فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: خیلی خوب
سبز: متوسط
زرد: به این قسمت مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول، به آن مبحث مسلط نبودید و دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید، در نوبت‌های بعدی مطالعه و تمرین، در صورتی که پیشرفت کردید می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید.

ترسیم‌های هندسی و استدلال

- **ترسیم‌های هندسی** (آبی / سبز / زرد)
  - ویژگی‌های نیمساز یک زاویه
  - ویژگی عمود منصف یک پاره‌خط
  - رسم خطوط موازی و عمود
- **استدلال** (آبی / سبز / زرد)
  - استدلال استنتاجی
  - گزاره‌های شرطی
  - مثال نقض
  - برهان خلف
  - قضیه و عکس قضیه

تعداد مثال
۹۳
تعداد سؤالات تستی
۵۳
تعداد سؤالات تشریحی
٤٠

فصل اول

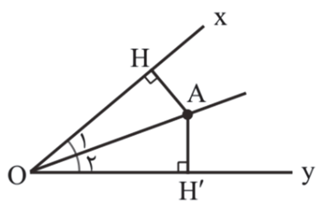
ترسیم‌های هندسی و استدلال

ویژگی نیمساز یک زاویه: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

▼ **مثال۱: ویژگی فوق را ثابت کنید.** (کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحه‌ی ۱۱)

☑ **پاسخ:** *الف) فرض کنید نقطه‌ی A روی نیمساز زاویه‌ی xOy باشد.*

از A، دو عمود AH و AH' را به‌ترتیب بر نیم‌خط‌های Ox، Oy رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} OA = OA \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAH \overset{\text{(وتر و یک زاویه ی حاده)}}{\cong} \Delta OAH' \Rightarrow AH = AH'$$

ب) فرض کنید طول عمودهای رسم شده از نقطه‌ی A بر نیم‌خط‌های Ox و Oy، یعنی AH و AH' برابر یکدیگر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} OA = OA \\ AH = AH' \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAH \overset{\text{(وتر و یک ضلع قائمه)}}{\cong} \Delta OAH' \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

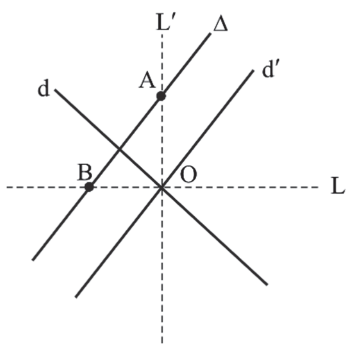
▼ **مثال۲: دو خط d و d' در نقطه‌ی O متقاطع‌اند. اگر خط Δ، موازی یکی از این دو خط باشد، آن‌گاه چند نقطه روی Δ می‌توان یافت که از d و d' به یک فاصله باشند؟** (کتاب درسی،مکمل و مشابه فعالیت صفحه‌ی ۱۱)

۱) هیچ **۲) ۱** **۳) ۲** **۴) بی‌شمار**

☑ **پاسخ:** *گزینه ۳*

مطابق شکل، دو خط L و L'، نیمساز زاویه بین خطوط d و d' هستند. تمام نقاط واقع بر دو خط L و L'، از خطوط d و d' به یک فاصله‌اند، پس نقاط A و B که محل تلاقی خط Δ با این دو خط است، از خطوط d و d' به یک فاصله هستند.

بنابراین گزینه‌ی «۳» صحیح است.



مثال۳: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از چهار ضلع مستطیل $ABCD$ $(AB > BC)$ به یک فاصله باشند کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با فعالیت صفحه‌ی ۱۱- آزمون کانون - ۷ آذر ۹۳)

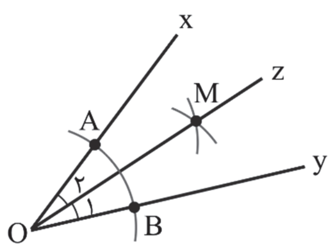
۱) خطی به موازات AB
۲) خطی به موازات BC
۳) محل تقاطع دو قطر مستطیل
۴) تهی

پاسخ: گزینه «۴»

نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک مستطیل به یک فاصله باشند، روی نیمساز زاویه‌ی حاصل از برخورد آن دو ضلع قرار دارند. بنابراین نقاطی از صفحه که از چهارضلع مستطیل $ABCD$ به یک فاصله باشند، باید روی محل تلاقی نیمسازهای چهار زاویه‌ی آن مستطیل قرار داشته باشند که با توجه به آن که نیمسازهای زاویه‌های یک مستطیل، همرس نیستند، چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

بنابراین گزینه‌ی «۴» صحیح است.

مثال۴: زاویه‌ی xOy مفروض است. به کمک خط‌کش و پرگار، نیمساز این زاویه را رسم کنید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحه‌ی ۱۲)

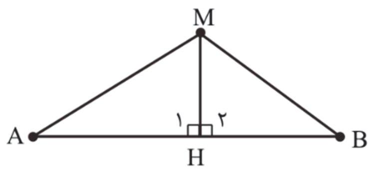


پاسخ: ابتدا دهانه‌ی پرگار را کمی باز کرده و به مرکز O، کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B، قطع کند. سپس دهانه‌ی پرگار را به مقداری بیش‌تر از نصف طول AB باز کرده و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند. از نقطه‌ی M به O وصل کرده و OM را از سمت M امتداد می‌دهیم. با توجه به آن‌که دو مثلث OAM و OBM به حالت تساوی سه‌ضلع هم‌نهشت هستند، بنابراین نیم‌خط Oz (شامل نقطه‌ی M) نیمساز زاویه‌ی xOy است.

ویژگی عمود منصف یک پاره‌خط: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد.

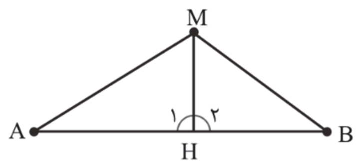
مثال۵: ویژگی فوق را ثابت کنید. (کتاب درسی،مکمل و مشابه فعالیت صفحه‌ی ۱۳)

پاسخ: الف) نقطه‌ی M را روی عمود منصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم. از M به A و B وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array}\right\} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\Rightarrow} \Delta AMH \cong \Delta BMH \Rightarrow MA = MB$$

ب) فرض کنید نقطه‌ی M از نقاط A و B به یک فاصله باشد.



از نقطه M به نقاط A، B و H (وسط AB) وصل می‌کنیم.

چون $MA = MB$، پس مثلث MAB متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{A} = \hat{B}$.

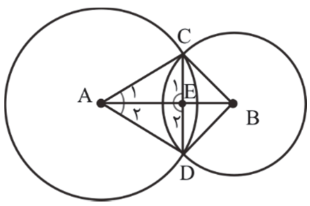
$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ \hat{A} = \hat{B} \\ AH = BH \end{array}\right\} \overset{\text{(ض ز ض)}}{\Rightarrow} \Delta MAH \cong \Delta MBH \overset{\text{از طرفی}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

پس MH عمود منصف پاره‌خط AB است.

▼مثال۶: دو دایره به مرکزهای A و B، همدیگر را در نقاط C و D قطع کرده‌اند. ثابت کنید AB، عمود منصف CD است.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحه‌ی ۱۳)

☑**پاسخ:** *مطابق شکل از نقاط C و D، به نقاط A و B وصل می‌کنیم. اگر AB و CD، همدیگر را در نقطه‌ی E قطع کنند، داریم:*



$$\left.\begin{array}{ll} AC = AD & (\text{شعاع دایره‌ی بزرگ}) \\ BC = BD & (\text{شعاع دایره‌ی کوچک}) \\ AB = AB & \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ض ض ض})} \Delta ABC \cong \Delta ABD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AE = AE \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta ACE \cong \Delta ADE \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} CE = CD \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 90^\circ \end{array}\right.$$

بنابراین AB، عمودمنصف CD است.

▼مثال۷: خط d و نقاط A و B در یک صفحه قرار دارند. تعداد نقاط واقع بر خط d که از نقاط A و B به یک فاصله هستند، کدام نمی‌تواند باشد؟

(کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحه‌ی ۱۳)

۱) هیچ | **۲) ۱** | **۳) ۲** | **۴) بی‌شمار**

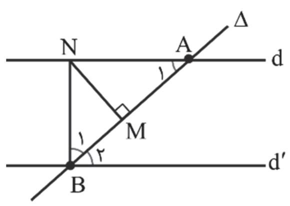
☑**پاسخ:** *نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله باشند، روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارند. حال اگر عمود منصف پاره‌خط AB و خط d متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد. در صورتیکه عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب و سرانجام در صورتی که عمودمنصف پاره‌خط AB موازی d و غیر منطبق بر آن باشد، مسئله فاقد جواب است.*

بنابراین گزینه‌ی «۳» صحیح است.

▼مثال۸: خط Δ، خطوط موازی d و d′ را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر در نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB، خطی بر Δ عمود کنیم به گونه‌ای که d را در نقطه‌ی N قطع کند، ثابت کنید AB نیمساز یکی از زاویه‌هایی است که NB با خط d′ می‌سازد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحه‌ی ۱۳)

☑**پاسخ:** *مطابق شکل MN عمود منصف پاره‌خط AB است، پس NA = NB و در نتیجه در مثلث متساوی‌الساقین ANB، $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ می‌باشد. از طرفی بنا به قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:*

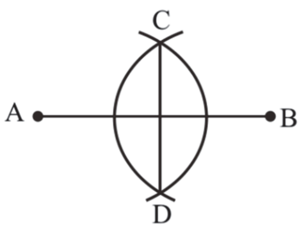


$$\left.\begin{array}{l} d \parallel d' \\ AB \ \text{مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$$

بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$ است، یعنی AB نیمساز زاویه‌ی بین خط d′ و NB می‌باشد.

▼مثال۹: پاره‌خط AB مفروض است. به کمک خط‌کش و پرگار، عمود منصف این پاره‌خط را رسم کنید.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحه‌ی ۱۴)



☑**پاسخ:** *دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B، دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط C و D قطع کنند.*

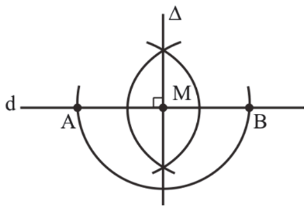
چون نقاط C و D هر دو از A و B به یک فاصله هستند، پس روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارند، بنابراین عمود منصف پاره‌خط AB با وصل‌کردن نقاط C و D به یکدیگر حاصل می‌شود.

نکته: با استفاده از ویژگی عمود منصف یک پاره‌خط، می‌توان خطوطی عمود بر یک خط دلخواه و یا موازی یک خط دلخواه رسم کرد.

▼ مثال۱۰: خط d و نقطه‌ی M واقع بر آن مفروض هستند. با کمک خط‌کش و پرگار، خطی رسم کنید که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

(کتاب درسی،مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۴)

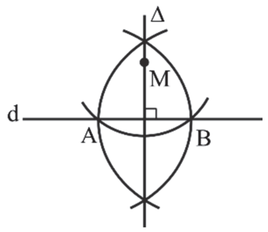
پاسخ: ابتدا به مرکز M، کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند. سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌نماییم. با توجه به آن‌که $MA = MB$ است، واضح است که این عمود منصف از نقطه‌ی M گذشته و در این نقطه بر خط d عمود است.



▼ مثال۱۱: خط d و نقطه‌ی M خارج آن مفروض هستند. با کمک خط‌کش و پرگار، خطی رسم کنید که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۵)

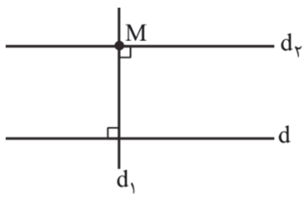
پاسخ: ابتدا به مرکز M، کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند (دهانه‌ی پرگار باید بیش‌تر از فاصله‌ی نقطه‌ی M تا خط d باز شود) سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. با توجه به آن که $MA = MB$، این عمود منصف از نقطه‌ی M می‌گذرد و بر خط d که پاره‌خط AB واقع برآن است، عمود می‌باشد.



▼ مثال۱۲: خط d و نقطه‌ی M خارج آن مفروض‌اند. با کمک خط‌کش و پرگار خطی موازی d رسم کنید که از نقطه‌ی M عبور کند.

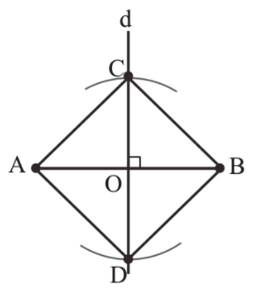
(کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۵)

پاسخ: ابتدا به کمک مثال ۱۱ خط d_1 را از نقطه‌ی M بر d عمود رسم می‌کنیم. سپس به کمک مثال ۱۰، خط d_2 را در نقطه‌ی M بر خط d_1 عمود رسم می‌کنیم. از آن‌جا که دو خط d_1 و d_2 هر دو بر d_1 عمود هستند، پس d_2 موازی d می‌باشد و چون از نقطه‌ی M عبور می‌کند، پس جواب مسأله است.



▼ مثال۱۳: مربعی رسم کنید که پاره‌خط AB، یکی از قطرهای آن باشد. (کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۶)

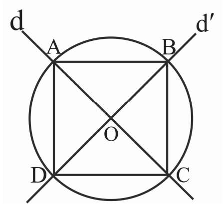
پاسخ: می‌دانیم در یک مربع، قطرها عمود منصف یکدیگرند. پس برای رسم این مربع، ابتدا عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. محل برخورد خط d (عمود منصف پاره‌خط AB) و پاره‌خط AB را نقطه‌ی O می‌نامیم. واضح است که O وسط پاره‌خط AB می‌باشد. حال به مرکز O و به شعاع OA، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه‌ی C و D قطع کند. نقاط A و B را به نقاط C و D وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ACBD$ جواب مسأله است.



▼ مثال۱۴: **می‌دانیم چند ضلعی‌ای که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.**

(کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۲، صفحه‌ی ۱۶)

☑ پاسخ: دو خط متقاطع d و d' را که در نقطه‌ی O یکدیگر را قطع می‌کنند، در نظر می‌گیریم. به مرکز O و به شعاع ۳ سانتی‌متر، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و C و خط d' را در نقاط B و D قطع نماید. چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است و جواب مسئله می‌باشد. واضح است که به ازای هر دو خط متقاطع دلخواه، یک مستطیل با طول قطر ۶ سانتی‌تر قابل رسم است، پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

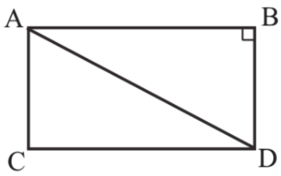


▼ مثال۱۵: **چند مستطیل متمایز می‌توان رسم کرد که طول یک ضلع آن ٤ و طول قطر آن ۵ باشد؟** (کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۲ صفحه‌ی ۱۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ٤ ٤) بی‌شمار

☑ پاسخ: طول و عرض مستطیل به همراه قطر آن، یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌کند. بنابراین در مثلث ABC داریم:

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow ۵^۲ = ۴^۲ + BC^۲ \Rightarrow BC = ۳$$

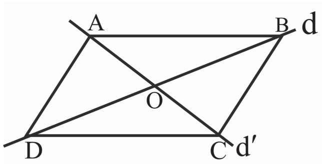


با توجه به قضیه فیثاغورس طول ضلع دیگر مستطیل برابر ۳ به دست می‌آید. با توجه به آن که $۴ > ۳$، پس در این مستطیل، تنها حالت ممکن آن است که طول برابر ۴ و عرض برابر ۳ باشد. یعنی با اطلاعات داده شده، یک و تنها یک مستطیل قابل رسم است.
بنابراین گزینه‌ی «۱» صحیح است.

▼ مثال۱۶: **می‌دانیم چهارضلعی‌ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند، متوازی الاضلاع است. متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد.**

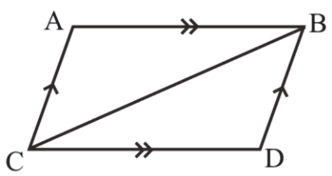
(کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۱، صفحه‌ی ۱۶)

☑ پاسخ: دو خط متقاطع d و d' را که همدیگر را در نقطه‌ی O قطع می‌کنند، در نظر می‌گیریم. روی خط d و در دو طرف نقطه‌ی O، نقاط B و D را به فاصله‌ی ۳/۵ واحد از O جدا می‌کنیم. همچنین روی خط d' و در دو طرف نقطه‌ی O، نقاط A و C را به فاصله‌ی ۲ واحد از O جدا می‌کنیم. چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است و جواب مسئله می‌باشد. واضح است که به ازای هر دو خط متقاطع دلخواه، یک متوازی الاضلاع با طول قطرهای ۴ و ۷ واحد قابل رسم است، پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.



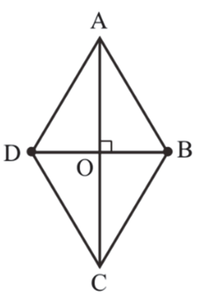
▼ مثال۱۷: **متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۳ و ۵ و طول قطر آن برابر ۶ باشد.** (کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۱۶)

☑ پاسخ: ابتدا مثلث ABC را که در آن $AB = ۵$ ، $AC = ۳$ و $BC = ۶$ می‌باشد، رسم می‌کنیم (ابتدا پاره‌خط $AB = ۵$ را رسم کرده و سپس به مرکز A و به شعاع ۳ و به مرکز B و به شعاع ۶، دو کمان رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی C قطع کنند). حال از نقطه‌ی B، خطی موازی AC و از نقطه‌ی C، خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی D قطع کنند. چهارضلعی $ABDC$، متوازی‌الاضلاع است و جواب مسئله می‌باشد.



▼ مثال۱۸: **لوزی‌ای رسم کنید که طول ضلع آن ۵ و طول یکی از قطرهای آن برابر ۶ باشد.** (کتاب درسی،مکمل و مشابه تمرین ۵، صفحه‌ی ۱۷)

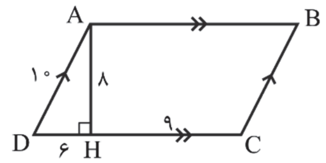
☑ پاسخ: می‌دانیم در لوزی، قطرها عمود منصف یکدیگرند. حال در مثلث OAB، با فرض $AB = ۵$ و $OB = ۳$ با کمک قضیه‌ی فیثاغورس، $OA = ۴$ به دست می‌آید. بنابراین برای رسم لوزی، ابتدا مثلث OAB را با داشتن طول سه‌ضلع آن رسم می‌کنیم. سپس AO را از سمت O به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی C به دست آید و به‌طور مشابه، BO را از سمت O به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی D حاصل شود. چهارضلعی $ABCD$ جواب مسئله است.



▼ مثال۱۹: متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول دو ضلع آن ۱۵ و ۱۰ و طول ارتفاع وارد بر ضلع بزرگتر آن برابر ۸ باشد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۱۶)

پاسخ: مطابق شکل در مثلث ADH داریم:



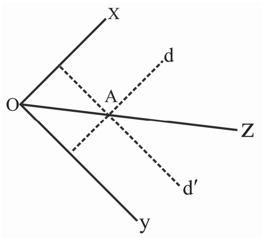
$$AD^2 = AH^2 + DH^2 \Rightarrow 10^2 = 8^2 + DH^2 \Rightarrow DH = 6$$

حال مثلث ADH با داشتن طول سه‌ضلع آن، قابل رسم است.
DH را از سمت H به اندازه‌ی ۹ واحد امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی C به دست آید. از C خطی موازی DA و از A، خطی موازی DC رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی B قطع کنند.
چهارضلعی ABCD جواب مسئله است.

مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که از یکی از خطوط صفحه به فاصله‌ی معلومی باشند، دو خط موازی با آن خط هستند که در طرفین آن خط قرار دارند.

▼ مثال۲۰: دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید. نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی مورد نظر ۴ واحد باشد و سپس با کمک آن، نیمساز زاویه‌ی مورد نظر را رسم کنید.

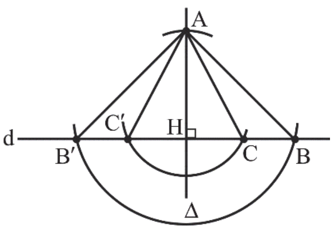
(کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۶، صفحه‌ی ۱۷)



پاسخ: خط d را موازی نیم‌خط Ox و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن و خط d' را موازی نیم‌خط Oy و به فاصله‌ی ۴ واحد از آن رسم می‌کنیم. محل تلاقی خطوط d و d' (نقطه‌ی A) از دو ضلع زاویه به یک فاصله است پس روی نیمساز زاویه‌ی xOy قرار دارد. پس برای رسم نیمساز این زاویه، کافی است از O به A وصل کرده و آن را امتداد دهیم تا نیم خط Oz حاصل شود.

▼ مثال۲۱: از مثلث ABC، اندازه‌ی ضلع‌های $AB = c$، $AC = b$ و طول ارتفاع $AH = h$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۴)



پاسخ: خط دلخواه d را در نظر می‌گیریم .در نقطه‌ای مانند H روی این خط، خط Δ را بر خط d عمود رسم می‌کنیم .سپس به مرکز H و به شعاع h_a، دایره ای رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطه‌ی A قطع نماید حال به مرکز A، یکبار به شعاع b و بار دیگر به شعاع c، دایره‌هایی رسم می‌کنیم به گونه‌ای که دایره اول، خط d را در نقاط B و B' و دایره‌ی دوم، خط d را در نقاط C و C' قطع نماید ازوصل کردن این ۴ نقطه به نقطه A، ۴ مثلث ABC، ABC'، $AB'C$ و $AB'C'$ پدید می‌آید که دو به دو همنهشت هستند بنابراین در حالت کلی دو مثلث ABC و $AB'C$ جواب مساله است

▼ مثال۲۲: در رسم ABC با معلومات $c = 17$، $b = 6$ و h_a، دو جواب متمایز پیدا شده است .طول h_a کدام عدد می‌تواند باشد؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۴- آزاد ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ٤) ۱۸

پاسخ: واضح است که h_a، طول عموری است که از نقطه A بر ضلع BC یا امتداد آن رسم می‌شود و در نتیجه از طول تمام خطوط دیگری که نقطه A را به نقاطی از پاره خط BC وصل می‌کند (از جمله $AB = c$ و $AC = b$) کوتاه‌تر است بنابراین $h_a < 17$ و $h_a < 6$ است، پس تنها جواب قابل قبول، $h_a = 5$ می‌باشد .
بنابراین گزینه (۲) صحیح است .

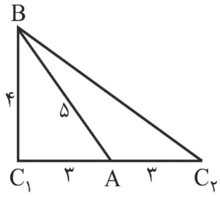
▼ مثال۲۳: چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن ۳و۵ و یکی از ارتفاع ها برابر ٤ باشد؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۴- آزاد ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ٤) ۶

☑**پاسخ:** اگر اضلاع مثلث را $b=3$ ، $c=5$ و a در نظر بگیریم، آن گاه ارتفاع به طول ۴ نمی توانـد ارتفاع وارد بر اضـلاع وارد بر اضلاع a و c باشد (طول ارتفاع نباید بیشتر از طول اضلاع مجاور آن باشد. دقت کنید که ضلع b برای هر یک از ارتفاع های وارد بر اضلاع a و c، ضلع مجاور محسوب می‌شود) پس ارتفاع وارد بر ضلع b، برابر $h_a=4$ است.

با توجه به آن که ۳، ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستند،



پس مطابق شکل، دو مثلث ABC_1 و ABC_2 که یکی قائم‌الزاویه و دیگری منفرجه الزاویه است، جواب مسئله می‌باشند.

(هرکدام از این مثلث‌ها،دارای اضلاعی به طول ۳ و ۵ هستند و ارتفاع وارد بر یکی از اضلاع آن‌ها، به طول ۴ است)

بنابراین گزینه ۱ صحیح است .

نکته : برای رسم یک مثلث، باید سه جزء مستقل از هم در آن مثلث، معلوم باشد.

(سه جزء زمانی مستقل ازیکدیگرند که با داشتن دوتا از میان آن‌ها، نتوان جز سوم را محاسبه کرد.)

▼**مثال۲۴:** **در مثلث قائم الزاویه‌ای، وتر آن مشخص است. با معلوم بودن اندازه‌ی کدام جزء دیگر، این مثلث به طور منحصر به فرد قابل رسم نیست ؟**

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۵- سراسری ریاضی -۷۷)

۱) ارتفاع وارد بروتر **۲) ارتفاع وارد برضلع قائم** **۳)میانه‌ی وارد بر وتر** **٤) میانه وارد بر ضلع قائم**

☑**پاسخ:** در مثلث‌های قائم الزاویه، همیشه یک جزء (زاویه‌ی قائمه) مشخص است، بنابراین برای رسم یک مثلث قائم الزاویه به دوجزء مستقل نیاز داریم. از آن جا که میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، همواره نصف وتر است، پس داشتن طول وتر و میانه وارد بر آن، دوجزء مستقل محسوب نمی‌شود و مثلث بطور یکتا قابل رسم نیست. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

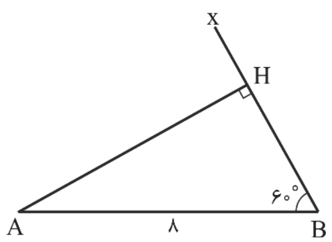
▼**مثال۲۵:** **با معلومات** $AB=8$ و $AC=6$ و $\hat{B}=60^\circ$ **، چند مثلث متمایز و مشخص** ABC **می توان رسم کرد؟**

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۵) (آزمون کانون ۵ دی -۹۳)

۱) صفر **۲) ۱** **۳) ۲** **٤) بی شمار**

☑**پاسخ:** فرض کنیم $AB=8$ و $\hat{B}=60^\circ$ باشند، در این صورت طول عمود رسم شده از نقطه‌ی A بر نیم خط Bx (ارتفاع وارد از راس A در مثلث ABC) برابر است با :

$$\sin 60^\circ=\frac{AH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{AH}{8}\Rightarrow AH=4\sqrt{3}$$



از آن‌جا که $AC=6\langle AH=4\sqrt{3}$ (طول ارتفاع از ضلع مجاور آن بیشتر است) چنین مثلثی قابل رسم نیست.

بنابراین گزینه ۱ صحیح است .

زاویه در n ضلعی محدب :

۱) مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب (که شامل $n-2$ مثلث است) برابر $(n-2)\times 180^\circ$است.

۲) مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی محدب برابر ۳۶۰ درجه است .

▼**مثال۲۶:** **در کدام چند ضلعی محدب، مجموع زوایای داخلی چهار برابر مجموع زوایای خارجی است ؟**

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۲۸- آزاد ریاضی -۷۳)

۱) هشت ضلعی **۲) دوازده ضلعی** **۳) ده ضلعی** **٤) چهارده ضلعی**

☑**پاسخ:** با توجه به مجموع زوایای داخلی و خارجی هر **n** ضلعی محدب داریم :

$$(n-2)\times 180^\circ=4\times 360^\circ\xrightarrow{\div 180^\circ}n-2=8\Rightarrow n=10$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است .

مثال ۲۷: **اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی یک هشت ضلعی کدام است ؟** (کتاب درسی، مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۲۸- سراسری ریاضی -۷۵)

۱) ۱۲۰° ۲) ۱۳۵° ۳) ۱۵۰° ۴) ۲۱۰°

پاسخ: در یک n ضلعی منتظم، تمامی زوایا برابر یکدیگرند. بنابراین اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی در یک n ضلعی منتظم از رابطه‌ی $\dfrac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$ به دست می‌آید. داریم:

$$\text{اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی هشت ضلعی منتظم} = \frac{(۸-۲)\times ۱۸۰^\circ}{۸} = ۱۳۵^\circ$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۲۸: **یک ۹ ضلعی محدب، حداکثر چند زاویه‌ی داخلی حاده می‌تواند داشته باشد ؟**

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۲۸- سراسری ریاضی-۷۶)

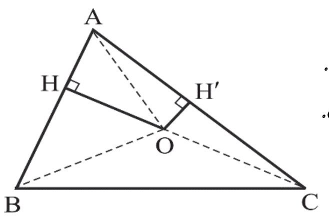
۱) ٤ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: هر زاویه حاده‌ی داخلی معادل یک زاویه‌ی منفرجه‌ی خارجی است. اگر یک n ضلعی محدب ۴ زاویه‌ی داخلی حاده داشته باشد، یعنی ۴ زاویه‌ی خارجی منفرجه دارد که در این صورت مجموع زوایای خارجی آن از $۴\times ۹۰^\circ = ۳۶۰^\circ$ بیشتر خواهد بود که امکان پذیر نیست. در نتیجه هر n ضلعی محدب (از جمله ۹ ضلعی محدب)، حداکثر ۳ زاویه‌ی داخلی حاده دارد.

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

همرسی عمود منصف های اضلاع یک مثلث : عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرسند(همگی از یک نقطه عبور می‌کنند.) و نقطه تلاقی آنها از سه راس مثلث به یک فاصله است. این نقطه مرکز دایره‌ی محیطی مثلث است.

مثال ۲۹: **ثابت کنید عمودمنصفهای اضلاع یک مثلث همرسند.** (کتاب درسی، مثال صفحه‌ی ۱۹)



پاسخ: فرض کنیم عمودمنصف های اضلاع AB و AC، یکدیگر را در نقطه O قطع نمایند.

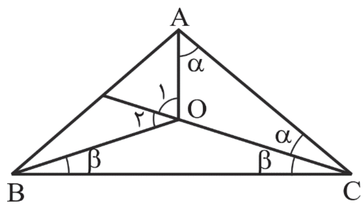
$$\left.\begin{array}{l} O \Rightarrow OA = OB \quad \text{روی عمود منصف } AB \text{ است.} \\ O \Rightarrow OA = OC \quad \text{روی عمود منصف } AC \text{ است.} \end{array}\right\} \Rightarrow OB = OC \Rightarrow O \text{ روی عمود منصف } BC \text{ است}$$

بنابراین عمود منصف ضلع BC نیز از نقطه O می‌گذرد، پس سه عمود منصف در نقطه O همرسند.

مثال ۳۰: **در مثلث متساوی الساقین $ABC\,(AB=AC)$، $\hat{A}=۷۰^\circ$ است اگر O نقطه همرسی عمود منصف های این مثلث باشد، آن گاه $A\hat{O}B$ کدام است ؟** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹- آزمون کانون، ۷ آذر ۹۳)

۱) ۷۰° ۲) ۱۰۰° ۳) ۱۱۰° ۴) ۱۴۰°

پاسخ: مطابق شکل اگر O نقطه همرسی عمود منصف های اضلاع مثلث ABC باشد آن گاه به دلیل برابری OA، OB، OC، هرکدام از مثلث های OAB، OAC و OBC متساوی الساقین هستند و در نتیجه $D\hat{C}A = O\hat{A}C = O\hat{C}B = O\hat{B}C$ و داریم :



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۷۰^\circ + ۲\hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{C} = ۱۱۰^\circ$$

$$\Delta OAC: \text{ زاویه خارجی است } \hat{O}_۱ \Rightarrow \hat{O}_۱ = O\hat{A}C + O\hat{C}A = ۲\alpha$$

$$\Delta OBC: \text{ زاویه خارجی است } \hat{O}_۲ \Rightarrow \hat{O}_۲ = O\hat{B}C + O\hat{C}B = ۲\beta$$

$$A\hat{O}B = \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۲(\alpha+\beta) = ۲\hat{C} = ۱۱۰^\circ$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

نکته : محل تلاقی عمود منصف ها در مثلث حاده الزاویه، درون مثلث، در مثلث قائم الزاویه، وسط وتر و در مثلث منفرجه الزاویه، بیرون مثلث است .

مثال ۳۱: زوایای مثلثی با اعداد ۱، ۵، ۶ متناسب هستند. مرکز دایره‌ی محیطی این مثلث کجا قرار می‌گیرد؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹)

۱) خارج مثلث ۲) درون مثلث ۳) وسط ضلع بزرگتر ۴) روی یکی از راس های مثلث

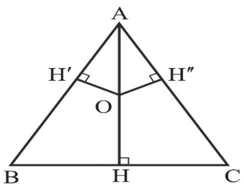
پاسخ: اگر فرض کنیم $\hat{A}=K$ ، $\hat{B}=۵K$ و $\hat{C}=۶K$ ، آن گاه داریم : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲K=۱۸۰^\circ \Rightarrow K=۱۵^\circ$ بنابراین $\hat{C}=۹۰^\circ$ و مثلث قائم الزاویه است . در مثلث قائم الزاویه، محل تلاقی عمود منصف ها، وسط وتر (ضلع بزرگتر) قرار دارد .
بنابراین گزینه ۳ صحیح است .

مثال ۳۲: در مثلثی با اضلاع ۲۰، ۲۰، ۲۴، فاصله‌ی نقطه‌ی همرس عمود منصف ها از ساق مثلث کدام است ؟
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹– آزمون کانون – ۸ آذر ۹۲)

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۶/۵ ۴) ۷

پاسخ: با توجه به آن که $۲۰^۲+۲۰^۲ \rangle ۲۴^۲$ ، پس مثلث ABC ، حاده الزاویه است
و نقطه همرسی عمود منصف ها (نقطه O) داخل مثلث است. داریم :

$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}H' \quad \text{مشترک} \\ O\hat{H'}A=O\hat{H}B=۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AOH' \cong \Delta ABH \Rightarrow \frac{OH'}{BH}=\frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{OH'}{۱۲}=\frac{۱۰}{۱۶} \Rightarrow OH'=۷/۵$$



تذکر : عمود منصف ضلع BC ، همان ارتفاع AH است (مثلث ABC متساوی الساقین است) با توجه به آن که $AB=۲۰$ ، $BH=\frac{۲۴}{۲}=۱۲$ است، بنابراین AH با کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث ABH قابل محاسبه است .

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

نکته : شعاع دایره‌ی محیطی در مثلث قائم الزاویه برابر نصف وتر و در مثلث متساوی الاضلاع، برابر $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع مثلث است .

مثال ۳۳: در مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع $۴\sqrt{۳}$ ، مساحت دایره‌ی محیطی مثلث چقدر است ؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۱۹)

۱) ۹π ۲) ۱۶π ۳) ۳۶π ۴) ۴۸π

پاسخ: اگر R شعاع دایره‌ی محیطی این مثلث باشد، آن گاه :

$$R=\frac{۲}{۳}h_a=\frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times۴\sqrt{۳}=۴$$

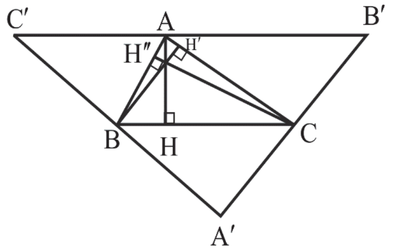
$$S=\pi R^۲=۱۶\pi$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است .

همرسی ارتفاع های مثلث: در هر مثلث، ارتفاع های وارد بر اضلاع، در یک نقطه همرسند محل تلاقی ارتفاع ها در مثلث حاده الزاویه، درون مثلث، در مثلث قائم الزاویه، در راس قائمه و در مثلث منفرجه الزاویه، بیرون مثلث است.

مثال۳۴: **ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث همرسند** (کتاب درسی، مثال صفحه‌ی ۲۰)

پاسخ: از هر کدام از راس های مثلث ABC خطی به موازات ضلع مقابل رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ حاصل شود .



$$\left.\begin{matrix} AB' \| BC \\ AB \| B'C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{چهار ضلعی } AB'CB \text{ متوازی الاضلاع است} \Rightarrow AB' = BC \quad (۱)$$

$$\left.\begin{matrix} AC' \| CB \\ AC \| C'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{چهار ضلعی } AC'BC \text{ متوازی الاضلاع است} \Rightarrow AC' = BC \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow AB' = AC'$$

اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، آن‌گاه :

$$\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ BC \| B'C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp B'C'$$

بنابراین AH، ضلع $B'C'$ را نصف کرده و بر آن عمود است، پس AH عمود منصف ضلع $B'C'$ در مثلث $A'B'C'$ است.
به طور مشابه می‌توان ثابت کرد BH' عمود منصف ضلع $A'C'$ و CH'' عمود منصف ضلع $A'B'$ در مثلث $A'B'C'$ هستند.
از آن‌جا که عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرسند ،پس AH و BH' و CH'' همرسند، یعنی ارتفاع های مثلث ABC همرس هستند.

مثال۳۵: **در کدام مثلث که سه ضلع آن داده شده، محل تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است ؟**

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰- آزاد پزشکی-۸۲)

۱) $c=۹, b=۸, a=۷$
۲) $c=۷, b=۶, a=۵$
۳) $c=۵, b=۴, a=۳$
٤) $c=۴, b=۳, a=۲$

پاسخ: در یک مثلث منفرجه الزاویه ،محل تلاقی سه ارتفاع ،خارج مثلث قرار دارد.در گزینه ۴، $۴^۲ > ۳^۲ + ۲^۲$، پس $c^۲ > b^۲ + c^۲$ ودر نتیجه مثلث منفرجه الزاویه است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است .

مثال۳۶: **در یک مثلث بین زوایا رابطه‌ی $\hat{C} = \hat{A} + ۲\hat{B}$ برقرار است. محل تلاقی سه ارتفاع کجا قرار دارد؟**

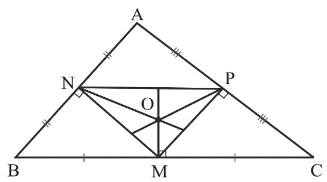
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰- آزاد ریاضی -۹۰)

۱) داخل مثلث
۲) روی محیط مثلث
۳) خارج مثلث
٤) هرسه حالت ممکن است.

پاسخ: $\hat{C} = \hat{A} + ۲\hat{B} > \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow ۲\hat{C} > \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} > ۹۰^\circ$ در نتیجه مثلث منفرجه الزاویه است و محل تلاقی ارتفاع های ان، خارج مثلث قرار دارد.
بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

مثال۳۷: **مثلث ABC مفروض است. وسط های اضلاع آن را P،N،M می‌نامیم. کدام گزینه همواره درست است؟**

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰-آزمون کانون – ۷ آذر ۹۳)



۱- نقطه‌ی همرسی ارتفاع های MNP از سه ضلع آن به یک فاصله است.
۲- نقطه‌ی همرسی ارتفاع های MNP از سه راس آن به یک فاصله است.
۳- نقطه‌ی همرسی ارتفاع های MNP از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است.
٤- نقطه‌ی همرسی ارتفاع های MNP از سه راس مثلث ABC به یک فاصله است.

پاسخ: اضلاع مثلث **MNP** با اضلاع مثلث **ABC** موازی است، پس عمود منصف های اضلاع **ABC** بر اضلاع **MNP** عمود هستند، یعنی نقطه‌ی **O**، محل تلاقی ارتفاع های مثلث **MNP**، همان محل تلاقی عمود منصف های اضلاع مثلث **ABC** است که از سه راس مثلث **ABC** به یک فاصله می‌باشد.
بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۳۸: در مثلثی با اضلاع ۶، ۸، ۱۰، فاصله‌ی نقطه‌ی همرسی ارتفاع ها تا نقطه‌ی تلاقی عمود منصف های مثلث چقدر است ؟

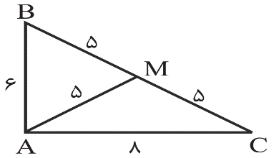
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰- آزمون کانون، ۱۰ آذر ۹۱)

۱) ۵ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ٤

پاسخ: با توجه به آن که $۶^۲+۸^۲=۱۰^۲$ پس مثلث قائم الزاویه است. در مثلث قائم الزاویه، محل تلاقی ارتفاع ها، راس قائمه و محل تلاقی عمود منصف ها، وسط وتر است. فاصله بین این دونقطه برابر طول میانه‌ی وارد بر وتر، یعنی برابر نصف طول وتر است.

از آن جا که طول وتر در این مثلث برابر ۱۰ است، پس فاصله برابر ۵ می‌باشد.

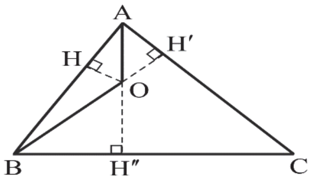
بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



همرسی نیمسازهای زوایای مثلث : نیمساز های داخلی زوایای هر مثلث همرسند و نقطه‌ی تلاقی آن ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. این نقطه، مرکز دایره محاطی داخلی مثلث است .

مثال ۳۹: ثابت کنید نیمسازهای زاویه های داخلی هر مثلث همرسند.

(کتاب درسی، مثال صفحه‌ی ۲۰)



پاسخ: فرض کنیم نیمسازهای داخلی زاویه‌های **A** و **B**، همدیگر را در نقطه‌ی **O** قطع کنند.

از نقطه‌ی **O** عمودهایی بر سه ضلع مثلث رسم میکنیم. داریم :

$O \Rightarrow OH=OH'$ روی نیمساز $\hat{A}$ است.

$O \Rightarrow OH=OH''$ روی نیمساز $\hat{B}$ است.

$\Rightarrow OH'=OH'' \Rightarrow$ O روی نیمساز زاویه C است

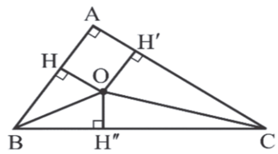
بنابراین نیمساز زاویه‌ی **C** از نقطه **O** می‌گذرد، یعنی نیمسازهای داخلی زاویه های مثلث **ABC** در نقطه‌ی **O** همرسند.

مثال ۴۰: طول دوضلع زاویه‌ی قائمه از مثلث قائم الزاویه ای برابر با ۵ و ۱۲ است. اگر نقطه **O** همرسی نیمسازهای زاویه های داخلی این مثلث باشد، فاصله **O** از وتر این مثلث کدام است ؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰- آزمون کانون - ۸ آذر ۹۲)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ: مطابق شکل، اگر O نقطه‌ی همرسی نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $OH=OH'=OH''=r$ است و داریم:



$$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}\Rightarrow \frac{۱}{۲}AB.AC$$

$$=\frac{۱}{۲}OH.AB+\frac{۱}{۲}OH'.AC+\frac{۱}{۲}OH''.BC\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۵\times ۱۲=\frac{۱}{۲}r(۵+۱۲+۱۳)\Rightarrow ۳۰=۱۵r\Rightarrow r=۲$$

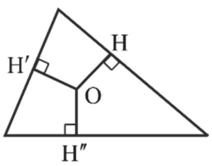
تذکر : در مثلث قائم الزاویه ای به طول اضلاع قائمه‌ی ۵ و ۱۲، طول وتر برابر ۱۳ است. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۴۱: در یک مثلث، فاصله‌ی محل همرسی نیمسازهای داخلی از دوضلع آن به ترتیب برابر $x^۲-۳$ و $۳x+۱$ است. فاصله‌ی این نقطه از ضلع دیگر این مثلث چقدر است ؟

(کتاب درسی،مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰)

۱) ۱۳ ۲) ۱۰ ۳) ۷ ۴) ٤

پاسخ: محل همرسی نیمسازهای داخلی زوایای یک مثلث، از سه ضلع آن به یک فاصله است، پس داریم:



$$x^۲-۳=۳x+۱\Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=-۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$OH=OH'=OH'$$

$$OH=x^۲-۳$$

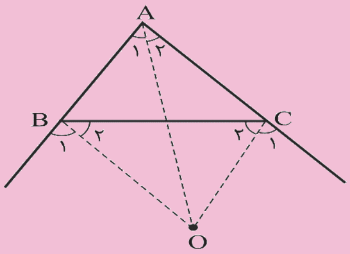
$$OH'=۳x+۱\xrightarrow{x=۴}OH'=۱۳$$

(به ازای $x=-۱$، فاصله ها منفی می‌شوند که غیر ممکن است).

۱۳=۱+(۴)۳= فاصله‌ی محل همرسی نیمسازها از ضلع سوم. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

نکته : نیمسازهای خارجی دو زاویه‌ی مثلث و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم آن مثلث همرسند. این نقطه‌ی همرسی، مرکز دایره محاطی خارجی مثلث است .

(هر دایره محاطی خارجی مثلث، بریک ضلع و امتداد دوضلع دیگر مثلث مماس است .)



مثال۴۲: در صفحه‌ی یک مثلث، چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آن ها به یک فاصله باشد ؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰- سراسری تجربی-۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: *مرکز دایره محاطی داخلی و مراکز دایره های محاطی خارجی از اضلاع مثلث یا امتداد آن ها به یک فاصله هستند. چون هر مثلث دارای سه دایره‌ی محاطی خارجی است، پس در مجموع ۴ نقطه با این ویژگی وجود دارد .*

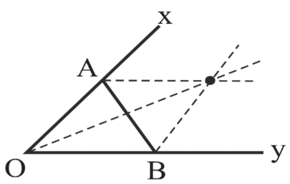
بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

مثال۴۳: زاویـه‌ی ثابت xoy مفروض اسـت. اگر نقطه A روی نیم خط ox و نقطه B روی نیم خط oy تغییر مکان دهند، محل برخورد نیمسـازهای خارجی دو زاویه‌ی A و B از مثلث OAB ، همواره کجا قرار میگیرد ؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰)

۱) روی نیمساز زاویه‌ی xoy ۲) روی دایره‌ای به مرکز o ۳) روی خطی موازی ox ٤) روی خطی عمود بر ox

پاسخ: *از آن جا که دونیمساز خارجی زوایای A و B و نیمساز داخلی زاویه‌ی O از مثلث OAB همرسند، پس نقطه‌ی تلاقی نیمسـازهای خارجی زاویه های A و B (با تغییر مکان این دو نقطه روی نیم خط های ox و oy) همواره روی نیمساز داخلی زاویه‌ی O قرار دارد.*

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



نکته : اگر S و P به ترتیب مساحت و نصف محیط مثلث ABC باشند، آن گاه :

۱) شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC برابر است با $r=\frac{S}{P}$

۲) شـعاع دایره‌ی محاطی خارجی مثلث ABC روبرو به راس A برابر اسـت با $r_a=\frac{S}{P-a}$ **که در آن a طول ضـلع BC (ضلع رو به روی راس A) است .**

مثال٤٤: در مثلثی به طول اضلاع ۸ و ۱۵ و ۱۷، دایره ای محاط می‌شود. شعاع این دایره کدام است ؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ٤) ۶

پاسخ: *از آن جا که $۸^۲+۱۵^۲=۱۷^۲$، پس مثلث قائم الزاویه است و داریم :*

$$r=\frac{S}{P}=\frac{۶۰}{۲۰}=۳ \qquad S=\frac{۱}{۲}\times۸\times۱۵=۶۰ \qquad P=\frac{۸+۱۵+۱۷}{۲}=۲۰$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

نکته : در مثلث متساوی الاضلاع، شعاع دایره‌ی محاطی داخلی $\frac{1}{3}$ طول ارتفاع و شعاع دایره محاطی خارجی برابر طول ارتفاع است.

مثال۴۵: شعاع دایره‌ی محاطی بیرونی مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $8\sqrt{3}$ کدام است ؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۰- سراسری ریاضی -۷۷)

۱) ۸۱ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

پاسخ: *شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاع، برابر طول ارتفاع مثلث است. داریم :*

$$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8\sqrt{3} = 12 \Rightarrow r_a = 12$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

گزاره : به یک جمله خبری که دقیقا درست یا نادرست باشد، گزاره گفته می‌شود. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره‌ی ساده گفته می‌شود و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کندو ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب گفته می‌شود.

نقیض یک گزاره : همان طور که گفته شد ارزش یک گزاره یا درست است یا نادرست. نقیض یک گزاره، ارزشی دقیقا مخالف ارزش خود گزاره را دارا می‌باشد.

مثال۴۶: نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

(کتاب درسی،مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۴)

الف) a از b بزرگ تر است.

ب) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

ج) یک چهار ضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.

پاسخ: *الف) (**a** از **b** بزرگ تر نیست)که معادل است با (**a** از **b** کوچکتر و یا با **b** برابر است.)*

ب) (مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.)

ج) (هر چهار ضلعی مجموع زوایای داخلی اش 360° است.)

گزاره های شرطی : در برخی از گزاره ها به جای آن که درباره چیزی خبر قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌گردد. مثلا ((اگر باران ببارد مسابقه برگزار نخواهد شد.))، به چنین گزاره هایی، گزاره های شرطی گفته می‌شود.

مثال۴۷: گزاره های زیر را به صورت شرطی بنویسید.

(کتاب درسی،مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۴)

الف) هر مستطیل، یک متوازی الاضلاع است .

ب) در دومثلث متشابه، اضلاع متناظر، متناسب اند.

پاسخ: *الف) اگر یک چهار ضلعی مستطیل باشد، آن گاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است .*

ب) اگر دومثلث متشابه باشند، آن گاه اضلاع متناظر آن ها متناسب‌اند.

یک گزاره‌ی شرطی که همواره برقرار باشد، قضیه‌ی شرطی نامیده می‌شود.در قضیه‌های شرطی، جمله‌ی شرط یا جمله‌ای که بعد از «اگر» می‌آید، «فرض قضیه» و جمله‌ی نتیجه که بعد از کلمه‌ی «آن‌گاه» می‌آید، «حکم قضیه» نامیده می‌شود.

اگر در یک عبارت شرطی، فرض قضیه برقرار باشد ولی حکم درست نباشد، این عبارت شرطی یک قضیه‌ی شرطی نخواهد بود. اگر جای فرض و حکم در یک قضیه‌ی شرطی عوض شود، آن گاه عبارت شرطی حاصل، عکس قضیه‌ی شرطی نامیده می‌شود. اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی، خود یک قضیه‌ی شرطی باشد، آن گاه این دو قضیه‌ی شرطی را می‌توان به صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای، قضیه‌ی دوشرطی نامیده می‌شود.

مثال۴۸: عکس هر یک از قضایای شرطی زیر را نوشته و سپس آن را به صورت قضیه‌ی دوشرطی بنویسید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۶)

الف) نقطه‌ای که روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار دارد، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

ب) نقطه‌ای که روی نیمساز یک زاویه قرار دارد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

پاسخ: الف) عکس قضیه: اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن گاه روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد.
قضیه‌ی دوشرطی: یک نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط قرار دارد اگر و تنها اگر از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد.
ب) عکس قضیه: اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن‌گاه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.
قضیه‌ی دوشرطی: یک نقطه روی نیمساز یک زاویه قرار دارد اگر و تنها اگر از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله باشد.

مثال نقض : به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی یا یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

مثال۴۹: برای احکام کلی زیر، مثال نقض ارائه کنید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۶)

الف) همه‌ی اعداد صحیح، مثبت هستند.

ب) هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد ،مربع است .

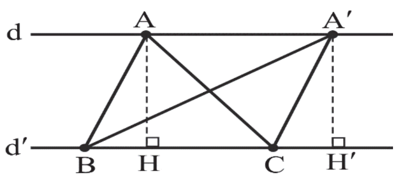
ج) به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^{۲}+n+۴۱$، عدد اولی است

پاسخ: الف) عدد (-۲) یک عدد صحیح منفی است.
ب) لوزی چهار ضلع برابر دارد در حالی که مربع نیست .
ج) به ازای n=۴۱ داریم : $۴۱^{۲}+۴۱+۴۱=۴۱(۴۱+۱+۱)=۴۱\times۴۳$ واضح است که این عدد به دو عامل اول ۴۱و ۴۳ تجزیه شده است، پس خود نمی‌تواند عدد اول باشد .

مثال۵۰: برای رد حدس های کلی زیر مثال نقض ارائه دهید : (کتاب درسی،مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۶- امتحان نهایی – خرداد ۸۹)

الف) اگر دوزاویه مکمل یکدیگر باشند، آن گاه هر دوزاویه قائمه اند.

ب) اگر دومثلث هم مساحت باشند، آن گاه همنهشت هستند.



پاسخ:
الف) دو زاویه به اندازه‌های ۶۰° و ۱۲۰° مکمل هستند اما قائمه نیستند .
ب) دو مثلث که قاعده‌های مشترک داشته باشند و راس مقابل به قاعده‌شان روی خطی موازی قاعده باشد، هم مساحت‌اند، اما لزوما همنهشت نیستند.
مانند مثلث‌های ABC و $A'BC$ در شکل مقابل .

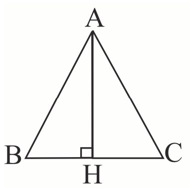
مثال۵۱: کدام حکم زیر با مثال نقض رد می‌شود ؟ (کتاب درسی، مشابه مثال صفحه‌ی ۲۶)

۱) هر مربع، یک مستطیل است

۲) هر مثلث، حداقل یک زاویه‌ی بزرگتر یا مساوی ۶۰° دارد.

۳) ارتفاع هر مثلث، از همه اضلاع آن کوچکتر است.

٤) مثلث متساوی الساقین، همواره دو زاویه‌ی حاده دارد.



پاسخ: ارتفاع یک مثلث از اضلاع مجاورش کوچک‌تر است اما لزوما از ضلع نظیر آن ارتفاع، کوچک‌تر نیست مثلا در شکل مقابل $AH>BC$ است.
بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

مثال۵۲: کدام مثال زیر یک مثال نقض برای حکم کلی((نقطه همرسی ارتفاع های مثلث یا در داخل آن است و یا در خارج آن)) می‌باشد ؟

(کتاب درسی، مشابه مثال صفحه‌ی ۲۶)

۱) مثلث متساوی الاضلاع **۲) مثلث حاده الزاویه** **۳) مثلث قائم الزاویه** **٤) مثلث منفرجه الزاویه**

پاسخ: در مثلث قائم الزاویه، نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها روی راس قائمه قرار دارد .
بنابراین گزینه ۳ صحیح است .

مثال ۵۳: کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟ (کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس ۲ ، صفحه‌ی ۱۸)

۱) در هر مثلث، اندازه‌ی بزرگترین زاویه، از چهار برابر اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

۲) برای هر دو مجموعه‌ی A و B، یا $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

۳) هر زاویه خارجی یک چند ضلعی، از هر زاویه داخلی آن بزرگ‌تر است .

٤) هر دو مثلث همنهشت، دارای مساحت های برابر هستند.

پاسخ: *گزینه‌های ۱ تا ۳ دارای مثال نقض هستند.*

گزینه ۱: اگر زوایای مثلث ABC به صورت $A=120^\circ$ و $B=40^\circ$ و $C=20^\circ$ باشد، آن‌گاه $\hat{A} > 4\hat{C}$.

گزینه ۲: اگر $A=\{1\}$ و $B=\{2\}$ آن‌گاه $A \not\subset B$ و $B \not\subset A$.

گزینه ۳: اگر در یک چند ضلعی، یک زاویه‌ی داخلی برابر 120° باشد، آن‌گاه زاویه‌ی خارجی نظیر آن 60° است.

اما در گزینه ۴ می‌دانیم که در هر دو مثلث همنهشت، اجزای متناظر برابر یکدیگرند، بنابراین دوضلع متناظر و ارتفاع‌های نظیر آن در این دومثلث برابر بوده و در نتیجه مساحت دو مثلث برابر است .

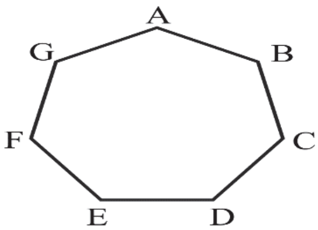
بنابراین گزینه ۴ صحیح است .

مثال ۵٤: از وصل کردن تمامی رئوس یک هفت ضلعی منتظم به یکدیگر، چند مثلث متساوی الساقین پدید می‌آید؟

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۱، صفحه‌ی ۲۷)

۱) ۷ ۲) ۱٤ ۳) ۲۱ ٤) ۳۵

پاسخ: *در هفت ضلعی منتظم، طول اضلاع برابر یکدیگراست و هر دو قطری که تعداد راس های یکسان بین دو سر قطر وجود دارد، با هم برابرند مانند AC و AF (بین A و C، فقط راس B و بین A و F، فقط راس G وجود دارد) بنابراین هر ۳ راس متوالی یک مثلث متساوی‌الساقین می‌سازند شامل ۷ مثلث ABC، BCD و ......، راس‌هایی که دو به دو فاصله دارند، مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌کنند شامل ۷ مثلث ACE، BDF و ....، همچنین هر راس با ضلعی که دقیقا مقابل آن قرار دارد، مثلث متساوی‌الساقین می‌سازد، شامل ۷ مثلث ABE و BCF و ......، در نتیجه مجموع ۲۱ مثلث متساوی الساقین در هفت ضلعی منتظم وجود دارد. بنابراین گزینه ۳ صحیح است .*



قضیه و عکس قضیه: برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، قضیه نامیده می‌شود. اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم، به آنچه حاصل می‌شود ((عکس قضیه)) گفته می‌شود. عکس قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

مثال ۵۵: عکس کدام یک از قضایای زیر نادرست است؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحه‌ی ۲۳- سراسری ریاضی -۷۸ با تغییر)

۱) در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع و میانه‌ی یک ضلع بر هم منطبق‌اند.

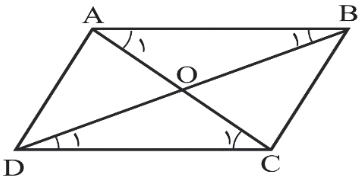
۲) در مثلث قائم الزاویه، عمودمنصف اضلاع بر روی وتر متقاطع اند.

۳)در مثلث قائم الزاویه، یکی از میانه ها نصف وتر است .

٤) در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه‌ی 90°، بزرگ‌ترین ضلع است .

پاسخ: *عکس قضایای گزینه‌های ۱ تا ۳ به ترتیب عبارتند از ((مثلثی که ارتفاع و میانه‌ی‌وارد بر یک ضلع آن بر هم منطبق باشند، متساوی‌الساقین است.))، ((مثلثی که در آن میانه نظیر ضلع بزرگتر، نصف آن ضلع است، قائم الزاویه است)) که به وضوح هر سه‌ی آن‌ها صحیح می‌باشند. اما عکس قضیه‌ی گزینه ۴ به صورت ((هر مثلث، بزرگ ترین ضلع روبه‌رو به زاویه 90° است)) می‌باشد که در تمامی حالاتی که مثلث قائم‌الزاویه نباشد، برقرار نیست.*

▼مثال۵۶: **ثابت کنید اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد، آن‌گاه قطر هایش یکدیگر را نصف می‌کنند.** (کتاب درسی،مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۳)



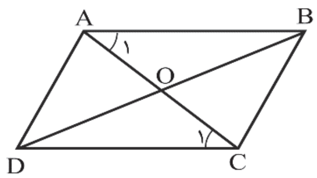
☑پاسخ: چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است؛ فرض

حکم : $\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} AB \parallel CD \\ \text{مورب}\ AC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \\ AB = CD \quad \text{(دوضلع رو به روی متوازی الاضلاع برابرند)} \\ \left.\begin{array}{r} AB \parallel CD \\ \text{مورب}\ BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{D}_۱ \end{array}\right\} \overset{\text{(ز ض ز)}}{\Rightarrow} \Delta OAB \cong \Delta OCD \Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$$

▼مثال۵۷: **ثابت کنید اگر در یک چهار ضلعی قطر ها یکدیگر را نصف کنند، آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.**

(کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۳)

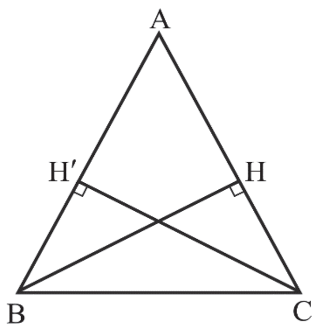


☑پاسخ: فرض $\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$

چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است؛ حکم

می‌دانیم چهار ضلعی ای که در آن، دو ضلع مقابل مساوی و موازی یکدیگر باشند،
متوازی الاضلاع است، بنابراین با توجه به آن که $AB \parallel CD$ و $AB = CD$، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع می‌باشد.

▼مثال۵۸: **اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن گاه ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.** (کتاب درسی، مثال صفحه‌ی ۲۳)



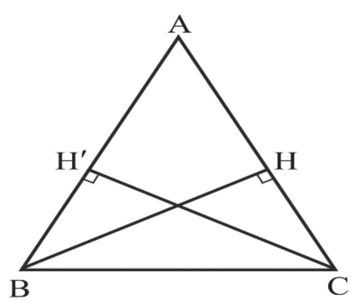
☑پاسخ: فرض : $AB = AC$ حکم: $BH = CH$

اگر $AB = AC$، آن‌گاه مثلث ABC متساوی الساقین است و $A\hat{B}C = A\hat{C}B$.

در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} BC = BC \\ A\hat{C}B = A\hat{B}C \\ \hat{H} = \hat{H} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \overset{\text{(وتر و یک زاویه‌ی حاده)}}{\Rightarrow} \Delta BCH' \cong \Delta BCH \Rightarrow BH = CH'$$

▼مثال۵۹: **اگر دو ارتفاع یک مثلث با هم برابر باشند، آن گاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع ها نیز با هم برابرند.** (کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۳)



☑پاسخ: فرض : $BH = CH'$ حکم : $AB = AC$

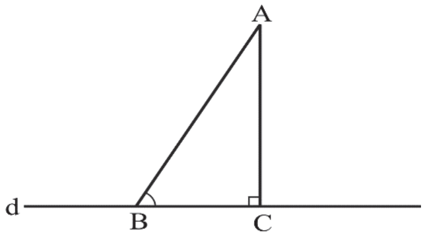
$$\left.\begin{array}{l} BC = BC \\ BH = CH' \\ \hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \overset{\text{(وتر و یک ضلع)}}{\Rightarrow} \Delta BCH' \cong \Delta BCH \Rightarrow A\hat{C}B = A\hat{B}C$$

می دانیم اگر در مثلثی، دو زاویه برابر باشند، آن‌گاه اضلاع نظیر آن دو زاویه نیز برابرند، بنابراین با توجه به آن که $A\hat{B}C = A\hat{C}B$، پس $AB = AC$

برهان خلف: نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و به خصوص هندسی کاربرد زیادی دارد، ((برهان غیرمستقیم)) یا ((برهان خلف)) است بدین صورت که به جای این که به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض کنیم نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا امر غیر ممکن می‌رسیم .

▼مثال ۶۰: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط نمی توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۵)



پاسخ: با برهان خلف فرض می‌کنیم حکم غلط باشد یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A، دو عمود بر خط d رسم کرده ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC، بزرگتر از 180° خواهد شد که این امر غیر ممکن است.
پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه‌ی خارج یک خط وجود ندارد .

▼مثال ۶۱: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عمود منصف هر پاره خط یکتاست . (کتاب درسی، مشابه مثال صفحه‌ی ۲۵)

پاسخ: فرض کنیم پاره خط AB بیش از یک عمود منصف داشته باشد. مثلا دو خط متمایز d_1, d_2، عمود منصف پاره خط AB باشند. در این صورت چون d_1, d_2 در نقطه M وسط پاره خط AB، بر این پاره‌خط عمودند، پس $d_1 \| d_2$ از طرفی d_1, d_2 در نقطه‌ی M متقاطع‌اند و چون دو خط متقاطع نمی‌توانند موازی باشند، در نتیجه عمود منصف پاره خط AB یکتاست .

▼مثال ۶۲: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید در دومثلث ABC و $A'B'C'$، اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A'}$، آن‌گاه $BC \neq B'C'$

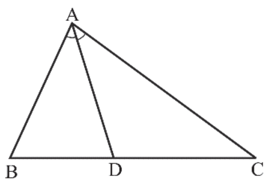
پاسخ: فرض کنیم $BC = B'C'$ باشد. در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \underset{(\text{ض ض ض})}{\Rightarrow} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \hat{A} = \hat{A'}$$

اما بنا به فرض $\hat{A} \neq \hat{A}$ است، پس این یک تناقض است و در نتیجه $BC \neq B'C'$

▼مثال ۶۳: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، AD نیمساز زاویه‌ی A باشد و $BD \neq DC$، آن گاه $AB \neq AC$.

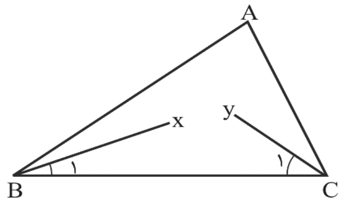
(کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۵)



پاسخ: فرض کنیم $AB = AC$ باشد. در این صورت مثلث ABC متساوی‌الساقین است و می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه‌ی راس، میانه‌ی ضلع مقابل به آن نیز هست، پس $BD = DC$ اما طبق فرض $BD \neq DC$، پس این یک تناقض است و در نتیجه $AB \neq AC$.

▼ **مثال ٦٤: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید در هر مثلث، هر دو نیمساز داخلی متقاطع‌اند.** (کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه‌ی ۲۵)

☑ **پاسخ:** *فرض کنید در مثلث ABC، دو نیمساز داخلی زاویه‌های B و C متقاطع نباشد،*



پس $Bx \| Cy$. چون Bx و Cy موازی هستند و BC مورب می‌باشد پس $\hat{B}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ$

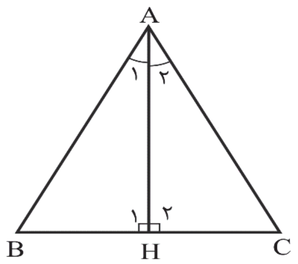
یعنی $\frac{\hat{B}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}=۱۸۰^\circ$ یا $\hat{B}+\hat{C}=۳۶۰^\circ$ و این تناقض است زیرا می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است، در نتیجه هر دو نیمساز داخلی مثلث متقاطع‌اند .

▼ **مثال ٦٥: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.** (کتاب درسی، تمرین ۱، صفحه‌ی ۲۷)

☑ **پاسخ:** *فرض کنیم دو خط، $d_۱$, $d_۲$ موازی یکدیگرند و خط L، خط $d_۱$ را قطع می‌کند. می‌خواهیم ثابت کنیم خط L، خط $d_۲$ را نیز قطع می‌کند. با استفاده از برهان خلف، فرض می‌کنیم دو خط L و $d_۲$ موازی یکدیگر باشند. نقطه‌ی تقاطع دو خط L، $d_۱$ و را A می‌نامیم. در این صورت از نقطه‌ی A، دو خط متمایز $d_۲$ و L موازی $d_۲$ رسم شده است. از آن‌جا که یک نقطه، خارج یک خط، تنها یک خط موازی با آن خط قابل رسم است، پس فرض برهان خلف باطل است، یعنی خط L، خط $d_۲$ را قطع می‌کند .*

▼ **مثال ٦٦: با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$، آن گاه $\hat{B} \neq \hat{C}$** (کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۲، صفحه‌ی ۲۸)

☑ **پاسخ:** *فرض کنیم در مثلث ABC، $\hat{B}=\hat{C}$ در این صورت با رسم ارتفاع AH در این مثلث داریم:*



$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰\\ \hat{B}=\hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{H}_۱+\hat{B}=\hat{H}_۲+\hat{C} \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲$$

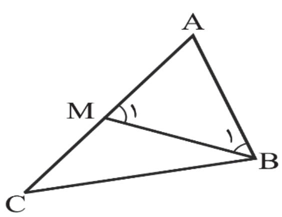
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\ AH=AH\\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ\end{array}\right\} \overset{(\text{ز ض ز})}{\Rightarrow} \Delta ABH \cong \Delta ACH \Rightarrow AB=AC$$

که این در تناقض با فرض $AB \neq AC$ *است، بنابراین* $\hat{B} \neq \hat{C}$

قضیه‌ی ضلع برتر: اگر در مثلثی دو ضلع نا برابر باشند، آن گاه زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی مقابل به ضلع کوچکتر.

قضیه‌ی زاویه برتر: اگر در مثلثی دو زاویه نا برابر باشند، ضلع رو به روی زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه روی زاویه‌ی کوچکتر.

▼ **مثال ٦٧: قضیه‌ی ضلع برتر را ثابت کنید .** (کتاب درسی، مکمل و مشابه قضیه ۱، صفحه‌ی ۲۲)



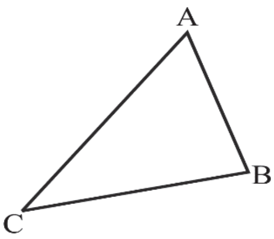
☑ **پاسخ:** *حکم:* $\hat{B}>\hat{C}$ *فرض:* $AC>AB$

چون طبق فرض $AC>AB$، *بنابراین پاره خط* AM *را اندازه‌ی* AB *روی* AC *جدا کرده و از نقطه‌ی* M *به* B *وصل می‌کنیم .*

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABM : AB=AM \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{M}_۱\\ \Delta BCM : \text{زاویه خارجی است } \hat{M} \Rightarrow \hat{M}_۱>\hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_۱>\hat{C}, \hat{B}>\hat{B}_۱ \Rightarrow \hat{B}>\hat{C}$$

از طرفی زاویه‌ی $B_۱$ *جزیی از زاویه* B *است یعنی* $\hat{B}>\hat{B}_۱$، *پس* $\hat{B}>\hat{C}$.

▼مثال ۶۸: قضیه‌ی زاویه‌ی برتر را ثابت کنید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه عکس قضیه ۱، صفحه‌ی ۲۳)



☑پاسخ: $AC > AB$:حکم $\hat{B} > \hat{C}$: فرض

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم $AC \le AB$.

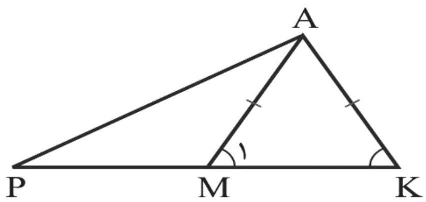
اگر $AC = AB$، آن‌گاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{B} = \hat{C}$ که با فرض قضیه تناقض دارد.

اگر $AC < AB$، آن‌گاه طبق قضیه‌ی ضلع برتر، $\hat{B} < \hat{C}$ که با فرض قضیه در تناقض است.

بنابراین $AC > AB$ است

▼مثال ۶۹: در مثلث PAK، نقطه‌ی M روی ضلع PK قرار دارد.
ثابت کنید اگر $AM = AK$، آن گاه $AP > AK$. (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با عکس قضیه‌ی ۱، صفحه‌ی ۲۳)

☑پاسخ:



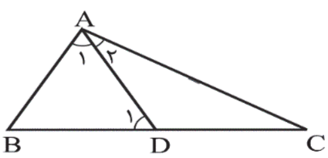
$$\left.\begin{array}{l} \Delta AMK : AM = AK \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{K} \\ \Delta AMP : \text{زاویه خارجی است } \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{P} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{K} > \hat{P}$$

بنابراین طبق قضیه‌ی زاویه‌ی برتر در مثلث PAK، $AP \rangle AK$

▼مثال ۷۰: در مثلث ABC، نیمساز داخلی زاویه‌ی A، ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. کدام نا مساوی همواره صحیح است؟
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با عکس قضیه‌ی ۱، صفحه‌ی ۲۳- سراسری ریاضی – ۸۰)

۱) $BA > BD$ ۲) $DA > DB$ ۳) $AB > AD$ ۴) $DB > DA$

☑پاسخ:



$$\left.\begin{array}{l} \Delta ACD : \text{زاویه خارجی است } \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_2 \\ \text{نیمساز } AD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ است } \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 > \hat{A}_1$$

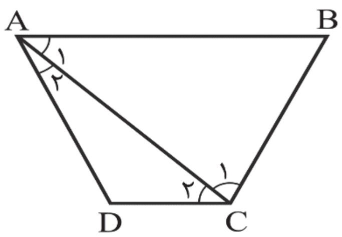
در نتیجه طبق قضیه‌ی زاویه‌ی برتر در مثلث ABD، $BA \rangle BD$ است .

بنابراین گزینه ۱ صحیح است .

▼مثال ۷۱: در چهار ضلعی محدب $ABCD$، AB بزرگ‌ترین ضلع و CD کوچکترین ضلع است. کدام نامساوی همواره صحیح است؟
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با قضیه‌ی ۱، صفحه‌ی ۲۲- ۲۳ آزمون کانون- ۲۳ آبان ۹۳)

۱) $\hat{A} \rangle \hat{B}$ ۲) $\hat{B} \rangle \hat{C}$ ۳) $\hat{C} \rangle \hat{D}$ ۴) $\hat{C} \rangle \hat{A}$

☑پاسخ:



$$\left.\begin{array}{l} \Delta ABC : AB > BC \Rightarrow \hat{C}_1 > \hat{A}_1 \\ \Delta ADC : AD > CD \Rightarrow \hat{C}_2 > \hat{A}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_1 + \hat{C}_2 > \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Rightarrow \hat{C} > \hat{A}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است .