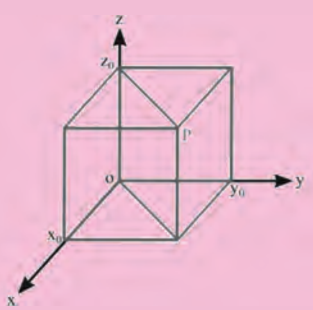
فصل اول

بردارها

معرفی دستگاه مختصات سه بعدی:

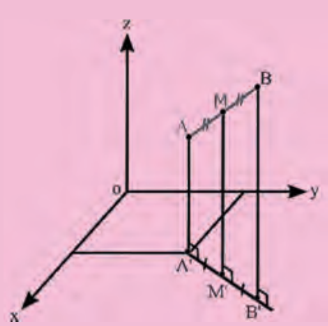
دستگاه مختصات سه بعدی یا فضای $\mathbb{R}^3$، مجموعه تمام سه تاییهای مرتب (x,y,z) است که در آنها x,y,z اعداد حقیقیاند و آن را بصورت $\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\ ;\ x,y,z\in \mathbb{R}\}$ نمایش میدهیم.



برای نمایش هندسی $\mathbb{R}^3$، یک دستگاه مختصات قائم، مـرکب از سـه خط جهـتدار دو به دو متعـامد به نام محورهای مختصات را معرفی میکنیم که در نقطـهای مـانند O متقاطعاند. O مبداء مشـترکی اسـت که از آن نقطه، فاصله در امتداد هر ۳ خط با یک واحد طول سنجیده میشود. نقطه O «مبداء مختصات» نام دارد. این محورها سه صفحه مختصات دو به دو متعامد مشخص میکنند، صفحه xy که شامل مـحور xها و yها و صفحه yz که شامل محور yها و zها و صفحه xz که شامل محور xها و zها است.

با معلوم بودن سهتایی مرتب (x_0,y_0,z_0) از $\mathbb{R}^3$،نقطه به طول x_0 را بر محور xها، نقطه به طول y_0 را بر محور yها و نقطه به طول z_0 را بر محور zها رسم میکنیم. سپس صفحه گذرا از x_0 و موازی صفحه yz، صفحهگذرا از y_0 و موازی صفحه xz و صفحهگذرا از z_0 و موازی صفحه xy را رسم میکنیم. نقطه منحصر به فرد P که در آن، سه صفحه متقاطعاند (مطابق شکل بالا) نقطهای به مختصات (x_0,y_0,z_0) یا دقیقتر به طول x_0، عرض y_0 و ارتفاع z_0 نامیده میشود.

مختصات وسط یک پاره خط:



هـرگاه $A=(x_1,y_1,z_1)$ و $B=(x_2,y_2,z_2)$ و M وسـط AB باشـد تصویر قائم AB را روی صفحه xy پاره خط $A'B'$ مینامیم. با توجه به قضیه تالس در فضا از آنجائیکه $AM=MB$ میباشد

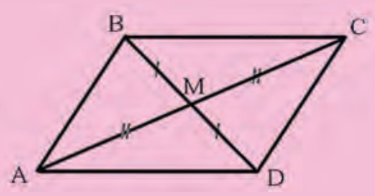
لذا $A'M'=M'B'$ خواهد بود و داریم:

$$M'\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_1+x_2}{2}\\[2mm] \dfrac{y_1+y_2}{2}\\[2mm] z=0\end{array}\right.$$

از طرفی طول و عرض نقطه M و M' یکی هستند. برای یافتن ارتفاع نقطه‌ی M، در ذوزنقه $ABB'A'$ پاره‌خط MM' موازی دو قاعده است و M' وسط ساق است پس $MM' = Z_M = \frac{AA'+BB'}{۲} = \frac{z_۱+z_۲}{۲}$ لذا مختصات M (وسط AB) چنین است:

$$M = (\frac{x_۱+x_۲}{۲}, \frac{y_۱+y_۲}{۲}, \frac{z_۱+z_۲}{۲})$$

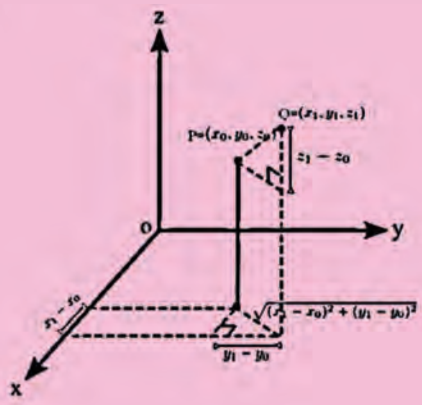
نتیجه: با توجه به مطالب فوق و این نکته که در متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند داریم:



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D = ۲x_M \\ y_A + y_C = y_B + y_D = ۲y_M \\ z_A + z_C = z_B + z_D = ۲z_M \end{cases}$$

فاصله دو نقطه از هم در فضای $IR^۳$:

اگر P نقطه‌ای به مختصات $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ و Q نقطه‌ای به مختصات $(x_۱, y_۱, z_۱)$ باشد آنگاه طول PQ یعنی $|PQ|$ با توجه به شکل برابر است با:



$$|PQ| = \sqrt{(x_۱ - x_\circ)^۲ + (y_۱ - y_\circ)^۲ + (z_۱ - z_\circ)^۲} \quad (*)$$

سه ویژگی زیر برای طول پاره خط بین دو نقطه P و Q در $IR^۳$ برقرار است:

ویژگی ۱ : $|PQ| = \circ$ اگر و فقط اگر $P = Q$

ویژگی ۲ : $|PQ| = |QP|$

ویژگی ۳ : به ازای هر نقطه دلخواه R از $IR^۳$ داریم: $|PQ| \le |PR| + |RQ|$

تذکر: ویژگی‌های ۱ و ۲ هر دو مستقیماً از رابطه(*) بدست می‌آیند و ویژگی ۳ به نامساوی مثلثی موسوم است.

نکته ۱:

(۱) فاصله نقطه $A = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از محور x ها برابر است با $\sqrt{y_\circ^۲ + z_\circ^۲}$

(۲) فاصله نقطه $A = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از محور y ها برابر است با $\sqrt{x_\circ^۲ + z_\circ^۲}$

(۳) فاصله نقطه $A = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از محور z ها برابر است با $\sqrt{x_\circ^۲ + y_\circ^۲}$

نکته ۲:

(۱) فاصله نقطه $A = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از صفحه xy برابر است با $|z_\circ|$

(۲) فاصله نقطه $A = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از صفحه xz برابر است با $|y_\circ|$

(۳) فاصله نقطه $A = (x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ از صفحه yz برابر است با $|x_\circ|$

توجه: اعداد $x_\circ, y_\circ, z_\circ$ به ترتیب فاصله نقطه P از صفحات مختصات xy, xz, yz می‌باشند. به همین ترتیب هر نقطه در فضا با یک سه‌تایی مرتب و برعکس هر سه تایی مرتب با یک نقطه در فضا مشخص می‌شود.

توجه: در هر نقطه‌ای که بر یک صفحه مختصات منطبق باشد مؤلفه‌ای که مربوط به آن صفحه نیست صفر می‌باشد، مثلاً:

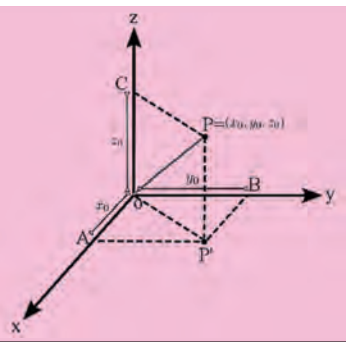
$$\begin{cases} M \in xy \text{ صفحه} \Rightarrow z_M = \circ \\ N \in xz \text{ صفحه} \Rightarrow y_N = \circ \\ T \in yz \text{ صفحه} \Rightarrow x_T = \circ \end{cases}$$

توجه: اگر نقطه‌ای روی یکی از محورهای مختصات باشد دو مؤلفه‌ی دیگر آن صفر است، مثلاً:

$$A \in \text{محور } x \text{ ها} \Rightarrow y_A = z_A = \circ$$

با این روش نمایش نقاط، می‌بینیم که مثلاً محور x ها متشکل از نقاطی به صورت $(\alpha, \cdot, \cdot)$ است که در آن α یک عدد حقیقی است، همچنین صفحه xy متشکل از نقاطی بصورت $(\alpha, \beta, \cdot)$ است؛ نقاط محور y ها و محور z ها و بقیه صفحات را به طریق مشابه می‌توان نشان داد.

فاصله یک نقطه در $\mathbb{R}^۳$ از مبداء :



فرض می‌کنیم P نقطه‌ای به مختصات $(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ باشد و فاصله نقطه P از مبداء مختصات یعنی $O = (\circ,\circ,\circ)$ را با $|OP|$ نشان می‌دهیم در مثلث قائم الزاویه OAP' طول وتر OP' برابر با $\sqrt{x_\circ^۲ + y_\circ^۲}$ است و در مثلث قائم الزاویه OPP' طول وتر OP برابر $\sqrt{x_\circ^۲ + y_\circ^۲ + z_\circ^۲}$ است.

▼ **مثال ۱ :** نقطه‌ای روی محور y ها بیابید که فاصله‌اش از نقطه $P = (۱, -۳, ۷)$ برابر $\sqrt{۶۶}$ باشد. «پرتکرار- ۵ بار»

☑ **پاسخ:** *نقاط روی محور y، تنها مؤلفه‌ی y دارند یعنی طول و ارتفاع این نقاط صفر است پس مختصات نقطه مورد نظر $(\cdot, y_\cdot, \cdot)$ است.*

$$\text{فاصله نقطه مورد نظر تا } P = \sqrt{(۱-\circ)^۲ + (-۳-y)^۲ + (۷-\circ)^۲} = \sqrt{۶۶}$$

$$\Rightarrow ۱ + (۳ + y_\circ)^۲ + ۴۹ = ۶۶ \quad \Rightarrow \quad (۳ + y_\circ)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_\cdot = -۷ \\ y_\cdot = ۱ \end{cases} \Rightarrow (\circ, -۷, \circ) \text{ یا } (\circ, ۱, \circ)$$

▼ **مثال ۲:** نقاط $A = (۱, ۲, -۱)$ و $B = (۱, ۳, ۲)$ و $C = (۵, ۱, ۲)$ سه رأس مثلث ABC هستند طول میانه AM را پیدا کنید. «پرتکرار – ۱۳ بار»

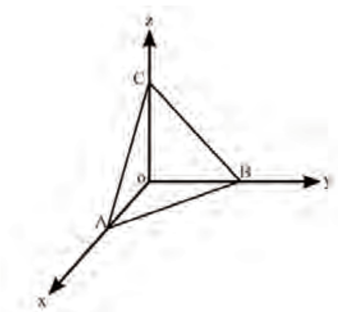
☑ **پاسخ:** *طول میانه AM برابر فاصله رأس A تا نقطه‌ی M وسط پاره خط BC است.*

$$M \text{ وسط ضلع } BC \left| \begin{array}{l} \dfrac{x_B + x_C}{۲} = \dfrac{۱+۵}{۲} = ۳ \\ \dfrac{y_B + y_C}{۲} = \dfrac{۱+۳}{۲} = ۲ \\ \dfrac{z_B + z_C}{۲} = \dfrac{۲+۲}{۲} = ۲ \end{array} \right. \Rightarrow AM = \sqrt{(۱-۳)^۲ + (۲-۲)^۲ + (-۱-۲)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

▼ **مثال ۳ :** نوع مثلثی که رأس‌هایش $A=(۴,۰,۰)$ و $B=(۰,۴,۰)$ و $C=(۰,۰,۴)$ باشند کدام است؟ «آزمون- کانون فرهنگی آموزش»

۱) متساوی الساقین　　۲) قائم الزاویه
۳) متساوی الاضلاع　　۴) غیرمشخص

☑ **پاسخ:** طول اضلاع مثلث را بدست می‌آوریم:



$$|AB|=\sqrt{(۴-۰)^۲+(۰-۴)^۲+(۰-۰)^۲}=\sqrt{۳۲}$$
$$|AC|=\sqrt{(۴-۰)^۲+(۰-۰)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۳۲}$$
$$|BC|=\sqrt{(۰-۰)^۲+(۰-۴)^۲+(۴-۰)^۲}=\sqrt{۳۲}$$

$|AB|=|BC|=|AC| \Rightarrow$ مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

▼ **مثال ۴ :** طول تصویر قائم پاره خط AB که در آن $A=(۱,۲,۳)$ و $B=(۴,۶,-۳)$ است بر صفحه xy برابر است با: «آزمون- کانون فرهنگی آموزش»

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۹

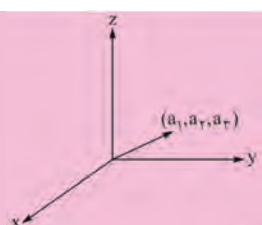
☑ **پاسخ:** کافی است تصویرهای قائم نقاط A , B را روی صفحه xy به دست آورده و فاصله آن‌ها را از یکدیگر را حساب کنیم:

$$\begin{cases} A=(۱,۲,۳) \Rightarrow A'=(۱,۲,۰) : xy \text{ تصویر قائم روی صفحه} \\ B=(۴,۶,-۳) \Rightarrow B'=(۴,۶,۰) : xy \text{ تصویر قائم روی صفحه} \end{cases} \Rightarrow |A'B'|=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۶-۲)^۲}=۵$$

گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

بردار در فضای $IR^۳$:

فرض کنیم $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نقطه‌ای غیر صفر از $IR^۳$ باشد می‌توانیم به نقطه A یک پاره خط جهت دار نسبت دهیم. در واقع این پاره خط جهتدار پاره‌خطی با نقطه شروع $O=(۰,۰,۰)$ و نقطه پایان $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ است.



واضح است که همواره بیشمار پیکان (پاره خط جهتدار) موازی با یک پیکان دلخواه می‌توان رسم کرد که تنها یکی از آنها از مبداء مختصات شروع می‌شود که به آن «بردار» می‌گویند.

برعکس: اگر یک پاره خط جهتدار داشته باشیم که نقطه‌ی شروع آن $O=(۰,۰,۰)$ باشد آنگاه نقطه پایان آن، نقطه‌ای غیرصفر مانند $A=(a_۱,a_۲,a_۳)$ را نمایش خواهد داد. در نتیجه یک تناظر دو سویی بین پاره خط‌های جهتدار با نقطه شروع $O=(۰,۰,۰)$ و نقاط غیرصفر $IR^۳$ موجود است.

تعریف: به هر پاره خط جهتدار با نقطه شروع $O=(۰,۰,۰)$ یک بردار $IR^۳$ یا به اختصار یک بردار می‌گوئیم. اگر این بردار را با a نمایش دهیم و نقطه پایان این بردار $(a_۱,a_۲,a_۳)$ باشد می‌نویسیم بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$. در هر بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$، $a_۱, a_۲, a_۳$ را مؤلفه‌های بردار a می‌نامند.

چون کلیه پیکان‌های موازی و هم طول، هم ارزند، هر پیکان با بردار هم ارز آن مشخص می‌شود که از مبداء مختصات شروع می‌شود.

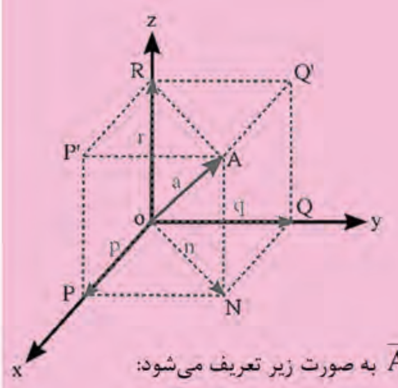
طرز تعیین مولفه‌های یک بردار:

اگر در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^3$ نقاط N و R تصویرهای قائم نقطه A بر صفحه xy و بر محور z باشند، آنگاه:

$$A = N + R$$

اگر تصویرهای قائم نقطه N را بر دو محور x و y بترتیب Q, P باشند، آنگاه:

$$N = P + Q$$



بنابراین می‌توان نوشت: $A = P + Q + R$. به بردارهای R, Q, P که تصویرهای قائم A بر سه محور مختصات هستند و بردار A را مشخص می‌کنند مولفه‌های بردار A بر سه محور مختصات می‌گوئیم.

بردار $\overrightarrow{AB}$: اگر دو نقطه $A = (x_1, y_1, z_1)$ و $B = (x_2, y_2, z_2)$ داده شده باشند، بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

ضرب عدد در بردار:

اگر r یک عدد حقیقی و a یک بردار باشد حاصلضرب عدد r در بردار a برداری مانند b است که اندازه‌اش برابر با $|r||a|$ می‌باشد و چنانچه a, r هیچکدام صفر نباشند آنگاه راستاهای b, a یکی است. اگر r مثبت باشد b, a هم جهت هستند و اگر r منفی باشد b, a در دو جهت مخالفند.

اگر a_1, a_2, a_3 مؤلفه‌های بردار a و b_1, b_2, b_3 مؤلفه‌های بردار b باشند آنگاه:

$$\begin{cases} b_1 = ra_1 \\ b_2 = ra_2 \\ b_3 = ra_3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad b = ra \quad \Leftrightarrow \quad a \parallel b$$

بعبارتی اگر $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ در نظر گرفته شوند، آنگاه $a \parallel b$ است، اگر و فقط اگر:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

نکته: برای هر دو بردار دلخواه b, a داریم $|a + b| \leq |a| + |b|$ **(که به آن نامساوی مثلثی می‌گوییم)**

توجه: اگر بردارهای غیرصفر b, a موازی و هم جهت باشند نامساوی بالا به تساوی تبدیل می‌شود.

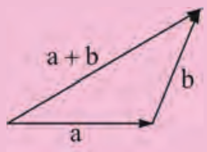
مجموع دوبردار: اگر $a = (a_1, a_2, a_3)$ **و** $b = (b_1, b_2, b_3)$ **دو بردار دلخواه باشند آنگاه:**

$$c = a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

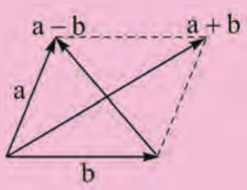
تعبیر هندسی جمع و تفاضل دو بردار:

برای جمع دو بردار، دو روش کلی وجود دارد که به صورت زیر هستند:

۱) روش مثلثی: در این روش، برای جمع دو بردار b,a، ابتدای بردار b را بر انتهای بردار a قرار می‌دهند. برداری که ابتدای a را به انتهای b متصل می‌کند، همان بردار $a + b$ است:



۲) روش متوازی‌الاضلاع: در این روش، ابتدای هر دو بردار را روی هم قرار می‌دهند و یک متوازی‌الاضلاع روی این دو بردار رسم می‌کنند. قطری از این متوازی‌الاضلاع که ابتدایش بر ابتدای دو بردار b,a منطبق است، بردار a+b و قطر دیگر که به سمت بردار a اشاره می‌کند، بردار a-b است:



اندازه بردار (طول بردار): اندازه بردار $a = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با : $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

نکته ۱: برای هر سه بردار c, b, a و اعداد حقیقی s, r داریم:

۱) $a + b = b + a$ (جابجایی)

۲) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (شرکت پذیری)

۳) $r(a + b) = ra + rb$

۴) $(r + s)a = ra + sa$

۵) $r(sa) = (rs)a$

۶) $a + o = o + a = a$

۷) $1a = a$

۸) $0a = o$

۹) $ro = o$

۱۰) $a + (-a) = (-a) + a = o$

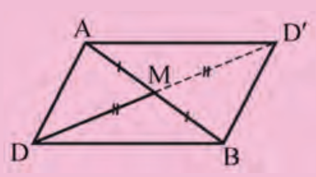
نکته ۲: برای سه نقطه‌ی دلخواه A، B و C در IR^3 داریم:

۱) $\overrightarrow{AA} = o$ ۲) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

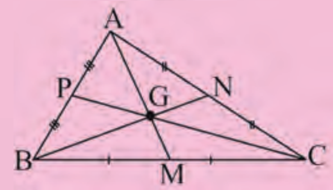
۳) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ۴) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

نکته ۳ : اگر M وسط پاره خط AB باشد آنگاه برای هر نقطه دلخواه D داریم:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}}{2}$$



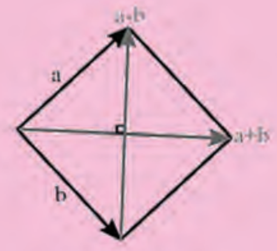
نکته ۴ : اگر G محل برخورد میانه‌ها مثلث ABC باشد آنگاه برای هر نقطه دلخواه D داریم:



$$\frac{\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}}{۳}=\overrightarrow{DG}$$

نکته ۵ : اگر اندازه‌های دو بردار b, a با هم مساوی باشند دو بردار $a+b$ و $a-b$ بر هم عمودند و بالعکس از لحاظ هندسی می‌توان آنها را دو قطر یک لوزی در نظر گرفت.

$$|a|=|b| \iff a+b \perp a-b$$



مثال ۵: اگر $a=(۲,۱,-۳)$ و $b=(۱,-۳,-۲)$ دو بردار در فضای $IR^۳$ باشند اندازه‌ی بردار $۲a-b$ را بیابید. « پرتکرار - ۶ بار»

پاسخ:

$$۲a-b=۲(۲,۱,-۳)-(۱,-۳,-۲)=(۳,۵,-۴)$$
$$|۲a-b|=\sqrt{۹+۲۵+۱۶}=۵\sqrt{۲}$$

مثال ٦: دو بردار $v_۱=(۲,m,۳)$ و $v_۲=(۴,۵,n)$ مفروض‌اند m,n را چنان حساب کنید که دو بردار موازی باشند.

پاسخ: می‌دانیم مؤلفه‌های دو بردار موازی با هم متناسبند.

$$v_۱ \parallel v_۲ \Rightarrow \frac{۲}{۴}=\frac{m}{۵}=\frac{۳}{n} \Rightarrow m=۲/۵ \ , \ n=۶$$

مثال ۷: اگر $v_۱=(۲,۳,۱)$ و $v_۲=(۱,-۱,۱)$ باشد حاصل $\frac{|v_۱-۲v_۲|}{|v_۱+۲v_۲|}$ کدام است؟ « آزاد ریاضی ۸۱»

۱) ۱　　۲) $\sqrt{۶}$　　۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$　　٤) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ:

$$\begin{cases} v_۱-۲v_۲=(۰,۵,-۱) \Rightarrow |v_۱-۲v_۲|=\sqrt{۲۵+۱}=\sqrt{۲۶} \\ v_۱+۲v_۲=(۴,۱,۳) \Rightarrow |v_۱+۲v_۲|=\sqrt{۱۶+۱+۹}=\sqrt{۲۶} \end{cases} \Rightarrow \frac{|v_۱-۲v_۲|}{|v_۱+۲v_۲|}=\frac{\sqrt{۲۶}}{\sqrt{۲۶}}=۱$$

گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال ۸: دو بردار $v_۱=(۱,m,۳)$ و $v_۲=(۲,۴,k)$ موازیند آنگاه: « سراسری ۷۰»

۱) $k=۶ , m=۶$　　۲) $k=۲ , m=۶$

۳) $k=۳ , m=۲$　　٤) $k=۶ , m=۲$

☑**پاسخ**: زمانی دو بردار غیرصفر موازیند که مضرب یکدیگر باشند. یعنی داریم؛

$$v_1 \| v_2 \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{m}{4}=\frac{3}{k} \Rightarrow \ k=6 \ , m=2$$

گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

▼**مثال ۹**: اگر بردار $a=(m,2,-1)$ و $|b|=\sqrt{41}$ دو بردار $a+b \ , a-b$ عمود بر هم باشند مقدار مثبت m کدام است؟ « سراسری ۸۵ »

۱) ۳ ۲) ٤ ۳) ۵ ٤) ۶

☑**پاسخ**: نکته: اگر b,a دو بردار باشند بردارهای $a+b$ و $a-b$ زمانی بر هم عمودند که $|a|=|b|$ باشند و برعکس، یعنی:

$$(a-b)\perp(a+b) \ \Leftrightarrow \ |a|=|b|$$

$$\begin{cases} a=(m,2,-1) \\ |b|=\sqrt{41} \end{cases} \Rightarrow \ |a|=\sqrt{m^2+2^2+(-1)^2} \ \xrightarrow{|a|=|b|} \sqrt{m^2+5}=\sqrt{41}$$

$$\Rightarrow \ m^2=36 \ \xrightarrow{m>0} \ m=6$$

گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

بردارهای یکّه و جهت :

به هر بردار به طول واحد بردار «یکّه» می‌گویند. به بردار یکه‌ای که موازی و هم جهت با بردار a باشد «بردار جهت a» می‌گویند. بردار جهت a را با e_a نمایش می‌دهند و می‌توان آن را از رابطه زیر بدست آورد.

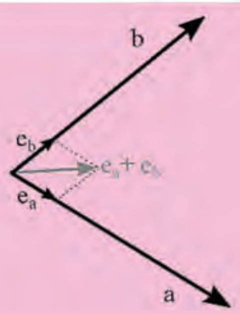
$$e_a=\frac{1}{|a|}a$$

نکته: هر بردار با یک کمیت عددی غیرمنفی $|a|$ که طول آن است و یک بردار یکّه e_a که جهت آن را تعیین می‌کند مشخص می‌شود، یعنی $a=|a|e_a$.

در بین بردارهای یکه، سه بردار $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$, $k=(0,0,1)$ از اهمیت و کاربرد بیشتری برخوردارند. هر بردار دلخواه $a=(a_1, a_2, a_3)$ را می‌توانیم بصورت ترکیبی از بردارهای i, j, k بنویسیم:

$$a=a_1i+a_2j+a_3k$$

نکته: (راستای نیمساز زاویه بین دو بردار) اگر b,a دو بردار دلخواه غیرصفر باشند بردار e_a+e_b یا هر مضرب مثبتی از آن، راستای نیمساز داخلی زاویه‌ی بین دو بردار b,a است.



▼**مثال ۱۰**: دو بردار $a=2i-j+3k$ و $b=j-k$ مفروض‌اند مطلوبست تعیین بردار e_{a+2b} : « پرتکرار – ۱۴ بار»

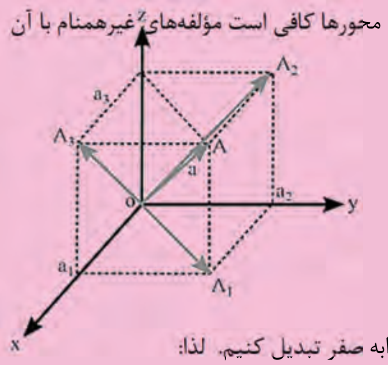
☑**پاسخ**:

$$a+2b=(2,-1,3)+2(0,1,-1)=(2,1,1)$$

$$e_{a+2b}=\frac{1}{|a+2b|}(a+2b)=\frac{1}{\sqrt{4+1+1}}(2,1,1)=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

تصویر قائم بردار روی محورها و صفحات مختصات:

تصویر قائم بردار روی محورهای مختصات: برای بدست آوردن مؤلفه‌های تصویر قائم یک بردار بر محورها کافی است مؤلفه‌های غیرهمنام با آن محور مختصات را به صفر تبدیل کنیم. لذا :



۱- تصویر قائم بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ روی محور x ها برابر است با : $(a_1\ ,0,0)=a_1 i$

۲ – تصویر قائم بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ روی محور y ها برابر است با : $(0,a_2\ ,0)=a_2 j$

۳ – تصویر قائم بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ روی محور z ها برابر است با : $(0,\ 0,\ a_3\ )=a_3 k$

تصویر قائم بردار روی صفحات مختصات: در این حالت مولفه‌های غیرهمنام با صفحه مختصات رابه صفر تبدیل کنیم. لذا:

۱ – تصویر قائم بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ روی صفحه xy برابر است با: $(a_1,a_2,0)$

۲ – تصویر قائم بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ روی صفحه xz برابر است با: $(a_1,0\ ,a_3\ )$

۳ – تصویر قائم بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ روی صفحه yz برابر است با: $(0\ ,\ a_2\ ,a_3)$

در شکل فوق، OA_1 ، OA_2 ، OA_3 تصاویر قائم بردار A روی صفحات مختصات می‌باشند.

مثال ۱۱: اندازه تصویر قائم بردار $v=(3,1,2)$ بر صفحه yz کدام است؟ «سراسری ریاضی ۷۱»

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{10}$ ۳) $\sqrt{13}$ ۴) $\sqrt{14}$

پاسخ: *تصویر قائم بردار v روی صفحه yz برابر بردار $v'=(0,1,2)$ است، پس:*

$$|v'|=\sqrt{0+1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۲: فرض کنید $a=(4,-2,6)$ در اینصورت مجموع تصاویر قائم a روی صفحات مختصات کدام است؟

۱) a   ۲) 2a   ۳) 5a   ۴) $\frac{3}{2}a$

پاسخ:

xy تصویر قائم روی صفحه = $(4,-2,0)$

xz تصویر قائم روی صفحه = $(4,0,6)$ $\Rightarrow$ مجموع تصاویر قائم = $(8,-4,12)=2a$

yz تصویر قائم روی صفحه = $(0\ ,\ -2\ ,\ 6)$

گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

قرینه بردار نسبت به محورها و صفحات مختصات:

برای بدست آوردن قرینه بردار نسبت به محورها و صفحات مختصات کافی است مؤلفه‌های غیرهمنام با محور یا صفحات مختصات را تغییر علامت دهیم. لذا :

۱ – قرینه بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ نسبت به محور x برابر است با: $(a_1,-a_2,-a_3)$

۲ – قرینه بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ نسبت به محور y برابر است با: $(-a_1,a_2,-a_3)$

۳ – قرینه بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ نسبت به محور z برابر است با: $(-a_1,-a_2,a_3)$

۴– قرینه بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نسبت به صفحه xy برابر است با: $(a_۱,a_۲,-a_۳)$

۵– قرینه بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نسبت به صفحه yz برابر است با: $(-a_۱,a_۲,a_۳)$

۶– قرینه بردار $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ نسبت به صفحه xz برابر است با: $(a_۱,-a_۲,a_۳)$

نکته: اگر a' قرینه بردار a نسبت به صفحات مختصات یا محورهای مختصات باشد آنگاه $|a|=|a'|$.

مثال ۱۳: اگر بردار a'' قرینه بردار $a=-۲i+۳j+mk$ نسبت به محور x و $|a''|=\sqrt{۳۸}$ باشد مقدار m کدام است؟ $(m>۰)$

۱) $m=۷$ ۲) $m=۳$ ۳) $m=۵$ ۴) $m=۴$

پاسخ: اگر a'' قرینه بردار a نسبت به صفحات مختصات یا محورهای مختصات باشد آنگاه $|a|=|a''|$ و داریم:

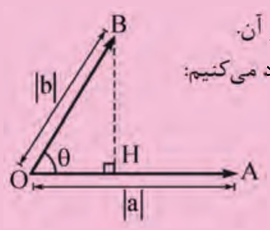
$$\sqrt{(-۲)^۲+۳^۲+m^۲}=\sqrt{۳۸}\Rightarrow m^۲=۲۵\rightarrow m=\pm۵$$

پاسخ گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

تعریف ضرب داخلی دو بردار:

فرض می‌کنیم b,a دو بردار غیرصفر و θ زاویه بین آنها باشد در اینصورت ضرب داخلی a در b را که با نماد a.b نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a.b=|a||b|\cos\theta$$



با توجه به شکل روبه‌رو حاصلضرب داخلی دو بردار برابر است با حاصلضرب اندازه یکی در اندازه تصویر دیگری بر آن.

اگر یکی از دو بردار a یا b و یا هر دو صفر باشند آنگاه زاویه بین آنها قابل تعریف نیست در این حالت قرار داد می‌کنیم:

$$a.b=۰$$

توجه کنید که حاصلضرب داخلی دو بردار کمیتی اسکالر است.

فرمول دوم ضرب نقطه‌ای (داخلی) دو بردار که جنبه کاربردی زیاد دارد در قضیه‌ی زیر ارائه می‌گردد.

قضیه : هرگاه $a=(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $b=(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار و θ زاویه بین آنها باشد آنگاه:

$$a.b=|a||b|\cos\theta=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

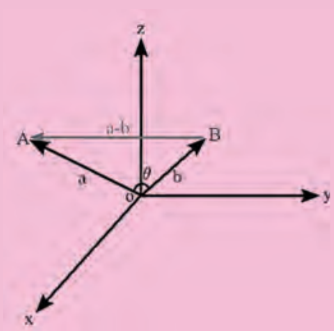
اثبات: در مثلث OAB طبق رابطه کسینوس‌ها داریم:

$$|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲|a||b|\cos\theta$$

$$(a_۱-b_۱)^۲+(a_۲-b_۲)^۲+(a_۳-b_۳)^۲=a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲+b_۱^۲+b_۲^۲+b_۳^۲-۲|a||b|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -۲a_۱b_۱-۲a_۲b_۲-۲a_۳b_۳=-۲|a||b|\cos\theta$$

$$a.b\ \xlongequal{\text{بنا بر تعریف}}\ \Rightarrow a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=|a||b|\cos\theta$$



▼ **مثال ۱۴:** دو بردار هم اندازه‌ی $a=(m,\sqrt{۲},۱)$ و $b=(۱,-\sqrt{۲},n)$ مفروضند. برای آن که $e_{a+b}=e_a+e_b$ باشد، n کدام مقادیر زیر را می‌تواند بپذیرد؟

۱) ± ۱ ۲) ± ۲ ۳) $\pm ۲\sqrt{۲}$ ٤) $\pm\sqrt{۲}$

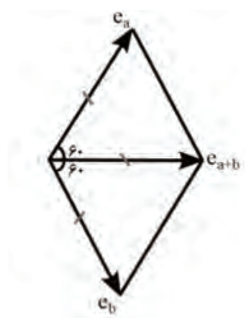
☑ **پاسخ:**

طبق فرض: $|a|=|b| \Rightarrow \sqrt{m^۲+۳}=\sqrt{n^۲+۳} \Rightarrow n^۲=m^۲ \Rightarrow n=\pm m$

وقتی دو بردار e_a و e_b هر دو اندازه‌شان برابر ۱ است وقتی جمعشان هم اندازه‌اش ۱ می‌شود که زاویه بینشان ۱۲۰° باشد.

مطابق شکل، چون $e_{a+b}=e_a+e_b$ پس زاویه بین دو بردار b,a برابر ۱۲۰° است لذا داریم:

$$a.b=|a||b|\cos ۱۲۰^\circ \Rightarrow m-۲+n=\sqrt{m^۲+۳}\sqrt{n^۲+۳}\times(-\frac{۱}{۲}) \quad (*)$$



$$\begin{cases} n=m \xrightarrow{(*)} ۲n-۲=-\frac{۱}{۲}(n^۲+۳) \Rightarrow n^۲+۴n-۱=۰ \Rightarrow n=-۲\pm\sqrt{۵} \\ n=-m \xrightarrow{(*)} -۲=-\frac{۱}{۲}(n^۲+۳) \Rightarrow n^۲+۳=۴ \Rightarrow n=\pm ۱ \end{cases}$$

گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

▼ **مثال ۱۵:** اگر $a=۲i-j+۲k$ و $b=i-j$ باشند زاویه‌ی بین دو بردار a,b را بیابید. «پرتکرار – ۱۰ بار»

☑ **پاسخ:**

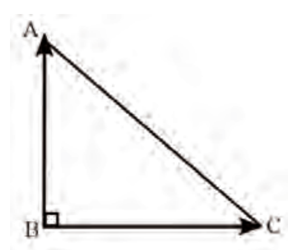
$$a.b=|a||b|\cos\theta=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۲)^۲+(-۱)^۲+(۲)^۲}\times\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲+(۰)^۲}\cos\theta=۲\times۱+(-۱)(-۱)+۰\times۲$$

$$\Rightarrow ۳\times\sqrt{۲}\cos\theta=۲+۱ \Rightarrow \cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۴}$$

▼ **مثال ۱۶:** نقاط $A=(۲,-۱,۳)$ و $B=(۵,۳,-۲)$ و $C=(۴,۲m,۱)$ مختصات سه رأس یک مثلث می‌باشند. مقدار m را چنان بیابید که این مثلث در رأس B قائمه باشد. «پرتکرار – ۱۵ بار»

☑ **پاسخ:**



$$\begin{cases} \overrightarrow{BC}=(-۱,۲m-۳,۳) \\ \overrightarrow{BA}=(-۳,-۴,۵) \end{cases}$$

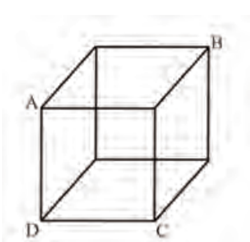
$$BA\perp BC \Rightarrow \theta=۹۰^\circ \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=۰$$

$$\Rightarrow (-۱)(-۳)+(۲m-۳)(-۴)+۳(۵)=۰ \Rightarrow m=\frac{۱۵}{۴}$$

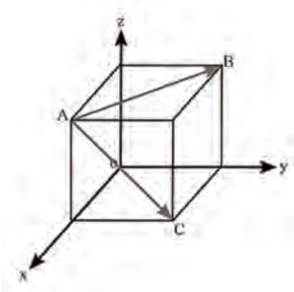
▼ **مثال ۱۷:** در مکعب شکل روبه‌رو به طول یال ۳ حاصلضرب داخلی $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ چقدر است؟ «آزاد ریاضی ۸۵»

۱) ۹ ۲) ۱۸

۳) صفر ٤) ۲۷



☑**پاسخ**: مطابق شکل زیر مبداء مختصات را یکی از رأس‌های مکعب در نظر می‌گیریم. اگر طول یال مکعب را a در نظر بگیریم، داریم:



$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-a,a,۰)\\ \overrightarrow{AC}=(۰,a,-a)\\ \overrightarrow{AD}=(۰,۰,-a)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=(۰+a^۲+۰)(۰+۰+a^۲)=۲a^۲$$

$$\xrightarrow{a=۳}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=۲\times۹=۱۸$$

گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

▼**مثال ۱۸**: حاصلضرب داخلی دو بردار با اندازه‌های مساوی برابر با مربع اندازه‌ی هر یک از دو بردار است. زاویه بین دو بردار چند درجه است؟
«سراسری ریاضی ۷۸»

۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

☑**پاسخ**: دو بردار b,a به اندازه‌های مساوی که زاویه بین آنها θ است را در نظر می‌گیریم، طبق فرض داریم:

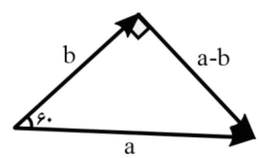
$$|a|=|b| \Rightarrow a.b=|a|^۲\cos\theta=|a|^۲ \Rightarrow \cos\theta=۱ \Rightarrow \theta=۰$$

گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

▼**مثال ۱۹**: زاویه بین دو بردار b,a برابر ۶۰° درجه و $|a|=۲|b|$ است، زاویه بین $a+(-b)$ و بردار a چقدر است؟ «سراسری تجربی ۷۷»

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۹۰° ۴) ۱۲۰°

☑**پاسخ**: راه حل اول:



$$\cos\theta=\frac{a.(a-b)}{|a||a-b|}=\frac{|a|^۲-a.b}{|a||a-b|}=\frac{|a|^۲-|a||b|\cos۶۰^\circ}{|a||a-b|}$$

$$=\frac{|a|-\frac{۱}{۲}|b|}{|a-b|}=\frac{۲|b|-\frac{۱}{۲}|b|}{|a-b|}=\frac{۳|b|}{۲|a-b|}$$

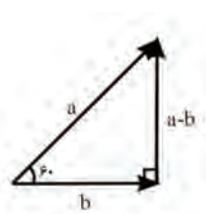
حال اگر $|a-b|$ را برحسب $|b|$ پیدا کنیم $\cos\theta$ بدست می‌آید.

$$|a-b|=\sqrt{|a|^۲+|b|^۲-۲|a||b|\cos۶۰^\circ}\xrightarrow{|a|=۲|b|}|a-b|=\sqrt{۳}|b|$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{۳|b|}{۲|a-b|}=\frac{۳|b|}{۲\sqrt{۳}|b|}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \theta=۳۰^\circ$$

راه حل دوم : اندازه تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b برابر اندازه‌ی b می‌باشد زیرا:

$$|a'|=|a|\cos۶۰^\circ=۲|b|\times\frac{۱}{۲}=|b|$$



با توجه به شکل داریم: $\overline{AA'}=a-b$

بنابراین زاویه بین بردار $a-b,\ a$ برابر ۳۰° درجه است.

گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

▼**مثال ۲۰**: برروی دو بردار $a=۳i+۳j$ و $b=i-j-۲k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متـوازی الاضـلاع کدام است؟
«سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۲»

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

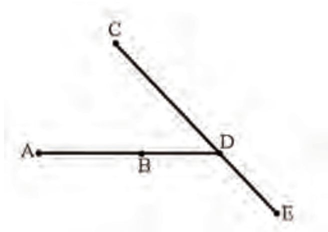
☑**پاسخ:** اگر θ را زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی‌الاضلاع در نظر بگیریم، داریم:

$$a+b=۴i+۲j-۲k=c \quad , \quad a-b=۲i+۴j+۲k=d$$

$$\cos\theta=\frac{c.d}{|c||d|}=\frac{۸+۸-۴}{\sqrt{۲۴}\,\sqrt{۲۴}}=\frac{۱}{۲}$$

گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

▼**مثال ۲۱:** با توجه به شکل، کدام گزینه، عددی بزرگ‌تر است؟ « آزاد ریاضی ۸۳ »



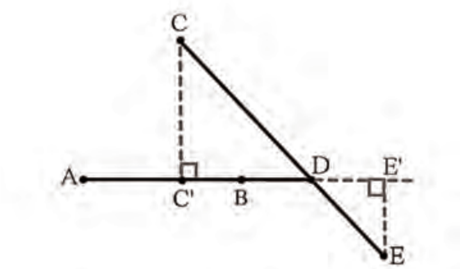
۱) $(\overrightarrow{AB})\,.\,(\overrightarrow{AD})$

۲) $(\overrightarrow{AB})\,.\,(\overrightarrow{AE})$

۳) $(\overrightarrow{AD})\,.\,(\overrightarrow{AC})$

۴) هر سه یکسان است.

☑**پاسخ:** همانطور که در شکل می‌بینید، راستای بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ یکسان است. پس گزینه‌ها را که براساس حداقل یکی از این دو بردار بیان شده است با هم مقایسه می‌کنیم.



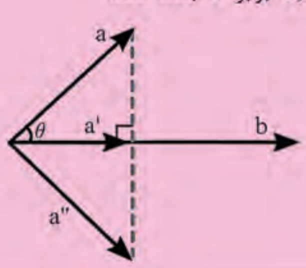
همانطور که در تعریف ضرب داخلی ذکر شد، ضرب داخلی دو بردار b, a برابر است با حاصل ضرب اندازه‌ی یکی از آن دو بردار در اندازه‌ی تصویر قائم دیگری بر آن بردار، اگر تصویرهای قائم نقاط E, C روی راستای بردار $\overrightarrow{AB}$ (یا $\overrightarrow{AD}$)، نقاط E', C' باشند، آنگاه:

$$\begin{cases} \text{گزینه (۱)}: \ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\times\left|\overrightarrow{AD}\right| \\ \text{گزینه (۲)}: \ \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AE}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\times\left|\overrightarrow{AE'}\right| \\ \text{گزینه (۳)}: \ \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AD}\right|\times\left|\overrightarrow{AC'}\right| \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{AC}<\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}<\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AE}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

تصویر قائم و قرینه بردار نسبت به بردار دیگر:

هرگاه بردار a'', a' به ترتیب تصویر قائم و قرینه بردار a نسبت به بردار b باشند و زاویه بین دو بردار b, a برابر θ باشد آنگاه:



$$\begin{cases} a'=\dfrac{a.b}{|b|^{۲}}b \\ a''=۲a'-a=۲(\dfrac{a.b}{|b|^{۲}})b-a \end{cases}$$