین ۲)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۴۷. ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+(2a-1)x+a-2=0$ هر دو اعدادی گویا هستند. a کدام عدد <u>نمی‌تواند</u> باشد؟ (صفحهٔ ۳۱- مکمل تمرین ۱)

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۳ ۴) ۲۰

۴۸. جواب‌های معادلهٔ $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$ به شکل $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ هستند، در اینصورت $\alpha+\beta$ کدام است؟
(صفحهٔ ۳۱- مکمل تمرین ۱) (آزمون کانون -۵ آذر ۱۴۰۰)

۱) ۱۷ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) ۶

۴۹. کدام عدد ریشهٔ معادلهٔ $34x^2-79x+45=0$ است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۸) (آزمون کانون -۲۰ آبان ۱۴۰۱)

۱) $-\frac{34}{45}$ ۲) $\frac{34}{45}$ ۳) $-\frac{45}{34}$ ۴) $\frac{45}{34}$

۵۰. جواب کوچکتر معادلهٔ درجهٔ دوم $\sqrt{2}x^2+1-(1+\sqrt{2})x=0$ کدام است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۸) (آزمون کانون -۲۳ مهر ۱۴۰۰)

۱) -1 ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۵۱. یک ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $5ax^2+(2a-1)^2x+3=0$ برابر -1 است. اگر x' ریشهٔ دیگر معادله باشد، آنگاه حاصل ax' کدام است؟
(صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۶)

۱) $0/6$ ۲) $-0/6$ ۳) $0/3$ ۴) $-0/3$

۵۲. α و β ریشه‌های معادلهٔ $(5x-3)(x-5)=(2x+5)^2-57$ هستند. اگر $\alpha>\beta$ باشد، حاصل $2\alpha+\beta$ کدام است؟
(صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۸)

۱) ۴۹ ۲) ۴۸ ۳) ۹۸ ۴) ۹۵

۴ تعیین تعداد جواب‌های معادله با Δ
صفحه‌های ۲۷ تا ۳۲ ریاضی و آمار (۱)

۵۳. کدام معادلهٔ زیر دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵)

۱) $x^2+x+4=0$ ۲) $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ ۳) $2x^2-x-5=0$ ۴) $-\frac{1}{2}(x+5)^2=0$

۵۴. به ازای کدام مقدار a معادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2+ax-3=0$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟
(صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵) (سراسری انسانی خارج از کشور-۹۱)

۱) هر مقدار a ۲) هیچ مقدار a ۳) فقط $a=\pm\sqrt{6}$ ۴) فقط $a>6$

۵۵. کدام یک از معادلات زیر، به ازای هر مقدار از a، دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵) (آزمون کانون -۵ آذر ۱۴۰۰)

۱) $-2x^2+ax+3=0$ ۲) $2x^2+ax+1=0$ ۳) $ax^2-8x-3=0$ ۴) $2x^2+3x+a=0$

۵۶. در مورد معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx-4=0$ کدام گزینه درست است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵) (آزمون کانون -۸ بهمن ۱۴۰۰)

۱) اگر $a<0$ باشد، ریشهٔ حقیقی ندارد.
۲) اگر $a=0$ و $b\neq 0$ باشد، ریشهٔ حقیقی ندارد.
۳) اگر $b=0$ و $a<0$ باشد، دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد.
۴) اگر $a>0$ باشد، قطعاً دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد.

۵۷. کدام معادلهٔ درجهٔ دوم زیر به ازای هر مقدار $k \neq ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵)

۱) $x^۲-۲kx+k^۲=۰$ ۲) $x^۲-kx+(k^۲+۳)=۰$

۳) $۲x^۲-x+k=۰$ ۴) $kx^۲-(۲k+۱)x+k+۱=۰$

۵۸. اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x(x+۳)+۲k=۰$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، کوچکترین مقدار صحیح k کدام است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۵

۵۹. معادلهٔ درجهٔ دوم $x(۲x-۵)=a$ دارای ریشهٔ مضاعف است. مقدار این ریشه کدام است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵) (سراسری انسانی-۹۱)

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۶۰. اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲-۱۲x+۹=۰$ تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یک ریشهٔ این معادله کدام است؟
(صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵) (سراسری انسانی خارج از کشور-۸۶)

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۳

۶۱. اگر معادلهٔ $۳(x-a)(x+۱)=b$ دارای ریشهٔ مضاعف ۴ باشد، b کدام است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵)

۱) ۲۵ ۲) -۵۰ ۳) ۵۰ ۴) -۷۵

۶۲. به ازای چه مقدار k، معادلهٔ درجهٔ دوم $m^۲x^۲-۶mx+۲m+k=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف $\frac{۳}{۴}$ است؟
(صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵) (آزمون کانون -۲ تیر ۱۴۰۲)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۶۳. معادلهٔ درجهٔ دوم $(m+۲)x^۲+۲(۲m+۱)x+m+۲=۰$ دارای دو ریشهٔ برابر $x_۱=x_۲$ است. مقدار $m\times x_۱$ کدام است؟
(صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۶۴. معادلهٔ $k-۸=(۳x-۱)^۲$ به ازای کوچکترین مقدار صحیح از k، دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است. جواب بزرگتر این معادله کدام است؟
(صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵)

۱) ۹ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۳

۶۵. اگر معادلهٔ $(x-۵)^۲=۲k+۳$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، در این‌صورت ریشه‌های معادلهٔ $(۱-۴x)^۲=-۴k+۱۰$ کدام است؟
(صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵)

۱) $\frac{۳}{۴},-\frac{۵}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۴}$

۶۶. به ازای چند مقدار از a، معادلهٔ $(x-۱)(x^۲-۴ax+۴)=۰$ دارای دو جواب متمایز است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۵)

۱) یک مقدار ۲) دو مقدار ۳) سه مقدار ۴) هیچ مقداری

۵ روش تغییر متغیر در حل معادله

صفحه‌های ۱۹ تا ۲۲ و ۲۷ تا ۳۲ ریاضی و آمار (۱)

۶۷. در معادلهٔ $(x-۱)^۲+۲\sqrt{۳}(x-۱)=۶$ ، بزرگترین جواب کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱ مرتبط با تمرین ۱-د) (سراسری انسانی-۸۷)

۱) $۴-\sqrt{۳}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۶۸. مجموع دو جواب کوچکتر معادلهٔ $۴x^۴-۱۷x^۲+۴=۰$ کدام است؟ (صفحهٔ ۲۱ مرتبط با تمرین ۱-د)

۱) ۴ ۲) $-\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۱۷}{۴}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

۶۹. تعداد جواب‌های حقیقی معادلهٔ $x^۴+۱۰x^۲+۹=۰$ کدام است؟ (صفحهٔ ۳۲- مکمل تمرین ۶) (سراسری انسانی خارج از کشور-۹۲)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۷۰. در مورد معادلهٔ $(\frac{x^۲}{۲}+۷)^۲-۹(\frac{x^۲}{۲}+۷)=۰$ کدام گزینه درست است؟ (صفحهٔ ۲۱ مرتبط با تمرین ۱-ب) (آزمون کانون -۷ آبان ۱۴۰۰)

۱) دارای یک ریشهٔ مضاعف و دو ریشهٔ قرینه است. ۲) دارای چهار ریشهٔ دوبه‌دو قرینه است.

۳) دارای دو ریشهٔ قرینه است. ۴) فاقد ریشهٔ حقیقی است.

پاسخ تشریحی معادله درجه دوم

پاسخ تشریحی: فرزانه دانایی

۱. گزینهٔ ۲

ابتدا اعداد را در پرانتزها ضرب می‌کنیم:

$$۴(-x+۳)=۳(\frac{x}{۵}+۷) \Rightarrow -۴x+۱۲=\frac{۳x}{۵}+۲۱$$

$$\xrightarrow{\times ۵} -۲۰x+۶۰=۳x+۱۰۵$$

مجهولات یک طرف و اعداد ثابت را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم:

$$-۲۰x-۳x=۱۰۵-۶۰ \Rightarrow -۲۳x=۴۵ \Rightarrow x=-\frac{۴۵}{۲۳}$$

۲. گزینهٔ ۱

هر یک از معادلات را جداگانه حل می‌کنیم. برای حل معادلات، ابتدا اعداد را در پرانتزها ضرب کرده و سپس معادله را ساده می‌کنیم.

حل معادلهٔ اول:

$$۴-۳(\frac{۱}{۲}x-۲)=\frac{۵}{۲}x-۶ \Rightarrow ۴-\frac{۳}{۲}x+۶=\frac{۵}{۲}x-۶$$

$$\Rightarrow -\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲}x=-۶-۶-۴ \Rightarrow -۴x=-۱۶ \xrightarrow{\div(-۴)} x=۴$$

حل معادلهٔ دوم:

$$۰/۷۵+۰/۳x=۵(۰/۰۴x+۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow ۰/۷۵+۰/۳x=۰/۲x+۱/۲۵$$

$$\Rightarrow ۰/۳x-۰/۲x=۱/۲۵-۰/۷۵ \Rightarrow ۰/۱x=۰/۵$$

$$\xrightarrow{\div ۰/۱} x=۵$$

بنابراین جواب معادلهٔ اول، یک واحد از جواب معادلهٔ دوم کمتر است.

۳. گزینهٔ ۳

با استفاده از اتحاد $(a+b)^{۲}=a^{۲}+۲ab+b^{۲}$ معادله را بازنویسی کرده و سپس ساده می‌کنیم:

$$(۳x-۱)^{۲}=۹(x+۱)^{۲}+۱۶-۱۲x$$

$$\Rightarrow ۹x^{۲}-۶x+۱=۹(x^{۲}+۲x+۱)+۱۶-۱۲x$$

$$\Rightarrow \cancel{۹x^{۲}}-۶x+۱=\cancel{۹x^{۲}}+۱۸x+۹+۱۶-۱۲x$$

$$\Rightarrow -۶x+۱=۶x+۲۵ \Rightarrow -۶x-۶x=۲۵-۱$$

$$\Rightarrow -۱۲x=۲۴ \xrightarrow{\div(-۱۲)} x=-۲$$

۴. گزینهٔ ۴

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند. بنابراین با جایگذاری $x=۲$ در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{kx-۱}{۳}-\frac{۳x+۲k}{۲}=\frac{x-۱۸}{۴}$$

$$\xrightarrow{x=۲} \frac{۲k-۱}{۳}-\frac{۶+۲k}{۲}=\frac{\overbrace{۲-۱۸}^{-۱۶}}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۲k-۱}{۳}-(۳+k)=-۴ \xrightarrow{\times ۳} ۲k-۱-۹-۳k=-۱۲$$

$$\Rightarrow -k-۱۰=-۱۲ \Rightarrow -k=-۲ \Rightarrow k=۲$$

$$\Rightarrow k^{۲}-۲k=۲^{۲}-۲\times ۲=۰$$

۵. گزینهٔ ۲

ابتدا معادلهٔ $۸x+۳=۵x+۱۲$ را حل می‌کنیم:

$$۸x-۵x=۱۲-۳ \Rightarrow ۳x=۹ \Rightarrow x=۳$$

بنابراین $x=۳$ جواب معادلهٔ $\frac{k+x}{۳}=-k-۲x+۵$ نیز هست. می‌دانیم جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس داریم:

$$\frac{k+x}{۳}=-k-۲x+۵ \xrightarrow{x=۳} \frac{k+۳}{۳}=-k-۶+۵$$

$$\xrightarrow{\times ۳} k+۳=-۳k-۳ \Rightarrow k+۳k=-۳-۳ \Rightarrow ۴k=-۶$$

$$\Rightarrow k=-\frac{۶}{۴}=-\frac{۳}{۲}$$

۶. گزینهٔ ۴

اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم، تفاضل عدد از ۱۵ یعنی $۱۵-x$ و یک چهارم مجموع همان عدد با ۲۵ یعنی $\frac{۱}{۴}(x+۲۵)$، پس طبق فرض داریم:

$$۱۵-x=\frac{۱}{۴}(x+۲۵) \xrightarrow{\times ۴} ۶۰-۴x=x+۲۵$$

$$\Rightarrow -۴x-x=۲۵-۶۰ \Rightarrow -۵x=-۳۵ \Rightarrow x=۷$$

۷. گزینهٔ ۳

اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم، سه برابر نصف قرینهٔ عدد یعنی $۳(-\frac{x}{۲})$ و سه برابر نصف قرینهٔ عدد، بعلاوهٔ ۱۸، یعنی $-\frac{۳}{۲}x+۱۸$ و ۷ برابر آن عدد، منهای ۱۶ یعنی $۷x-۱۶$، پس طبق فرض داریم:

$$-\frac{۳}{۲}x+۱۸=۷x-۱۶ \xrightarrow{\times ۲} -۳x+۳۶=۱۴x-۳۲$$

$$\Rightarrow -۳x-۱۴x=-۳۲-۳۶ \Rightarrow -۱۷x=-۶۸ \Rightarrow x=\frac{-۶۸}{-۱۷}=۴$$

۸. گزینهٔ ۴

اولین عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با اضافه کردن عدد ۶ به آن، مضرب‌های بعدی عدد ۶ به دست می‌آید. بنابراین چهار عدد متوالی مضرب ۶ به صورت $x, x+۶, x+۱۲, x+۱۸$ است. طبق فرض مجموع این چهار عدد برابر با ۲۵۲ است:

$$x+(x+۶)+(x+۱۲)+(x+۱۸)=۲۵۲ \Rightarrow ۴x+۳۶=۲۵۲$$

$$\Rightarrow ۴x=۲۵۲-۳۶ \Rightarrow ۴x=۲۱۶ \Rightarrow x=\frac{۲۱۶}{۴}=۵۴$$

کوچک‌ترین عدد ۵۴ است که باقیمانده تقسیم آن بر عدد ۵ برابر با ۴ است.

۹. گزینهٔ ۱

عرض مستطیل را x و طول مستطیل را y در نظر می‌گیریم. طول مستطیل از سه برابر عرض آن چهار واحد کمتر است، یعنی $y=۳x-۴$.

محیط مستطیل ۴۰ واحد است، پس داریم:

$$\text{محیط مستطیل}=۲(x+y) \xrightarrow[y=۳x-۴]{\text{محیط}=۴۰} ۴۰=۲(x+۳x-۴)$$

$$\xrightarrow{\div ۲} ۲۰=۴x-۴ \Rightarrow ۲۴=۴x \Rightarrow x=۶$$

بنابراین عرض مستطیل $x=۶$ و طول مستطیل $y=۳\times ۶-۴=۱۴$ است و مساحت آن برابر است با: $S=xy=۶\times ۱۴=۸۴$

۱۰. گزینهٔ ۳

طول ضلع اول، دوم و سوم را به ترتیب $a_{۱}$، $a_{۲}$ و $a_{۳}$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} \text{ضلع دوم}=۲\times\text{ضلع اول}-۳ \Rightarrow a_{۲}=۲a_{۱}-۳ \\ \text{ضلع دوم}=\text{نصف ضلع سوم}+۱/۵ \Rightarrow a_{۲}=\frac{a_{۳}}{۲}+\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

با مساوی قرار دادن دو تساوی بالا، ضلع سوم را برحسب ضلع اول به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_{۳}}{۲}+\frac{۳}{۲}=۲a_{۱}-۳ \xrightarrow{\times ۲} a_{۳}+۳=۴a_{۱}-۶ \Rightarrow a_{۳}=۴a_{۱}-۹$$

محیط مثلث ۲۳ متر است، پس داریم:

$$a_{۱}+a_{۲}+a_{۳}=۲۳$$

$$\xrightarrow[a_{۳}=۴a_{۱}-۹]{a_{۲}=۲a_{۱}-۳} a_{۱}+(۲a_{۱}-۳)+(۴a_{۱}-۹)=۲۳$$

$$\Rightarrow ۷a_{۱}-۱۲=۲۳ \Rightarrow ۷a_{۱}=۳۵ \Rightarrow a_{۱}=۵$$

بنابراین طول ضلع اول $a_{۱}=۵$ است. طول اضلاع دیگر را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \text{ضلع دوم}: a_{۲}=۲a_{۱}-۳=۲\times ۵-۳=۷ \\ \text{ضلع سوم}: a_{۳}=۴a_{۱}-۹=۴\times ۵-۹=۱۱ \end{cases}$$

پس کوچک‌ترین ضلع $a_{۱}=۵$ است.

۱۱. گزینهٔ ۴

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{مساحت مثلث} \Rightarrow \text{طول} \times \text{عرض} = \frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}$$

$$\Rightarrow (x+۱)(۳x+۲) = \frac{۲x(۳x+۶)}{۲}$$

$$\Rightarrow (x+۱)(۳x+۲) = x(۳x+۶)$$

$$\Rightarrow \cancel{۳x^۲} + ۲x + ۳x + ۲ = \cancel{۳x^۲} + ۶x \Rightarrow ۵x + ۲ = ۶x$$

$$\Rightarrow ۲ = ۶x - ۵x \Rightarrow x = ۲$$

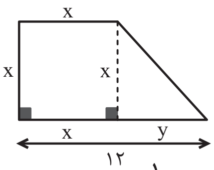
بنابراین اضلاع مستطیل برابرند با:

$$x+۱ = ۲+۱ = ۳ \quad , \quad ۳x+۲ = ۳\times۲+۲ = ۸$$

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(۳+۸) = ۲\times۱۱ = ۲۲$$

۱۲. گزینهٔ ۳

با توجه به شکل مقابل داریم:



$$x + y = ۱۲$$
$$\Rightarrow y = ۱۲ - x$$

طبق فرض مسئله، داریم:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۴} \times \text{مساحت مربع}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} x \times y = \frac{۱}{۴} x^۲ \xrightarrow{\times ۴} x^۲ = ۲xy$$

$$\xrightarrow{y=۱۲-x} x^۲ = ۲x(۱۲-x) \Rightarrow x^۲ = ۲۴x - ۲x^۲$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ = ۲۴x \xrightarrow{\div x} ۳x = ۲۴ \Rightarrow x = ۸$$

۱۳. گزینهٔ ۲

اگر تعداد کتاب‌های احمد را x در نظر بگیریم، طبق فرض داریم:

$$\text{رضا} = \text{نصف احمد} = \frac{x}{۲}$$

$$\text{حسین} = \text{ثلث بقیهٔ کتاب‌ها} = \frac{۱}{۳}\Big(\overset{\text{کل کتاب‌ها}}{x} - \overset{\text{رضا}}{\frac{x}{۲}}\Big) = \frac{۱}{۳} \times \frac{x}{۲} = \frac{x}{۶}$$

$$\text{نیما} = \text{ربع باقی‌ماندهٔ کتاب‌ها} = \frac{۱}{۴}\Big(\overset{\text{کل کتاب‌ها}}{x} - \big(\overset{\text{رضا}}{\frac{x}{۲}} + \overset{\text{حسین}}{\frac{x}{۶}}\big)\Big) = \frac{۱}{۴} \times \frac{x}{۳} = \frac{x}{۱۲}$$

پس کل کتاب‌ها برابر با مجموع کتاب‌های رضا، حسین و نیما بعلاوهٔ ۱۲ است:

$$x = \frac{x}{۲} + \frac{x}{۶} + \frac{x}{۱۲} + ۱۲$$

ک.م.م مخرج‌ها ۱۲ است. طرفین تساوی را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$۱۲x = ۱۲(\frac{x}{۲}) + ۱۲(\frac{x}{۶}) + ۱۲(\frac{x}{۱۲}) + ۱۲\times۱۲$$

$$\Rightarrow ۱۲x = ۶x + ۲x + x + ۱۴۴ \Rightarrow ۱۲x = ۹x + ۱۴۴ \Rightarrow ۳x = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۴۴}{۳} = ۴۸ \Rightarrow \text{تعداد کتاب‌های حسین} = \frac{x}{۶} = \frac{۴۸}{۶} = ۸$$

۱۴. گزینهٔ ۱

پس‌انداز احمد در پایان روز شنبه را x در نظر می‌گیریم. در هر روز، ۲ برابر روز قبل پس‌انداز می‌کند، بنابراین پس‌انداز او در هر روز به صورت زیر است:

روز	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه
پس‌انداز	x	$۲x$	$۴x$	$۸x$	$۱۶x$	$۳۲x$

پس‌انداز احمد در پایان روز پنجشنبه ۴۸۰ هزار تومان است، بنابراین داریم:

$$۳۲x = ۴۸۰ \Rightarrow x = \frac{۴۸۰}{۳۲} = ۱۵$$

اختلاف پس‌انداز احمد در پایان روزهای سه‌شنبه و یکشنبه برابر است با:

$$۸x - ۲x = ۶x = ۶\times۱۵ = ۹۰$$

۱۵. گزینهٔ ۲

اگر تولید روز شنبه را x واحد کالا در نظر بگیریم، تولید روزهای بعدی به صورت زیر خواهد بود:

شنبه: x ، یکشنبه: $۲x - ۲۰$ ، دوشنبه: $۲(۲x-۲۰) - ۲۰ = ۴x - ۶۰$

سه‌شنبه: $۲(۴x-۶۰) - ۲۰ = ۸x - ۱۴۰$

چهارشنبه: $۲(۸x-۱۴۰) - ۲۰ = ۱۶x - ۳۰۰$

کل تولید از شنبه تا چهارشنبه ۱۳۴۰ واحد کالاست، بنابراین:

$$x + (۲x-۲۰) + (۴x-۶۰) + (۸x-۱۴۰) + (۱۶x-۳۰۰) = ۱۳۴۰$$

$$\Rightarrow ۳۱x - ۵۲۰ = ۱۳۴۰ \Rightarrow ۳۱x = ۱۳۴۰ + ۵۲۰ = ۱۸۶۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱۸۶۰}{۳۱} = ۶۰$$

$$\Rightarrow \text{تولید روز دوشنبه} = ۴x - ۶۰ = ۴\times۶۰ - ۶۰ = ۱۸۰$$

۱۶. گزینهٔ ۳

اگر حقوق کارگر فنی را x در نظر بگیریم، حقوق مهندس خط تولید و مدیر خط تولید به صورت زیر است:

$$\text{حقوق مهندس} = ۳ \times \text{حقوق کارگر} = ۳x$$

$$\text{حقوق مهندس} = \frac{۳}{۵} \times \text{حقوق مدیر} \Rightarrow \text{حقوق مدیر} = \frac{۵}{۳} \times \text{حقوق مهندس}$$

$$\Rightarrow \text{حقوق مدیر} = \frac{۵}{۳} \times ۳x = ۵x$$

کل حقوق پرداختی برای بخش تولید ۵۶۰ میلیون تومان است، بنابراین:

$$۴ \text{ مدیر} + ۶ \text{ مهندس} + ۱۸ \text{ کارگر} = ۵۶۰$$

$$\Rightarrow ۴(۵x) + ۶(۳x) + ۱۸(x) = ۵۶۰$$

$$\Rightarrow ۲۰x + ۱۸x + ۱۸x = ۵۶۰ \Rightarrow ۵۶x = ۵۶۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

بنابراین اختلاف حقوق مدیر و مهندس برابر می‌شود با:

$$\text{حقوق مدیر} - \text{حقوق مهندس} = ۵x - ۳x = ۲x = ۲\times۱۰ = ۲۰$$

۱۷. گزینهٔ ۳

اگر سن فعلی حمید را x و سن فعلی سعید را y در نظر بگیریم، ۵ سال دیگر سن حمید $x+۵$ و سن سعید $y+۵$ خواهد بود. طبق فرض مسئله داریم:

$$(x+۵) + (y+۵) = ۳۰ \Rightarrow x + y = ۲۰ \quad (*)$$

سال گذشته سن حمید $x-۱$ و سن سعید $y-۱$ بوده است، طبق فرض مسئله داریم:

$$x - ۱ = ۲(y-۱) \Rightarrow x - ۱ = ۲y - ۲ \Rightarrow x = ۲y - ۱$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در } (*)} ۲y - ۱ + y = ۲۰ \Rightarrow ۳y = ۲۱ \Rightarrow y = ۷$$

۱۸. گزینهٔ ۴

سن فعلی فرزند بزرگ‌تر، وسطی و کوچک‌تر را به ترتیب x، y و z در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases} \text{فرزند بزرگتر} = ۳ \times \text{فرزند کوچکتر} \Rightarrow x = ۳z \\ \text{فرزند بزرگتر} = ۱/۵ \times \text{فرزند وسطی} \Rightarrow x = ۱/۵y = \frac{۳}{۲}y \end{cases}$$

با مساوی قرار دادن دو تساوی بالا، خواهیم داشت:

$$۳z = \frac{۳}{۲}y \xrightarrow{\div ۳} z = \frac{۱}{۲}y \Rightarrow y = ۲z$$

۸ سال قبل، سن فرزند وسطی برابر با $y - ۸$ و سن فرزند کوچک‌تر برابر با $z - ۸$ بوده، بنابراین طبق فرض داریم:

$$\text{سن فرزند وسطی در ۸ سال قبل} = ۴ \times \text{سن فرزند کوچک‌تر در ۸ سال قبل}$$

$$\Rightarrow y - ۸ = ۴(z - ۸) \xrightarrow{y=۲z} ۲z - ۸ = ۴z - ۳۲$$

$$\Rightarrow -۸ + ۳۲ = ۴z - ۲z \Rightarrow ۲۴ = ۲z \Rightarrow z = ۱۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{سن فرزند بزرگتر}: x = ۳z = ۳\times۱۲ = ۳۶ \\ \text{سن فرزند وسطی}: y = ۲z = ۲\times۱۲ = ۲۴ \end{cases}$$

بنابراین مجموع سن فعلی فرزندان برابر با $۷۲ = ۱۲ + ۳۶ + ۲۴$ است.

۱۹. گزینهٔ ۳

اگر تعداد دانش‌آموزان ریاضی را x و تعداد دانش‌آموزان تجربی را y در نظر بگیریم، طبق فرض مسئله تعداد دانش‌آموزان انسانی برابر است با:

تعداد دانش‌آموزان انسانی : $2x-3=\frac{y}{3}+36$

$$\Rightarrow 2x-\frac{y}{3}=39 \xrightarrow{\times 3} 6x-y=117$$

تعداد کل دانش آموزان برابر با ۱۹۵ است، بنابراین:

$$x+y+(2x-3)=195 \Rightarrow 3x+y=198$$

دستگاه معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}6x-y=117\\3x+y=198\end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} 9x=315 \Rightarrow x=\frac{315}{9}=35$$

$$\xrightarrow{3x+y=198} 3\times 35+y=198 \Rightarrow y=198-105=93$$

اختلاف تعداد دانش آموزان ریاضی و تجربی $= y-x=93-35=58$

۲۰. گزینهٔ ۴

شمارهٔ حروف کلمهٔ «شیوا» به صورت زیر است:

ش → ۱۶ ی → ۳۲ و → ۳۰ الف → ۱

بنابراین حرف «ش» را با $16x^3$، حرف «یـ» را با $32x^2$، حرف «و» را با عدد ۳۰ و حرف «ا» را با عدد ۱ مشخص می‌کنیم. پس معادل ریاضی کلمهٔ «شیوا» به صورت روبه‌رو است: $16x^3+32x^2+30+1$

۲۱. گزینهٔ ۴

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین با قرار دادن ۲ به جای همهٔ x ها در معادله داریم:

$$ax^2+5x+a=0 \xrightarrow{x=2} a\times 2^2+5\times 2+a=0$$

$$\Rightarrow 4a+10+a=0 \Rightarrow 5a=-10 \Rightarrow a=-2$$

۲۲. گزینهٔ ۴

معادلهٔ هر یک از گزینه‌ها را حل می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $(x+2)(x-3)=3-x$

$$\xrightarrow[\text{به چپ منتقل می‌کنیم.}]{\text{عبارت سمت راست را}} (x+2)(x-3)+x-3=0$$

$$\xrightarrow{\text{از } x-3 \text{ فاکتور می‌گیریم.}} (x-3)(x+2+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x-3=0 \Rightarrow x=3\\ x+3=0 \Rightarrow x=-3\end{cases}$$

گزینهٔ «۲»: $2x^2-8=0 \Rightarrow 2x^2=8 \xrightarrow{\div 2} x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

گزینهٔ «۳»: $x^4-2x^2=0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } x^2} x^2(x^2-2)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^2=0 \Rightarrow x=0\\ x^2-2=0 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

گزینهٔ «۴»: $x^2=x-\frac{1}{4} \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=0$

با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ داریم:

$$(x-\frac{1}{2})^2=0 \Rightarrow x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

بنابراین معادلهٔ گزینهٔ «۴» فقط یک جواب حقیقی دارد.

۲۳. گزینهٔ ۴

معادلهٔ هر یک از گزینه‌ها را حل می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $x^2+4x+4=0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (x+2)^2=0$

$$\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

گزینهٔ «۲»: $\frac{x^2}{3}=x \Rightarrow \frac{x^2}{3}-x=0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x(\frac{x}{3}-1)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=0\\ \frac{x}{3}-1=0 \Rightarrow \frac{x}{3}=1 \Rightarrow x=3\end{cases}$$

گزینهٔ «۳»: $x^2-5x+6=0$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جملهٔ مشترک}} (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x=2 \quad \text{یا} \quad x=3$$

گزینهٔ «۴»: $9x^2+3x-2=0 \Rightarrow (3x)^2+1(3x)-2=0$

$$\xrightarrow[\text{دو عدد که جمعشان ۱ و ضربشان ۲- باشد}]{\text{اتحاد جمله مشترک}} (3x+2)(3x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}3x+2=0 \Rightarrow 3x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}\\ 3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ گزینهٔ «۴» دو ریشهٔ مختلف‌العلامت دارد.

نکته: برای آنکه معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت باشد، کافی است $ac<0$.

۲۴. گزینهٔ ۴

$$x^2\underbrace{(-x+2)}_{-(x-2)}+5x(x-2)=0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری از } x(x-2)} x(x-2)(-x+5)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x-2=0 \Rightarrow x=2\\ -x+5=0 \Rightarrow x=5\end{cases} \rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}=7$$

۲۵. گزینهٔ ۲

ابتدا طرف چپ معادله را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای، بازنویسی می‌کنیم:

$$(x-2)^2+(x+2)^2=3x^2$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+x^2+4x+4=3x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2+8=3x^2 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=\pm\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع مربعات ریشه‌ها}=(\sqrt{8})^2+(-\sqrt{8})^2=8+8=16$$

۲۶. گزینهٔ ۳

اگر $x=m$ و $x=n$ ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، می‌توان معادله را به صورت $a(x-n)(x-m)=0$ نوشت. می‌دانیم کوچک‌ترین عدد طبیعی، یک است پس $a=1$، از آنجا که ریشه‌های معادله ۳- و $\frac{2}{3}$ است، پس می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$(x-\frac{2}{3})(x-(-3))=0 \Rightarrow (x-\frac{2}{3})(x+3)=0$$

$$\Rightarrow x^2+3x-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\times 3=0 \Rightarrow x^2+\frac{7}{3}x-2=0$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } x^2+bx+c=0} \begin{cases}b=\frac{7}{3}\\ c=-2\end{cases} \Rightarrow b+c=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}$$

۲۷. گزینهٔ ۱

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین داریم:

$$x^2-4x+a=0 \xrightarrow{x=a} a^2-4a+a=0 \Rightarrow a^2-3a=0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} a(a-3)=0 \Rightarrow \begin{cases}a=0\\ a-3=0 \Rightarrow a=3\end{cases}$$

با توجه به شرط $a>2$، جواب $a=3$ قابل قبول است. با جایگذاری $a=3$ در معادله، به معادلهٔ $x^2-4x+3=0$ می‌رسیم. برای تجزیهٔ معادله با استفاده از اتحاد جمله مشترک، دو عدد می‌خواهیم که مجموعشان ۴- و حاصل‌ضربشان ۳+ شود، آن دو عدد ۱- و ۳- هستند، پس داریم:

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases}x-1=0 \Rightarrow x=1\\ x-3=0 \Rightarrow x=3\end{cases}$$

۲۸. گزینهٔ ۳

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین داریم:

$$kx+7=\frac{x(x+1)}{2}-x \xrightarrow{x=2} 2k+7=\frac{2\times 3}{2}-2$$

$$\Rightarrow 2k+7=1\Rightarrow 2k=-6\Rightarrow k=-3$$

با جایگذاری $k=-3$ و پس از آن مرتب کردن معادله، خواهیم داشت:

$$-3x+7=\frac{x(x+1)}{2}-x \xrightarrow{\times 2} -6x+14=\overbrace{x(x+1)}^{x^2+x}-2x$$

$$\Rightarrow -6x+14=x^2-x\Rightarrow x^2+5x-14=0$$

برای تجزیهٔ معادلهٔ بالا با استفاده از اتحاد جمله مشترک، دو عدد می‌خواهیم که مجموعشان $+5$ و حاصل‌ضربشان -14 شود، آن دو عدد $+7$ و -2 هستند، پس داریم:

$$x^2+5x-14=0\Rightarrow (x+7)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+7=0\Rightarrow x=-7\\ x-2=0\Rightarrow x=2\end{cases}$$

۲۹. گزینهٔ ۱

$$25x^2=15x+4\Rightarrow 25x^2-15x-4=0$$

می‌توانیم معادله را به صورت $(5x)^2-3(5x)-4=0$ در نظر بگیریم. در این صورت می‌توان از اتحاد جملهٔ مشترک استفاده کرد که جملهٔ مشترک $5x$ است. پس دو عدد می‌خواهیم که مجموعشان -3 و حاصل‌ضربشان -4 باشد، آن دو عدد -4 و $+1$ هستند، پس داریم:

$$(5x)^2-3(5x)-4=0\Rightarrow (5x-4)(5x+1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x-4=0\Rightarrow 5x=4\Rightarrow x=\frac{4}{5}\\ 5x+1=0\Rightarrow 5x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{5}\end{cases}$$

۳۰. گزینهٔ ۱

ابتدا پرانتزهای معادلهٔ دوم را در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

$$(4x+a)(x-2)=0\Rightarrow 4x^2-8x+ax-2a=0$$

$$\Rightarrow 4x^2+(a-8)x-2a=0 \quad (*)$$

از آنجا که جواب‌های دو معادله با هم برابرند، پس ضرایب دو معادله نیز باید برابر باشند، از آنجا که ضریب x^2 در معادلهٔ $(*)$ برابر با ۴ است، پس در معادلهٔ $2x^2-7x+b=0$ ضریب x^2 را ۴ می‌کنیم:

$$2x^2-7x+b=0 \xrightarrow{\times 2} 4x^2-14x+2b=0$$

حال ضرایب دو معادله را متحد با هم قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} 4x^2+\underline{(a-8)x}\underline{\underline{-2a}}=0\\ 4x^2\underline{-14x}\underline{\underline{+2b}}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-8=-14\Rightarrow a=-6\\ -2a=2b\Rightarrow b=-a=6\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$a+b=-6+6=0$$

۳۱. گزینهٔ ۲

با توجه به خاصیت ریشه‌گیری، اگر $a^2=b^2$ آنگاه $a=\pm b$، بنابراین داریم:

$$(3-4x)^2=25=5^2 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} 3-4x=\pm 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3-4x=5\Rightarrow -4x=2\Rightarrow x=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\\ 3-4x=-5\Rightarrow -4x=-8\Rightarrow x=\frac{-8}{-4}=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{قدرمطلق اختلاف ریشه‌ها}=\left|2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{5}{2}$$

۳۲. گزینهٔ ۳

$$(32x-7)^2=(8x+17)^2 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} 32x-7=\pm(8x+17)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 32x-7=8x+17\Rightarrow 24x=24\Rightarrow x=1\\ 32x-7=-(8x+17)\Rightarrow 32x-7=-8x-17\Rightarrow 40x=-10\\ \qquad\Rightarrow x=-\frac{10}{40}=-\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=1+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

۳۳. گزینهٔ ۴

$$9(x-2)^2=16\Rightarrow (x-2)^2=\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x-2=\pm\frac{4}{3}\Rightarrow \begin{cases} x-2=\frac{4}{3}\Rightarrow x=2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}\\ x-2=-\frac{4}{3}\Rightarrow x=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\end{cases}$$

طبق فرض مسئله، ریشه‌های معادلهٔ $9x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ فوق کمتر است، پس ریشه‌های آن برابر است با:

$$x=\frac{10}{3}-1=\frac{7}{3} \quad \text{و} \quad x=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$$

اگر $x=m$ و $x=n$ ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، می‌توان معادله را به صورت $(x-m)(x-n)=0$ نوشت. بنابراین می‌توان معادلهٔ مورد نظر را به صورت زیر نوشت:

$$\left(x-\frac{7}{3}\right)\left(x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=0\Rightarrow\left(x-\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{x}{3}-\frac{7}{3}x-\frac{7}{9}=0\Rightarrow x^2-\frac{6}{3}x-\frac{7}{9}=0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 9x^2-18x-7=0$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } 9x^2+ax+b=0} a=-18 \ , \ b=-7$$

$$\Rightarrow a+b=-18-7=-25$$

۳۴. گزینهٔ ۱

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس $x=-\frac{1}{2}$ را در هر دو معادله جایگزین می‌کنیم:

$$16(x-a)^2=9 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} 16\left(-\frac{1}{2}-a\right)^2=9$$

$$\Rightarrow \left(a+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{16}=\left(\frac{3}{4}\right)^2 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} a+\frac{1}{2}=\pm\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow a=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\\ a+\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}\Rightarrow a=-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{4}\end{cases}$$

$$(1+8ax)(x-8a)=0 \xrightarrow{x=-\frac{1}{2}} (1-4a)\left(-\frac{1}{2}-8a\right)=0$$

از مقادیر به دست آمدهٔ a از معادلهٔ اول، فقط $a=\frac{1}{4}$ در معادلهٔ دوم صدق می‌کند، پس فقط $a=\frac{1}{4}$ قابل قبول است. با جایگذاری $a=\frac{1}{4}$ در هر دو معادله، ریشهٔ دیگر دو معادله را به دست می‌آوریم:

معادلهٔ اول: $16\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=9\Rightarrow \left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$

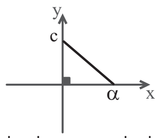
$$\xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x-\frac{1}{4}=\pm\frac{3}{4}\Rightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=1\\ x-\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

معادلهٔ دوم: $(۱+۲x)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱+۲x=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \end{cases}$

بنابراین مجموع ریشه‌های غیرمشترک دو معادله برابر با $۳ = ۲ + ۱$ است.

۳۵. گزینهٔ ۴

اگر α یک ریشهٔ معادلهٔ $x^۲+۵x+c=۰$ باشد، طبق فرض مسئله، نمودار فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم.



بنابراین مثلث مورد نظر یک مثلث قائم‌الزاویه با ارتفاع $|c|$ و قاعدهٔ $|\alpha|$ است. توجه کنید که α و c می‌توانند اعداد منفی باشند، پس قدرمطلق آنها را در نظر می‌گیریم:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{۲} \Rightarrow \frac{|c|\times|\alpha|}{۲}=c^۲$$

$$\Rightarrow |c|\times|\alpha| = ۲c^۲ \xrightarrow[c\neq ۰]{\div|c|} |\alpha| = ۲|c| \Rightarrow \alpha=\pm ۲c$$

ابتدا فرض می‌کنیم: $\alpha=۲c$، بنابراین $۲c$ ریشهٔ معادلهٔ $x^۲+۵x+c=۰$ است. ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس داریم:

$$(۲c)^۲+۵(۲c)+c=۰ \Rightarrow ۴c^۲+۱۰c+c=۰$$

$$\Rightarrow ۴c^۲+۱۱c=۰ \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} c(۴c+۱۱)=۰$$

$$\xrightarrow{c\neq ۰} ۴c+۱۱=۰ \Rightarrow c=-\frac{۱۱}{۴}=-۲/۷۵$$

۳۶. گزینهٔ ۲

ابتدا باید ضریب $x^۲$ را یک کنیم، پس طرفین تساوی را بر ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$۴x^۲+۷x=۲ \xrightarrow{\div ۴} x^۲+\frac{۷}{۴}x=\frac{۲}{۴}$$

نصف ضریب x یعنی $\frac{۷}{۸}=\frac{۱}{۲}(\frac{۷}{۴})$ را به توان ۲ رسانده یعنی $(\frac{۷}{۸})^۲=\frac{۴۹}{۶۴}$ و آن را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.

۳۷. گزینهٔ ۱

$$۲x^۲+۳x=۵ \xrightarrow[\text{یک کردن ضریب } x^۲]{\div ۲} x^۲+\frac{۳}{۲}x=\frac{۵}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{به طرفین تساوی}]{\text{اضافه کردن مربع نصف ضریب x}} x^۲+\frac{۳}{۲}x+(\frac{۳}{۴})^۲=\frac{۵}{۲}+(\frac{۳}{۴})^۲$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (x+\underbrace{\frac{۳}{۴}}_{a})^۲=\frac{۵}{۲}+\frac{۹}{۱۶}=\underbrace{\frac{۴۹}{۱۶}}_{k}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{a}=\frac{\frac{۴۹}{۱۶}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴۹}{۱۶}\times\frac{۴}{۳}=\frac{۴۹}{۱۲}$$

۳۸. گزینهٔ ۱

$$۹x^۲+ax-۲=۰ \xrightarrow[\text{به سمت راست تساوی}]{\text{بردن عدد ثابت}} ۹x^۲+ax=۲$$

$$\xrightarrow[\text{یک کردن ضریب } x^۲]{\div ۹} x^۲+\frac{a}{۹}x=\frac{۲}{۹}$$

$$\xrightarrow[\text{به طرفین تساوی}]{\text{اضافه کردن مربع نصف ضریب x}} x^۲+\frac{a}{۹}x+(\frac{a}{۱۸})^۲=\frac{۲}{۹}+(\frac{a}{۱۸})^۲$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (x+\frac{a}{۱۸})^۲=\frac{۲}{۹}+\frac{a^۲}{۱۸^۲}$$

طبق فرض مسئله، در سمت راست از عدد $\frac{۱}{۴}$ جذر گرفته می‌شود، پس داریم:

$$\frac{۲}{۹}+\frac{a^۲}{۱۸^۲}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{a^۲}{۱۸^۲}=\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۹}=\frac{۱}{۳۶}\Rightarrow a^۲=\frac{۱۸\times ۱۸}{۳۶}=۹$$

۳۹. گزینهٔ ۱

طرف چپ معادلهٔ $(x-\frac{۳}{۴})^۲=b$ را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای باز می‌کنیم:

$$x^۲-۲\times\frac{۳}{۴}x+(\frac{۳}{۴})^۲=b \Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۲}x+\frac{۹}{۱۶}-b=۰ \quad (*)$$

ضریب $x^۲$ در معادلهٔ $۲x^۲-ax-۴=۰$ برابر با ۲ است، پس عدد ۲ را در معادلهٔ $(*)$ ضرب می‌کنیم:

$$(*)\xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲-۳x+\frac{۹}{۸}-۲b=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } ۲x^۲-ax-۴=۰} \begin{cases} a=۳ \\ -۴=\frac{۹}{۸}-۲b \Rightarrow ۲b=\frac{۴۱}{۸}\Rightarrow b=\frac{۴۱}{۱۶}\end{cases}$$

$$\Rightarrow a-b=۳-\frac{۴۱}{۱۶}=\frac{۷}{۱۶}$$

۴۰. گزینهٔ ۲

$$a(x+\frac{۲}{c})^۲=۱\Rightarrow(x+\frac{۲}{c})^۲=\frac{۱}{a}$$

طرف چپ معادلهٔ بالا را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای باز می‌کنیم:

$$(x+\frac{۲}{c})^۲=\frac{۱}{a}\Rightarrow x^۲+\frac{۴}{c}x+\frac{۴}{c^۲}=\frac{۱}{a}$$

$$\Rightarrow x^۲+\frac{۴}{c}x+\frac{۴}{c^۲}-\frac{۱}{a}=۰ \quad (*)$$

ضریب معادلهٔ $۵x^۲+۴cx+\frac{۳۱}{a}=۰$ را با تقسیم طرفین بر ۵ یک می‌کنیم:

$$۵x^۲+۴cx+\frac{۳۱}{a}=۰ \xrightarrow{\div ۵} x^۲+\frac{۴c}{۵}x+\frac{۳۱}{۵a}=۰ \quad (**)$$

طبق فرض، دو معادلهٔ $(*)$ و $(**)$ دارای جواب‌های برابرند، پس ضرایب آنها با هم برابر است:

$$\xrightarrow{\text{برابری ضرایب x}} \frac{۴}{c}=\frac{۴c}{۵}\Rightarrow ۴c^۲=۲۰\Rightarrow c^۲=۵$$

۴۱. گزینهٔ ۳

$$-۲x^۲+۹x+۵=۰ \to a=-۲\ ,\ b=۹\ ,\ c=۵$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۹^۲-۴(-۲)(۵)=۸۱+۴۰=۱۲۱$$

۴۲. گزینهٔ ۳

جواب‌ها در صورتی گویا می‌شوند که $\sqrt{\Delta}$ عددی گویا باشد، پس برای هریک از گزینه‌ها $\sqrt{\Delta}$ را محاسبه می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $x^۲-۴x+۲=۰ \to a=۱\ ,\ b=-۴\ ,\ c=۲$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۴)^۲-۴(۱)(۲)=۱۶-۸=۸$$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{۸}\to$ گویا نیست.

گزینهٔ «۲»: $x^۲-۴x-۲=۰ \to a=۱\ ,\ b=-۴\ ,\ c=-۲$

$$\Delta=(-۴)^۲-۴(۱)(-۲)=۱۶+۸=۲۴$$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{۲۴}\to$ گویا نیست.

گزینهٔ «۳»: $۲x^۲-۴x+\frac{۷}{۸}=۰ \to a=۲\ ,\ b=-۴\ ,\ c=\frac{۷}{۸}$

$$\Delta=(-۴)^۲-۴(۲)(\frac{۷}{۸})=۱۶-۷=۹$$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{۹}=۳\to$ گویاست. $\Rightarrow$ ریشه‌ها گویا هستند.

گزینهٔ «۴»: $۲x^۲-۴x-\frac{۷}{۸}=۰ \to a=۲\ ,\ b=-۴\ ,\ c=-\frac{۷}{۸}$

$$\Delta=(-۴)^۲-۴(۲)(-\frac{۷}{۸})=۱۶+۷=۲۳$$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{۲۳}\to$ گویا نیست.

۴۳. گزینهٔ ۴

$$x^۲+۲x-۱=۰ \rightarrow a=۱ , b=۲ , c=-۱$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=۲^۲-۴(۱)(-۱)=۴+۴=۸$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲\pm\sqrt{۸}}{۲}=\frac{-۲\pm۲\sqrt{۲}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۲}$$

۴۴. گزینهٔ ۴

با استفاده از روش دلتا، ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۲}x^۲-\sqrt{۶}x+۳=۰ \rightarrow a=\frac{۱}{۲} , b=-\sqrt{۶} , c=۳$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=(-\sqrt{۶})^۲-۴(\frac{۱}{۲})(۳)=۶-۶=۰$$

از آنجا که $\Delta=۰$ است، پس معادله دارای دو ریشهٔ برابر به صورت زیر است:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-\sqrt{۶})\pm۰}{۲(\frac{۱}{۲})}=\sqrt{۶} \rightarrow$$ گنگ است.

۴۵. گزینهٔ ۱

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس:

$$۲x^۲-kx+۲۸=۰ \xrightarrow{x=-۴} ۲(-۴)^۲-k(-۴)+۲۸=۰$$
$$\Rightarrow ۲\times۱۶+۴k+۲۸=۰ \Rightarrow ۶۰+۴k=۰ \Rightarrow k=-۱۵$$

بنابراین باید معادلهٔ $۲x^۲+۱۵x+۲۸=۰$ را حل کنیم:

$$a=۲ , b=۱۵ , c=۲۸$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=۱۵^۲-۴(۲)(۲۸)=۲۲۵-۲۲۴=۱$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۱۵\pm۱}{۲\times۲} \Rightarrow \begin{cases} x_۱=\frac{-۱۵+۱}{۴}=\frac{-۱۴}{۴}=-۳/۵ \\ x_۲=\frac{-۱۵-۱}{۴}=\frac{-۱۶}{۴}=-۴ \end{cases}$$

۴۶. گزینهٔ ۱

مبین معادله همان دلتای معادله است، پس:

$$ax^۲-۲ax+a-۱=۰$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=۱۶ \Rightarrow (-۲a)^۲-۴(a)(a-۱)=۱۶$$
$$\Rightarrow ۴a^۲-۴(a^۲-a)=۱۶ \xrightarrow{\div۴} a^۲-(a^۲-a)=۴$$
$$\Rightarrow a=۴$$

بنابراین معادله به صورت $۴x^۲-۸x+۳=۰$ است. ریشه‌های معادله را می‌یابیم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۸)\pm\sqrt{۱۶}}{۲\times۴}=\frac{۸\pm۴}{۸}$$
$$\Rightarrow \text{ریشهٔ بزرگتر}=\frac{۸+۴}{۸}=\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}$$

۴۷. گزینهٔ ۳

ابتدا ریشه‌های معادله را با استفاده از روش دلتا می‌یابیم:

$$ax^۲+(۲a-۱)x+a-۲=۰ \rightarrow b=۲a-۱ , c=a-۲$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=(۲a-۱)^۲-۴a(a-۲)$$
$$=۴a^۲-۴a+۱-۴a^۲+۸a=۴a+۱$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۲a-۱)\pm\sqrt{۴a+۱}}{۲a}$$

عبارت زیر رادیکال (دلتا) یعنی $۴a+۱$ باید مربع کامل باشد تا ریشه‌ها گویا باشند. با امتحان کردن گزینه‌ها، فقط به ازای گزینهٔ «۳» یعنی $a=۳$ داریم: $۴a+۱=۱۳$ که مربع کامل نیست.

۴۸. گزینهٔ ۲

$$x^۲-۲\sqrt{۳}x-۴=۰ \rightarrow a=۱ , b=-۲\sqrt{۳} , c=-۴$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲\sqrt{۳})^۲-۴(۱)(-۴)=۱۲+۱۶=۲۸$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۲\sqrt{۳})\pm\sqrt{۲۸}}{۲\times۱}=\frac{۲\sqrt{۳}\pm۲\sqrt{۷}}{۲}$$
$$\Rightarrow x=\sqrt{۳}\pm\sqrt{۷} \xrightarrow{x=\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}} \alpha=۳ , \beta=۷$$
$$\Rightarrow \alpha+\beta=۳+۷=۱۰$$

۴۹. گزینهٔ ۴

می‌دانیم اگر مجموع ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ برابر با صفر باشد، آنگاه یک ریشه ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}$ است. مجموع ضرایب معادلهٔ $۳۴x^۲-۷۹x+۴۵=۰$ برابر با صفر است $(۳۴-۷۹+۴۵=۰)$، پس یکی از ریشه‌ها $x=۱$ و ریشهٔ دیگر $x=\frac{c}{a}=\frac{۴۵}{۳۴}$ است.

۵۰. گزینهٔ ۴

در معادلهٔ $\sqrt{۲}x^۲-(۱+\sqrt{۲})x+۱=۰$ ضرایب به صورت زیر است:

$$a=\sqrt{۲} , b=-(۱+\sqrt{۲}) , c=۱$$

که در آن $a+b+c=۰$ است. می‌دانیم اگر مجموع ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم صفر باشد، آنگاه یک ریشهٔ معادله ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}$ است. پس ریشه‌های معادله $x=۱$ و $x=\frac{c}{a}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ است. ریشهٔ کوچکتر برابر است با:

$$x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵۱. گزینهٔ ۲

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$، اگر یک ریشه -۱ باشد، ریشهٔ دیگر $\frac{-c}{a}$ خواهد بود. طبق فرض مسئله، یک ریشهٔ معادلهٔ $۵ax^۲+(۲a-۱)^۲x+۳=۰$ برابر با -۱ است، بنابراین ریشهٔ دیگر معادله برابر است با:

$$x'=-\frac{۳}{۵a} \xrightarrow{\times a} ax'=-\frac{۳}{۵}=-۰/۶$$

۵۲. گزینهٔ ۴

ابتدا معادله را به شکل استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$(۵x-۳)(x-۵)=(۲x+۵)^۲-۵۷$$
$$\Rightarrow ۵x^۲-۲۵x-۳x+۱۵=۴x^۲+۲(۲x)(۵)+۲۵-۵۷$$
$$\Rightarrow ۵x^۲-۲۸x+۱۵=۴x^۲+۲۰x-۳۲ \Rightarrow x^۲-۴۸x+۴۷=۰$$

مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}=\frac{۴۷}{۱}=۴۷$ است، $\alpha>\beta$ پس $\alpha=۴۷$ و $\beta=۱$ بنابراین:

$$۲\alpha+\beta=۲\times۴۷+۱=۹۴+۱=۹۵$$

۵۳. گزینهٔ ۳

اگر $\Delta>۰$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است. بنابراین دلتای هر یک از گزینه‌ها را می‌یابیم:

گزینهٔ «۱»: $x^۲+x+۴=۰ \rightarrow a=۱ , b=۱ , c=۴$

$\Delta=b^۲-۴ac=۱^۲-۴(۱)(۴)=-۱۵ \xrightarrow{\Delta<۰}$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

گزینهٔ «۲»: $x^۲-x+\frac{۱}{۴}=۰ \rightarrow a=۱ , b=-۱ , c=\frac{۱}{۴}$

$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۱)(\frac{۱}{۴})=۰ \Rightarrow$ یک ریشهٔ مضاعف دارد.

گزینهٔ «۳»: $۲x^۲ - x - ۵ = ۰ \to a = ۲ , b = -۱ , c = -۵$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۲)(-۵) = ۴۱$

$\xrightarrow{\Delta>۰}$ دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد.

گزینهٔ «۴»: $-\frac{۱}{۲}(x+۵)^۲ = ۰$

معادلهٔ فوق یک ریشهٔ مضاعف $x = -۵$ دارد.

۵۴. گزینهٔ ۱

اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است:

$۳x^۲ + ax - ۳ = ۰ \to a = ۳ , b = a , c = -۳$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = a^۲ - ۴(۳)(-۳) = a^۲ + ۳۶ \to$ همواره مثبت

به ازای هر مقدار a، مقدار Δ همواره مثبت است و معادله دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد.

۵۵. گزینهٔ ۱

اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم $Ax^۲ + Bx + C = ۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است. دلتای هریک از گزینه‌ها را به دست می‌آوریم:

گزینهٔ «۱»: $-۲x^۲ + ax + ۳ = ۰ \to A = -۲ , B = a , C = ۳$

$\Delta = B^۲ - ۴AC = a^۲ - ۴(-۲)(۳) = a^۲ + ۲۴$

گزینهٔ «۲»: $۲x^۲ + ax + ۱ = ۰ \to A = ۲ , B = a , C = ۱$

$\Delta = B^۲ - ۴AC = a^۲ - ۴(۲)(۱) = a^۲ - ۸$

گزینهٔ «۳»: $ax^۲ - ۸x - ۳ = ۰ \to A = a , B = -۸ , C = -۳$

$\Delta = B^۲ - ۴AC = (-۸)^۲ - ۴(a)(-۳) = ۶۴ + ۱۲a$

گزینهٔ «۴»: $۲x^۲ + ۳x + a = ۰ \to A = ۲ , B = ۳ , C = a$

$\Delta = B^۲ - ۴AC = ۳^۲ - ۴(۲)(a) = ۹ - ۸a$

فقط در گزینهٔ «۱»، به ازای هر مقدار a، دلتا $\Delta = a^۲ + ۲۴$ همواره مثبت است، در نتیجه همواره دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد.

۵۶. گزینهٔ ۴

دلتای معادله را به دست آورده و با شرط هر گزینه، علامت دلتا را بررسی می‌کنیم:

$ax^۲ + bx - ۴ = ۰$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = b^۲ - ۴a(-۴) = b^۲ + ۱۶a$

گزینهٔ «۱»: $a < ۰ \Rightarrow$ علامت $\Delta = b^۲ + ۱۶a$ می‌تواند مثبت باشد.

$\Rightarrow$ معادله می‌تواند ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

گزینهٔ «۲»: $a = ۰ , b \neq ۰ \Rightarrow \Delta = b^۲ > ۰$

$\Rightarrow$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است.

گزینهٔ «۳»: $b = ۰ , a < ۰ \Rightarrow \Delta = ۱۶a < ۰$

$\Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

گزینهٔ «۴»: $a > ۰ \Rightarrow$ علامت $\Delta = b^۲ + ۱۶a$ همواره مثبت است.

$\Rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد.

۵۷. گزینهٔ ۴

اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است. بنابراین دلتای هریک از گزینه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

گزینهٔ «۱»: $x^۲ - ۲kx + k^۲ = ۰ \to a = ۱ , b = -۲k , c = k^۲$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۲k)^۲ - ۴(۱)(k^۲)$

$= ۴k^۲ - ۴k^۲ = ۰ \xrightarrow{\Delta=۰}$ یک ریشهٔ مضاعف دارد.

گزینهٔ «۲»: $x^۲ - kx + k^۲ + ۳ = ۰$

$\to a = ۱ , b = -k , c = k^۲ + ۳$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-k)^۲ - ۴(۱)(k^۲ + ۳)$

$= k^۲ - ۴k^۲ - ۱۲ = -۳k^۲ - ۱۲$

$\xrightarrow{\Delta<۰}$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

گزینهٔ «۳»: $۲x^۲ - x + k = ۰ \to a = ۲ , b = -۱ , c = k$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۲)(k) = ۱ - ۸k$

به ازای مقادیر مختلف k، دلتا می‌تواند منفی، مثبت یا صفر باشد، پس به ازای هر k نمی‌توان گفت که معادله حتماً ریشهٔ حقیقی دارد.

گزینهٔ «۴»: $kx^۲ - (۲k+۱)x + k + ۱ = ۰$

$\to a = k , b = -(۲k+۱) , c = k + ۱$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-(۲k+۱))^۲ - ۴(k)(k+۱)$

$= ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۴k^۲ - ۴k = ۱$

$\xrightarrow{\Delta>۰}$ همواره دو ریشهٔ حقیقی و متمایز دارد.

۵۸. گزینهٔ ۱

اگر معادلهٔ درجهٔ دوم ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، باید $\Delta < ۰$ باشد. ابتدا معادله را به شکل استاندارد نوشته و سپس دلتای آن را می‌یابیم:

$۳x(x+۳) + ۲k = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + ۹x + ۲k = ۰$

$\xrightarrow{a=۳ , b=۹ , c=۲k} \Delta = b^۲ - ۴ac = ۹^۲ - ۴(۳)(۲k)$

$\xrightarrow{\Delta<۰} ۸۱ - ۲۴k < ۰ \Rightarrow ۸۱ < ۲۴k \xrightarrow{\div ۲۴} \underbrace{\frac{۸۱}{۲۴}}_{۳/...} < k$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار صحیح k برابر با ۴ است.

۵۹. گزینهٔ ۳

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x = -\frac{b}{۲a}$ است. ابتدا معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$x(۲x-۵) = a \Rightarrow ۲x^۲ - ۵x = a \Rightarrow ۲x^۲ - ۵x - a = ۰$

ریشهٔ مضاعف $= -\frac{-۵}{۲\times۲} = \frac{۵}{۴}$

توجه کنید که لازم نیست مقدار a را به دست آوریم.

۶۰. گزینهٔ ۳

تفاضل دو ریشه برابر صفر است، بنابراین دو ریشه برابرند، یعنی معادله دارای ریشهٔ مضاعف است، پس $\Delta = ۰$ است:

$ax^۲ - ۱۲x + ۹ = ۰ \to b = -۱۲ , c = ۹$

$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱۲)^۲ - ۴(a)(۹) = ۱۴۴ - ۳۶a$

$\xrightarrow{\Delta=۰} ۱۴۴ - ۳۶a = ۰ \Rightarrow ۳۶a = ۱۴۴ \Rightarrow a = \frac{۱۴۴}{۳۶} = ۴$

$\Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف $= -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۱۲}{۲(۴)} = \frac{۳}{۲}$

۶۱. گزینهٔ ۴

اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $Ax^۲ + Bx + C = ۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، ریشهٔ مضاعف برابر با $x = -\frac{B}{۲A}$ است. ابتدا معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$۳(x-a)(x+۱) = b \Rightarrow ۳(x^۲ + x - ax - a) - b = ۰$

$\Rightarrow ۳x^۲ + ۳(۱-a)x - ۳a - b = ۰$

ریشهٔ مضاعف: $x = -\frac{B}{۲A} = ۴ \Rightarrow -\frac{۳(۱-a)}{۲\times۳} = ۴ \Rightarrow \frac{a-۱}{۲} = ۴$

$\Rightarrow a - ۱ = ۸ \Rightarrow a = ۹$

می‌دانیم ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین با جایگذاری $x = ۴$ و $a = ۹$ در معادلهٔ اولیه، خواهیم داشت:

$۳(۴-۹)(۴+۱) = b \Rightarrow b = ۳(-۵)(۵) = -۷۵$

۶۲. گزینهٔ ۴

اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد، آن ریشه برابر با $x=-\frac{b}{۲a}$ است. پس برای معادلهٔ داده شده داریم:

$$m^۲x^۲-۶mx+۲m+k=۰ \to a=m^۲\ ,\ b=-۶m$$

$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow -\frac{-۶m}{۲\times m^۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \frac{۳}{m}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow m=۴$$

می‌دانیم ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین با جایگذاری $x=\frac{۳}{۴}$ و $m=۴$ در معادلهٔ $m^۲x^۲-۶mx+۲m+k=۰$، خواهیم داشت:

$$۴^۲(\frac{۳}{۴})^۲-۶(۴)(\frac{۳}{۴})+۲(۴)+k=۰\Rightarrow ۹-۱۸+۸+k=۰$$

$$\Rightarrow -۱+k=۰\Rightarrow k=۱$$

۶۳. گزینهٔ ۲

اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ دو ریشهٔ برابر داشته باشد، $\Delta=۰$ و ریشهٔ مضاعف برابر با $x=-\frac{b}{۲a}$ است، بنابراین داریم:

$$(m+۲)x^۲+۲(۲m+۱)x+m+۲=۰$$

$$\to a=m+۲\ ,\ b=۲(۲m+۱)\ ,\ c=m+۲$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۲(۲m+۱))^۲-۴(m+۲)(m+۲)=۰$$

$$\Rightarrow (۴m+۲)^۲-(\underbrace{۲(m+۲)}_{۲m+۴})^۲=۰$$

با استفاده از اتحاد مزدوج، معادلهٔ بالا را تجزیه می‌کنیم:

$$(۴m+۲+۲m+۴)(۴m+۲-(۲m+۴))=۰$$

$$\Rightarrow (۶m+۶)(۲m-۲)=۰\Rightarrow \begin{cases}۶m+۶=۰\Rightarrow m=-۱\\ ۲m-۲=۰\Rightarrow m=۱\end{cases}$$

ریشهٔ مضاعف را به ازای هر m به دست می‌آوریم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۲(۲m+۱)}{۲(m+۲)}=-\frac{۲m+۱}{m+۲}$$: ریشهٔ مضاعف

$$\xrightarrow{m=-۱} x=-\frac{-۲+۱}{-۱+۲}=-\frac{-۱}{۱}=۱\Rightarrow mx_۱=(-۱)(۱)=-۱$$

$$\xrightarrow{m=۱} x=-\frac{۲+۱}{۱+۲}=-\frac{۳}{۳}=-۱\Rightarrow mx_۱=(۱)(-۱)=-۱$$

۶۴. گزینهٔ ۲

برای آن که معادلهٔ $(x-a)^۲=m$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز باشد، باید $m>۰$ باشد. بنابراین برای معادلهٔ $(۳x-۱)^۲=k-۸$ باید داشته باشیم:

$$k-۸>۰\Rightarrow k>۸$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار صحیح k برابر با ۹ است. پس داریم:

$$(۳x-۱)^۲=۹-۸=۱\xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} ۳x-۱=\pm۱$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۳x-۱=۱\Rightarrow ۳x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}\\ ۳x-۱=-۱\Rightarrow ۳x=۰\Rightarrow x=۰\end{cases}$$

بنابراین جواب بزرگ‌تر معادله $x=\frac{۲}{۳}$ است.

۶۵. گزینهٔ ۲

در معادله به شکل $(x-a)^۲=m$، اگر $m=۰$ باشد، معادله ریشهٔ مضاعف دارد. پس برای آن که معادلهٔ $(x-۵)^۲=۲k+۳$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، باید داشته باشیم:

$$۲k+۳=۰\Rightarrow ۲k=-۳\Rightarrow k=-\frac{۳}{۲}$$

با جایگذاری $k=-\frac{۳}{۲}$ در معادلهٔ $(۱-۴x)^۲=-۴k+۱۰$ خواهیم داشت:

$$(۱-۴x)^۲=-۴(-\frac{۳}{۲})+۱۰\Rightarrow (۱-۴x)^۲=۱۶\xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}}$$

$$۱-۴x=\pm۴\Rightarrow\begin{cases}۱-۴x=۴\Rightarrow -۴x=۳\Rightarrow x=-\frac{۳}{۴}\\ ۱-۴x=-۴\Rightarrow -۴x=-۵\Rightarrow x=\frac{۵}{۴}\end{cases}$$

۶۶. گزینهٔ ۳

$$(x-۱)(x^۲-۴ax+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ x^۲-۴ax+۴=۰\end{cases}$$

$x=۱$ یکی از ریشه‌های معادله است. برای آن که معادله دارای دو ریشهٔ متمایز باشد، دو حالت وجود دارد:

حالت اول: معادلهٔ $x^۲-۴ax+۴=۰$ یک ریشهٔ مضاعف (غیر از $x=۱$) داشته باشد، پس باید $\Delta=۰$ باشد:

$$x^۲-۴ax+۴=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۴a)^۲-۴(۱)(۴)=۰$$

$$\Rightarrow ۱۶a^۲-۱۶=۰\Rightarrow ۱۶a^۲=۱۶\Rightarrow a^۲=۱\Rightarrow a=\pm۱$$

بنابراین با جایگذاری $a=\pm۱$، معادله به صورت $x^۲\pm۴x+۴=۰$ یا $(x\pm۲)^۲=۰$ درمی‌آید. پس ریشهٔ دیگر آن $x=۲$ یا $x=-۲$ خواهد بود.

حالت دوم: معادلهٔ $x^۲-۴ax+۴=۰$ دو ریشهٔ متمایز داشته باشد به طوری که یک ریشهٔ آن $x=۱$ باشد. ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس داریم:

$$\xrightarrow{x=۱} ۱^۲-۴a+۴=۰\Rightarrow ۵-۴a=۰\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}$$

با جایگذاری $a=\frac{۵}{۴}$، معادله به صورت $x^۲-۵x+۴=۰$ درمی‌آید، با استفاده از اتحاد جمله مشترک آن را تجزیه می‌کنیم:

$$(x-۱)(x-۴)=۰\Rightarrow x=۱\ ,\ x=۴$$

پس به ازای مقادیر $a=۱$، $a=-۱$ و $a=\frac{۵}{۴}$، معادلهٔ اصلی دارای دو جواب متمایز است.

۶۷. گزینهٔ ۱

$$(x-۱)^۲+۲\sqrt{۳}(x-۱)=۶\Rightarrow (x-۱)^۲+۲\sqrt{۳}(x-۱)-۶=۰$$

با فرض $x-۱=t$، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$t^۲+۲\sqrt{۳}t-۶=۰\to a=۱\ ,\ b=۲\sqrt{۳}\ ,\ c=-۶$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(۲\sqrt{۳})^۲-۴(۱)(-۶)=۱۲+۲۴=۳۶$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-۲\sqrt{۳}\pm\sqrt{۳۶}}{۲\times۱}=\frac{-۲\sqrt{۳}\pm۶}{۲}=-\sqrt{۳}\pm۳$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=-\sqrt{۳}+۳\Rightarrow x-۱=-\sqrt{۳}+۳\Rightarrow x=-\sqrt{۳}+۴\\ t=-\sqrt{۳}-۳\Rightarrow x-۱=-\sqrt{۳}-۳\Rightarrow x=-\sqrt{۳}-۲\end{cases}$$

بنابراین جواب بزرگ‌تر $x=-\sqrt{۳}+۴$ است.

۶۸. گزینهٔ ۴

با فرض $x^۲=t$ معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$۴x^۴-۱۷x^۲+۴=۰\xrightarrow{x^۲=t} ۴t^۲-۱۷t+۴=۰$$

معادلهٔ بالا را با استفاده از روش دلتا حل می‌کنیم:

$$a=۴\ ,\ b=-۱۷\ ,\ c=۴$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱۷)^۲-۴(۴)(۴)=۲۸۹-۶۴=۲۲۵$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱۷\pm\sqrt{۲۲۵}}{۲\times۴}=\frac{۱۷\pm۱۵}{۸}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{17+15}{8}=\frac{32}{8}=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ t=\frac{17-15}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

جواب‌های کوچکتر معادله $-\frac{1}{2}$ و -2 هستند که مجموعشان برابر با $-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$ است.

.۶۹ گزینهٔ ۱

با فرض $x^2=t$ معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$x^4+10x^2+9=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2+10t+9=0$$

در معادلهٔ فوق شرط $a+c=b$ برقرار است، پس:

$$\begin{cases} t=-1 \\ t=-\frac{c}{a}=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=-1 \rightarrow \text{جواب ندارد.} \\ x^2=-9 \rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

در نتیجه معادله جواب ندارد.

.۷۰ گزینهٔ ۳

با فاکتورگیری از $\frac{x^2}{2}+7$، داریم:

$$(\frac{x^2}{2}+7)^2-9(\frac{x^2}{2}+7)=0 \Rightarrow (\frac{x^2}{2}+7)(\frac{x^2}{2}+7-9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2}+7=0 \Rightarrow \frac{x^2}{2}=-7 \Rightarrow x^2=-14 \rightarrow \text{جواب ندارد.} \\ \frac{x^2}{2}-2=0 \Rightarrow \frac{x^2}{2}=2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

.۷۱ گزینهٔ ۳

مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر با $S=-\frac{b}{a}$ و حاصلضرب ریشه‌ها برابر با $P=\frac{c}{a}$ است. بنابراین:

$$3x^2-6x+2=0 \xrightarrow{a=3\ ,\ b=-6} S=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{3}=2$$

حاصلضرب ریشه‌های هر یک از گزینه‌ها را می‌یابیم:

گزینهٔ «۱»: $x^2+2x-2=0 \xrightarrow{a=1\ ,\ c=-2} P=\frac{c}{a}=-\frac{2}{1}=-2$

گزینهٔ «۲»: $x^2-2x+\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{a=1\ ,\ c=\frac{1}{4}} P=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{4}}{1}=\frac{1}{4}$

گزینهٔ «۳»: $\frac{1}{2}x^2-9x+1=0 \xrightarrow{a=\frac{1}{2}\ ,\ c=1} P=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

گزینهٔ «۴»: $2x^2-7x+1=0 \xrightarrow{a=2\ ,\ c=1} P=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

.۷۲ گزینهٔ ۳

مجموع ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر با $S=-\frac{b}{a}$ است. بنابراین:

$$2x^2+(m+1)x-12=0 \rightarrow a=2\ ,\ b=m+1$$

مجموع ریشه‌ها: $S=-\frac{b}{a}=\frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{m+1}{2}=\frac{5}{2}$

$$\Rightarrow m+1=-5 \Rightarrow m=-6$$

با جایگذاری $m=-6$ در معادله، داریم:

$$2x^2-5x-12=0 \rightarrow a=2\ ,\ b=-5\ ,\ c=-12$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(2)(-12)=25+96=121$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{121}}{2\times 2}=\frac{5\pm 11}{4}$$

$\Rightarrow$ ریشهٔ مثبت $=\frac{5+11}{4}=\frac{16}{4}=4$

.۷۳ گزینهٔ ۱

حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ برابر با $P=\frac{c}{a}$ است، بنابراین:

$$3x^2+7x-2m+2=0 \rightarrow a=3\ ,\ c=-2m+2$$

حاصلضرب ریشه‌ها : $P=\frac{c}{a}=-2 \Rightarrow \frac{-2m+2}{3}=-2$

$$\Rightarrow -2m+2=-6 \Rightarrow -2m=-8 \Rightarrow m=4$$

با جایگذاری $m=4$ در معادله، داریم:

$$3x^2+7x-6=0 \rightarrow a=3\ ,\ b=7\ ,\ c=-6$$

$$\Delta=b^2-4ac=7^2-4(3)(-6)=49+72=121$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{121}}{2\times 3}=\frac{-7\pm 11}{6}$$

$\Rightarrow$ ریشهٔ بزرگتر : $x=\frac{-7+11}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

.۷۴ گزینهٔ ۳

$$x^2-(k+1)x-3=0 \rightarrow a=1\ ,\ b=-(k+1)$$

مجموع ریشه‌ها : $S=-\frac{b}{a}=-2 \Rightarrow -\frac{-(k+1)}{1}=-2$

$$\Rightarrow k+1=-2 \Rightarrow k=-3$$

با جایگذاری $k=-3$ در معادله، داریم: $x^2+2x-3=0$

مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}=-3$ است. بنابراین ریشهٔ بزرگتر ۴ واحد از ریشهٔ کوچکتر، بیشتر است.

.۷۵ گزینهٔ ۳

ابتدا معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$(x-3)^2+x(x+k)=4 \Rightarrow x^2-6x+9+x^2+kx-4=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+(k-6)x+5=0 \rightarrow a=2\ ,\ b=k-6$$

مجموع ریشه‌ها : $S=-\frac{b}{a}=3/5 \Rightarrow -\frac{k-6}{2}=3/5$

$$\Rightarrow k-6=-7 \Rightarrow k=-1$$

با جایگذاری $k=-1$ در معادله، داریم: $2x^2-7x+5=0$

از آنجا که مجموع ضرایب برابر با صفر است، پس یک ریشه ۱ و ریشهٔ دیگر $\frac{c}{a}=\frac{5}{2}$ است، بنابراین: اختلاف ریشه‌ها $=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}=1/5$

.۷۶ گزینهٔ ۴

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-3m=0$ باشند، داریم:

$$a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=-3m$$

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها}: S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-1}{1}=1 \\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها}: P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{3m}{1}=-3m \end{cases}$$

ثلث حاصلضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{1}{3}P$ از قرینهٔ مجموع ریشه‌ها یعنی $-S$، یک واحد کمتر است، پس داریم:

$$\frac{1}{3}P=-S-1 \Rightarrow \frac{1}{3}(-3m)=-1-1 \Rightarrow -m=-2 \Rightarrow m=2$$