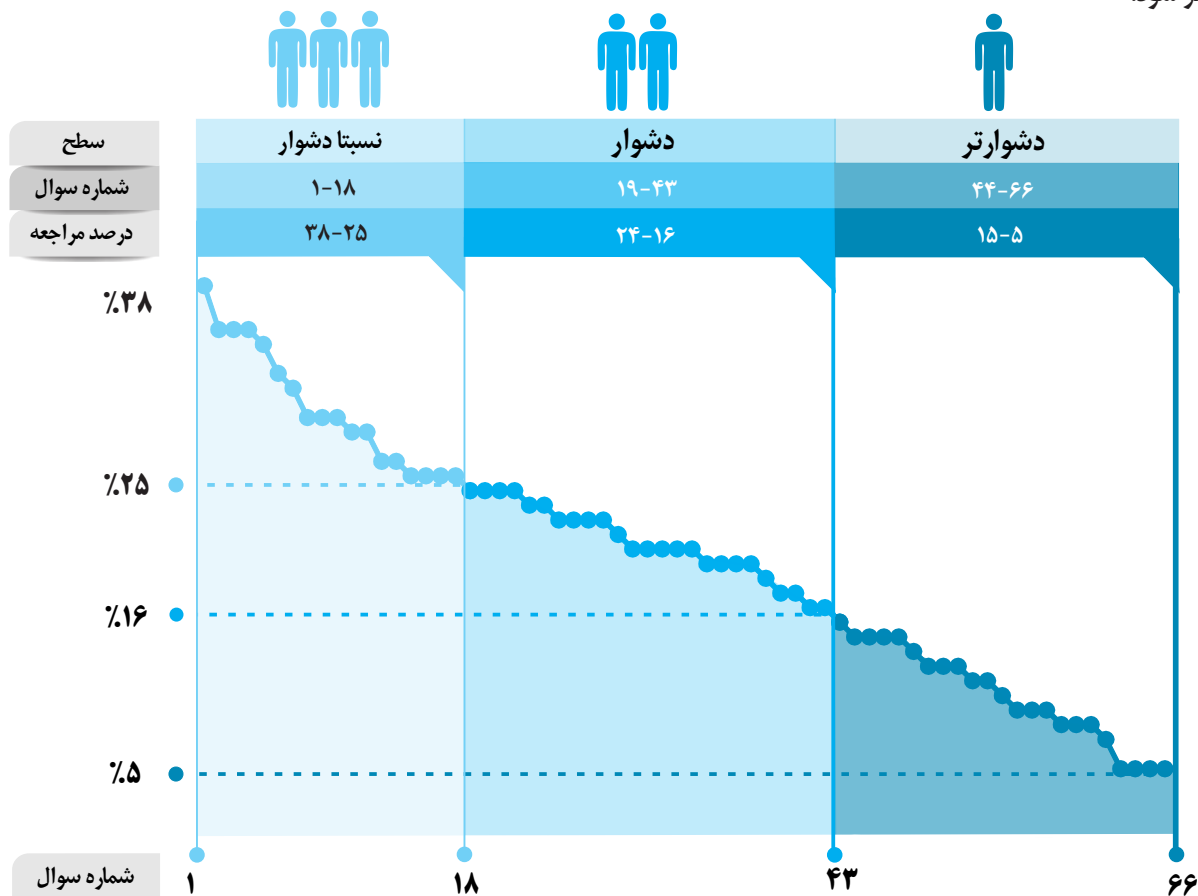


ماتریس و کاربردها

برای هر مبحث کتاب، جدول و نمودار سطح بندی سؤال‌ها مانند نمودار پایین تهیه شده، در این جدول تعداد و شماره سؤال‌های هر سطح، (نسبتاً دشوار، دشوار، دشوارتر)، درصد‌های مراجعه ابتدایی و انتهایی هر سطح مشخص و نمودار براساس درصد مراجعه به سؤال و شماره سؤال‌ها تنظیم شده است. بدیهی است که این نمودار باید شیب منطقی داشته و هرچه رو به پایان می‌رویم درصد مراجعه کمتر و سؤال‌ها دشوارتر شود.



معرفی نشانه‌ها

در شناسنامه هر سؤال نشانه‌هایی به شرح زیر استفاده شده است که بیان‌گر اطلاعات آماری هر سؤال است:

به معنای جمعیت شرکت کنندگان در آن آزمون است.



به معنای تاریخ برگزاری آزمون است.

به معنای درصدی از شرکت کنندگان می‌باشد که به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند.



به معنای درصد مراجعه کنندگان به سؤال، از کل دانش‌آموزان شرکت کننده در آزمون است.

سؤال‌های نسبتاً دشوار؟

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۴۷۵۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۵ سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۶ (یا ۷) سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۸ سوال پاسخ دهند.

۱- به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-1)x + 4y = 6 \\ 3x + (m+3)y = 9 \end{cases}$ فاقد جواب است؟

۳۸٪ ۱۹٪  ۹۳/۲  ۳۸۰۰

- ۳ (۱) ۲ (۳)
 ۵ (۴) ۳ (۲)
 ۳ (۱) ۴ (۵)

۲- اگر a_{ij} درایه‌ی واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس $A_{2 \times 3}$ و $a_{ij} = i - j$ باشد، ماتریس A کدام است؟

۳۵٪ ۳۲٪  ۹۵/۶  ۱۰۰۰۰

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۱)

۳- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I$ باشد، دوتایی مرتب (α, β) کدام است؟

۳۵٪ ۳۰٪  ۹۶/۱۲  ۲۳۰۰۰

- (۲, ۱۱) (۲) (۲, ۱۳) (۱)
 (۴, ۱۳) (۴) (۴, ۱۱) (۳)

۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه‌ی $AX = 2I$ ، ماتریس X کدام است؟

۳۵٪ ۲۹٪  ۹۵/۶  ۱۰۰۰۰

- $\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (۴) $2 \times \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۱)

۵- اگر A یک ماتریس 3×3 باشد به طوری که $|A| = \frac{1}{4}$ ، دترمینان وارون ماتریس $2A^2$ ، کدام است؟

۳۴٪ ۱۶٪  ۹۱/۲  ۴۲۰۰

- ۲ (۲) ۸ (۱)
 $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳)



۶- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع همه درایه‌های ماتریس $A^2 + AB + 2B$ کدام است؟

۳۳٪ ۲۰٪ ۹۶/۱۲ ۲۲۰۰۰

- (۱) ۱۲
(۲) ۱۴
(۳) ۱۶
(۴) ۱۰

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $2A^{-1}B$ ، کدام است؟

۳۱٪ ۲۱٪ ۹۳/۶ ۱۰۰۰۰

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) -۱
(۴) -۲

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B_{2 \times 2}$ ، دو ماتریس باشد به طوری که حاصل ضرب A و B ، خاصیت جابه‌جایی داشته باشد، آنگاه مجموع درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس B کدام است؟

۲۹٪ ۲۴٪ ۹۳/۱۲ ۳۲۰۰۰

- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) نامشخص
(۴) -۱

۹- فرض کنید $A = [(i-j)^2]_{3 \times 3}$ ، دترمینان ماتریس $B = \frac{1}{p} A^2$ کدام است؟

۲۹٪ ۱۳٪ ۹۱/۲ ۴۲۰۰۰

- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۸
(۴) ۳۲

۱۰- اگر با اضافه کردن ۲ واحد به درایه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & a \end{bmatrix}$ دترمینان آن تغییر نکند آن‌گاه a کدام است؟

۲۹٪ ۱۳٪ ۹۱/۲ ۴۲۰۰۰

- (۱) ۳
(۲) ۷
(۳) ۴
(۴) ۵

۱۱- اگر $A^{-1} - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A + I$ کدام است؟

۲۸٪ ۲۴٪ ۹۳/۶ ۱۰۰۰۰

- (۱) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$
(۲) $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$
(۳) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
(۴) $\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

۱۲- اگر α و β ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۲۸٪ ۲۳٪ ۹۶/۱۲ ۲۲۰۰۰

- (۱) $\frac{7}{2}$
(۲) $\frac{5}{2}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) $\frac{9}{2}$

۱۴- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، با توجه به تساوی $A^2 - 2I_{2 \times 2} + 3B = O$ ، ماتریس B کدام است؟

۲۶٪ ۱۸٪ ۹۵/۶ ۳۲۰۰۰

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -2 & -17 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

۱۴- کدام نقطه روی خط به معادله $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ قرار دارد؟

۲۶٪ ۱۸٪ ۹۳/۱۲ ۳۲۰۰۰

$$(1, 1) \quad (۴) \quad (1, \frac{1}{3}) \quad (۳) \quad (0, -\frac{1}{3}) \quad (۲) \quad (\frac{1}{3}, 0) \quad (۱)$$

۱۵- در دستگاه $\begin{cases} ax - by = m \\ cx - dy = 1 - m \end{cases}$ ، معکوس ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ است. اگر جواب دستگاه، نقطه‌ی $(n-1, m-4)$ باشد، مقدار n کدام است؟

۲۵٪ ۲۲٪ ۹۵/۲ ۲۱۰۰۰

$$-1 \quad (۴) \quad 1 \quad (۳) \quad -6 \quad (۲) \quad 6 \quad (۱)$$

۱۶- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ وارون پذیر است. به جای درایه صفر، کدام عدد را قرار دهیم تا ماتریس حاصل وارون ناپذیر باشد؟

۲۵٪ ۱۷٪ ۹۶/۱ ۱۵۰۰۰

$$6 \quad (۴) \quad 4 \quad (۳) \quad -6 \quad (۲) \quad -4 \quad (۱)$$

۱۷- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ باشد، A کدام است؟

۲۵٪ ۱۶٪ ۹۶/۱ ۱۵۰۰۰

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (۴) \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (۳) \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (۲) \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

۱۸- اگر به هر درایه‌ی سطر اول و سطر دوم ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \end{bmatrix}$ دو واحد اضافه کنیم، دترمینان این ماتریس چه تغییری می‌کند؟

۲۵٪ ۱۰٪ ۹۱/۱۲ ۴۱۰۰۰

- (۱) چهار واحد افزایش می‌یابد.
 (۲) تغییر نمی‌کند.
 (۳) سه واحد افزایش می‌یابد.
 (۴) سه برابر می‌شود.

سؤال‌های دشوار؟؟

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۴۷۵۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ (یا ۴) سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۵ سوال پاسخ دهند.

۱۹- اگر یکی از جواب‌های معادله $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ برابر $x = 0$ باشد، آنگاه جواب دیگر معادله کدام است؟

۲۴٪ ۱۸٪ ۹۱/۱۲ ۴۱۰۰۰

$$\begin{array}{ll} -\frac{5}{2} & (2) \\ -\frac{9}{2} & (4) \end{array} \quad \begin{array}{ll} -\frac{3}{2} & (1) \\ -\frac{7}{2} & (3) \end{array}$$

۲۰- اگر در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب به صورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، $x + y$ کدام است؟

۲۴٪ ۱۷٪ ۹۵/۶ ۱۰۰۰۰

$$4 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad -2 \quad (2) \quad -4 \quad (1)$$

۲۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ و دترمینان ماتریس $A^2 - 2A$ برابر با ۲۱ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۲۴٪ ۱۶٪ ۹۵/۶ ۱۰۰۰۰

$$3 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad -4 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

۲۲- ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ را با تعریف $a_{ij} = i - 1$ در نظر می‌گیریم. مجموع درایه‌های سطر دوم ماتریس A^{-1} چقدر است؟

۲۴٪ ۱۴٪ ۹۰/۱۲ ۴۱۰۰۰

$$3^{10} \quad (2) \quad 3^9 \quad (1) \\ 3^{11} \quad (4) \quad 2 \times 3^{10} \quad (3)$$

۲۳- اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ و $B = I_n - A$ ، ماتریس $A^2 + AB + B$ همواره برابر کدام است؟

۲۳٪ ۲۰٪ ۹۲/۲ ۳۹۰۰۰

$$B \quad (2) \quad A \quad (1) \\ I_n \quad (4) \quad AB \quad (3)$$

$$-۲۴ \text{ معادله‌ی } \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & x & 1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0 \text{ چند ریشه دارد}$$

۲۳٪ ۱۰٪  ۹۱/۲  ۴۲۰۰۰

(۱) فقط یک ریشه‌ی ساده (۲) فقط یک ریشه‌ی مضاعف

(۳) یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف (۴) سه ریشه‌ی متمایز

-۲۵ ماتریس $B_{2 \times 2}$ با شرایط $b_{ij} = \begin{cases} 2i + j & i \geq j \\ 3i + 2j & i < j \end{cases}$ مفروض است. ماتریس B کدام است؟

۲۲٪ ۱۸٪  ۹۴/۶  ۱۰۰۰۰

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -2 & 12 \end{bmatrix} \text{ (۴)} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ (۳)} \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \text{ (۲)} \quad \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \text{ (۱)}$$

-۲۶ اگر A یک ماتریس $n \times n$ و $A^2 = A$ باشد، آنگاه حاصل $A(A^3 - I)$ کدام است؟

۲۳٪ ۱۷٪  ۹۳/۱۲  ۳۲۰۰۰

$A - I$ (۴) A (۳) \bar{O} (۲) I (۱)

-۲۷ حاصل $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۲۳٪ ۱۶٪  ۹۶/۱۲  ۲۳۰۰۰

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ (۴)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \text{ (۳)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \text{ (۲)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \text{ (۱)}$$

-۲۸ اگر $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = 3I(3A - 3I)^{-1}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون سوم ماتریس $3A(3A - 3I)^{-1}$ کدام است؟

۲۲٪ ۱۴٪  ۹۵/۲  ۲۳۰۰۰

۷ (۴) -۱ (۳) ۳ (۲) ۵ (۱)

-۲۹ اگر $A = \begin{bmatrix} a+b & c & d \\ a & b+c & d \\ a & b & c+d \end{bmatrix}$ و $bc = 1$ باشد، آنگاه حاصل $|A|$ همواره کدام است؟

۲۱٪ ۱۴٪  ۹۵/۲  ۲۳۰۰۰

(۱) $a+b+c+2d$ (۲) $a+b+c+d$ (۳) $a+b+c$ (۴) صفر

-۳۰ اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند و داشته باشیم $(AB)^2 - AB = I$ ، حاصل $(AB - I)^{-1}$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۲۰٪ ۱۷٪  ۹۵/۲  ۲۳۰۰۰

(۱) BA (۲) B
(۳) A (۴) AB

۳۱- اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند و $|A|=|B|$ و $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = |AB|$ باشد، $|A|$ کدام است؟ ($|A| > 0$)

۲۰٪ ۱۶٪ ۹۶/۱۲ ۲۲۰۰۰

(۱) $x+y$ (۲) ۳

(۳) صفر (۴) xy

۳۲- گر X و Y دو ماتریس مربعی هم مرتبه و وارون پذیر باشند و داشته باشیم: $X+Y=2XY$ ، آنگاه $X^{-1}+Y^{-1}$ کدام است؟

۲۰٪ ۱۴٪ ۹۳/۲ ۳۸۰۰۰

(۱) I (۲) $-I$

(۳) $2I$ (۴) $\frac{1}{2}I$

۳۳- برای سه ماتریس A و B و C اگر $B=(AC)^{-1}A$ ، ماتریس B همواره برابر کدام است؟

۲۰٪ ۱۲٪ ۹۷/۲ ۱۴۰۰۰

(۱) A (۲) B

(۳) C (۴) C^{-1}

۳۴- معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$ چند ریشه دارد؟

۲۰٪ ۱۲٪ ۹۱/۱۲ ۴۱۰۰۰

(۱) بی‌شمار (۲) ۱

(۳) ۳ (۴) صفر

۳۵- اگر A یک ماتریس مربعی باشد، به طوری که $A^2=O, A \neq O$ ، آنگاه معکوس ماتریس $I-A$ ، به کدام صورت است؟

۱۹٪ ۱۶٪ ۹۱/۳ ۳۹۰۰۰

(۱) A^2-A (۲) A^2+A

(۳) A^2-A+I (۴) A^2+A+I

۳۶- اگر A و B دو ماتریس مربعی 2×2 باشند و $AB = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-1 \\ 0 & \beta+1 \end{bmatrix}$ باشد و حاصل عبارت $A \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} B$

برابر $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، (α, β) کدام است؟

۱۹٪ ۱۵٪ ۹۴/۱۲ ۲۵۰۰۰

(۱) $(1, -2)$ (۲) $(-1, 2)$

(۳) $(-1, -2)$ (۴) $(1, 2)$

۳۷- در ماتریس وارون‌پذیر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، به هر درایه‌ی سطر سوم چند واحد اضافه کنیم تا یک ماتریس وارون‌ناپذیر به دست آید؟

۱۹٪ ۱۵٪ ۹۲/۱ ۳۸۰۰۰

(۱) ۳ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{11}{2}$

۳۸- اگر A و B ماتریس‌های مربعی وارون‌پذیر مرتبه ۳ باشند به گونه‌ای که $A^3 = I$ و $A + B = AB$ باشد، دترمینان ماتریس $A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})$ کدام است؟

۱۹٪ ۸٪ ۹۷/۳ ۱۱۰۰۰

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ± 1

۳۹- مقدار x در معادله‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ کدام است؟

۱۸٪ ۱۳٪ ۹۲/۱ ۳۸۰۰۰

(۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

۴۰- اگر A و B ماتریس‌های مربعی مرتبه‌ی ۲ باشند به طوری که $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $A + B = AB$ ، وارون ماتریس B کدام است؟

۱۷٪ ۱۳٪ ۹۱/۲ ۴۲۰۰۰

(۱) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

۴۱- اگر $A^6 B^{-1} = B^{-1} A$ ، در این صورت حاصل $B^{-1} A^2 B$ همواره کدام است؟

۱۷٪ ۱۱٪ ۹۳/۲ ۳۸۰۰۰

(۱) A^{80} (۲) A^{40} (۳) A^{20} (۴) A^{10}

۴۲- اگر برای ماتریس غیرصفر $A = \begin{bmatrix} k \cot \alpha & k \\ k & k \tan \alpha \end{bmatrix}$ ، رابطه‌ی $A^2 = A$ برقرار باشد، k همواره کدام است؟ ($\alpha \neq \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$)

۱۶٪ ۱۳٪ ۹۲/۱۲ ۳۹۰۰۰

(۱) $\sin^2 \alpha$ (۲) $\cos^2 \alpha$ (۳) $\sin \alpha \cos \alpha$ (۴) $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$

۴۳- اگر $A \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $A \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ آنگاه نقطه $A \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ در کدام ناحیه دستگاه محورهای مختصات قرار می‌گیرد؟

۱۶٪ ۸٪ ۹۱/۱۲ ۴۱۰۰۰

- (۱) ناحیه‌ی اول (۲) ناحیه‌ی دوم
(۳) ناحیه‌ی سوم (۴) ناحیه‌ی چهارم

سؤال‌های دشوارتر؟؟؟

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۴۷۵۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۱ سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ (یا ۳) سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۴ سوال پاسخ دهند.

$$-۴۴ \text{ اگر } D = \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix}, \text{ آنگاه } D \text{ همواره برابر است با:}$$

۱۵% ۱۲% ۹۴/۱۲ ۲۵۰۰۰

(۲) abc

(۱) $(a+b+c)^3$

(۴) $2(a+b+c)^3$

(۳) $2abc$

$$-۴۵ \text{ اگر } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس } A^2 \text{ کدام است؟}$$

۱۴% ۱۱% ۹۷/۳ ۱۱۰۰۰

(۴) صفر

(۳) ۳۲

(۲) ۱۶

(۱) ۸

$$-۴۶ \text{ از رابطه‌ی ماتریسی } \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ سطر اول ماتریس } A \text{ کدام است؟}$$

۱۴% ۱۱% ۹۳/۲ ۳۸۰۰۰

(۲) $[-21 \ 30]$

(۱) $[12 \ -17]$

(۴) $[12 \ -21]$

(۳) $[-17 \ 30]$

-۴۷ اگر A ماتریس مربعی از مرتبه‌ی ۳ بوده و $|A| = -4$ و $(A-I)^2 = -4A$ باشد، حاصل $|A^2 + I|$ کدام است؟

۱۴% ۹% ۹۱/۲ ۴۲۰۰۰

(۴) ۳۲

(۳) -۳۲

(۲) ۱۶

(۱) -۱۶

$$-۴۸ \text{ اگر } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} \text{ و } B^{-1}C = \Delta I \text{، مجموع درایه‌های قطر اصلی } B^{-1}(CA)^{-1} \text{ چقدر است؟}$$

۱۴% ۷% ۹۳/۳ ۳۹۰۰۰

(۴) ۵۰

(۳) ۲۵

(۲) ۲

(۱) ۱

۴۹- مساحت محدود به نمودار به معادله $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ و محورهای مختصات، کدام است؟

۱۳٪ ۱۰٪ ۹۱/۱۲ ۴۱۰۰۰

۱۵ (۴) $\frac{25}{3}$ (۳) $\frac{50}{3}$ (۲) $\frac{100}{3}$ (۱)

۵۰- حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1+x & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$ ، با شرط $y = x+z$ کدام است؟

۱۳٪ ۹٪ ۹۶/۱۲ ۱۰۰۰۰

$x(x+z)$ (۲) $2x^2(x+z)$ (۱)
 $x^2(x+z)$ (۴) $2x(x+z)$ (۳)

۵۱- از رابطه‌ی ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس A کدام است؟

۱۳٪ ۸٪ ۹۵/۶ ۳۸۰۰۰

$[31 \ 19]$ (۴) $[28 \ 17]$ (۳) $[31 \ 18]$ (۲) $[28 \ 19]$ (۱)

۵۲- ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض است. دترمینان ماتریس $\frac{1}{4}(A^4 - A^3)$ کدام است؟

۱۳٪ ۷٪ ۹۱/۲ ۴۲۰۰۰

۱۶ (۲) ۹ (۱)
 ۳۶ (۴) ۱۸ (۳)

۵۳- اگر برای دو ماتریس مربعی وارون‌پذیر A و B از مرتبه ۲، $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $AB = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه A+B کدام است؟

۱۱٪ ۶٪ ۹۷/۲ ۱۴۰۰۰

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (۱)
 $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{-1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ (۳)

۵۴- اگر $A = \begin{bmatrix} \tan x & -1 \\ 1 & -\tan x \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $A^3 + A^2 + A$ کدام است؟ $(x \neq \frac{k\pi}{4})$

۱۱٪ ۴٪ ۹۳/۱۲ ۳۹۰۰۰

-I (۴) I (۳) -I (۲) I (۱)

۵۵- اگر $A_i = \begin{bmatrix} i & n \\ n & i \end{bmatrix}$ ، به ازای چه مقدار از n ، ماتریس $B = \sum_{i=1}^{21} A_i$ وارون پذیر نیست؟

۱۰٪ ۷٪ ۹۵/۱ ۲۷۰۰۰

۸ (۱) ۹ (۲)
۱۰ (۳) ۱۱ (۴)

۵۶- اگر حاصل $\begin{vmatrix} -m & m & 1+m \\ m+1 & 1-m & -m \\ m^2+2m+1 & m^2-2m+1 & m^2 \end{vmatrix}$ برابر (-20) باشد، آنگاه مقدار طبیعی m کدام است؟

۹٪ ۶٪ ۹۲/۱۲ ۳۹۰۰۰

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۵۷- اگر ماتریس A وارون پذیر و $2A^{-1} = A$ باشد، وارون ماتریس $I - A$ کدام است؟

۹٪ ۵٪ ۹۲/۱ ۴۲۰۰۰

$I - A$ (۴) $-A - I$ (۳) $A - I$ (۲) $A + I$ (۱)

۵۸- اگر $(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} . & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A(A - I)^{-1}$ کدام است؟

۹٪ ۴٪ ۹۷/۳ ۱۱۰۰۰

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $A - I$ (۳) $A + I$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ (۱)

۵۹- اگر A ماتریس مربعی 3×3 بوده و داشته باشیم $A^3 = 5I$ ، آنگاه حاصل $(A - I)^{-1} + (A + I)^{-1}$ کدام است؟

۸٪ ۵٪ ۹۳/۲ ۳۸۰۰۰

$\frac{1}{6}(A^2 + 5A + I)$ (۲) $\frac{1}{12}(A^2 + 5A + I)$ (۱)
 $\frac{1}{6}(5A^2 + A + I)$ (۴) $\frac{1}{12}(5A^2 + A + 5I)$ (۳)

۶۰- اگر $(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل دترمینان ماتریس $A(A - I)^{-1}$ کدام است؟

۸٪ ۵٪ ۹۱/۲ ۴۲۰۰۰

-۸ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) ۹ (۱)

۶۱- اگر $A^3 + A^2 + A + I = O$ باشد، آنگاه وارون ماتریس A کدام است؟

۸٪ ۴٪ ۹۷/۱ ۱۵۰۰۰

$A^3 - I$ (۴) $A^3 + I$ (۳) $-A^3$ (۲) A^3 (۱)

۶۲- اگر A و B ماتریس‌های وارون‌پذیر مرتبه‌ی n و $A^2 = A$ و $B^2 = B$ باشد، در این صورت وارون ماتریس $M = kAB - I$ با شرط $k \neq 1$ کدام است؟

۳۸۰۰۰ ۹۲/۱ ۴٪ ۷٪

(۱) M وارون‌پذیر نیست. $M^{-1} = \frac{1}{k-1}I$ (۲)
 (۳) $M^{-1} = \frac{1}{k+1}I$ (۴) $M^{-1} = \frac{k}{k-1}I$

۶۳- اگر $A^2 = 2I$ باشد، آنگاه حاصل $(A - I)^{-1}$ همواره کدام است؟

۱۰۰۰۰ ۹۴/۶ ۲٪ ۵٪

(۱) $A^2 - A + I$ (۲) $A^2 + A + I$ (۳) $A^{-1} + I$ (۴) $A + I$

۶۴- هرگاه A و B دو ماتریس مربعی، وارون‌پذیر و از مرتبه‌ی n باشند و داشته باشیم $(\lambda \neq -1)$ $\lambda BA = 2B - A$ ، در این صورت حاصل $|2A^{-1} - B^{-1}|$ کدام است؟

۱۵۰۰۰ ۹۷/۱ ۲٪ ۵٪

(۱) λ (۲) λ^n (۳) λ^{n-1} (۴) $\lambda^n |A||B|$

۶۵- اگر A و B و C سه ماتریس 2×2 و $AB = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $BC = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ و $CA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ باشند، آنگاه ماتریس ABC کدام می‌تواند باشد؟

۲۴۰۰۰ ۹۳/۳ ۲٪ ۵٪

(۱) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

۶۶- اگر $A^2 + ABA = I$ باشد، آنگاه کدام نتیجه‌ی زیر لزوماً صحیح است؟

۲۱۰۰۰ ۹۴/۲ ۱٪ ۵٪

(۱) $AB = BA$ (۲) $A^2 = 2A + I$ (۳) $A^2 = B^2$ (۴) $A^3 = B^3$