

فصل ۱ حسابان

سؤال‌های نسبتاً دشوار

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۵ سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۶ (یا ۷) سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۸ سوال پاسخ دهند.

۱- معادله $|2x - |x - 1|| = 2$ چند جواب دارد؟ (۳۹٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۴٪ پاسخ صحیح دادند.) (۱۲۴ آبان ۹۲ - شرکت‌کنندگان ۳۰۰۸ نفر ۸۴)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲- معادله $\sqrt{x^2 - x - 6} + \sqrt{x^3 - 5x^2 - 2x + 24} = 0$ چند جواب دارد؟

(۳۷٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۲٪ پاسخ صحیح دادند.) (۱۲ آبان ۹۱ - شرکت‌کنندگان ۱۴۸۰۶ نفر ۷۹)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳- معادله $\sqrt{2x + 4} + \sqrt{1 - x} = \sqrt{2(x + 3)}$ چند جواب صحیح دارد؟

(۳۶٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۳٪ پاسخ صحیح دادند.) (۱۸ آذر ۹۰ - شرکت‌کنندگان ۲۲۱۰۰ نفر ۸۶)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

۴- تعداد ریشه‌های معادله $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ ، کدام است؟ (۳۶٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۸٪ پاسخ صحیح دادند.) (۷ بهمن ۹۰ - شرکت‌کنندگان ۱۶۹۰۶ نفر ۹۴)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

۵- دامنه‌ی تابع ثابت با ضابطه $f(x) = x^6 - 5x^2 + 2$ ، حداکثر چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

(۳۶٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند.) (۷ فروردین ۹۱ - شرکت‌کنندگان ۲۹۰۰۲ نفر ۹۰)

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

۶- مجموعه‌ی جواب نامعادله $|\sin x| \geq |x|$ کدام است؟ (۳۵٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۵٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۰ آبان ۹۰ - شرکت‌کنندگان ۱۸۹۳۰ نفر ۸۷)

- (۱) \mathbb{R} (۲) $\{0\}$ (۳) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (۴) جواب حقیقی ندارد.

۷- کدام گزینه در مورد تعداد جواب‌های معادله $4x - \sqrt{1 - 2x} = 2$ ، درست است؟

(۳۵٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۵٪ پاسخ صحیح دادند.) (۱۰ آبان ۹۲ - شرکت‌کنندگان ۱۵۰۰۰ نفر ۸۶)

(۱) دو جواب متمایز هم علامت

(۲) دو جواب متمایز با علامت‌های متفاوت

(۳) فقط یک جواب مثبت

(۴) فقط یک جواب منفی

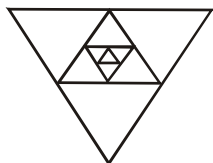
۸- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & ; \text{ زوج } [x] \\ \frac{x^2}{2} & ; \text{ فرد } [x] \end{cases}$ باشد، مقدار عددی $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(-2\sqrt{2})$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

(۳۴٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند.) (۱۰ آذر ۹۱ - شرکت‌کنندگان ۶۴۰۰ نفر ۸۲)

- (۱) ۱۷ (۲) $\frac{17}{4}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{65}{4}$

۹- مطابق شکل زیر، وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع یک واحد را به هم وصل کرده، سپس مثلث‌های کناری را حذف کرده و این کار را در مورد مثلث باقی‌مانده تکرار می‌کنیم. پس از حداقل چند مرحله، $\frac{1}{999}$ مساحت مثلث اولیه کنار گذاشته می‌شود؟

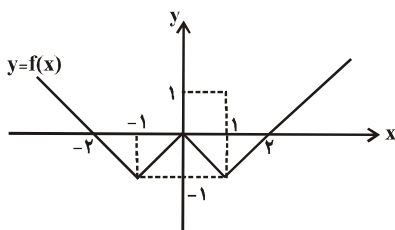
(۳۰٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند) (۲۶مهر ۹۲- شرکت‌کنندگان ۱۳۴۱ نفر ۵۴)



- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۷ (۴)

۱۰- نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر است. مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $f(x) \geq (x - 2)$ کدام است؟

(۲۶٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۲٪ پاسخ صحیح دادند) (۴آذر ۹۰- شرکت‌کنندگان ۱۷۵۰ نفر ۸۵)



- (۱) $[-2, +\infty)$
- (۲) $[-2, 2]$
- (۳) $(-\infty, -2]$
- (۴) $[0, +\infty)$

۱۱- اگر باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^2 + 2x + 5$ به ترتیب برابر $x - 1$ و x باشند، آنگاه باقیمانده‌ی تقسیم $f(x) \cdot g(x)$ بر

(۲۵٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۶٪ پاسخ صحیح دادند) (۲۰آبان ۹۰- شرکت‌کنندگان ۱۸۹۴ نفر ۸۴)

$x^2 + 2x + 5$ کدام است؟

- (۱) ۵
- (۲) $3x - 5$
- (۳) $x(x - 1)$
- (۴) $-3x - 5$

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

سؤال‌های دشوار

فصل ۱ حسابان

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سؤال به ۴ سؤال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سؤال به ۵ (یا ۶) سؤال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سؤال به بیش از ۷ سؤال پاسخ دهند.

۱۲- اگر $a + b + c < 0$ و معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ فاقد ریشه‌ی حقیقی باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

(۲۴٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۶٪ پاسخ صحیح دادند) (۱۶آبان ۹۰- شرکت‌کنندگان ۱۸۱۰ نفر ۸۷)

- (۱) $a > 0$
- (۲) $b > 0$
- (۳) $c < 0$
- (۴) $b < 0$

۱۳- به ازای کدام مقادیر k نمودار تابع $y = x^2 - x + k$ از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد؟

(۲۴٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۲٪ پاسخ صحیح دادند) (۱۶آبان ۹۰- شرکت‌کنندگان ۱۸۱۰ نفر ۸۵)

- (۱) امکان ندارد.
- (۲) $k \leq \frac{1}{4}$
- (۳) $k > -\frac{1}{4}$
- (۴) $k \geq \frac{1}{4}$

۱۴- اگر $x^2 + 2$ یک عامل عبارت $f(x) = x^6 + ax^3 - 2x - b$ باشد، بزرگ‌ترین جواب معادله‌ی $f(x) = 0$ کدام است؟

(۲۴٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند) (۲۶مهر ۹۲- شرکت‌کنندگان ۱۳۴۱ نفر ۶۱)

- (۱) ۴
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) معادله جواب ندارد.

۱۵- در تقسیم عبارت $x^5 - 1$ بر $x^2 + 2x + 1$ ، مجموع ضرایب خارج‌قسمت کدام است؟

(۲۲٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۸٪ پاسخ صحیح دادند) (۱۲آبان ۹۱- شرکت‌کنندگان ۱۴۸۰ نفر ۸۷)

- (۱) -۶
- (۲) ۸
- (۳) ۶
- (۴) -۸

۱۶- تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 - 7 = (1 + \frac{x+2}{x-3})(2 - \frac{x+2}{x-3})$ ، کدام است؟

(۲۱٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۰٪ پاسخ صحیح دادند. (۷ فروردین ۹۲ - شرکت‌کنندگان ۳۰۰۰ نفر) (۸۶)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ

۱۷- معادله‌ی $\frac{3x-1}{4x^2+1} + \frac{4x^2+1}{3x-1} = \frac{1}{3}$ ، چند جواب حقیقی دارد؟

(۲۱٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۸٪ پاسخ صحیح دادند. (۱۰ آبان ۹۲ - شرکت‌کنندگان ۱۵۰۰۰ نفر) (۸۸)

- (۱) بی‌شمار (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) صفر

۱۸- حد مجموع مربعات جملات یک دنباله‌ی هندسی غیر ثابت، متناهی و برابر با حد مجموع مکعبات این دنباله است. جمله‌ی اول دنباله به کدام بازه‌ی زیر متعلق است؟

(۲۰٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۸٪ پاسخ صحیح دادند. (۱۸ آذر ۹۰ - شرکت‌کنندگان ۲۱۰۰ نفر) (۸۱)

- (۱) $(-4, 0)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -4)$

۱۹- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha^2\beta + \beta}$ کدام است؟

(۲۰٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۳٪ پاسخ صحیح دادند. (۲۱ فروردین ۹۱ - شرکت‌کنندگان ۱۵۰۰۰ نفر) (۶۸)

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

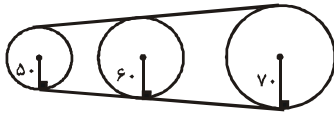
۲۰- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات هفتم و بیست و سوم برابر ۲۰ است، مجموع جملات دهم تا بیستم کدام است؟

(۲۰٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند. (۱۰ آذر ۹۱ - شرکت‌کنندگان ۱۶۴۰۰ نفر) (۱۰۰)

- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۰ (۴) ۱۴۰

۲۱- نوار نقاله‌ای در یک کارخانه به وسیله‌ی ۳ غلطک به شعاع‌های ۵۰، ۶۰ و ۷۰ سانتی‌متر به صورت زیر، به حرکت در می‌آید. اگر در لحظه روشن شدن نقاله، سه علامت در یک امتداد باشند، هنگامی که برای دومین بار این ۳ علامت در همان امتداد قرار می‌گیرند، غلطک بزرگ چند دور زده است؟

(۱۹٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۲٪ پاسخ صحیح دادند. (۲۶ مهر ۹۲ - شرکت‌کنندگان ۳۴۱۵ نفر) (۶۶)



- (۱) ۴۲
(۲) ۳۵
(۳) ۳۰
(۴) ۲۵

۲۲- هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 5x + 8$ برابر $x + 8$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $xf(x)$ بر $x^2 - 5x + 8$ کدام است؟

(۱۸٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند. (۲۲ مهر ۹۰ - شرکت‌کنندگان ۱۵۲۹۴ نفر) (۶۸)

- (۱) $5x$ (۲) $x + 13$ (۳) $13x$ (۴) $x + 5$

۲۳- به ازای چند مقدار از $k \in \mathbb{N}$ عدد ۲ بین ریشه‌های $f(x) = -x^2 + 5x - 2^k$ قرار می‌گیرد؟

(۱۸٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۷٪ پاسخ صحیح دادند. (۱۶ آبان ۹۰ - شرکت‌کنندگان ۱۸۱۰۰ نفر) (۸۶)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۲۴- معادله‌ی $|\log_1 x| - |\sin x| = 0$ چند ریشه دارد؟

(۱۸٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۳٪ پاسخ صحیح دادند. (۴ آذر ۹۰ - شرکت‌کنندگان ۱۷۵۰۰ نفر) (۹۸)

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۲۵- اگر بدانیم معادله‌ی $ax^2 + 3x - 2 = 3$ دقیقاً ۳ جواب دارد، مقادیر a کدام است؟

(۱۸٪) شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۳٪ پاسخ صحیح دادند. (۸ آذر ۹۲ - شرکت‌کنندگان ۱۸۹۸۶ نفر) (۸۴)

- (۱) $\frac{9}{4}$ و $\frac{9}{4}$ (۲) $-\frac{9}{4}$ و $-\frac{9}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ و $\frac{9}{20}$ (۴) $\frac{9}{4}$ و $-\frac{9}{20}$

۲۶- مجموعه جواب معادله $|x-3| + |x+1| = m$ به صورت $[a, b]$ است. بازه $(a-m, b+m)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱۸٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند.) (۸ آذر ۹۲- شرکت کنندگان ۱۸۹۸۰ نفر ۸۶)

۵ (۱) ۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴)

۲۷- در دنباله‌های حسابی $\begin{cases} A = 1, 5, 9, \dots \\ B = 3, 10, 17, \dots \end{cases}$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

(۱۷٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۳ مهر ۹۰- شرکت کنندگان ۱۵۳۰۰ نفر ۷۰)

۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴)

فصل ۱ حسابان

سؤال‌های دشوارتر

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سؤال به ۳ سؤال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سؤال به ۴ (یا ۵) سؤال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سؤال به بیش از ۶ سؤال پاسخ دهند.

۲۸- به ازای کدام مقدار n ، جمله‌ی دهم بسط $\frac{(2x^A - 3)^n}{x^{4n}}$ مستقل از x است؟

(۱۶٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۱٪ پاسخ صحیح دادند.) (۱۸ آذر ۹۰- شرکت کنندگان ۲۲۱۰۰ نفر ۸۲)

۱۲ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴)

۲۹- مجموع جواب‌های نامعادله $\frac{4}{x^2 + x + 1} \leq 3 - x - x^2$ کدام است؟ (۱۳٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۴٪ پاسخ صحیح دادند.) (۱۰ آذر ۹۱- شرکت کنندگان ۱۶۴۰۰ نفر ۹۳)

$\frac{1}{2}$ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

۳۰- اگر $f(x) = 2x^2 + 3x + 2$ باشد، به چند جمله‌ای $f(x)$ چند واحد اضافه کنیم تا نمودار حاصل شده، محور x ها را در

(۱۳٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۷٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۴ آذر ۹۱- شرکت کنندگان ۱۷۰۳۰ نفر ۹۳)

نقطه‌ای به طول ۳- قطع کند؟

۲ (۱) ۱۲ (۲) ۴۰ (۳) ۹۸ (۴)

۳۱- نمودار تابع با ضابطه‌ی $x > -1$; $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ در بازه‌ی (a, b) زیر محور x هاست. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۱۳٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۷٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ آذر ۹۲- شرکت کنندگان ۱۹۹۰۰ نفر ۹۷)

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۳۲- اگر $(2 + \sqrt{3})^n = A + B\sqrt{3}$ ، آنگاه حاصل عبارت $\frac{A^2 - 3B^2}{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}$ کدام است؟ (n عددی طبیعی و A و B اعدادی صحیح هستند.)

(۱۲٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند اما ۷٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ مهر ۹۰- شرکت کنندگان ۱۵۳۰۰ نفر ۶۶)

۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

۳۳- تعداد جواب‌های معادله‌ی $1 = \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x - 1} - \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + 1}$ برابر است با:

(۱۱٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند اما ۴٪ پاسخ صحیح دادند.) (۱۲ آبان ۹۱- شرکت کنندگان ۱۴۸۰۰ نفر ۸۶)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۴- اگر به ازای هر مقدار حقیقی x داشته باشیم $3 < \left| \frac{x^2 + kx + 1}{x^2 + x + 1} \right|$ ، آنگاه حدود k کدام است؟

(۱۱٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند اما ۵٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۶ آبان ۹۱ - شرکت کنندگان ۱۹۹۳۷ نفر ۸۸)

$$(۲) -11 < k < -1$$

$$(۱) -1 < k < 5$$

$$(۴) k \in \mathbb{R}$$

$$(۳) 5 < k < 7$$

۳۵- مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = an^2 + (a+b)n^2 + 2n$ به دست می آید. اگر جمله چهارم این دنباله

(۱۱٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند اما ۴٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۶ آبان ۹۱ - شرکت کنندگان ۱۹۹۳۷ نفر ۷۲)

برابر ۹ باشد، b کدام است؟

$$(۴) \frac{5}{7}$$

$$(۳) \frac{11}{7}$$

$$(۲) 2$$

$$(۱) 1$$

۳۶- اگر باقیمانده $f(x+1)$ بر $(x-1)^2$ برابر $x+10$ باشد، باقیمانده $f(x)$ بر $(x+1)^2$ بر $x^2 - x - 2$ کدام است؟

(۱۰٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۱ مهر ۹۱ - شرکت کنندگان ۱۳۷۶۰ نفر ۶۶)

$$(۴) 10x + 13$$

$$(۳) 11x + 11$$

$$(۲) 8x + 7$$

$$(۱) 7x + 8$$

۳۷- مجموعه x جواب نامعادله $x + 3\sqrt{-x} + 18 > 0$ شامل چند عدد صحیح منفی است؟

(۹٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند.) (۱۰ آذر ۹۱ - شرکت کنندگان ۱۶۴۰۰ نفر ۹۶)

$$(۴) 36$$

$$(۳) 35$$

$$(۲) 18$$

$$(۱) 17$$

۳۸- اگر α و β دو عدد متمایز باشند و $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ و $\beta^2 = 5\beta - 3$ ، آنگاه $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ ریشه های کدام یک از معادله های زیر هستند؟

(۸٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۴٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ مهر ۹۰ - شرکت کنندگان ۱۵۳۰۰ نفر ۶۹)

$$(۲) 3x^2 + 19x - 3 = 0$$

$$(۱) 3x^2 - 19x + 3 = 0$$

$$(۴) 3x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$(۳) 3x^2 - 19x - 3 = 0$$

۳۹- اگر $a \leq y_0 \leq b$ ، آنگاه خطی به معادله $y = y_0$ ، نمودار تابع به معادله $y = 2x + \frac{|x-2|}{x-2}$ را قطع نمی کند. بیش ترین مقدار $b-a$

(۸٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند.) (۷ بهمن ۹۰ - شرکت کنندگان ۱۹۷۰۰ نفر ۹۵)

کدام است؟

$$(۴) 4$$

$$(۳) 3$$

$$(۲) 2$$

$$(۱) 1$$

۴۰- مجموعه جواب نامعادله $\left(\frac{1}{p}\right)^{\left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|} \leq \left(\frac{1}{p}\right)^{x^2}$ به صورت بازه $[a, b]$ است. حاصل $b-a$ کدام است؟

(۷٪ شرکت کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۴٪ پاسخ صحیح دادند.) (۲۴ آبان ۹۲ - شرکت کنندگان ۱۳۰۰۰ نفر ۸۶)

$$(۴) 8$$

$$(۳) 6$$

$$(۲) 4$$

$$(۱) 2$$



پاسخ نامہ

تشریحی



فصل ۱: محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

۱- گزینهی «۲»

$$x \geq 1 \Rightarrow |2x - x + 1| = |x + 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

$$x < 1 \Rightarrow |2x + x - 1| = |3x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ 3x - 1 = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای ۲ جواب است.

(مسئله‌ها، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۲- گزینهی «۳»

دو عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج همواره نامنفی هستند و حاصل جمع آن‌ها زمانی صفر می‌شود که هر دوی آن‌ها همزمان صفر شوند. بنابراین ابتدا جواب‌های معادله‌ای که راحت‌تر حل می‌شود را می‌یابیم.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

که هر دو جواب به دست آمده، عبارت رادیکالی $\sqrt{x^3 - 5x^2 - 2x + 24}$ را نیز صفر می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

(مسئله‌ها، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۳- گزینهی «۱»

ابتدا دامنه‌ی معادله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ 1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x \leq 1$$

اعداد صحیح واقع در دامنه‌ی معادله، شامل $\{-2, -1, 0, 1\}$ هستند که در بین آن‌ها فقط $x = -1$ در معادله صدق می‌کند.

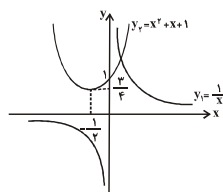
(مسئله‌ها، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۴- گزینهی «۱»

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 + x = 1$$

$$\Rightarrow x(x^2 + x + 1) = 1 \xrightarrow{x \neq 0} x^2 + x + 1 = \frac{1}{x}$$

نمودار دو تابع به معادله‌های $y_1 = \frac{1}{x}$ و



را در یک دستگاه مختصات

رسم می‌کنیم، تعداد نقاط برخورد این دو

منحنی، همان تعداد ریشه‌های معادله‌ی

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

(مسئله‌ها، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۲)

۵- گزینهی «۳»

مسئله از ما حداکثر تعداد نقاط برخورد خط افقی به معادله‌ی $y_1 = k$ و

منحنی $y_2 = f(x)$ را می‌خواهد.

$$x^6 - 5x^2 + 2 = k \Rightarrow x^6 - 5x^2 + (2 - k) = 0$$

$$\xrightarrow{x^2 = t} t^3 - 5t + (2 - k) = 0$$

معادله‌ی فوق حداکثر دو جواب دارد که اگر هر دوی آنها مثبت باشد،

معادله‌ی $f(x) = k$ چهار جواب خواهد داشت؛ به عبارت دیگر، حداکثر ۴

نقطه با طول‌های مختلف می‌توان یافت که عرض‌های آن برابر مقدار ثابت

k باشد. بنابراین دامنه‌ی تابع ثابت با ضابطه‌ی $f(x)$ حداکثر چهار عضو

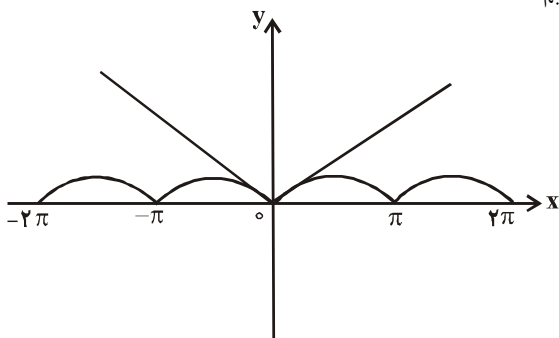
می‌تواند داشته باشد.

(مسئله‌ها، صفحه‌های ۲۱ و ۳۱ تا ۳۳)

۶- گزینهی «۲»

نمودار دو تابع $y = |x|$ و $y = |\sin x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم

می‌کنیم:



با توجه به نمودار، همواره $|\sin x| \leq |x|$ ، پس $|x| \geq |\sin x|$ فقط در

$x = 0$ رخ می‌دهد.

(مسئله‌ها، صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۲- گزینهی «۳»

$$4x - \sqrt{1-2x} = 2 \Rightarrow 4x - 2 = \sqrt{1-2x} \Rightarrow -2(1-2x) = \sqrt{1-2x}$$

با فرض $\sqrt{1-2x} = t$ داریم، $t(2t+1) = 0$ ، $-2t^2 = t \Rightarrow 2t^2 + t = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow \sqrt{1-2x} = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1-2x} = -\frac{1}{2} < 0 \text{ (غیرقابل قبول)} \end{cases}$$

توجه کنید که $x = \frac{1}{2}$ در معادله‌ی اولیه، یعنی $4x - \sqrt{1-2x} = 2$ صدق

می‌کند، پس آن را به عنوان ریشه‌ی معادله می‌پذیریم.

(مسایان، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۸- گزینهی «۲»

$$\left[\frac{-\sqrt{2}}{2} \right] = -1: \text{ فرد} \Rightarrow f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{(-\sqrt{2})^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left[-2\sqrt{2} \right] = -3: \text{ فرد} \Rightarrow f(-2\sqrt{2}) = \frac{(-2\sqrt{2})^2}{2} = 4$$

$$\Rightarrow 4 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

(مسایان- صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

۹- گزینهی «۲»

مساحت مثلث اولیه برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}$ است. مساحت قسمت کنار گذاشته شده در

مرحله‌ی اول برابر $3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)$ ، در مرحله‌ی دوم برابر $3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2$ ،

در مرحله‌ی سوم برابر $3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^3$ و ... است.

بنابراین مساحت‌های کنار گذاشته شده در مراحل مختلف، دنباله‌ای

هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ می‌سازند و می‌خواهیم مجموع جملات این دنباله

بزرگ‌تر از $\frac{999}{1000} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد. پس داریم:

$$\frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 \right) > \frac{999}{1000} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{4^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n \geq 5$$

(مسایان- صفحه‌های ۲۲ تا ۲۶)

۱۰- گزینهی «۱»

ابتدا نامعادله‌ی $(x-2)f(x) > 0$ را حل می‌کنیم سپس جواب‌های

معادله‌ی $(x-2)f(x) = 0$ را به مجموعه‌ی جواب اضافه می‌کنیم، برای

این‌که نامعادله‌ی بالا برقرار باشد، باید یا $\begin{cases} x-2 > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} x-2 < 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$

باشد، با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ f(x) > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 2 \quad (\text{I})$$

$$\begin{cases} x-2 < 0 \Rightarrow x < 2 \\ f(x) < 0 \Rightarrow x \in (-2, 2) - \{0\} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \in (-2, 2) - \{0\} \quad (\text{II})$$

اجتماع جواب‌های I و II برابر است با $\{0, 2\} - (-2, +\infty)$.

$$(x-2)f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2, 0$$

در نهایت جواب نامعادله برابر $[-2, +\infty)$ می‌شود.

(مسایان- صفحه‌های ۳۱ و ۳۲)

۱۱- گزینهی «۴»

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= Q'(x)(x^2 + 2x + 5) + x \\ f(x) &= Q(x)(x^2 + 2x + 5) + (x-1) \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\times} f(x).g(x) = (x^2 + 2x + 5)((x^2 + 2x + 5)Q'(x)Q(x) + (x-1)Q'(x) + xQ(x)) + x(x-1)$$

لذا برای تعیین باقیمانده، کفایت $x(x-1)$ را بر $x^2 + 2x + 5$ تقسیم

کنیم:

$$x^2 - x = (x^2 + 2x + 5) - 3x - 5$$

باقیمانده

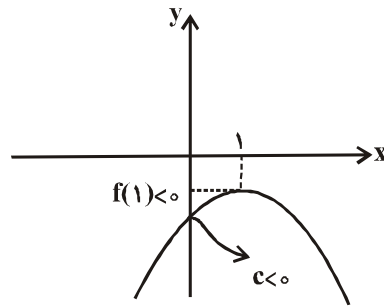
(مسایان- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۲- گزینهی «۳»

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر می‌گیریم. چون $a + b + c < 0$

پس $f(1) < 0$ و چون $f(x)$ فاقد ریشه است، پس نمودار آن به شکل

تقریبی زیر است، بنابراین $a < 0$ و همچنین $f(0) < 0$ ، یعنی $c < 0$.



(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

۱۳- گزینهی «۴»

با توجه به این که $a = 1 > 0$ است، بنابراین تابع می‌نیمم دارد. برای این که

تابع از ناحیه‌ی چهارم نگذرد، سه حالت به وجود می‌آید:

۱- تابع دو ریشه‌ی نامثبت داشته باشد. ($\Delta > 0$)

۲- تابع ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. ($\Delta = 0$)

۳- تابع ریشه نداشته باشد. ($\Delta < 0$)

اگر $\Delta > 0$ باشد، با توجه به این که $\frac{-b}{a} = 1 > 0$ است، بنابراین تابع

نمی‌تواند دو ریشه‌ی نامثبت داشته باشد. بنابراین نتیجه می‌شود: $\Delta \leq 0$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 1 - 4k \leq 0 \Rightarrow k \geq \frac{1}{4}$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۱۴- گزینهی «۳»

چون $x^2 + 2$ یک عامل عبارت $f(x)$ است، بنابراین باقیمانده‌ی تقسیم

f بر $x^2 + 2$ برابر صفر است. در نتیجه:

$$f(x) = (x^2 + 2)Q(x) + R \Rightarrow x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$$

پس $f(x)$ را بر حسب توان x^2 مرتب می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(x) = (x^2)^2 + ax^2(x) - 2x - b$$

$$\xrightarrow{x^2 = -2} R = (-2)^2 - 2ax - 2x - b = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 2ax - 2x - b = 0 \Rightarrow (4 - b) - 2x(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

پس تابع f به صورت $f(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4$ است و با تقسیم آن بر

$x^2 + 2$ ، خارج‌قسمت برابر $x^2 - x - 2$ به دست می‌آید و داریم:

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 + 2)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2)(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$$

پس بزرگ‌ترین جواب معادله‌ی $f(x) = 0$ ، برابر ۲ است.

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۵- گزینهی «۲»

$$(2x^{15} + 3x^8 + x^3 + 5x - 1) = (x + 1)Q(x) + R$$

$$x = -1 \Rightarrow R = -2 + 3 - 1 - 5 - 1 = -6$$

$$\Rightarrow 2x^{15} + 3x^8 + x^3 + 5x - 1 = (x + 1)Q(x) - 6$$

مجموع ضرایب خارج‌قسمت همان $Q(1)$ می‌باشد، پس کافی است $x = 1$

را قرار دهیم:

$$2 + 3 + 1 + 5 - 1 = 2Q(1) - 6 \Rightarrow Q(1) = 8$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۶- گزینهی «۱»

$$\left(2 - \frac{x+2}{x-3}\right)\left(1 + \frac{x+2}{x-8}\right) = x^2 - 7 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2(x-3) - (x+2)}{x-3}\right)\left(\frac{(x-8) + (x+2)}{x-8}\right) = x^2 - 7$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-8}{x-3}\right)\left(\frac{2(x-3)}{x-8}\right) = x^2 - 7 \Rightarrow 2 = x^2 - 7$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

اما $x = 3$ ، در معادلهی (*) ریشهی مخرج کسر است، پس آن را قبول نمی‌کنیم.

(مسئله‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۷- گزینهی «۴»

$$\frac{3x-1}{4x^2+1} + \frac{4x^2+1}{3x-1} = \frac{1}{3} \xrightarrow{a=\frac{3x-1}{4x^2+1}} a + \frac{1}{a} = \frac{1}{3} \quad (*)$$

اگر $a > 0$ ، $a + \frac{1}{a} \geq 2$ و اگر $a < 0$ ، $a + \frac{1}{a} \leq -2$ است. بنابراین معادلهی (*) فاقد جواب حقیقی است.

(مسئله‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۸- گزینهی «۳»

با توجه به متناهی بودن حد مجموع داریم $|q| < 1$.

جملات دنباله: a, aq, aq^2, \dots

مربعیات جملات دنباله: $a^2, a^2q^2, a^2q^4, \dots$

مکعبیات جملات دنباله: $a^3, a^3q^3, a^3q^6, \dots$

$$\frac{a^2}{1-q^2} = \frac{a^3}{1-q^3} \Rightarrow \frac{1}{(1-q)(1+q)} = \frac{a}{(1-q)(1+q+q^2)}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1+q+q^2}{1+q} = 1 + \frac{q^2}{1+q}$$

$$|q| < 1 \Rightarrow -1 < q < 1 \Rightarrow 0 < q+1 < 2$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{q+1} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{q^2}{q+1} > 1 \Rightarrow a > 1$$

بنابراین a متعلق به بازه $(1, +\infty)$ است.

(مسئله‌های ۲ تا ۵)

۱۹- گزینهی «۲»

با توجه به معادلهی $x^2 - 3x + 1 = 0$ ، داریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3$$

$$\sqrt{\alpha^2\beta + \beta} = \sqrt{(\alpha\beta)\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{3}$$

(مسئله‌های ۱۵ تا ۱۷)

۲۰- گزینهی «۱»

$$a_7 + a_{22} = (a_1 + 6d) + (a_1 + 21d) = 20 \\ \Rightarrow 2a_1 + 27d = 20 \Rightarrow a_1 + 13.5d = 10 \Rightarrow a_{15} = 10 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= S_n - S_0 \\ S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + nd) = na_1 + \frac{n^2d}{2} \\ S_n &= 20a_1 + 190d \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow S_7 - S_9 = 11a_1 + 154d = 11(a_1 + 14d) = 11 \times a_{15} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S_7 - S_9 = 11 \times 10 = 110$$

(مسئله‌های ۲ تا ۶)

۲۱- گزینهی «۳»

ابتدا ک.م.م شعاع استوانه‌ها را می‌یابیم:

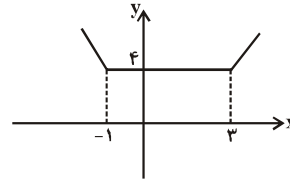
$$\left. \begin{aligned} 50 &= 5^2 \times 2 \\ 60 &= 2^2 \times 3 \times 5 \\ 70 &= 2 \times 5 \times 7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = 2^2 \times 5^2 \times 3 \times 7$$

$$\Rightarrow \frac{2100}{70} = 30 = \text{تعداد دور غلطک بزرگ}$$

(مسئله‌های ۱۱ تا ۱۵)

۲۶- گزینهی «۳»

نمودار تابع $y = |x - 3| + |x + 1|$ به شکل مقابل است:



واضح است که خط $y = 4$ در بی‌شمار نقطه نمودار را قطع می‌کند و

معادلهی $|x - 3| + |x + 1| = 4$ دارای بی‌شمار جواب است که همان

بازهی $[-1, 3]$ است. بنابراین داریم:

$$m = 4, b = 3, a = -1$$

و بازهی $(a - m, b + m)$ به صورت $(-5, 7)$ است که شامل ۱۱ عدد

صحیح است.

(مسئله‌ها، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۹)

۲۷- گزینهی «۳»

با توجه به این‌که در تصاعد حسابی A ، قدر نسبت برابر ۴ و در تصاعد

حسابی B ، قدر نسبت برابر ۷ است، بنابراین قدرنسبت دنباله‌ی جمله‌های

مشترک این دو تصاعد، برابر کوچک‌ترین مضرب مشترک ۴ و ۷ یعنی ۲۸

است و داریم:

$$\begin{cases} A = 1, 5, 9, 13, 17, \dots \\ B = 3, 10, 17, \dots \end{cases} \Rightarrow 17 = \text{اولین جمله مشترک}$$

بنابراین این دنباله، دنباله‌ای با جمله‌ی اول ۱۷ و قدر نسبت ۲۸ است:

$$\text{جمله‌ی عمومی} = 17 + (n - 1)28$$

$$100 \leq 17 + (n - 1)28 < 1000 \Rightarrow 83 \leq (n - 1)28 < 983$$

$$\Rightarrow 2 / \dots \leq n - 1 < 35 / \dots \Rightarrow 3 \leq n - 1 \leq 35 \Rightarrow 4 \leq n \leq 36$$

بنابراین ۳۳ عدد سه رقمی مشترک در دنباله‌های A و B وجود دارد.

(مسئله‌ها - صفحه‌ی ۱۵)

۲۸- گزینهی «۲»

$$\frac{(2x^8 - 3)^n}{x^{fn}} = \left(\frac{2x^8 - 3}{x^f}\right)^n = (2x^{\frac{8}{f}} - \frac{3}{x^f})^n = (2x^{\frac{8}{f}} - 3x^{-\frac{f}{f}})^n$$

جمله‌ی مستقل از x ، جمله‌ی دهم بسط دو جمله‌ای است بنابراین:

$$\text{جمله‌ی دهم: } \binom{n}{9} (2x^{\frac{8}{f}})^{n-9} (-3x^{-\frac{f}{f}})^9$$

$$= \binom{n}{9} (2)^{n-9} (-3)^9 (x)^{fn - \frac{8}{f}(n-9) - 9}$$

$$= \binom{n}{9} (2)^{n-9} (-3)^9 x^{fn - \frac{8}{f}n + \frac{72}{f} - 9} = \binom{n}{9} 2^{n-9} (-3)^9 x^{fn - 72}$$

$$fn - 72 = 0 \Rightarrow n = 18$$

نکته: جمله‌ی $(k + 1)$ ام بسط دو جمله‌ای $(a + b)^n$ به صورت

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k \text{ است.}$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

۲۹- گزینهی «۳»

$$\frac{4}{x^2 + x + 1} + x^2 + x - 2 \leq 0$$

اگر فرض کنیم $x^2 + x + 1 = A$ داریم:

$$\frac{4}{A} + A - 4 \leq 0$$

با توجه به این‌که $A > 0$ ، است $(a > 0, \Delta < 0)$ دو طرف نامعادله را در

A ضرب می‌کنیم:

$$A^2 - 4A + 4 \leq 0 \Rightarrow (A - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = -1$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۳۰- گزینهی «۱»

برای این که نمودار $m + f(x)$ محور x ها را در -۳ قطع کند، باید $f(x) + m$ بر $(x + ۳)$ بخش پذیر باشد.

$$f(x) + m = (x + ۳)Q(x) \xrightarrow{x=-۳} f(-۳) + m = ۰ \Rightarrow m = -f(-۳)$$

$$f(۲x-1) = ۲x^۲ + ۳x^۲ + ۵x + ۲ \xrightarrow{x=-1}$$

$$f(-۳) = -۲ + ۳ - ۵ + ۲ = -۲ \Rightarrow m = ۲$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۶ تا ۸)

۳۱- گزینهی «۲»

ابتدا چند جمله‌ای مربوط به ضابطه‌ی تابع f را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$f(x) = x^۳ - ۴x^۲ - x + ۴ = (x^۳ - x) + (۴ - ۴x^۲)$$

$$= x(x^۲ - 1) - ۴(x^۲ - 1) = (x - ۴)(x^۲ - 1) = (x - ۴)(x - 1)(x + 1)$$

حال، ضابطه‌ی تابع f را به ازای x های مختلف، مطابق جدول زیر تعیین علامت می‌کنیم:

x		-1	1	4
$f(x)$		$-$	$+$	$-$

پس تابع f به ازای $x > -1$ در فاصله‌ی $(1, 4)$ پایین محور x ها قرار دارد، بنابراین:

$$\text{Max}(b - a) = 4 - 1 = ۳$$

(مسئله‌ها، صفحه‌های ۳۹، ۴۰ و ۴۲)

۳۲- گزینهی «۲»

$$(۲ + \sqrt{۳})^n = A + B\sqrt{۳} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} (۲ - \sqrt{۳})^n = A - B\sqrt{۳}$$

از ضرب و جمع طرفین دو معادله داریم:

$$\begin{cases} (۲ + \sqrt{۳})^n = A + B\sqrt{۳} \\ (۲ - \sqrt{۳})^n = A - B\sqrt{۳} \end{cases}$$

$$A^۲ - ۳B^۲ = 1, (۲ + \sqrt{۳})^n + (۲ - \sqrt{۳})^n = ۲A$$

$$\Rightarrow \text{عبارت مورد نظر} = \frac{A(A^۲ - ۳B^۲)}{۲A} = \frac{A \times 1}{۲A} = \frac{1}{۲}$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۳۳- گزینهی «۲»

با توجه به این که به ازای $x = 1$ مخرج کسر اول صفر و به ازای $x = -1$ مخرج کسر دوم صفر می‌شود، این دو مخرج به ترتیب بر $(x - 1)$ و $(x + 1)$ بخش پذیرند.

$$\frac{x^۲ + ۴x - ۵}{x^۳ - ۲x^۲ + 1} - \frac{x^۲ + x}{x^۳ - ۲x - 1} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x^۲-x-1)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^۲-x-1)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+5-x}{x^۲-x-1} = 1 \Rightarrow x^۲-x-1=5 \Rightarrow x^۲-x-6=0$$

$$(x-۳)(x+۲) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۲ \end{cases}$$

جواب‌های به دست آمده در معادله‌ی اصلی صدق می‌کنند، پس معادله‌ی گویای داده شده دو جواب دارد.

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۳۴- گزینهی «۱»

با توجه به این که $x^۲ + x + 1$ همواره مثبت است. پس

$$|x^۲ + x + 1| = x^۲ + x + 1$$

$$|x^۲ + kx + 1| < ۲x^۲ + ۲x + ۳$$

$$\Rightarrow -۲x^۲ - ۲x - ۳ < x^۲ + kx + 1 < ۳x^۲ + ۳x + ۳$$

$$x^۲ + kx + 1 < ۳x^۲ + ۳x + ۳ \Rightarrow ۲x^۲ + (۳-k)x + ۲ > ۰$$

$$\begin{cases} b^۲ - ۴ac = (۳-k)^۲ - ۱۶ < ۰ \Rightarrow -۴ < ۳-k < ۴ \Rightarrow -۷ < -k < ۱ \\ \Rightarrow -1 < k < ۷ \\ a > ۰ \end{cases}$$

$$x^۲ + kx + 1 > -۳x^۲ - ۲x - ۳ \Rightarrow ۴x^۲ + (k+۲)x + ۴ > ۰$$

$$\begin{cases} b^۲ - ۴ac = (k+۲)^۲ - ۶۴ < ۰ \Rightarrow -۸ < k+۲ < ۸ \Rightarrow -11 < k < ۵ \\ a > ۰ \end{cases}$$

چون باید دو نامعادله برقرار باشد، از دو مجموعه‌ی جواب اشتراک می‌گیریم.

$$(-1, 7) \cap (-11, 5) = (-1, 5) \Rightarrow -1 < k < ۵$$

(مسئله‌ها - صفحه‌های ۳۱ تا ۳۹ و ۱۶ و ۱۷)

۳۵- گزینهی «۱»

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = a_1 n + \frac{n^2 d}{2} - \frac{nd}{2}$$

یعنی S_n درجهی ۲ است، بنابراین ضریب جملهی درجهی ۳ آن باید صفر باشد.

$$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow S_n = bn^2 + 2n$$

$$a_4 = S_4 - S_3 \Rightarrow 9 = (16b + 8) - (9b + 6)$$

$$\Rightarrow 7b + 2 = 9 \Rightarrow b = 1$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۲ تا ۶)

۳۶- گزینهی «۳»

$$f(x+1) = (x-1)^2 Q(x) + (x+10)$$

به جای تمام x ها عبارت $(x-1)$ می‌گذاریم:

$$f(x) = (x-2)^2 Q(x-1) + (x+9)$$

حال طرفین رابطه‌ی به‌دست آمده را در $x+1$ ضرب می‌کنیم:

$$(x+1)f(x) = (x+1)(x-2)^2 Q(x-1) + (x+1)(x+9)$$

با توجه به این که $(x+1)(x-2)^2$ بر $x^2 - x - 2$ بخش پذیر است،

کافیست باقیمانده‌ی عبارت $(x+1)(x+9)$ را بر $x^2 - x - 2$ بیابیم:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 2 \quad (*)$$

$$(x+1)(x+9) = x^2 + 10x + 9 \stackrel{(*)}{=} 11x + 11 = R(x)$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۶ تا ۸)

۳۷- گزینهی «۳»

چون $x \leq 0$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x = -(\sqrt{-x})^2$$

$$-(\sqrt{-x})^2 + 3\sqrt{-x} + 18 > 0 \Rightarrow (\sqrt{-x})^2 - 3\sqrt{-x} - 18 < 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{-x} - 6)(\sqrt{-x} + 3) < 0$$

عبارت $\sqrt{-x} + 3$ همواره مثبت است. بنابراین:

$$\sqrt{-x} - 6 < 0 \Rightarrow \sqrt{-x} < 6 \Rightarrow -x < 36 \Rightarrow x > -36$$

پس اعداد صحیح منفی متعلق به مجموعه‌ی جواب نامعادله عبارت‌اند از:

$$\{-35, -34, \dots, -1\}$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۳۸- گزینهی «۱»

$$\alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0, \beta^2 - 5\beta + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}, \beta = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{\alpha \neq \beta}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \beta = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)x + \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}\right)x + 1 = 0$$

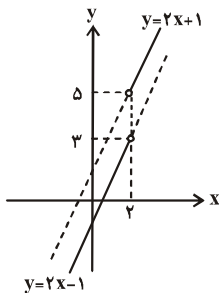
$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{5^2 + 2 \cdot 6}{4} = 19, \alpha\beta = \frac{2 \cdot 5 - 13}{4} = 2$$

$$x^2 - \frac{19}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 19x + 2 = 0$$

(مسئله‌بان - صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۳۹- گزینهی «۲»

$$y = 2x + \frac{|x-2|}{x-2} \Rightarrow y = \begin{cases} 2x+1 & ; x > 2 \\ 2x-1 & ; x < 2 \end{cases}$$



اگر خط به معادله‌ی $y = y_0$ نمودار تابع را قطع نکند، آنگاه بیش‌ترین

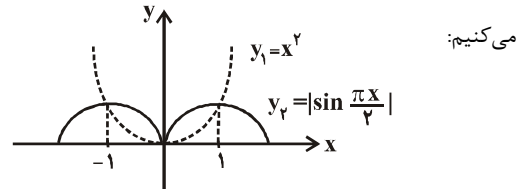
مقدار y_0 برابر پنج و کم‌ترین مقدار آن برابر سه است، پس با توجه به

صورت سؤال، بیش‌ترین مقدار $b - a$ برابر است با $5 - 3 = 2$.

(مسئله‌بان، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۴۰- گزینهی «۱»

می‌دانیم $0 < \frac{1}{4} < 1$ ، پس: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} \Rightarrow \left|\sin \frac{\pi x}{4}\right| \geq x^2$
 نمودارهای $y_1 = x^2$ و $y_2 = \left|\sin \frac{\pi x}{4}\right|$ را در یک دستگاه مختصات رسم

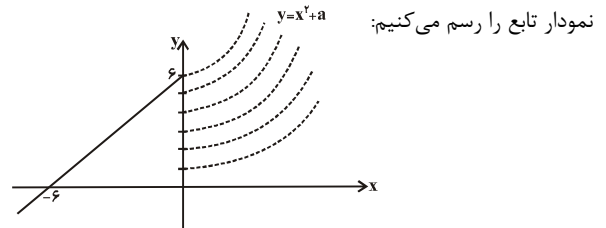


می‌کنیم:
 با توجه به دو نمودار مجموعه جواب نامعادله به صورت $-1 \leq x \leq 1$ در می‌آید، پس: $b - a = 2$

(مسئله‌های ۳۱ و ۳۲)

فصل ۲: تابع

۴۱- گزینهی «۱»

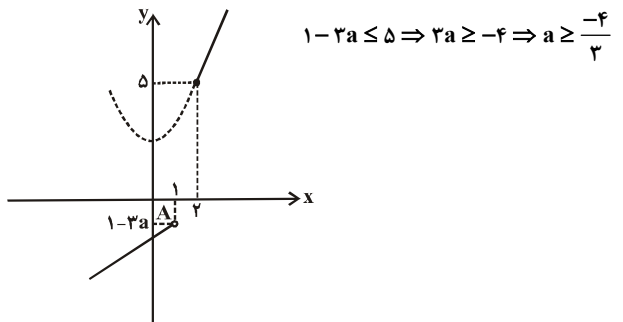


نمودار تابع را رسم می‌کنیم:
 برای این که تابع معکوس پذیر نباشد، باید تابع یک‌به‌یک نباشد. پس اگر $a \geq 6$ باشد، تابع یک‌به‌یک است و اگر a مقادیر طبیعی $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را اختیار کند، یک‌به‌یک نیست و در نتیجه معکوس پذیر هم نمی‌باشد.

(مسئله‌های ۱۵ تا ۹۴)

۴۲- گزینهی «۳»

نمودار تابع را رسم می‌کنیم، برای آن که تابع f صعودی باشد، باید عرض نقطه A از عرض نقطه‌ی $(2, 5)$ بیش‌تر نباشد، بنابراین:



(مسئله‌های ۸۰)

۴۳- گزینهی «۱»

$$\begin{cases} \frac{1}{|x-1|} \leq 1 \xrightarrow{x \neq 1} |x-1| \geq 1 \\ \frac{1}{|x-2|} \leq 1 \xrightarrow{x \neq 2} |x-2| \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \leq -1 \text{ یا } x-1 \geq 1 \\ x-2 \leq -1 \text{ یا } x-2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \text{ یا } x \geq 2 \\ x \leq 1 \text{ یا } x \geq 3 \end{cases} \cap \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$$

(مسئله‌های ۱۳۴ تا ۱۳۷)

۴۴- گزینهی «۳»

با توجه به ضابطه‌ی تابع، برد تابع برابر است با:

$$R_f = (-\infty, a^3 + 2] \cup [3a + 4, +\infty)$$

بنابراین برای این که برد تابع برابر R باشد باید:

$$\begin{aligned} 3a + 4 &\leq a^3 + 2 \Rightarrow a^3 - 3a - 2 \geq 0 \Rightarrow a^3 - a - 2a - 2 \geq 0 \\ &\Rightarrow a(a-1)(a+1) - 2(a+1) \geq 0 \Rightarrow (a+1)(a^2 - a - 2) \geq 0 \\ &\Rightarrow (a+1)^2(a-2) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{(a+1)^2 \geq 0}{(a+1)^2 \geq 0} \Rightarrow a \in [2, +\infty) \cup \{-1\} \Rightarrow \min\{a\} = -1$$

(مسئله‌های ۳۴ تا ۳۷ و ۵۰ تا ۵۱)

۴۵- گزینهی «۳»

نمودار تابع $y = k \cos x$ را وقتی $\frac{\pi}{4}$ واحد به راست منتقل می‌کنیم،

نمودار تابع $y = k \sin x$ به دست می‌آید.

$$y = k \cos x \xrightarrow{\text{واحد به راست } \frac{\pi}{4}} y = k \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = k \sin x$$

با توجه به این که نقطه‌ی $(\frac{\pi}{5}, 1)$ بر روی نمودار $y = k \cos x$ قرار دارد،

داریم:

$$\begin{aligned} y &= k \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \Rightarrow y = k \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= k \cos\left(-\frac{\pi}{20}\right) = k \cos \frac{\pi}{20} = 1 \end{aligned}$$

(مسئله‌های ۵۴ تا ۶۴)