مؤلف این فصل: فرهاد حامی

فصل اول

هندسه‌ی تحلیلی و جبر

(۳۲ پیمانه)

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

هندسه‌ی تحلیلی و جبر

۱ هندسه‌ی تحلیلی
۹ پیمانه — ۹۰ تست
آبی | سبز | زرد

1. معادله‌ی خط و اوضاع نسبی دو خط
2. فاصله‌ی دو نقطه
3. مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط
4. فاصله‌ی نقطه از خط

۲ معادله‌ی درجه‌ی دوم
۷ پیمانه — ۷۰ تست
آبی | سبز | زرد

1. مجموع، حاصلضرب و روابط بین ریشه‌های معادله
2. تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم با S و P
3. تعداد و علامت ریشه‌های معادله
4. روش تغییر متغیر برای حل معادله

۳ تابع درجه‌ی دوم
۸ پیمانه — ۸۰ تست
آبی | سبز | زرد

1. رأس (ماکزیمم یا مینیمم)، محور تقارن و ویژگی‌های آنها
2. صفرهای تابع و وضعیت نمودار تابع با محور x ها
3. تلاقی خط و سهمی و دو سهمی با هم
4. نمودارشناسی (رابطه‌ی ضرایب معادله با نمودار)
5. ماکزیمم (می‌نیمم) سازی با تابع درجه‌ی دوم

۴ معادلات گویا و معادلات رادیکالی
۶ پیمانه — ۶۰ تست
آبی | سبز | زرد

1. معادلات گویا
2. معادلات رادیکالی

سؤال‌های ویژه‌ی برترها
۱ پیمانه — ۱۰ تست
آبی | سبز | زرد

آزمون جمع‌بندی پایان فصل
۱ پیمانه — ۱۰ تست
آبی | سبز | زرد

۳۲۰ سؤال شناسنامه‌دار
- ۱۳۶ سؤال از کنکورهای سراسری
- ۱۱۰ سؤال تألیفی و طراحی شده از کتاب درسی
- ۷۴ سؤال از آزمون‌های کانون

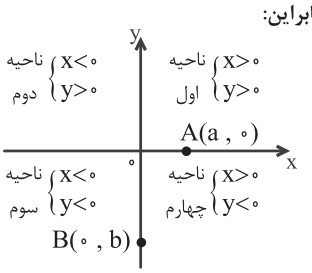
در درسنامه می‌بینید
۷۸ سوال
- ۴۸ تست طراحی شده با نگاه به رویکرد کنکورهای جدید
- ۳۰ مثال برای ادراک و تثبیت

ریاضی ۲ یازدهم	فصل اول صفحه‌های: ۲ تا ۱۰

۱ هندسه‌ی تحلیلی

۱ معادله‌ی خط و اوضاع نسبی دو خط

نقطه در دستگاه مختصات ◄ شکل زیر، یک دستگاه مختصات را نمایش می‌دهد. این دستگاه از چهار ناحیه و دو محور عمود بر هم تشکیل شده است. محور x ها، افقی و جهت مثبت در آن رو به راست و محور y ها عمودی و جهت مثبت در آن رو به بالاست. هر نقطه در آن با $A(x,y)$ نمایش داده می‌شود که در آن، x طول نقطه و y عرض نقطه است. در شکل زیر، علامت مختصات هر نقطه در چهار ناحیه مشخص شده است، بنابراین:



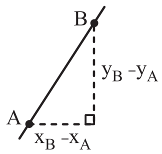
۱) اگر نقطه‌ای در ناحیه‌ی اول یا سوم باشد، طول و عرض آن هم‌علامت‌اند.

۲) اگر نقطه‌ای در ناحیه‌ی دوم یا چهارم باشد، طول و عرض آن مختلف‌العلامت‌اند.

۳) اگر نقطه‌ای روی محور x ها باشد، عرض آن صفر و مختصات آن $A(a,۰)$ است که در آن a طول نقطه‌ی A است.

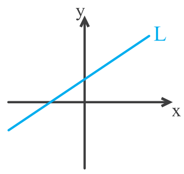
۴) اگر نقطه‌ای روی محور y ها باشد، طول آن صفر و مختصات آن $B(۰,b)$ است که در آن b عرض نقطه‌ی B است.

شیب خط ◄ شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی، به عبارت دیگر، شیب خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$، برابر است با:

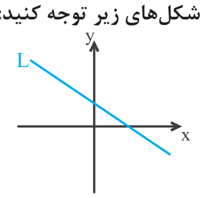


$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

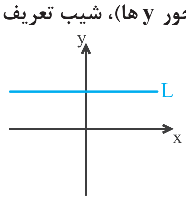
اگر خط L با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ی حاده بسازد، شیب خط L مثبت و اگر زاویه‌ی منفرجه بسازد، شیب خط L منفی است. از طرفی خط‌های افقی شیب صفر دارند و برای خط‌های عمود بر محور x ها (موازی محور y ها)، شیب تعریف نمی‌شود. به شکل‌های زیر توجه کنید:



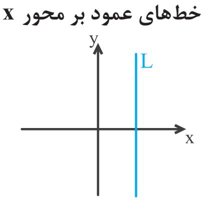
$m_L>۰$



$m_L<۰$



$m_L=۰$



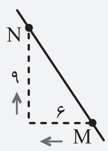
m_L : تعریف نشده

تست برای رسیدن از نقطه‌ی M به نقطه‌ی N، ابتدا ۶ واحد به چپ و سپس ۹ واحد به بالا حرکت می‌کنیم. شیب خط گذرنده بر دو نقطه‌ی M و N کدام است؟

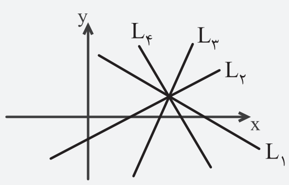
۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۲}{۳}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}$

پاسخ گزینه‌ی «۴» مطابق شکل روبه‌رو، شیب خط MN برابر است با:

$$m_{MN}=\frac{\text{جابه‌جایی عمودی}}{\text{جابه‌جایی افقی}}=\frac{۹}{-۶}=-\frac{۳}{۲}$$



تست با توجه به شکل مقابل، کدام گزینه درست است؟



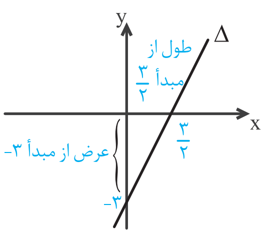
۱) $m_{L_۴}<m_{L_۱}<m_{L_۳}<m_{L_۲}$ ۲) $m_{L_۱}<m_{L_۴}<m_{L_۲}<m_{L_۳}$

۳) $m_{L_۴}<m_{L_۱}<m_{L_۲}<m_{L_۳}$ ۴) $m_{L_۱}<m_{L_۲}<m_{L_۴}<m_{L_۳}$

پاسخ گزینه‌ی «۳» با توجه به نمودار $m_{L_۲}$ و $m_{L_۳}$ هر دو مثبت‌اند (با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی حاده می‌سازند) و $m_{L_۱}$ و $m_{L_۴}$ هر دو منفی‌اند (با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی منفرجه می‌سازند). از طرفی هر چقدر عدد شیب (بدون در نظر گرفتن علامتش) کوچکتر باشد، خط به محور x ها نزدیک‌تر است و هر قدر عدد شیب بزرگتر باشد، خط به محور y ها نزدیکتر است، بنابراین $m_{L_۳}>m_{L_۲}>۰$ و $۰>m_{L_۱}>m_{L_۴}$ و در حالت کلی $m_{L_۴}<m_{L_۱}<m_{L_۲}<m_{L_۳}$ و گزینه‌ی (۳) درست است.

خط و معادله‌ی آن ◄ می‌دانیم از هر دو نقطه‌ی متمایز یک خط عبور می‌کند، بنابراین با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط می‌توانیم معادله‌ی آن را به دست آوریم و همچنین نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کنیم. برای این منظور معمولاً از نقاط تلاقی با محور x ها و محور y ها استفاده می‌کنیم. برای یافتن محل تلاقی با محور x ها (طول از مبدأ)، عرض را در معادله، صفر و برای یافتن محل تلاقی با محور y ها (عرض از مبدأ) طول را در معادله، صفر قرار می‌دهیم. به عنوان مثال، نمودار خط به معادله‌ی $\Delta : y=۲x-۳$ به شکل روبه‌روست.

x	۰	$\frac{۳}{۲}$
y	-۳	۰



۱ **صورت کلی معادله‌ی خط:** معادله‌ی یک خط به دو صورت باز و بسته نوشته می‌شود. به جدول زیر توجه کنید:

مثال	عرض از مبدأ	شیب خط	شکل معادله	نوع معادله
$۲x-۳y+۷=۰ \Rightarrow m=\frac{۲}{۳}$	$-\frac{c}{b}$	$m=-\frac{a}{b}$	$ax+by+c=۰$ (a و b با هم صفر نیستند)	باز
$y=۳x-۷ \Rightarrow m=۳$	h	$m=$ ضریب x	$y=mx+h$	بسته

به عنوان مثال:

(c) $۲y=x-۴$
مرتب‌سازی : $۲y-x+۴=۰$
شیب : $m=-\frac{-۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$
عرض از مبدأ : $x=۰ \to ۲y-۰+۴=۰ \to y=-۲$

(b) $۲x-۳y-۳=۰$
شیب : $m=-\frac{۲}{-۳}=\frac{۲}{۳}$
عرض از مبدأ : $x=۰ \to ۰-۳y-۳=۰ \to y=-۱$

(a) $y=۲x+۱$
شیب : $m=۲$
عرض از مبدأ : $y=۱$

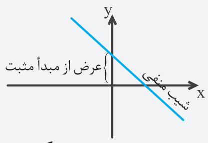
تست خط به معادله‌ی $y=-a^۲x+a^۲+۱$ به ازای هر عدد حقیقی غیر صفر a، از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ گزینه‌ی «۳» $a\neq ۰$، پس $a^۲$ همواره مثبت است، بنابراین:

شیب خط : $m=-a^۲<۰$ (شیب منفی)

عرض از مبدأ خط : $h=a^۲+۱>۰$ (عرض از مبدأ مثبت)



باید خطی را رسم کنیم با شیب منفی و عرض از مبدأ مثبت که از مبدأ عبور نمی‌کند. نمودار تقریبی به شکل بالاست که دیده می‌شود از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند.

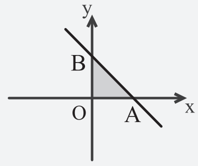
تست اگر خط $\Delta: x+my=۴$ با محورهای مختصات، مثلثی به مساحت ۸ واحد سطح تشکیل دهد، $|m|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینه‌ی «۲» برای رسم نمودار خط، طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن را می‌یابیم:

$$\Delta: x+my=۴ \begin{cases} \xrightarrow{x=۰} y=\frac{۴}{m} \to B(۰,\frac{۴}{m}) \\ \xrightarrow{y=۰} x=۴ \to A(۴,۰) \end{cases}$$

نمودار را با توجه به A و B رسم می‌کنیم. (فرض کرده‌ایم $m>۰$ است.)



می‌دانیم مساحت مثلث OAB، نصف حاصلضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه است، پس:

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}(OA)(OB)=\frac{۱}{۲}\times ۴\times\left|\frac{۴}{m}\right|=۸ \Rightarrow \frac{۸}{|m|}=۸ \Rightarrow |m|=۱$$

۲ **معادله‌ی خطوط خاص:** به معادله‌ی خطوط خاص در شکل مقابل توجه کنید:

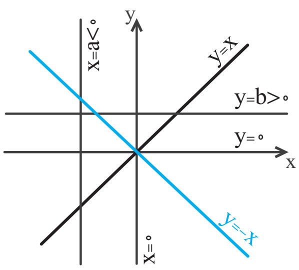
(۱) $y=x$: نیمساز ناحیه‌های اول و سوم (۲) $y=-x$: نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم

(۳) $y=b$: خطی موازی محور x ها (۴) $x=a$: خطی موازی محور y ها

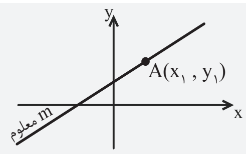
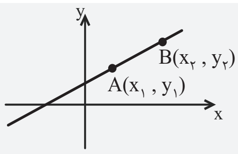
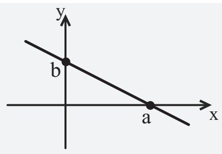
(۵) $y=۰$: معادله‌ی محور x ها (۶) $x=۰$: معادله‌ی محور y ها

(۷) $y=mx$: خطی که از مبدأ می‌گذرد.

توجه کنید که هر نقطه بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم $(y=x)$ یا نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم $(y=-x)$ از دو محور به یک فاصله است.



۳ **روش‌های نوشتن معادله‌ی خط:** در هر یک از حالت‌های زیر، می‌توان معادله‌ی خط را نوشت:

۱- معلوم بودن شیب و یک نقطه از خط	۲- معلوم بودن دو نقطه از خط	۳- معلوم بودن طول از مبدأ و عرض از مبدأ
		
معادله : $y-y_۱=m(x-x_۱)$ یا $y=mx+h$	معادله : $y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)$	معادله : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱$

● **مثال:** معادله‌ی خطی بنویسید که:

الف) از نقطه‌ی $A(-۱,۲)$ با شیب -۳ عبور کند. ب) از دو نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ و $B(۴,-۱)$ بگذرد.

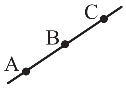
پ) طول از مبدأ آن ۳ و عرض از مبدأ آن -۴ باشد.

○ **حل:** الف) معادله‌ی خط با استفاده از فرمول (۱)، برابر $y-۲=-۳(x-(-۱))$ یا $y=-۳x-۱$ است.

ب) شیب خط گذرنده از دو نقطه برابر $m=\frac{۳-(-۱)}{-۲-۴}=-\frac{۴}{۶}$ است، پس معادله‌ی خط با استفاده از فرمول (۱) و نقطه‌ی A عبارت است از: $y-۳=\frac{-۲}{۳}(x-(-۲))$

پ) طول از مبدأ $a=۳$ و عرض از مبدأ $b=-۴$، پس معادله‌ی خط برابر است با: $\frac{x}{۳}+\frac{y}{-۴}=۱$ یا $۴x-۳y=۱۲$.

۴ شرط بر یک استقامت بودن سه نقطه: اگر سه نقطه‌ی A ، B و C بر روی یک خط راست قرار داشته باشند، آنگاه:

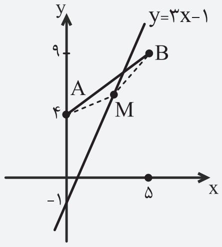


$$m_{AB} = m_{AC}$$

همچنین نقطه‌ی C در معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد صدق می‌کند.

تست نقطه‌ی M به طول α بر روی خط $y = ۳x - ۱$ چنان انتخاب شده که مجموع فواصل M از دو نقطه‌ی $A(۰ , ۴)$ و $B(۵ , ۹)$ می‌نیمم است. مقدار α کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) $\frac{۹}{۲}$



پاسخ گزینه‌ی «۲» خط و نقاط داده شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، $MA + MB$ هنگامی مینیمم است که هر سه نقطه در یک راستا قرار داشته باشند. از آنجا که نقطه‌ی M روی خط $y = ۳x - ۱$ قرار دارد، مختصات آن به صورت $(\alpha , ۳\alpha - ۱)$ است. برای آنکه سه نقطه‌ی $A(۰ , ۴)$ ، $B(۵ , ۹)$ و $M(\alpha , ۳\alpha - ۱)$ در یک راستا (یعنی روی یک خط) قرار گیرند، باید داشته باشیم:

$$m_{AB} = m_{AM} \Rightarrow \frac{۹ - ۴}{۵ - ۰} = \frac{۳\alpha - ۱ - ۴}{\alpha - ۰} \Rightarrow ۱ = \frac{۳\alpha - ۵}{\alpha} \Rightarrow \alpha = ۳\alpha - ۵ \Rightarrow ۲\alpha = ۵ \Rightarrow \alpha = \frac{۵}{۲}$$

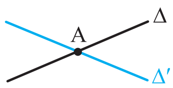
وضعیت دو خط نسبت به هم ◄ در دستگاه مختصات xoy ، دو خط یا موازی‌اند یا متقاطع یا بر هم منطبق‌اند. اگر m و m' به ترتیب شیب‌های دو خط (غیرمنطبق) Δ و Δ' باشند، آنگاه:

۱ **شرط موازی بودن:** آن است که شیب‌هایشان با هم برابر باشد. یعنی، $m = m'$.

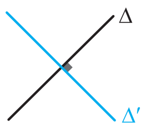
۲ **شرط عمود بر هم بودن:** آن است که شیب یکی عکس و قرینه‌ی شیب دیگری باشد.

یعنی، $mm' = -۱$ یا $m' = -\frac{۱}{m}$.

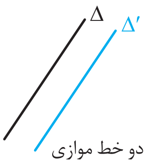
۳ **شرط متقاطع بودن:** آن است که شیب دو خط با هم برابر نباشند. یعنی، $m \neq m'$.



دو خط متقاطع
$m' \neq m$



دو خط عمود بر هم
$m' = \frac{-۱}{m}$



دو خط موازی
$m = m'$

توجه وقتی دو خط متقاطعند، یکدیگر را تنها در یک نقطه مانند A قطع می‌کنند. برای یافتن محل تلاقی دو خط، کافی است دستگاه دو معادله دو مجهولی آنها را حل کنیم و x و y را بیابیم.

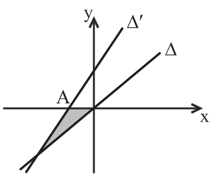
● **مثال:** معادله‌ی خطی بنویسید که:

الف) از نقطه‌ی $A(۱ , -۲)$ عبور کرده و بر خط $\Delta : ۳x - ۲y = ۱$ عمود باشد. ب) موازی خط $۲y - ۳ = ۰$ بوده و از نقطه‌ی $A(۲ , -۴)$ عبور کند.

○ **حل:** الف) شیب خط Δ برابر $m = -\frac{۳}{-۲} = \frac{۳}{۲}$ است، بنابراین شیب خط مطلوب عکس و قرینه‌ی آن یعنی $m' = -\frac{۲}{۳}$ و از آنجا معادله‌ی خط مطلوب $y - (-۲) = -\frac{۲}{۳}(x - ۱)$ است.

ب) شیب خط $۲y - ۳ = ۰$ برابر صفر است، پس شیب خط مطلوب هم صفر و معادله‌ی آن $y = b$ است، چون از نقطه‌ی $A(۲ , -۴)$ عبور می‌کند، معادله‌ی آن $y = -۴$ است.

● **مثال:** در شکل مقابل، خطهای $\Delta : y = x$ و $\Delta' : ۲x - y = -۶$ رسم شده‌اند.



الف) مساحت سطح هاشورخورده را بیابید.

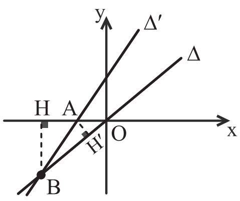
ب) معادله‌ی بزرگترین ارتفاع مثلث را بیابید.

پ) تصویر نقطه‌ی A بر خط Δ را بیابید.

○ **حل:** الف) برای یافتن مساحت، اندازه‌ی ضلع AO و ارتفاع وارد بر آن، BH را می‌یابیم:

$$\Delta' : ۲x - y = -۶ \xrightarrow{y=۰} x = -۳ \Rightarrow A(-۳ , ۰) \Rightarrow AO = ۳$$

برای یافتن BH ، نقطه‌ی B محل تلاقی دو خط را می‌یابیم:



$$\begin{cases} \Delta : y = x \\ \Delta' : ۲x - y = -۶ \xrightarrow{y=x} ۲x - x = -۶ \Rightarrow x = -۶ , y = -۶ \Rightarrow BH = ۶ \end{cases}$$

بنابراین:

$$S_{AOB} = \frac{AO \times BH}{۲} = \frac{۳ \times ۶}{۲} = ۹$$

ب) بزرگترین ارتفاع مثلث، بر کوچکترین ضلع آن وارد می‌شود که با توجه به شکل، AO کوچکترین ضلع مثلث است؛ معادله‌ی ارتفاع وارد بر این ضلع، یعنی خط BH به صورت $x = -۶$ است.

پ) تصویر نقطه‌ی A بر خط Δ از محل تلاقی ارتفاع AH' و خط Δ به دست می‌آید. AH' بر Δ عمود است، پس $m_{AH'} = \frac{-۱}{m_\Delta} = -۱$ ، بنابراین:

$$AH' : y - y_A = m_{AH'}(x - x_A) \Rightarrow y - ۰ = -۱ \times (x - (-۳)) \Rightarrow y = -x - ۳$$

$$\begin{cases} \Delta : y = x \\ AH' : y = -x - ۳ \xrightarrow{y=x} x = -x - ۳ \Rightarrow x = \frac{-۳}{۲} , y = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow H'(-\frac{۳}{۲} , -\frac{۳}{۲}) \end{cases}$$

تست دو خط $\Delta: ۳y+(۲-a)x=۶$ و $\Delta': ۲x-by=۴$ در نقطه‌ی A روی محور yها بر هم عمودند، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۵- ۴) ۱-

پاسخ گزینه‌ی «۲» هر نقطه واقع بر محور yها دارای طول صفر است، پس طول نقطه‌ی A صفر است. با قرار دادن آن در خط Δ، عرض نقطه‌ی A را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{x_A=۰} \Delta: ۳y+۰=۶ \to y_A=۲ \to A(۰,۲)$$

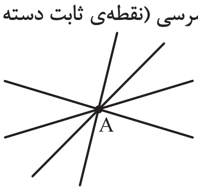
نقطه‌ی A در خط Δ' صدق می‌کند، پس:

$$\xrightarrow{A(۰,۲)\in\Delta'} ۰-۲b=۴ \to b=-۲$$

بنابراین $\Delta': ۲x+۲y=۴$ که شیب آن $m'=-\frac{۲}{۲}=-۱$، چون Δ و Δ' بر هم عمودند، پس شیب خط Δ، عکس و قرینه‌ی شیب Δ' و برابر ۱ است و داریم:

$$m_\Delta=-\frac{۲-a}{۳}=۱ \Rightarrow ۲-a=-۳ \Rightarrow -a=-۵ \Rightarrow a=۵$$

دسته خطوط و نقطه‌ی ثابت آن ◄ دسته خطوط، مجموعه‌ی خط‌هایی هستند که در یک نقطه همرس‌اند (مشترک‌اند)، معمولاً معادله‌ی یک دسته خطوط برحسب یک پارامتر مانند m است. به عنوان مثال، معادله‌ی $(m-۱)x+my=۳$ یک دسته خط را نمایش می‌دهد. برای یافتن نقطه‌ی ثابت دسته (نقطه‌ی همرسی خطوط)، به پارامتر m دو مقدار می‌دهیم و محل تلاقی دو خط را می‌یابیم. در این مثال داریم:



$$(m-۱)x+my=۳ \begin{cases} \xrightarrow{m=۱} y=۳ \\ \xrightarrow{m=۲} x+۲y=۳ \xrightarrow{y=۳} x=-۳ \end{cases}$$

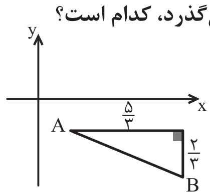
پس نقطه‌ی ثابت این دسته خطوط $A(-۳,۳)$ است. البته می‌توانستیم m را طوری انتخاب کنیم که x یا y حذف شوند، مثلاً $m=۱$ و $m=۰$.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳ پیمانه — **۳۰ تست** — **پیمانه‌های ۱ تا ۳**

معادله‌ی خط و اوضاع نسبی دو خط — تیپ ۱ — صفحه‌های ۲ تا ۴ ریاضی ۲

۱. در شکل زیر، ضریب زاویه‌ی خطی که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد، کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۴ - الف) (سراسری تجربی - ۷۳)



۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $-\frac{۲}{۵}$ ۴) $-\frac{۵}{۲}$

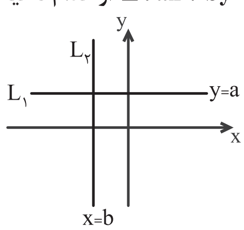
۲. خط گذرنده بر دو نقطه‌ی $(-۲,۳)$ و $(-۳,۷)$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟ (صفحه‌ی ۳- کار در کلاس- مکمل ۶- ب)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳/۵ ۴) ۲/۵

۳. به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=mx+m-۳$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲) (سراسری انسانی- ۹۴)

۱) $۰\le m\le ۳$ ۲) $m\ge ۳$ ۳) $m\le ۰$ ۴) هیچ مقدار m

۴. در نمودار زیر، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ رسم شده‌اند. خط $\Delta: ax+by-a=۰$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲)



۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم

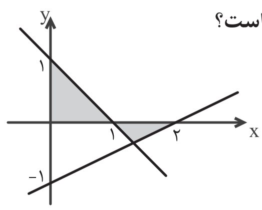
۵. اگر m و b اعداد حقیقی و $mb>۰$، کدام‌یک از نقاط زیر نمی‌تواند در معادله‌ی خط $y=mx+b$ صدق کند؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲)

۱) $(۰,۱۳۸۹)$ ۲) $(۰,-۱۳۸۹)$ ۳) $(۱۳,۸۹)$ ۴) $(۱۳۸۹,۰)$

۶. مساحت ناحیه‌ی محدود به خط $y=x-۳$، محور xها و خطوط $x=-۲$ و $x=۴$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۷. با توجه به شکل زیر، مساحت قسمت سایه خورده کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲) (سراسری ریاضی - ۷۸)



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۸. مساحت مثلثی که خط گذرنده از نقطه‌ی $(۱\,,\,۰)$ با محورهای مختصات در ناحیه‌ی دوم می‌سازد، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ است. معادله‌ی این خط کدام است؟

(صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۲) (آزمون کانون – ۲۰ مهر ۹۷)

۱) $\sqrt{۳}y+۳x-\sqrt{۳}=۰$ ۲) $\sqrt{۳}y-۳x-\sqrt{۳}=۰$ ۳) $y-x-۱=۰$ ۴) $y-۳x-۱=۰$

۹. در صفحه‌ی مختصات x و y، نقطه‌ی $(x_۰\,,\,-۳)$ روی خطی که از نقطه‌های $(۰\,,\,۴)$ و $(-۲\,,\,۰)$ می‌گذرد قرار دارد، $x_۰$ کدام است؟

(صفحه‌ی ۳- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

۱) $-۳/۵$ ۲) -۴ ۳) ۳ ۴) $۴/۵$

۱۰. به ازای کدام مقادیر a، نقاط $(a,۳)$، $(۶\,,\,۴a+۱)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

(صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۴) (سراسری تجربی خارج ازکشور – ۸۵)

۱) $-۲\,,\,\frac{۹}{۴}$ ۲) $۲\,,\,\frac{۳}{۴}$ ۳) $-۲\,,\,\frac{-۳}{۴}$ ۴) $۲\,,\,\frac{-۹}{۴}$

۱۱. اگر دو نقطه‌ی $(-۱\,,\,۲)$ و $(۳\,,\,۶)$ روی یک دایره باشند، کدام نقطه‌ی زیر می‌تواند روی این دایره باشد؟

(صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۴) (آزمون کانون – ۲۴ مهر ۹۹)

۱) $(۱\,,\,۴)$ ۲) $(۲\,,\,۵)$ ۳) $(-۱\,,\,۶)$ ۴) $(۱۰\,,\,۱۳)$

۱۲. نقطه‌های $P(-۱\,,\,-۲)$ و $Q(۴\,,\,۲)$ مفروض‌اند. نقطه‌ی $R(۱\,,\,m)$ طوری انتخاب شده است که $PR+RQ$ حداقل باشد، m کدام است؟

(صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۴)

۱) $\frac{-۳}{۵}$ ۲) $\frac{-۲}{۵}$ ۳) $\frac{-۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۳. مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوطی به معادله‌ی $y=x+۳$ و $x=۴$ و محور y ها و نیمساز ناحیه‌ی اول برابر کدام است؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (سراسری تجربی - ۷۷)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۴. نقطه‌ی A بر روی خط $\Delta: ۲x-y+۱=۰$ و نقاط $M(۱\,,\,-۲)$ و $N(۳\,,\,-۴)$ مفروضند. اگر پاره‌خط‌های MA و NA هم‌راستای هم باشند، آنگاه مجموع طول و عرض نقطه‌ی A کدام است؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۵. از نقطه‌ای به طول ۶ روی محور x ها، خط d را بر خط $۲y+۳x=۷$ عمود می‌کنیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۲) (آزمون کانون – ۲ آبان ۹۹)

۱) -۸ ۲) ۹ ۳) -۴ ۴) ۴

۱۶. خط به معادله‌ی $ax+۲y-۳=۰$ بر کدام‌یک از خطوط زیر می‌تواند عمود باشد؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مشابه ۱)

۱) $y=a$ ۲) $x=a$ ۳) $۲x+ay-۴=۰$ ۴) $-ax+(a-۱)y+۱=۰$

۱۷. خط Δ با عرض از مبدأ -۲، با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد و در نقطه‌ی A بر خط Δ' با طول از مبدأ ۴ عمود است. فاصله‌ی نقطه‌ی A تا محور y ها کدام است؟

(صفحه‌ی ۳- مرتبط با فعالیت)

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۸. خط $۲mx+(m^۲-۱)y=۳$، به ازای دو مقدار m با جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازد. اختلاف مقادیر m کدام است؟

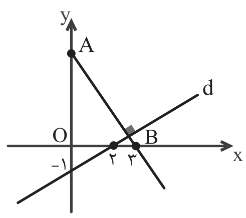
(معادله‌ی درجه‌ی دوم و شیب خط- سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی – دی ۱۴۰۱)**

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۴}{\sqrt{۳}}$

۱۹. در شکل مقابل، مساحت مثلث OAB کدام است؟

(صفحه‌ی ۳- مرتبط با فعالیت) (آزمون کانون – ۳ آبان ۹۸)

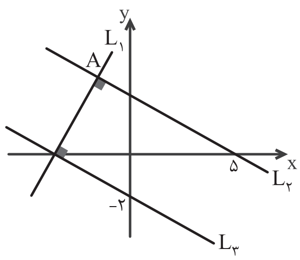
۱) ۱۸
۲) ۹
۳) ۱/۵
۴) ۴



۲۰. مطابق شکل زیر، خط $L_۱$ با شیب ۲ بر دو خط $L_۲$ و $L_۳$ عمود است. طول نقطه‌ی A کدام است؟

(منطبق بر کتاب درسی- صفحه‌ی ۳- فعالیت)

۱) -۲
۲) -۴
۳) $-۱/۸$
۴) $-۲/۲$



۲۱. اگر خطوط $y=x+۲$ و $(k+۱)y=x+۲$ و $y=(۲k+۱)x+۱$ قطرهای یک لوزی باشند، مختصات مرکز تقارن این لوزی کدام است؟
(صفحه‌ی ۳- مرتبط با فعالیت) (آزمون کانون - ۳ مرداد ۹۹)

۱) $(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ ۲) $(-\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۳) $(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$

۲۲. خط Δ بر خط $D: x-۴y+۲=۰$ عمود است و مساحت مثلث محدود بین خط Δ و محورهای مختصات واقع در ناحیه‌ی سوم برابر ۸ واحد مربع است. عرض محل تلاقی دو خط Δ و D کدام است؟
(صفحه‌ی ۳- مرتبط با فعالیت)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۳. معادله‌های دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه $x+y=۵$ و $y=۳x+۲$ هستند، اگر خط Δ گذرنده از مبدأ، ضلع سوم این مثلث باشد، طول مختصات رأس قائمه کدام می‌تواند باشد؟
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

۱) $-۰/۶$ ۲) $-۰/۳$ ۳) $-۰/۲$ ۴) $-۰/۱$

۲۴. دو خط به معادله‌ی $ay-x=-۷$ و $a^۲x+y=۲$ بر دو ضلع مربع منطبق‌اند. در این صورت برای a چند جواب وجود دارد؟
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون- ۵ آبان ۹۶)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۵. دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۳)$ مفروض است. از نقطه‌ی $(-۵,۸)$ واقع بر محیط این دایره خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم. خط مماس محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

۱) $(-\frac{۱۹}{۳},۰)$ ۲) $(\frac{۲۹}{۳},۰)$ ۳) $(\frac{۱۹}{۳},۰)$ ۴) $(-\frac{۲۹}{۳},۰)$

۲۶. اگر $A(-۱,۲)$ ، $B(۳,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس A کدام است؟
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳- ب) (آزمون کانون- ۱ اردیبهشت ۹۵)

۱) $y=-x-۳$ ۲) $y=-x+۱$ ۳) $y=-۲x$ ۴) $y=x+۳$

۲۷. مثلث با رأس‌های $A(۱,-۱)$ ، $B(۳,۱)$ و $C(-۱,۳)$ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی H، محل تلاقی ارتفاع CH با ضلع AB است. عرض نقطه‌ی H کدام است؟
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۱

۲۸. معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$ و $y=۲x$ و $x=۱$ است، معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳- ب) (سراسری تجربی - ۸۴)

۱) $y=\frac{۲}{۳}$ ۲) $x=\frac{۲}{۳}$ ۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$ ۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

۲۹. تصویر نقطه‌ی $A(-۳,۲)$ بر روی خط $L: ۳y-۲x+۱=۰$ ، نقطه‌ی $B(a,b)$ است. $a+b$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با ۳- ب)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۱

۳۰. دو خط به معادلات $y=۲x+a$ و $y=bx+۱$ نسبت به خط $x=۱$ قرینه‌اند. $a+b$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۳- مرتبط با فعالیت)

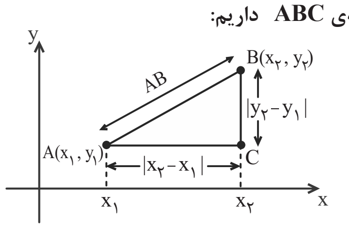
۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۵ ۴) -۱

۱ هندسه‌ی تحلیلی

ریاضی ۲	فصل اول
یازدهم	صفحه‌های: ۴ تا ۸

۲ فاصله‌ی دو نقطه

فاصله‌ی دو نقطه از هم ◄ برای پیدا کردن فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ به شکل زیر توجه کنید. با توجه به شکل، فاصله‌ی بین A و C برابر $|x_۲-x_۱|$ و فاصله‌ی بین B و C برابر $|y_۲-y_۱|$ است.با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم:



$$AB^۲=AC^۲+BC^۲ \Rightarrow AB^۲=|x_۲-x_۱|^۲+|y_۲-y_۱|^۲$$
$$\rightarrow \boxed{AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}}$$

توجه ◄◄ فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۱,y_۱)$ از مبدأ مختصات برابر $OA=\sqrt{x_۱^۲+y_۱^۲}$ است.

تذکر ◄ به چند حالت خاص برای فاصله‌ی دو نقطه در زیر توجه کنید.

۱) اگر دو نقطه‌ی A و B هم‌عرض باشند، آنگاه $AB=|x_B-x_A|$.

۲) اگر دو نقطه‌ی A و B هم‌طول باشند، آنگاه $AB=|y_B-y_A|$.

۳) اگر نقطه‌ی A از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله باشد، آنگاه $AC=AB$.

۴) اگر نقطه‌ی $A(\alpha,\beta)$ از دو محور به یک فاصله باشد، آنگاه این نقطه بر روی یکی از دو خط $y=x$ یا $y=-x$ قرار دارد و در نتیجه $|\alpha|=|\beta|$.

تست دو نقطه‌ی $A(۱,۳)$ و $B(-۱,۴)$ دو رأس مقابل از مربعی هستند. مساحت مربع کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۸}$

پاسخ گزینه‌ی «۲» فاصله‌ی دو رأس مقابل از مربع برابر قطر مربع و مساحت مربع، نصف مجذور قطر آن است، پس:

$$d=\sqrt{(۱-(-۱))^۲+(۳-۴)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵} \text{ و } S=\frac{d^۲}{۲}\xrightarrow{d=\sqrt{۵}}S=\frac{۵}{۲}$$

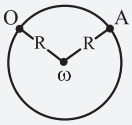
● **مثال:** نقطه‌ی M واقع بر محور طول‌ها از دو نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ و $B(۴,-۱)$ به یک فاصله است. مختصات نقطه‌ی M را بیابید.

○ **حل:** نقطه‌ی M بر روی محور طول‌هاست، پس $M(x,۰)$. فاصله‌ی این نقطه از دو نقطه‌ی A و B برابر است، پس:

$$MA=MB\Rightarrow\sqrt{(x+۲)^۲+۳^۲}=\sqrt{(x-۴)^۲+۱^۲}\Rightarrow x^۲+۴x+۱۳=x^۲-۸x+۱۷\Rightarrow ۱۲x=۴\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow M(\frac{۱}{۳},۰)$$

تست شعاع دایره‌ای که از دو نقطه‌ی $(۰,۰)$ و $(۳,۱)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله‌ی $y=۲x$ باشد، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۶)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$



پاسخ گزینه‌ی «۲» مرکز این دایره را ω می‌نامیم. چون طبق فرض مسأله، ω روی خط به معادله‌ی $y=۲x$ قرار دارد، پس می‌توانیم مختصات آن را به صورت $\omega(\alpha,۲\alpha)$ در نظر بگیریم. چون دو نقطه‌ی $O(۰,۰)$ و $A(۳,۱)$ بر این دایره واقع هستند، پس اگر شعاع دایره را با R نشان دهیم، آن‌گاه: $O\omega=A\omega=R$

$$O\omega=A\omega\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(۲\alpha-۰)^۲}=\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱)^۲}\Rightarrow(\alpha-۰)^۲+(۲\alpha-۰)^۲=(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۱)^۲$$

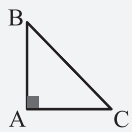
$$\Rightarrow\alpha^۲+۴\alpha^۲=(\alpha^۲-۶\alpha+۹)+(۴\alpha^۲-۴\alpha+۱)\Rightarrow ۰=-۶\alpha+۹-۴\alpha+۱\Rightarrow ۱۰\alpha=۱۰\Rightarrow\alpha=۱$$

$$R=O\omega=\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(۲\alpha-۰)^۲}=\sqrt{\alpha^۲+۴\alpha^۲}=\sqrt{۵\alpha^۲}\xrightarrow{\alpha=۱}R=\sqrt{۵}$$

تست مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC در رأس A قائمه است. اگر $A(۱,۲)$ و $B(۲,۵)$ باشند، آنگاه مجموع طول و عرض رأس C واقع در ناحیه‌ی اول کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ گزینه‌ی «۲» اگر فرض کنیم $C(a,b)$، چون مثلث در رأس A قائمه است، پس مطابق شکل فرضی زیر داریم:



$$(۱)\ m_{AB}\times m_{AC}=-۱\Rightarrow m_{AB}=\frac{۵-۲}{۲-۱}=۳ \text{ و } m_{AC}=\frac{b-۲}{a-۱}\Rightarrow\frac{b-۲}{a-۱}=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow b-۲=-\frac{۱}{۳}(a-۱)$$

$$(۲)\ AB=AC \begin{cases} AB=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۰} \\ AC=\sqrt{(a-۱)^۲+(b-۲)^۲} \end{cases}\Rightarrow(a-۱)^۲+(b-۲)^۲=۱۰$$

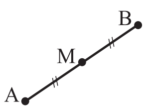
$$\xrightarrow{b-۲=-\frac{۱}{۳}(a-۱)}(a-۱)^۲+\frac{۱}{۹}(a-۱)^۲=۱۰\Rightarrow\frac{۱۰}{۹}(a-۱)^۲=۱۰\Rightarrow(a-۱)^۲=۹\Rightarrow\begin{cases}a-۱=۳\to a=۴\\a-۱=-۳\to a=-۲\end{cases}$$

در ناحیه‌ی اول طول نقطه مثبت است، پس $a=۴$ و از آنجا $b-۲=\frac{-۱}{۳}(۴-۱)$ و در نتیجه $b=۱$، مجموع طول و عرض نقطه‌ی C، برابر با $a+b=۴+۱=۵$ است.

۳ مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط

مختصات نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط ◄ هرگاه $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطه در یک دستگاه مختصات باشند، آنگاه مختصات نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$$



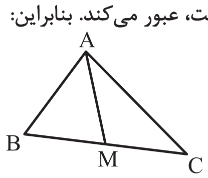
به عنوان مثال، مختصات وسط پاره‌خط با دو نقطه‌ی انتهایی $A(-۴,۵)$ و $B(۷,-۳)$ برابر است با:

$$M(\frac{۷-۴}{۲},\frac{-۳+۵}{۲})\Rightarrow M(\frac{۳}{۲},۱)$$

توجه با استفاده از نقطه‌ی وسط پاره‌خط می‌توانیم معادله‌ی میانه و طول آن در مثلث، عمود منصف یک پاره‌خط، معادله‌ی عمود منصف در مثلث و مرکز یک دایره با داشتن دو سر قطر آن را بیابیم.

● **مثال:** اگر $A(۰,-۳)$، $B(۱,۱)$ و $C(۳,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، آنگاه معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع BC را بیابید.

○ **حل:** مطابق شکل فرضی زیر، معادله‌ی میانه‌ی ضلع BC خطی است که از نقطه‌ی A و نقطه‌ی M که وسط دو نقطه‌ی B و C است، عبور می‌کند. بنابراین:



$$M(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲})=(\frac{۱+۳}{۲},\frac{۱+۱}{۲})=(۲,۱)$$

$$M(۲,۱) \text{ و } A(۰,-۳)\Rightarrow m_{AM}=\frac{۱-(-۳)}{۲-۰}=۲$$

معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع BC:

$$\xrightarrow{m=۲\,,\,A(۰,-۳)}y-(-۳)=۲(x-۰)\to y=۲x-۳$$

تست خط Δ عمود منصف پاره‌خطی است که دو نقطه‌ی $A(۰,۴)$ و $B(۲,۰)$ را به هم وصل می‌کند، عرض از مبدأ خط Δ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) -۳

پاسخ گزینه‌ی «۳» خط مطلوب (Δ)، بر پاره‌خط AB عمود است، از طرفی نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB در این خط صدق می‌کند.

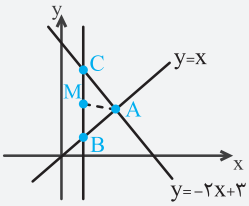
$$M(\frac{۲+۰}{۲},\frac{۴+۰}{۲})=(۱,۲) \quad \text{و} \quad m_{AB}=\frac{۰-۴}{۲-۰}=-۲ \Rightarrow m_\Delta=-\frac{۱}{m_{AB}}=\frac{۱}{۲}$$

معادله‌ی خط عمود منصف برابر با $y-۲=\frac{۱}{۲}(x-۱)$ یا $۲y-x-۳=۰$ است. با قرار دادن $x=۰$ در خط، عرض از مبدأ برابر $\frac{۳}{۲}$ است.

تست اضلاع مثلثی منطبق بر نیمساز ناحیه‌ی اول و دو خط به معادلات $y+۲x=۳$ و $۲x-۱=۰$ هستند. اندازه‌ی میانه‌ی نظیر ضلع عمودی (موازی محور yها) این مثلث کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۸}$

پاسخ گزینه‌ی «۳» معادله‌ی نیمساز ناحیه‌ی اول، $y=x$ است. به شکل زیر دقت کنید. برای یافتن اندازه‌ی میانه‌ی ضلع عمودی (AM) باید ابتدا محل‌های تلاقی سه خط یعنی رأس‌های مثلث را بیابیم و سپس وسط BC را پیدا کنیم.



$$\text{برای } A \begin{cases} y=x \\ y=-۲x+۳ \end{cases} \xrightarrow{y=x} x=-۲x+۳ \to x=۱, y=۱ \Rightarrow A(۱,۱)$$

$$\text{برای } B \begin{cases} x=\frac{۱}{۲} \\ y=x \end{cases} \Rightarrow B(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}) \qquad \text{برای } C \begin{cases} x=\frac{۱}{۲} \\ y=-۲x+۳ \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{۱}{۲}} y=۲ \Rightarrow C(\frac{۱}{۲},۲)$$

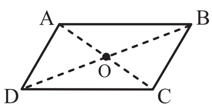
پس رئوس مثلث $A(۱,۱)$ و $B(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $C(\frac{۱}{۲},۲)$ هستند. میانه‌ی ضلع عمودی وسط پاره‌خط BC را قطع می‌کند، پس:

$$M(\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}}{۲},\frac{۲+\frac{۱}{۲}}{۲}) \Rightarrow M(\frac{۱}{۲},\frac{۵}{۴})$$

و اندازه‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع عمودی برابر AM است:

$$AM=\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۱-\frac{۵}{۴})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}}=\sqrt{\frac{۵}{۱۶}}=\frac{\sqrt{۵}}{۴}$$

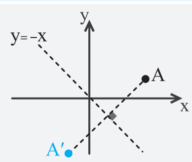
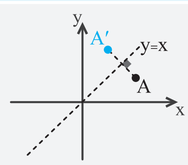
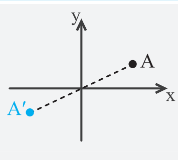
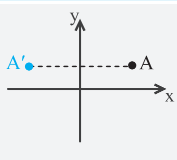
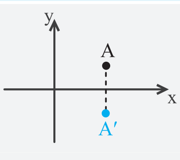
تذکر ◄ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ (شکل مقابل)، قطرها منصف هم هستند. پس O وسط BD و AC است و داریم:



$$\begin{cases} x_O=\frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲} \\ y_O=\frac{y_A+y_C}{۲}=\frac{y_B+y_D}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{matrix}$$

رابطه‌ی بالا برای مربع، مستطیل و لوزی نیز برقرار است. همچنین در مربع و لوزی، قطرها عمودمنصف یکدیگرند.

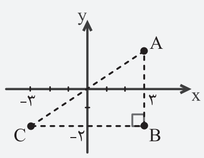
قرینه‌یابی ◄ اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AA' باشد، آنگاه نقطه‌ی A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی M می‌نامیم. بنابراین برای یافتن قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک خط یا نقطه‌ی دیگر از این ویژگی استفاده می‌کنیم.

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a,b)$ نسبت به خط $y=-x$	قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a,b)$ نسبت به خط $y=x$	قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a,b)$ نسبت به مبدأ مختصات	قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a,b)$ نسبت به محور y ها	قرینه‌ی نقطه‌ی $A(a,b)$ نسبت به محور x ها
				
$A'(-b,-a)$	$A'(b,a)$	$A'(-a,-b)$	$A'(-a,b)$	$A'(a,-b)$

تست اگر قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۳,۲)$ نسبت به محور xها و مبدأ مختصات را به‌ترتیب B و C بنامیم، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۹۶

پاسخ گزینه‌ی «۱»



$$A(۳,۲) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} B(۳,-۲)$$

$$A(۳,۲) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} C(-۳,-۲)$$

با توجه به نمودار، مثلث ABC در رأس B قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{AB\times BC}{۲}=\frac{|y_B-y_A|\times|x_C-x_B|}{۲}=\frac{۴\times۶}{۲}=۱۲$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳ پیمانه ۳۰ تست | پیمانه‌های ۴ تا ۶

فاصله‌ی دو نقطه | تیپ ۲ | صفحه‌های ۴ تا ۶ و تمرین‌های صفحه‌ی ۹ ریاضی ۲

۳۱. مقدار m چقدر باشد تا فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(m\,,۲)$ و $B(۲m+۱\,,-m)$ برابر ۵ باشد؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون- ۵ آبان ۹۶)

۱) ۳ یا صفر ۲) فقط ۲ ۳) فقط ۵- ۴) ۲ یا ۵-

۳۲. فاصله‌ی نقطه‌ی $B(-۴\,,۳)$ از مبدأ مختصات و همچنین از نقطه‌ی A واقع بر محور طول‌ها به یک اندازه است. طول نقطه‌ی A کدام است؟
(صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون – ۱۶ آبان ۹۹)

۱) ۸- ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۴-

۳۳. نقاط $C(۳,۱)$، $B(۳,-۲)$ و $A(-۱,۱)$ رئوس مثلث ABC هستند. نوع مثلث و مساحت آن کدام است؟
(صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مشابه ۱) (آزمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) متساوی‌الاضلاع و ۶ ۲) متساوی‌الساقین و ۴ ۳) قائم‌الزاویه و ۶ ۴) قائم‌الزاویه و ۴

۳۴. از برخورد خطوط $y+۲x=۱$، $۲y-x=۲$ و $y+۴=۳x$ با یکدیگر، مثلثی پدید می‌آید. مساحت این مثلث کدام است؟
(صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون – ۳ آبان ۹۸)

۱) ۵ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

۳۵. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-۲m+۱\,,۳m-۹)$ از دو محور مختصات به یک اندازه است. در این صورت فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ مختصات برابر است با:
(صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون- ۱۹ آبان ۹۶)

۱) ۵ یا ۳ ۲) $۱۵\sqrt{۲}$ یا $۵\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ یا $۱۵\sqrt{۲}$ ۴) ۲ یا ۸

۳۶. دو قطر یک دایره بر دو خط $x=۲$ و $y=۲$ واقع هستند. اگر این دایره از نقطه‌ی $A(۲\,,۰)$ بگذرد، شعاع این دایره کدام است؟
(صفحه‌ی ۴- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $\sqrt{۳}$

۳۷. نقطه‌ی $(a\,,۲a)$ مرکز دایره‌ی گذرنده بر دو نقطه‌ی $(۱\,,۲)$ و $(-۱\,,۴)$ است. شعاع این دایره کدام است؟
(صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۴- ب) (سراسری تجربی - ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۳۸. خط به معادله‌ی $y=\frac{۱}{۳}x-۱$ محور xها را در نقطه‌ی A و محور yها را در نقطه‌ی B قطع می‌کند. نقطه‌ی M بر روی این خط طوری انتخاب شده که $MA=\frac{۲}{۵}MB$ است. عرض نقطه‌ی M کدام می‌تواند باشد؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۹. نقطه‌ی $A(۱\,,-۱)$ بر روی عمود منصف پاره‌خط BC قرار دارد. اگر $B(۴\,,۳)$ و نقطه‌ی C بر روی محور yها باشد، عرض مثبت نقطه‌ی C کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت)

۱) $-۲+\sqrt{۵}$ ۲) $-۱+۲\sqrt{۵}$ ۳) $-۲+\sqrt{۶}$ ۴) $-۱+۲\sqrt{۶}$

۴۰. شیب نیم‌خطی با نقطه‌ی شروع $A(۲\,,۴)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم که نقطه‌ی B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-۳\,,-۱)$ باشد، محیط مستطیل، کدام است؟ (صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۵) **(سراسری تجربی – ۱۴۰۰)**

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) $۶\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۱۰}$

۴۱. نقطه‌ی $H(۲,۱)$ را روی خط $۳x-y=۵$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم، به طوری‌که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A، کدام است؟ (صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۳) **(سراسری تجربی – ۱۴۰۰)**

۱) $(\frac{۷}{۲},\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱۱}{۶})$

۴۲. نقاط B، C و $M(۳\,,۲)$ روی خط $x+۲y=۷$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازه‌ی میانه‌ی AM برابر $۵\sqrt{۵}$ واحد و BC قاعده‌ی مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A، کدام است؟
(صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مرتبط با ۱) **(سراسری تجربی خارج از کشور – ۱۴۰۰)**

۱) ۵ ۲) ۲- ۳) ۵- ۴) ۸-

۴۳. فاصله‌ی نقطه‌ی A روی خط $x+y=a$ از دو نقطه‌ی $B(-۳\,,۲)$ و $C(-۱\,,۴)$ به‌ترتیب برابر $\sqrt{۲۹}$ و ۵ است. مقدار a چقدر است؟
(صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) **(سراسری ریاضی–تیر ۱۴۰۱)**

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲-

۴۴. نقاط $A(۰,۱)$ و $B(۴,-۲)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند. طول مختصات نقطه D در ربع سوم، کدام است؟
(صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) **(سراسری ریاضی – دی ۱۴۰۱)**

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۴-

۴۵. نقاط $A(-۱,۴)$، $B(۳,۱)$، $C(x,y)$ و $D(-۱-x,y+۳)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط مستطیل کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) **(سراسری تجربی - تیر ۱۴۰۲)**

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط | تیپ ۳ | صفحه‌های ۶ تا ۹ ریاضی ۲

۴۶. خط $۴x+۲y-۸=۰$ محورهای مختصات را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند. فاصله‌ی مبدأ مختصات تا وسط پاره‌خط AB کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون - ۱۹ مهر ۹۸)

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۴۷. نقطه‌ی M بر روی خط $y=۲x+۱$ از دو نقطه‌ی $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله است. مجموع طول و عرض آن، کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱/۵ ۴) صفر

۴۸. نقاط $A(m-n,۲m+۳)$ و $B(m+n,۲n-۳)$ نسبت به نقطه‌ی $C(-۲,۲)$ قرینه‌ی یکدیگرند. در این صورت $۳m-۲n$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مکمل ۲) (آزمون کانون - ۱۷ فروردین ۹۷)

۱) -۶ ۲) -۱۴ ۳) -۲ ۴) ۴

۴۹. اگر نقطه‌ی $P(-۱۲,k)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $A(۰,-۳)$ و $B(۶,۱۵)$ قرار داشته باشد، k کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۲ آذر ۹۷)

۱) -۳۹ ۲) -۳ ۳) ۱۱ ۴) ۴

۵۰. نقاط $A(۲\beta,\beta)$ و $B(\beta+۳,\beta-۴)$ دو رأس مثلث ABC و معادله‌ی میانه‌ی نظیر رأس C خط $y=۵$ می‌باشد، مختصات وسط AB کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مکمل ۱) (سراسری تجربی- ۷۱)

۱) $(۵,۹)$ ۲) $(۵,۱۲)$ ۳) $(۹,۵)$ ۴) $(۱۲,۵)$

۵۱. نقاط $A(۲,k)$، $B(-۱,-۱)$ و $C(۴,۱)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر طول میانه‌ی BM برابر با ۵ باشد، عرض نقطه‌ی A کدام می‌تواند باشد؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مشابه ۱) (آزمون کانون - ۱۷ آبان ۹۸)

۱) -۵ ۲) -۷ ۳) -۹ ۴) -۱۱

۵۲. اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y+۲x=۱۶$، $۲y-x=۲$ و $y=۰$ هستند. اندازه‌ی میانه‌ی نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه‌ی مختصات کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مرتبط با ۱) **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۹)**

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۵ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) ۶

۵۳. معادله‌ی سه ضلع مثلثی $x=۲$، $y=-۱$ و $y+۲x=۹$ می‌باشد. معادله‌ی میانه‌ی وارد بر بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون - ۱۶ آبان ۹۹)

۱) $y=۲x-۵$ ۲) $y=۲x-۳$ ۳) $y=۳x-۵$ ۴) $y=۳x-۳$

۵۴. نقاط $A(۴,۲)$، $B(۱,-۱)$ و $C(۶,-۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه‌ی AM باشند، طول MH چقدر است؟ (صفحه‌ی ۶ و ۷- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون- ۵ آبان ۹۶)

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۵۵. اگر نقاط $A(۰,۴)$ و $B(۶,۲)$ دو سر قطر یک مربع باشند، معادله‌ی قطر دیگر مربع کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

۱) $y=۳x-۶$ ۲) $y=\frac{x}{۳}+۲$ ۳) $y=۳x+۶$ ۴) $y=\frac{x}{۳}-۲$

۵۶. نقطه‌ی $A(۷,۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (صفحه‌ی ۹- مکمل تمرین ۵) (سراسری تجربی - ۹۰)

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۳,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۳)$

۵۷. در مثلث ABC، معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC خط $y=-۳x+۲$ و نقطه‌ی C به مختصات $(۱,-۲)$ است. اگر طول نقطه‌ی M وسط AC برابر با -۲ باشد، عرض نقطه‌ی A کدام است؟ (صفحه‌ی ۶ و ۷- مرتبط با نتیجه‌ی فعالیت)

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱

۵۸. قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۱,۴)$ نسبت به خط $y=x+۱$، نقطه‌ی B است. مجموع طول و عرض نقطه‌ی B کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مکمل ۲) (آزمون کانون- ۲ آبان ۹۹)

۱) ۴/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۵۹. دو خط $۵x-۴y=۲۰$ و $y=ax+b$، نسبت به نقطه‌ی $(۱,۲)$ قرینه‌اند. مقدار b کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مکمل ۲)

۱) $\frac{۱۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۶}{۵}$

۶۰. سهمی $y=-x^{۲}+۲x+۱$ خط راست گذرا از نقطه‌ی $(۱,۰)$ و با عرض از مبدأ -۱ را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصله‌ی رأس سهمی از نقطه‌ی M، کدام مضرب $\sqrt{۲۶}$ است؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مکمل ۲) **(سراسری تجربی خارج از کشور - ۱۴۰۰)**

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ تشریحی هندسه‌ی تحلیلی وجبر

پاسخ تشریحی: حسین حاجیلو
فرهاد حامی، فرزانه دانایی

راهبرد حل تیپ (۱)

شیب خط به صورت نسبت تغییرات عمودی به تغییرات افقی تعریف می‌شود. بنابراین با داشتن دو نقطه از خط می‌توان شیب آن را یافت:

$A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نکته: سه نقطه‌ی A ، B و C در صورتی بر روی یک خط قرار دارند که شیب خط گذرنده از دو به دوی آنها، برابر باشد، یعنی: $m_{AB} = m_{BC}$

برای نوشتن معادله‌ی یک خط، کافی است دو پارامتر از آن را داشته باشیم. این دو پارامتر می‌تواند:

[۱] دو نقطه از خط باشد:

$$\begin{cases} A(x_A , y_A) \\ B(x_B , y_B) \end{cases} \Rightarrow y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

[۲] شیب خط (m) و یک نقطه از آن $A(x_A , y_A)$ باشد:

$$\begin{cases} m \text{ شیب خط} \\ A(x_A , y_A) \end{cases} \Rightarrow y - y_A = m(x - x_A)$$

[۳] اگر عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط را داشته باشیم معادله‌ی خط را می‌توان به صورت $\frac{x}{\text{طول از مبدأ}} + \frac{y}{\text{عرض از مبدأ}} = 1$ نوشت.

● نکته: نمودار هر خط از دو یا سه ناحیه‌ی مختصات عبور می‌کند. برای تعیین اینکه نمودار از کدام نواحی عبور می‌کند، کافی است به علامت شیب و عرض از مبدأ آن توجه کنیم.

اوضاع نسبی دو خط: با داشتن شیب دو خط می‌توان وضعیت آنها را نسبت به هم مشخص کرد:

$m_1 = m_2$: دو خط موازی

$m_1 \neq m_2$: دو خط متقاطع

$m_1 m_2 = -1$: دو خط عمود

در شکل‌های هندسی، اگر معادله‌ی اضلاعی از شکل مشخص باشد، با استفاده از خصوصیات شکل هندسی، می‌توان موارد دیگر را یافت. به نکات زیر توجه کنید:

[۱] در چهارضلعی‌های متوازی‌الاضلاع، لوزی، مربع و مستطیل، اضلاع روبه‌رو، موازی‌اند. در مربع و مستطیل، اضلاع مجاور بر هم عمودند.

[۲] در مثلث، با داشتن معادله‌ی خط یک ضلع و مختصات رأس مقابل آن، می‌توان ارتفاع وارد بر آن را نوشت.

۱. گزینهٔ ۳

شیب هر خط برابر است با نسبت تغییرات عرض‌ها به تغییرات طول‌ها، بنابراین:

$$m_{AB} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{5}$$

۲. گزینهٔ ۴

معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$A(-2 , 3) , B(7 , -3) \Rightarrow y - 3 = \frac{-3 - 3}{7 + 2}(x + 2)$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{-6}{9}(x + 2) \Rightarrow y - 3 = \frac{-2}{3}(x + 2)$$

$$\Rightarrow 3(y - 3) = -2(x + 2) \Rightarrow 3y - 9 = -2x - 4$$

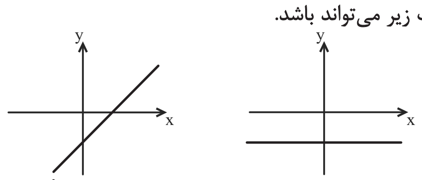
$$\Rightarrow 2x + 3y = 5$$

برای یافتن محل تلاقی خط با محور x ها، y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y = 0 \Rightarrow 2x + 3(0) = 5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2/5$$

۳. گزینهٔ ۱

برای آنکه خط از ناحیه‌ی دوم نگذرد شکل تقریبی آن به یکی از دو صورت زیر می‌تواند باشد:



یعنی باید شیب آن نامنفی (صفر یا مثبت) و عرض از مبدأ آن نیز نامثبت باشد.

در معادله‌ی خط $y = mx + m - 3$ ، عرض از مبدأ، $m - 3$ است، پس:

$$m - 3 \leq 0 \Rightarrow m \leq 3$$

و از طرف دیگر باید شیب، نامنفی باشد یعنی $m \geq 0$ در نتیجه:

$$\Rightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 0 \leq m \leq 3$$

اگر $m = 0$ باشد معادله‌ی خط، $y = -3$ خواهد شد و خط در این حالت هم از ناحیه‌ی دوم نمی‌گذرد.

۴. گزینهٔ ۲

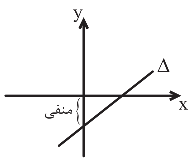
با توجه به اینکه خط $L_1 : y = a$ بالای محور x ها قرار دارد، بنابراین a مثبت است. خط $L_2 : x = b$ نیز در طرف چپ محور y ها قرار دارد، بنابراین b منفی است. معادله‌ی خط Δ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\Delta : ax + by - a = 0 \Rightarrow by = -ax + a$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{a}{b}$$

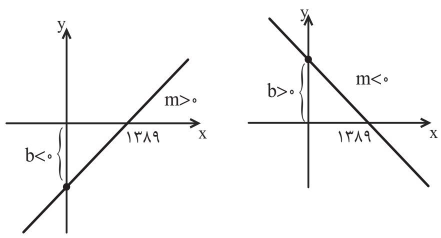
شیب خط Δ برابر با $-\frac{a}{b}$ است. از آنجا که a مثبت و b منفی است، پس شیب مثبت است، همچنین عرض از مبدأ خط Δ برابر با $\frac{a}{b}$ است، پس مقدار آن منفی است.

نمودار خط Δ با شیب مثبت و عرض از مبدأ منفی به صورت مقابل است، بنابراین خط Δ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.



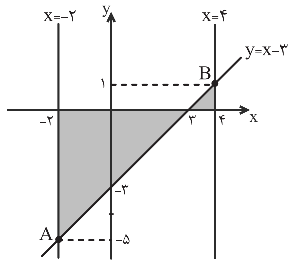
۵. گزینهٔ ۴

$mb > 0$ ، پس m و b یا هر دو مثبت و یا هر دو منفی هستند. گزینه‌های (۱) و (۲) وقتی ممکن است که b به ترتیب برابر با ۱۳۸۹ و ۱۳۸۹- باشد و مقدار m هم به ترتیب مثبت و منفی باشد به طوری که b و m هم‌علامت باشند. ولی گزینه‌ی (۴) نمی‌توانند درست باشد زیرا زمانی یک خط محور x ها را در نقطه‌ای به‌طول مثبت قطع می‌کند که m و b مختلف‌العلامت باشند که با فرض، مخالف است.



۶. گزینهٔ (۴)

نمودار خطوط داده شده را رسم می‌کنیم.



محل تلاقی خط $y = x - ۳$ با خطوط $x = -۲$ و $x = ۴$ به‌صورت زیر است:

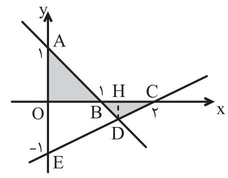
$$\begin{cases} x = -۲ \to y = -۲ - ۳ = -۵ \Rightarrow A(-۲\,,-۵) \\ x = ۴ \to y = ۴ - ۳ = ۱ \Rightarrow B(۴\,,۱) \end{cases}$$

مساحت ناحیه‌ی سایه زده شده برابر است با:

$$S = \frac{۱\times۱}{۲} + \frac{۵\times۵}{۲} = \frac{۲۶}{۲} = ۱۳$$

۷. گزینهٔ (۱)

مطابق شکل، باید $S(\overset{\Delta}{OAB})$ و $S(\overset{\Delta}{BCD})$ را بیابیم، مساحت ناحیه‌ی سایه‌خورده برابر است با:



$$S = S(\overset{\Delta}{OAB}) + S(\overset{\Delta}{BCD})$$

$$S(\overset{\Delta}{OAB}) = \frac{۱\times۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

اما $S(\overset{\Delta}{BCD})$ برابراست با: $S(\overset{\Delta}{BCD}) = \frac{۱}{۲} BC \times DH$

که در آن $BC = ۱$ و ارتفاع وارد بر آن، یعنی DH، برابر قدر مطلق عرض نقطه‌ی D است. برای یافتن این نقطه باید محل تلاقی دو خط AB و CD را بیابیم:

$$\begin{cases} AB \text{ معادله‌ی خط}: \frac{x}{۱} + \frac{y}{۱} = ۱ \Rightarrow x = ۱ - y \\ CD \text{ معادله‌ی خط}: \frac{x}{۲} + \frac{y}{-۱} = ۱ \Rightarrow x = ۲y + ۲ \end{cases}$$

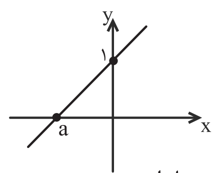
$$\Rightarrow ۲y + ۲ = ۱ - y \Rightarrow y = -\frac{۱}{۳}$$

$$S(\overset{\Delta}{BCD}) = \frac{۱ \times \frac{۱}{۳}}{۲} = \frac{۱}{۶}$$

$$S = S(\overset{\Delta}{OAB}) + S(\overset{\Delta}{BCD}) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

۸. گزینهٔ (۲)

خط از نقطه‌ی $(۰\,,۱)$ می‌گذرد و با محورهای مختصات مثلثی در ناحیه‌ی دوم تشکیل می‌دهد، پس نمودار آن به صورت مقابل خواهد بود.



مساحت مثلث، طبق فرض برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ است، بنابراین:

$$S = \frac{۱ \times |a|}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۶} \Rightarrow |a| = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow{a<۰} a = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

خط از نقاط $(۰\,,۱)$ و $(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\,,۰)$ می‌گذرد و معادله‌ی آن برابر است با:

$$y - ۱ = \frac{۱ - ۰}{۰ - (\frac{-\sqrt{۳}}{۳})}(x - ۰) \Rightarrow y - ۱ = \frac{۳}{\sqrt{۳}} x$$

$$\xrightarrow{\times\sqrt{۳}} \sqrt{۳}y - ۳x - \sqrt{۳} = ۰$$

۹. گزینهٔ (۱)

این سه نقطه بر روی یک خط راست قرار دارند، پس:

$A(۰\,,۴)$ و $B(-۲\,,۰)$ و $C(x_۰\,,-۳)$

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{۴ - ۰}{۰ - (-۲)} = \frac{۴ - (-۳)}{۰ - x_۰}$$

$$\Rightarrow ۲ = \frac{۷}{-x_۰} \Rightarrow x_۰ = \frac{-۷}{۲} = -۳/۵$$

۱۰. گزینهٔ (۴)

$A(a\,,۳)\,,B(۶\,,۴a+۱)\,,O(۰\,,۰)$

سه نقطه‌ی A، B و O در یک راستا هستند، هرگاه:

$$m_{OA} = m_{OB}$$

$$m_{OA} = \frac{۳ - ۰}{a - ۰} = \frac{۳}{a} \quad , \quad m_{OB} = \frac{۴a + ۱ - ۰}{۶ - ۰} = \frac{۴a + ۱}{۶}$$

$$\frac{۳}{a} = \frac{۴a + ۱}{۶} \Rightarrow ۴a^۲ + a - ۱۸ = ۰$$

$$\Rightarrow a = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ - ۴(۴)(-۱۸)}}{۲(۴)} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۲۸۹}}{۸} \Rightarrow a = ۲, \frac{-۹}{۴}$$

۱۱. گزینهٔ (۳)

از هر سه نقطه می‌توان یک دایره گذراند به شرطی که این سه نقطه روی یک خط قرار نداشته باشند؛ بنابراین معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی $(-۱\,,۲)$ و $(۳\,,۶)$ را می‌نویسیم و بررسی می‌کنیم که کدام نقطه روی این خط قرار ندارد.

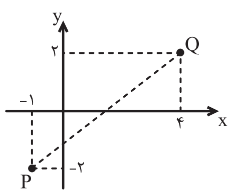
$$y - ۲ = \frac{۶ - ۲}{۳ - (-۱)}(x - (-۱))$$

$$\Rightarrow y - ۲ = ۱ \times (x + ۱) \Rightarrow y = x + ۳$$

از بین گزینه‌ها، فقط نقطه‌ی گزینه‌ی (۳) در معادله‌ی خط فوق صدق نمی‌کند.

۱۲. گزینهٔ (۲)

به شکل زیر توجه کنید:



از آنجا که مجموع پاره‌خط‌های RQ و PR می‌نیمم است نقطه‌های P، R و Q باید بر یک راستا باشند، بنابراین شیب خطی که از دو نقطه‌ی P و R می‌گذرد با شیب خطی که از دو نقطه‌ی P و Q می‌گذرد برابر است.

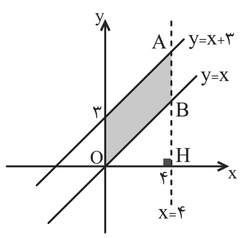
یعنی:

$$m_{PR} = m_{QP} \Rightarrow \frac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$$

$$\Rightarrow \frac{m - (-۲)}{۱ - (-۱)} = \frac{(-۲) - ۲}{(-۱) - ۴} \Rightarrow m = \frac{-۲}{۵}$$

۱۳. گزینهٔ (۲)

با رسم نمودار خواهیم داشت:



ارتفاع × قاعده = مساحت متوازی‌الاضلاع

$AB \times OH = ۳ \times ۴ = ۱۲$ = مساحت متوازی‌الاضلاع

۱۴. گزینهٔ ۳

راه حل اول: نقطه‌ی A روی خط $\Delta: y=2x+1$ قرار دارد، پس اگر طول نقطه‌ی A را α در نظر بگیریم مختصات نقطه‌ی A به صورت $(\alpha, 2\alpha+1)$ خواهد بود.

$$A(\alpha, 2\alpha+1)\ ,\ M(1,-2)\ ,\ N(3,-4)$$

پاره‌خط‌های MA و NA موازی‌اند، بنابراین:

$$m_{MA}=m_{NA} \Rightarrow \frac{2\alpha+1-(-2)}{\alpha-1}=\frac{2\alpha+1-(-4)}{\alpha-3}$$

$$\Rightarrow (2\alpha+3)(\alpha-3)=(2\alpha+5)(\alpha-1)$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2-3\alpha-9=2\alpha^2+3\alpha-5 \Rightarrow -6\alpha=4 \Rightarrow \alpha=\frac{-2}{3}$$

پس مختصات نقطه‌ی A برابر است با:

$$A\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right) \rightarrow x_A+y_A=-1$$

راه حل دوم: از آنجا که MA و NA در یک راستا قرار دارند، نقاط A، M و N روی یک خط قرار دارند که معادله‌ی این خط برابر است با:

$$m_{MN}=\frac{-4-(-2)}{3-1}=-1$$

$$MN: y-(-2)=-1\times(x-1) \Rightarrow y=-x-1$$

نقطه‌ی A نیز روی این خط قرار دارد، بنابراین: $y_A=-x_A-1$، در نتیجه: $y_A+x_A=-1$، پس مجموع طول و عرض نقطه‌ی A برابر با ۱- است و نیازی نیست مختصات نقطه را به دست آوریم.

۱۵. گزینهٔ ۳

شیب دو خط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگرند، بنابراین:

$$2y+3x=7 \Rightarrow m=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{3}{2}$$

$$m_d=-\frac{1}{m}=\frac{2}{3}$$

بنابراین معادله‌ی خط d را به صورت $y=\frac{2}{3}x+h$ در نظر می‌گیریم.

از طرفی نقطه‌ی $(0,6)$ روی خط d قرار دارد، بنابراین:

$$0=\frac{2}{3}\times 6+h \Rightarrow h=-4$$:عرض از مبدأ

۱۶. گزینهٔ ۲

دو خط هنگامی بر هم عمودند که حاصلضرب شیب‌هایشان برابر با ۱- باشد یا موازی با محورهای مختصات باشند. ابتدا شیب هر یک از خطوط را می‌یابیم:

$$ax+2y-3=0 \rightarrow \text{شیب}=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{a}{2}$$

گزینه‌ی (۱): $y=a \rightarrow$ شیب $=0$

گزینه‌ی (۲): $x=a \rightarrow$ شیب: تعریف نشده

گزینه‌ی (۳): $2x+ay-4=0 \rightarrow$ شیب $=-\frac{2}{a}$

گزینه‌ی (۴): $-ax+(a-1)y+1=0 \rightarrow$ شیب $=\frac{a}{a-1}$

حاصلضرب شیب خطوط گزینه‌های (۳) و (۴)، با خط داده شده برابر است با:

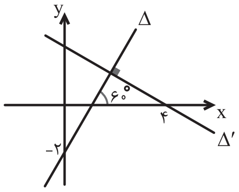
$-\frac{a}{2}\times\left(-\frac{2}{a}\right)=1 \rightarrow$ نمی‌توانند عمود باشند.

$$-\frac{a}{2}\times\left(\frac{a}{a-1}\right)=-\frac{a^2}{2(a-1)}=-1 \Rightarrow a^2=2(a-1)$$

$\Rightarrow a^2-2a+2=0 \xrightarrow{\Delta<0}$ جواب ندارد.

اگر $a=0$ باشد، خط داده شده به صورت $2y=3$ درمی‌آید که بر خط گزینه‌ی (۲) یعنی $x=0$ عمود خواهد بود.

۱۷. گزینهٔ ۳



شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، بنابراین:

$$m_\Delta=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \Delta: y=\sqrt{3}x-2$$

خط Δ' بر خط Δ عمود است، پس شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگرند:

$$m_{\Delta'}=-\frac{1}{m_\Delta}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

نقطه‌ی $(4,0)$ روی خط Δ' قرار دارد، بنابراین معادله‌ی آن برابر است با:

$$\Delta': y-0=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$$

نقطه‌ی A محل تلاقی دو خط Δ و Δ' است:

$$\begin{cases}\Delta: y=\sqrt{3}x-2\\ \Delta': y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)\end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}x-2=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$$

$$\xrightarrow{\times\sqrt{3}} 3x-2\sqrt{3}=-x+4 \Rightarrow 4x=4+2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{4+2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x_A=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{فاصله‌ی نقطه‌ی } A \text{ تا محور } y\text{ها}=|x_A|=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۸. گزینهٔ ۴

خط $2mx+(m^2-1)y=3$ با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازد، پس شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ی ۶۰ درجه است:

$$\text{شیب خط}=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{2m}{m^2-1}$$

$$\Rightarrow \tan 60^\circ=-\frac{2m}{m^2-1} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{-2m}{m^2-1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}m^2-\sqrt{3}=-2m \Rightarrow \sqrt{3}m^2+2m-\sqrt{3}=0$$

برای یافتن اختلاف ریشه‌ها به دو روش عمل می‌کنیم:

راه حل اول: یافتن ریشه‌ها

$$m_1,m_2=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(\sqrt{3})(-\sqrt{3})}}{2\sqrt{3}}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\sqrt{3}}=\frac{-2\pm 4}{2\sqrt{3}}$$

$$m_1=\frac{-3}{\sqrt{3}}\ ,\ m_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow |m_2-m_1|=\left|\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{-3}{\sqrt{3}}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

راه حل دوم: در بخش بعد در رابطه‌ی بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم خواهید دید:

$$\Rightarrow \text{اختلاف ریشه‌ها}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{4-4(\sqrt{3})(-\sqrt{3})}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

۱۹. گزینهٔ ۲

قاعده‌ی مثلث OAB برابر با $OB=3$ و ارتفاع آن OA است. برای به دست آوردن ارتفاع، باید مختصات نقطه‌ی A را بیابیم. معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B را می‌نویسیم. خط d بر این خط عمود است، پس داریم:

$$m_{AB}=-\frac{1}{m_d}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$$

خط AB از نقطه‌ی $B(3,0)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$AB: y-0=-2(x-3) \Rightarrow y=-2x+6$$

$\xrightarrow{x_A=0} y_A=6$

بنابراین: $S_{OAB}=\frac{OA\times OB}{2}=\frac{6\times 3}{2}=9$

۲۰. گزینهٔ ۴

نقطه‌ی A محل تقاطع خطوط L_1 و L_2 است. معادله‌ی این خطوط را می‌یابیم. شیب خطوط عمود بر هم، قرینه و معکوس یکدیگرند. بنابراین:

$$m_{L_2}=m_{L_3}=-\frac{1}{m_{L_1}}=-\frac{1}{2}$$

همچنین خط L_2 از نقطه‌ی $(0,5)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$L_2: y-0=-\frac{1}{2}(x-5)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

شیب خط L_1 برابر با ۲ است و در نقطه‌ای روی محور xها، خط L_3 را قطع می‌کند، بنابراین ابتدا معادله‌ی خط L_3 را که از نقطه‌ی $(-2,0)$ می‌گذرد، می‌یابیم:

$$L_3: y-(-2)=-\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-2$$

$$\xrightarrow[y=0]{\text{تقاطع با محور x ها}} 0=-\frac{1}{2}x-2\Rightarrow x=-4$$

بنابراین خط L_1 نیز از نقطه‌ی $(-4,0)$ می‌گذرد:

$$L_1: y-0=2(x-(-4))\Rightarrow y=2x+8$$

طول نقطه‌ی تقاطع خطوط L_1 و L_2 را می‌یابیم:

$$\begin{cases} L_1: y=2x+8 \\ L_2: y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases}\Rightarrow 2x+8=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}x=-\frac{11}{2}\Rightarrow x=-\frac{11}{5}=-2/2$$

۲۱. گزینهٔ ۲

قطرهای لوزی بر هم عمودند و تقاطع قطرها مرکز تقارن لوزی است، لذا داریم:

$$\begin{cases} (k+1)y=x+2\Rightarrow y=\frac{1}{k+1}x+\frac{2}{k+1}\Rightarrow m_1=\frac{1}{k+1} \\ y=(2k+1)x+1\Rightarrow m_2=2k+1 \end{cases}$$

شیب دو خط عمود بر هم قرینه و معکوس یکدیگرند، بنابراین داریم:

$$m_2=-\frac{1}{m_1}\Rightarrow 2k+1=-(k+1)$$

$$\Rightarrow 3k=-2\Rightarrow k=-\frac{2}{3}$$

مقدار k را جایگزین کرده و محل تقاطع دو خط را می‌یابیم:

$$\Rightarrow\begin{cases} y=3x+6 \\ y=-\frac{1}{3}x+1 \end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x=-\frac{3}{2}, y=\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ مرکز تقارن لوزی: $(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

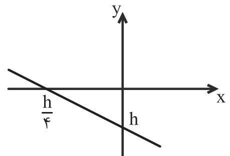
۲۲. گزینهٔ ۴

$$D: x-4y+2=0\Rightarrow y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\Rightarrow m_D=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{D \text{ عمود بر } \Delta} m_\Delta=\frac{-1}{m_D}=-4$$

بنابراین معادله‌ی خط Δ را به صورت $y=-4x+h$ در نظر می‌گیریم.

با توجه به نمودار مقابل، برای اینکه خط Δ در ناحیه‌ی سوم تشکیل مثلث دهد، باید عرض از مبدأ آن (h) منفی باشد.



مساحت مثلث تشکیل شده برابر با ۸ است، بنابراین:

$$S=\frac{|h\times\frac{h}{4}|}{2}=8\Rightarrow h^2=64\xrightarrow{h<0}h=-8$$

بنابراین: $\Delta: y=-4x-8$، تلاقی دو خط Δ و D را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \Delta: y=-4x-8 \\ D: x-4y+2=0 \end{cases}\Rightarrow x-4(-4x-8)+2=0\Rightarrow x=-2$$

$\Rightarrow$ عرض نقطه‌ی تلاقی: $y=-4\times(-2)-8=0$

۲۳. گزینهٔ ۱

دو خط $x+y=5$ و $y=3x+2$ بر هم عمود نیستند، پس خط Δ (ضلع سوم) باید بر یکی از این دو خط عمود باشد؛ بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: خط Δ بر خط $\Delta': x+y=5$ عمود باشد. چون شیب خط Δ' برابر ۱- است، پس شیب خط Δ برابر ۱ است و در نتیجه با توجه به اینکه خط Δ از مبدأ می‌گذرد، معادله‌ی آن برابر است با:

$$\Delta: y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$$

برای یافتن طول رأس قائمه باید دو خط Δ و Δ' را تلاقی دهیم:

$$\begin{cases} y=x \\ x+y=5\Rightarrow y=5-x \end{cases}\Rightarrow 5-x=x\Rightarrow x=\frac{5}{2}=2/5$$

که در گزینه‌ها نیست.

حالت دوم: خط Δ بر خط $\Delta'': y=3x+2$ عمود باشد. چون شیب خط Δ'' برابر ۳ است، پس شیب خط Δ برابر $-\frac{1}{3}$ است و چون این خط از مبدأ می‌گذرد، بنابراین معادله‌ی آن برابر است با:

$$\Delta: y-0=-\frac{1}{3}(x-0)\Rightarrow y=-\frac{1}{3}x$$

برای یافتن طول رأس قائمه باید دو خط Δ و Δ'' را تلاقی دهیم:

$$\begin{cases} y=3x+2 \\ y=-\frac{1}{3}x \end{cases}\Rightarrow 3x+2=-\frac{1}{3}x$$

$$\xrightarrow{\times 3} 9x+6=-x\Rightarrow 10x=-6\Rightarrow x=-0/6$$

۲۴. گزینهٔ ۴

دو خط داده شده یا بر دو ضلع مقابل مربع منطبق‌اند یا بر دو ضلع مجاور مربع.

حالت (۱): اگر بر دو ضلع مقابل منطبق باشند؛ پس شیب آنها باید یکسان باشد:

$$ay-x=-7\to m_1=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{-1}{a}=\frac{1}{a}$$

$$a^3x+y=2\to m_2=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}=-\frac{a^3}{1}=-a^3$$

$$m_1=m_2\Rightarrow \frac{1}{a}=-a^3\Rightarrow a^4=-1$$

مقداری برای a وجود ندارد.

حالت (۲): اگر بر دو ضلع مجاور منطبق باشند، پس باید بر هم عمود باشند:

$$m_1m_2=-1\Rightarrow(\frac{1}{a})(-a^3)=-1\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1$$

همچنین اگر $a=۰$ باشد، معادله‌ی خط‌ها به صورت $x=۷$ و $y=۲$ خواهند بود که بر هم عمودند. بنابراین a می‌تواند سه مقدار ۱، ۱− و صفر داشته باشد.

۲۵. گزینه‌ی ۲

ابتدا شیب شعاع گذرنده از نقطه‌ی $(۸,-۵)$ را بدست می‌آوریم.

$$m=\frac{-۳-(-۵)}{۲-۸}=-\frac{۱}{۳}$$

می‌دانیم خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه‌ی تماس عمود است. بنابراین شیب خط مماس برابر است با:

$$\text{شیب خط مماس}=-\frac{۱}{m}=۳$$

$$\text{معادله‌ی خط مماس}: y-(-۵)=۳(x-۸)\Rightarrow y=۳x-۲۹$$

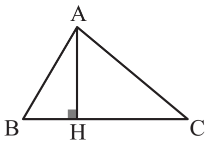
در تلاقی با محور طول‌ها، عرض برابر صفر است.

$$\Rightarrow ۰=۳x-۲۹\Rightarrow x=\frac{۲۹}{۳}$$

پس خط مماس محور xها را در نقطه‌ی $(\frac{۲۹}{۳},۰)$ قطع می‌کند.

۲۶. گزینه‌ی ۲

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید، ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است و از نقطه‌ی A می‌گذرد. ابتدا شیب BC را بدست می‌آوریم:



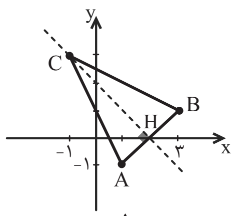
$$m_{BC}=\frac{-۲-۰}{۱-۳}=۱$$

$$m_{AH}\cdot m_{BC}=-۱\Rightarrow m_{AH}=-۱ \quad \text{و} \quad A(-۱,۲)$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی } AH: y-۲=-۱(x+۱)\Rightarrow y=-x+۱$$

۲۷. گزینه‌ی ۱

نقطه‌ی H محل تلاقی خط AB و CH است. خط CH بر AB عمود است، بنابراین:



$$m_{CH}=\frac{-۱}{m_{AB}}\Rightarrow m_{CH}=\frac{-۱}{\frac{۱-(-۱)}{۳-۱}}=-۱$$

پس شیب خط CH برابر با ۱− است و از نقطه‌ی $C(-۱,۳)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$\text{معادله‌ی خط } CH: y=-x+h$$

$$\xrightarrow{(-۱,۳)} ۳=۱+h\Rightarrow h=۲$$

$$\Rightarrow y=-x+۲$$

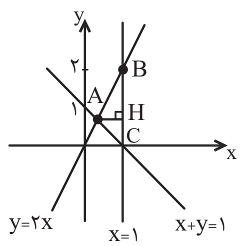
$$\text{معادله‌ی خط } AB: y-(-۱)=\frac{۱-(-۱)}{۳-۱}(x-۱)\Rightarrow y=x-۲$$

نقطه‌ی H محل تلاقی AB و CH است:

$$\begin{cases}CH: y=-x+۲\\AB: y=x-۲\end{cases}\Rightarrow y=۰, x=۲$$

۲۸. گزینه‌ی ۱

با رسم خطوط در یک دستگاه، مطابق شکل کوچک‌ترین ارتفاع مثلث ABC پاره‌خط AH است.



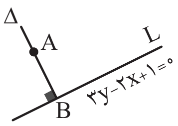
مختصات نقطه‌ی A:

$$\begin{cases}y=۲x\\x+y=۱\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} x=\frac{۱}{۳}, y=\frac{۲}{۳}$$

پس معادله‌ی AH به صورت $y=\frac{۲}{۳}$ می‌باشد.

۲۹. گزینه‌ی ۲

در شکل فرضی روبه‌رو، نقطه‌ی B، تصویر نقطه‌ی A بر روی خط $۳y-۲x+۱=۰$ است. خط Δ بر خط L عمود است.



$$\Rightarrow m_L=\frac{۲}{۳}\Rightarrow m_\Delta=\frac{-۳}{۲}$$

معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی A با شیب $\frac{-۳}{۲}$ را می‌نویسیم:

$$y-۲=\frac{-۳}{۲}(x+۳)\Rightarrow ۲y-۴=-۳x-۹$$

$$\Rightarrow \Delta: ۲y+۳x=-۵$$

نقطه‌ی B از محل تلاقی Δ و L بدست می‌آید.

$$\begin{matrix}\times ۳\\ \times ۲\end{matrix}\begin{cases}۳y-۲x=-۱\\۲y+۳x=-۵\end{cases}$$

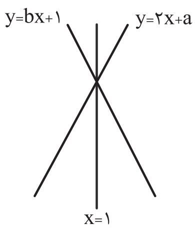
$$\text{جمع}: ۹y+۴y=-۳-۱۰$$

$$\Rightarrow y=-۱ \quad \text{و} \quad x=-۱$$

بنابراین $B(-۱,-۱)$، در نتیجه: $a+b=-۲$

۳۰. گزینه‌ی ۳

راه حل اول: شکل مقابل را در نظر بگیرید. دو خط نسبت به خط $x=۱$ قرینه‌اند، پس اولاً شیب آنها قرینه‌ی یکدیگر است، ثانیاً در نقطه به‌طول $x=۱$ متقاطع‌اند.



بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}y=۲x+a\to m=۲\\y=bx+۱\to m'=b\end{cases}$$

$$m'=-m\Rightarrow b=-۲\Rightarrow y=-۲x+۱$$

$$\xrightarrow{x=۱} y=-۲+۱=-۱$$

بنابراین محل تلاقی دو خط، نقطه‌ی $(۱,-۱)$ است که در معادله‌ی خط $y=۲x+a$ نیز باید صدق کند:

$$-۱=۲+a\Rightarrow a=-۳$$

بنابراین: $a+b=-۲-۳=-۵$

راه حل دوم: نقطه‌ای روی هر یک از خطوط در نظر می‌گیریم. قرینه‌ی آن نقطه نسبت به خط $x=۱$ باید در معادله‌ی خط دیگر صدق کند.

نقطه‌ی $(۰,۱)$ را روی خط $y=bx+۱$ در نظر می‌گیریم:

$$\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x=۱}\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=۲x+a} ۱=۴+a$$

$$\Rightarrow a=-۳$$

حال روی خط $y=۲x-۳$، نقطه‌ی $(۰,-۳)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\left|\begin{matrix}۰\\-۳\end{matrix}\right.\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } x=۱}\left|\begin{matrix}۲\\-۳\end{matrix}\right.\xrightarrow{y=bx+۱} -۳=۲b+۱$$

$$\Rightarrow b=-۲$$

بنابراین: $a+b=-۵$.

راهبرد حل تیپ (۲)

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$$

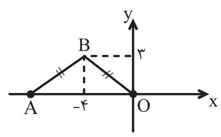
• نکته‌ی ۱: اگر سه رأس از مثلثی را داشته باشیم، برای تعیین نوع مثلث کافی است طول اضلاع آن را به دست آوریم.

• نکته‌ی ۲: با داشتن یک نقطه از دایره و مرکز آن، می‌توان شعاع دایره را به دست آورد. برای این منظور از این ویژگی استفاده می‌کنیم که مرکز دایره از هر نقطه روی دایره به یک فاصله است که این فاصله برابر با شعاع دایره است.

۳۱. گزینه ۴

$$AB=۵\Rightarrow\sqrt{(۲m+۱-m)^۲+(-m-۲)^۲}=۵$$
$$\Rightarrow (m+۱)^۲+(m+۲)^۲=۲۵$$
$$\Rightarrow m^۲+۲m+۱+m^۲+۴m+۴=۲۵$$
$$\Rightarrow ۲m^۲+۶m-۲۰=۰$$
$$\Rightarrow m^۲+۳m-۱۰=۰\Rightarrow (m+۵)(m-۲)=۰$$
$$\Rightarrow m=-۵ \text{ یا } m=۲$$

۳۲. گزینه ۱



به شکل مقابل توجه کنید. مختصات نقطه‌ی A واقع بر محور طول‌ها را به صورت $A(\alpha,۰)$ در نظر می‌گیریم، بنابراین خواهیم داشت:

$$BO=AB$$
$$\Rightarrow \sqrt{(-۴)^۲+۳^۲}=\sqrt{(\alpha-(-۴))^۲+(۰-۳)^۲}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۲۵}=\sqrt{(\alpha+۴)^۲+۹}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}۲۵=(\alpha+۴)^۲+۹$$
$$\Rightarrow (\alpha+۴)^۲=۱۶\Rightarrow\begin{cases}\alpha+۴=۴\Rightarrow\alpha=۰\\ \alpha+۴=-۴\Rightarrow\alpha=-۸\end{cases}$$

توجه کنید که به ازای $\alpha=۰$ نقطه‌ی A همان مبدأ مختصات می‌شود.

۳۳. گزینه ۳

ابتدا طول سه ضلع مثلث را بدست می‌آوریم:

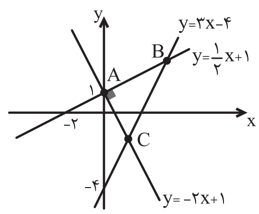
$$|AB|=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+((-۲)-۱)^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$
$$|AC|=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۴^۲+۰^۲}=۴$$
$$|BC|=\sqrt{(۳-۳)^۲+(۱-(-۲))^۲}=\sqrt{۰^۲+۳^۲}=۳$$

با توجه به فیثاغورسی بودن اعداد ۳، ۴ و ۵ $(۵^۲=۴^۲+۳^۲)$ مثلث ABC قائم‌الزاویه بوده و مساحت آن برابر نصف حاصل‌ضرب اضلاع قائمه می‌باشد، در نتیجه:

$$S=\frac{۴\times۳}{۲}=۶ \quad \text{مساحت مثلث}$$

۳۴. گزینه ۲

نمودار سه خط $y=-۲x+۱$، $y=\frac{۱}{۲}x+۱$ و $y=۳x-۴$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به اینکه شیب دو خط از آنها قرینه و معکوس یکدیگرند، بنابراین برهم عمودند، در نتیجه مثلث بوجود آمده، قائم‌الزاویه است. محل تقاطع خط‌ها را می‌یابیم.

$$\begin{cases}y=\frac{۱}{۲}x+۱\\ y=-۲x+۱\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}x=۰\,,\,y=۱\to A(۰\,,۱)$$
$$\begin{cases}y=\frac{۱}{۲}x+۱\\ y=۳x-۴\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}x=۲\,,\,y=۲\to B(۲\,,۲)$$
$$\begin{cases}y=-۲x+۱\\ y=۳x-۴\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}x=۱\,,\,y=-۱\to C(۱\,,-۱)$$

اندازه‌ی دو ضلع قائم AB و AC را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۵}$$
$$AC=\sqrt{(۱-۰)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{\sqrt{۵}\times\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۳۵. گزینه ۳

اگر نقطه‌ای فاصله‌ی یکسانی از دو محور مختصات داشته باشد، حتماً روی یکی از دو خط $y=x$ یا $y=-x$ قرار دارد، پس:

$$y=x\Rightarrow ۳m-۹=-۲m+۱$$
$$\Rightarrow ۵m=۱۰\Rightarrow m=۲\Rightarrow A(-۳,-۳)$$
$$OA=\sqrt{۹+۹}=۳\sqrt{۲}$$
$$y=-x\Rightarrow ۳m-۹=۲m-۱\Rightarrow m=۸\Rightarrow A(-۱۵,۱۵)$$
$$OA=\sqrt{۱۵^۲+۱۵^۲}=۱۵\sqrt{۲}$$

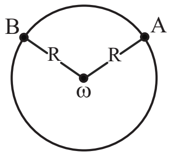
۳۶. گزینه ۱

محل تلاقی قطرهای یک دایره، مرکز دایره است، بنابراین محل تلاقی دو خط، نقطه‌ی $O(۲\,,۲)$ مرکز دایره است. فاصله‌ی مرکز دایره از یکی از نقاط روی دایره، برابر شعاع دایره است:

$$OA=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۲-۲)^۲}=\sqrt{۴}=۲$$

۳۷. گزینه ۱

می‌دانیم که فاصله‌ی مرکز هر دایره، از همه‌ی نقاط واقع بر آن دایره، برابر با شعاع آن دایره است.



با در نظر گرفتن $\omega(a\,,۲a)$ به عنوان مرکز دایره و $A(۲\,,۱)$ و $B(-۱\,,۴)$ به عنوان دو نقطه‌ی واقع بر آن، مطابق شکل داریم $R=A\omega=B\omega$، پس:

$$\Rightarrow\sqrt{(a-۲)^۲+(۲a-۱)^۲}=\sqrt{(a+۱)^۲+(۲a-۴)^۲}$$
$$\Rightarrow (a-۲)^۲+(۲a-۱)^۲=(a+۱)^۲+(۲a-۴)^۲$$
$$\Rightarrow (a^۲-۴a+۴)+(۴a^۲-۴a+۱)$$
$$=(a^۲+۲a+۱)+(۴a^۲-۱۶a+۱۶)$$
$$\Rightarrow -۸a+۵=-۱۴a+۱۷\Rightarrow ۶a=۱۲\Rightarrow a=۲$$
$$\omega(a\,,۲a)\xrightarrow{a=۲}\omega(۲\,,۴)$$
$$\Rightarrow R=A\omega=\sqrt{(۲-۲)^۲+(۴-۱)^۲}=۳$$

۳۸. گزینه ۳

ابتدا محل تلاقی خط $y=\frac{۱}{۳}x-۱$ با محورها را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}(۰)-۱=-۱\Rightarrow B(۰\,,-۱)\\ y=۰\Rightarrow ۰=\frac{۱}{۳}x-۱\Rightarrow x=۳\Rightarrow A(۳\,,۰)\end{cases}$$

مختصات نقطه‌ی M روی این خط را به صورت $(۳\alpha+۳,\alpha)$ در نظر می‌گیریم.

$$MA=\frac{۲}{۵}MB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۳\alpha+۳-۳)^۲+(\alpha-۰)^۲}=\frac{۲}{۵}\sqrt{(۳\alpha+۳)^۲+(\alpha+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۰\alpha^۲=\frac{۴}{۲۵}(۱۰\alpha^۲+۲۰\alpha+۱۰)$$

$$\xrightarrow{\div ۱۰} \alpha^۲=\frac{۴}{۲۵}(\alpha^۲+۲\alpha+۱)\Rightarrow \frac{۲۵}{۴}\alpha^۲=(\alpha+۱)^۲$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{۵}{۲}\alpha=\alpha+۱ \Rightarrow \alpha=\frac{۲}{۳}\\ \frac{۵}{۲}\alpha=-\alpha-۱\Rightarrow \alpha=-\frac{۲}{۷}\end{cases}$$

توجه کنید که در حالت $\alpha=\frac{۲}{۳}$، نقطه‌ی M خارج از نقاط A و B و در حالت $\alpha=-\frac{۲}{۷}$، نقطه‌ی M بین نقاط A و B قرار دارد.

.۳۹ گزینهٔ ۴

نقطه‌ی C بر روی محور y هاست، بنابراین مختصات آن به صورت $C(۰,y_C)$ است. از آنجا که A روی عمود منصف پاره‌خط BC قرار دارد، بنابراین:

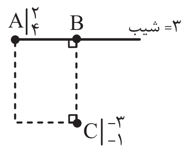
$$AB=AC$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۴-۱)^۲+(۳+۱)^۲}=\sqrt{(۰-۱)^۲+(y_C+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲۵=۱+(y_C+۱)^۲\Rightarrow (y_C+۱)^۲=۲۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases}y_C+۱=\sqrt{۲۴}\Rightarrow y_C=۲\sqrt{۶}-۱\\ y_C+۱=-\sqrt{۲۴}\Rightarrow y_C=-۲\sqrt{۶}-۱\end{cases}$$

.۴۰ گزینهٔ ۳



می‌توان شکل فرضی مقابل را در نظر گرفت. معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی A می‌گذرد برابر است با:

$$y-۴=۳(x-۲)\Rightarrow y=۳x-۲$$

نقطه‌ی B روی این خط قرار دارد، پس می‌توان مختصات آن را به صورت $B(\alpha,۳\alpha-۲)$ در نظر گرفت. از آنجاکه خط CB بر AB عمود است، پس شیب آنها قرینه و معکوس یکدیگرند، بنابراین:

$$m_{CB}=-\frac{۱}{m_{AB}}\Rightarrow \frac{۳\alpha-۲-(-۱)}{\alpha-(-۳)}=\frac{-۱}{۳}\Rightarrow \frac{۳\alpha-۱}{\alpha+۳}=\frac{-۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۹\alpha-۳=-\alpha-۳\Rightarrow \alpha=۰\Rightarrow B(۰,-۲)$$

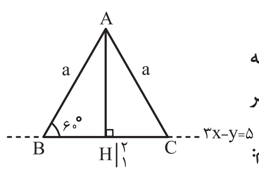
اندازه‌ی اضلاع AB و BC را به دست می‌آوریم:

$$AB=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۴+۲)^۲}=\sqrt{۴+۳۶}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

$$BC=\sqrt{(۰+۳)^۲+(-۲+۱)^۲}=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}$$

$$\text{محیط مستطیل}=۲(AB+BC)=۲(۲\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۰})=۶\sqrt{۱۰}$$

.۴۱ گزینهٔ ۲



شکل فرضی روبه‌رو را در نظر می‌گیریم. BC روی خط $۳x-y=۵$ واقع است که شیب آن ۳ است، پس شیب AH که بر BC عمود است، برابر است با $-\frac{۱}{۳}$ و داریم:

$$AH\ \text{معادله‌ی}: y-۱=-\frac{۱}{۳}(x-۲)\Rightarrow ۳y-۳=۲-x$$

$$\Rightarrow AH: x=۵-۳y$$

از آنجاکه A بر AH واقع است، با توجه به معادله‌ی AH، مختصات آن را به صورت $A(۵-۳\beta,\beta)$ در نظر می‌گیریم؛ از طرفی:

$$\overset{\Delta}{ABC}\ \text{محیط}=\sqrt{۲۷۰}\Rightarrow ۳a=\sqrt{۲۷۰}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۲۷۰}}{۳}=\frac{\sqrt{۹\times ۳۰}}{۳}=\sqrt{۳۰}$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin ۶۰^\circ=\frac{AH}{AB}$$

$$\Rightarrow AH=AB\sin ۶۰^\circ=(\sqrt{۳۰})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$$

با توجه به مختصات $H(۲,۱)$ و $A(۵-۳\beta,\beta)$، داریم:

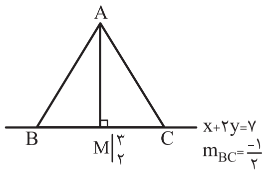
$$AH=\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}\Rightarrow \sqrt{(۲-۵+۳\beta)^۲+(۱-\beta)^۲}=\frac{\sqrt{۹۰}}{۲}$$

$$\Rightarrow (۳\beta-۳)^۲+(۱-\beta)^۲=\frac{۹۰}{۴}\Rightarrow ۹(\beta-۱)^۲+(\beta-۱)^۲=\frac{۹۰}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱۰(\beta-۱)^۲=\frac{۹۰}{۴}\Rightarrow (\beta-۱)^۲=\frac{۹}{۴}\Rightarrow \beta-۱=\pm\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\beta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۵-۳\beta=\frac{۱۳}{۲}\Rightarrow A(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲})\\ \beta=\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

.۴۲ گزینهٔ ۲



شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید. شیب خط $x+۲y=۷$ برابر با $m_{BC}=-\frac{۱}{۲}$ است. از طرفی به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، AM هم میانه و هم ارتفاع است، پس A روی خطی عمود بر BC واقع است، پس:

$$AM\perp BC\Rightarrow m_{AM}\cdot m_{BC}=-۱\Rightarrow m_{AM}=۲$$

$$\Rightarrow AM: y-۲=۲(x-۳)\Rightarrow y=۲x-۴$$

از آنجاکه A روی خط به معادله‌ی $y=۲x-۴$ واقع است، مختصات آن را به صورت $A(x,۲x-۴)$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$AM=۵\sqrt{۵}\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+((۲x-۴)-۲)^۲}=۵\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+(۲x-۶)^۲}=۵\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+۴(x-۳)^۲}=۵\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۵(x-۳)^۲}=۵\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۵}\,|x-۳|=۵\sqrt{۵}\Rightarrow |x-۳|=۵$$

$$\Rightarrow x-۳=\pm ۵\Rightarrow \begin{cases}x-۳=۵\Rightarrow x=۸\\ x-۳=-۵\Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

.۴۳ گزینهٔ ۱

مختصات A را به صورت $A(x_۰,y_۰)$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$B(-۳,۲),\ AB=\sqrt{۲۹}\Rightarrow AB^۲=۲۹$$

$$\Rightarrow (x_۰+۳)^۲+(y_۰-۲)^۲=۲۹ \qquad (۱)$$

$$C(-۱,۴),\ AC=۵\Rightarrow AC^۲=۲۵$$

$$\Rightarrow (x_۰+۱)^۲+(y_۰-۴)^۲=۲۵ \qquad (۲)$$

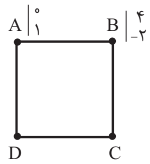
طرفین تساوی‌های (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم:

$$\underbrace{(x_۰+۳)^۲-(x_۰+۱)^۲}_{۴x_۰+۸}+\underbrace{(y_۰-۲)^۲-(y_۰-۴)^۲}_{۴y_۰-۱۲}=۴$$

$$\Rightarrow ۴(x_۰+y_۰)=۸\Rightarrow x_۰+y_۰=۲ \quad (*)$$

از تساوی (*) نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ی A بر خط $x+y=۲$ واقع است، یعنی $a=۲$.

۴۴. گزینهٔ ۳



مربع فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم، رأس D روی ضلع AD قرار دارد که بر ضلع AB عمود است. پس شیب ضلع AD قرینه و معکوس شیب ضلع AB است:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-۲-۱}{۴-۰}=-\frac{۳}{۴}\Rightarrow m_{AD}=-\frac{۱}{m_{AB}}=\frac{۴}{۳}$$

معادله‌ی AD: $y-y_A=m_{AD}(x-x_A)$

$$\Rightarrow y-۱=\frac{۴}{۳}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{۴}{۳}x+۱$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی D که روی خط AD قرار دارد را به‌صورت $D(\alpha\,,\,\frac{۴}{۳}\alpha+۱)$ در نظر می‌گیریم. اندازه‌ی ضلع مربع برابر است با:

$$AB=\sqrt{(۴-۰)^۲+(-۲-۱)^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

از طرفی $AD=AB$، بنابراین داریم:

$$AD=۵\Rightarrow\sqrt{(\frac{۴}{۳}\alpha+۱-۱)^۲+(\alpha-۰)^۲}=۵$$

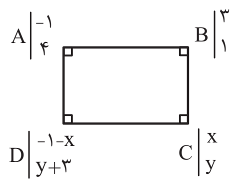
$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}}\frac{۱۶}{۹}\alpha^۲+\alpha^۲=۲۵\Rightarrow\frac{۲۵}{۹}\alpha^۲=۲۵$$

$$\Rightarrow\alpha^۲=۹\Rightarrow\alpha=\pm۳$$

از آنجا که نقطه‌ی D در ربع سوم قرار دارد، پس طول آن منفی است، در نتیجه:

$\alpha=-۳$

۴۵. گزینهٔ ۳



شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید. اضلاع AB و DC موازی یکدیگرند، پس شیب آن‌ها برابر است:

$$\begin{cases} m_{AB}=\frac{۴-۱}{-۱-۳}=-\frac{۳}{۴} \\ m_{DC}=\frac{y+۳-y}{-۱-x-x}=\frac{۳}{-۱-۲x} \end{cases}\Rightarrow-\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{-۱-۲x}$$

$$\Rightarrow-۱-۲x=-۴\Rightarrow ۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

از طرفی ضلع AB بر ضلع BC عمود است، پس شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است:

$$m_{BC}=\frac{y-۱}{x-۳}=\frac{y-۱}{\frac{۳}{۲}-۳}=\frac{y-۱}{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۲}{۳}(y-۱)$$

$$m_{BC}=-\frac{۱}{m_{AB}}\Rightarrow-\frac{۲}{۳}(y-۱)=\frac{-۱}{-\frac{۳}{۴}}$$

$$\Rightarrow y-۱=-\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{۳}=-۲\Rightarrow y=-۱$$

بنابراین داریم: $A(-۱\,,۴)$ ، $B(۳\,,۱)$ ، $C(\frac{۳}{۲}\,,-۱)$

$$AB=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(۱-۴)^۲}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$$

$$BC=\sqrt{(۳-\frac{۳}{۲})^۲+(۱-(-۱))^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مستطیل}=۲(AB+BC)=۲(۵+\frac{۵}{۲})=۱۰+۵=۱۵$$

راهبرد حل تیپ (۳)

مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲}\,,\,\frac{y_A+y_B}{۲})$$

● نکته: اگر A' قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی B باشد، B وسط پاره‌خط AA' قرار دارد، بنابراین از فرمول زیر مختصات نقطه‌ی A' به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_B=\frac{x_A+x_{A'}}{۲} \\ y_B=\frac{y_A+y_{A'}}{۲} \end{cases}$$

برای یافتن قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d، مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی A را به صورت $A'(\alpha\,,\beta)$ در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی وسط AA' باید در معادله‌ی خط d صدق کند. همچنین شیب خط گذرنده از A و A'، قرینه‌ی معکوس شیب خط d است (زیرا این دو خط بر هم عمودند). بنابراین مقادیر α و β به دست خواهد آمد.

۴۶. گزینهٔ ۳

ابتدا محل تقاطع خط $۴x+۲y-۸=۰$ با محورهای مختصات را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x=۰\Rightarrow ۰+۲y-۸=۰\Rightarrow y=۴\to A(۰\,,۴) \\ y=۰\Rightarrow ۴x+۰-۸=۰\Rightarrow x=۲\to B(۲\,,۰) \end{cases}$$

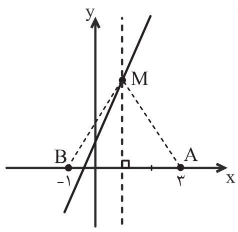
مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB را به‌دست می‌آوریم:

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{۲}\,,\,\frac{y_A+y_B}{۲}\right)=\left(\frac{۰+۲}{۲}\,,\,\frac{۴+۰}{۲}\right)\to M(۱\,,۲)$$

$$MO=\sqrt{۱^۲+۲^۲}=\sqrt{۵}$$

۴۷. گزینهٔ ۱

راه حل اول: از آنجا که M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.



$$\text{عمودمنصف } AB: x=\frac{-۱+۳}{۲}=۱$$

با توجه به شکل، نقطه‌ی M محل تلاقی خط و عمودمنصف AB است. نقطه‌ی تلاقی دو خط $y=۲x+۱$ و $x=۱$ را می‌یابیم:

$$x=۱\Rightarrow y=۲\times۱+۱=۳\Rightarrow M(۱\,,۳)$$

بنابراین مجموع طول و عرض نقطه‌ی M برابر با $۱+۳=۴$ است.

راه حل دوم: مختصات نقطه‌ی M روی خط $y=۲x+۱$ را به‌صورت $(\alpha\,,۲\alpha+۱)$ در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی این نقطه از نقاط $A(۳\,,۰)$ و $B(-۱\,,۰)$ یکسان است. بنابراین:

$$MA=MB$$

$$\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha+۱-۰)^۲}=\sqrt{(\alpha-(-۱))^۲+(۲\alpha+۱-۰)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}}(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha+۱)^۲=(\alpha+۱)^۲+(۲\alpha+۱)^۲$$

$$\Rightarrow(\alpha-۳)^۲=(\alpha+۱)^۲\Rightarrow|\alpha-۳|=|\alpha+۱|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-۳=\alpha+۱ \Rightarrow -۳=۱ \quad \text{غقق} \\ \alpha-۳=-(\alpha+۱) \Rightarrow ۲\alpha=۲ \Rightarrow \alpha=۱ \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی M به‌صورت $M(۱\,,\,۳)$ است که مجموع طول و عرض آن برابر با ۴ است.

۴۸. گزینهٔ ۲

A و B نسبت به C قرینه‌اند. پس C وسط AB است. بنابراین:

$$\frac{m+n+m-n}{۲}=-۲ \Rightarrow m=-۲$$

$$\frac{۲n-۳+۲m+۳}{۲}=۲ \Rightarrow n+m=۲$$

$$\xrightarrow{m=-۲} n-۲=۲ \Rightarrow n=۴$$

در نتیجه: $۳m-۲n=۳\times(-۲)-۲\times(۴)=-۱۴$

۴۹. گزینهٔ ۳

معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط مفروض را می‌نویسیم. شیب پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $A(۰\,,\,-۳)$ و $B(۶\,,\,۱۵)$ برابر $\frac{۱۵-(-۳)}{۶-۰}=۳$ ، پس شیب عمودمنصف برابر $-\frac{۱}{۳}$ است. از طرفی عمودمنصف از وسط پاره‌خط AB یعنی نقطه‌ی $(\frac{۶+۰}{۲},\frac{۱۵+(-۳)}{۲})=(۳\,,\,۶)$ می‌گذرد. بنابراین داریم:

$$\text{معادله‌ی عمودمنصف}: y-۶=-\frac{۱}{۳}(x-۳) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+۷$$

چون نقطه‌ی $P(-۱۲\,,\,k)$ روی عمودمنصف قرار دارد، پس در معادله‌ی $y=-\frac{۱}{۳}x+۷$ صدق می‌کند:

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}x+۷ \Rightarrow k=-\frac{۱}{۳}(-۱۲)+۷ \Rightarrow k=۱۱$$

۵۰. گزینهٔ ۴

فرض کنیم M نقطه‌ی وسط ضلع AB باشد. پس:

$$M\left|\begin{array}{l} \frac{x_A+x_B}{۲}=\frac{۲\beta+\beta+۳}{۲}=\frac{۳\beta+۳}{۲} \\ \frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{\beta+\beta-۴}{۲}=\beta-۲ \end{array}\right.$$

چون M روی خط $y=۵$ قرار دارد، پس باید عرض این نقطه ۵ باشد و داریم:

$$\beta-۲=۵ \Rightarrow \beta=۷ \Rightarrow M\left|\begin{array}{l} ۱۲ \\ ۵ \end{array}\right.$$

۵۱. گزینهٔ ۳

برای یافتن میانه‌ی BM، ابتدا مختصات نقطه‌ی M وسط ضلع AC را می‌یابیم:

$A(۲\,,\,k)$ ، $C(۴\,,\,۱)$

$$\Rightarrow M\left(\frac{۲+۴}{۲},\frac{k+۱}{۲}\right) \to M\left(۳\,,\,\frac{k+۱}{۲}\right)$$

از طرفی $BM=۵$، بنابراین:

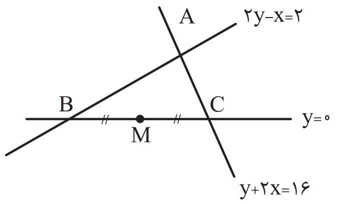
$$BM=\sqrt{(۳-(-۱))^۲+(\frac{k+۱}{۲}-(-۱))^۲}=۵$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۱۶+(\frac{k+۳}{۲})^۲=۲۵ \Rightarrow (\frac{k+۳}{۲})^۲=۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{k+۳}{۲}=۳ \Rightarrow k=۳ \\ \frac{k+۳}{۲}=-۳ \Rightarrow k=-۹ \end{cases}$$

۵۲. گزینهٔ ۲

راه حل اول: با توجه به شکل، ابتدا مختصات رأس‌های این مثلث را به‌دست می‌آوریم:



$$A:\begin{cases} ۲y-x=۲ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases} \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} ۴y-۲x=۴ \\ y+۲x=۱۶ \end{cases}$$

$$\text{جمع}: ۵y=۲۰$$

$$\Rightarrow y=۴ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow A(۶\,,\,۴)$$

$$B:\begin{cases} ۲y-x=۲ \\ y=۰ \end{cases} \Rightarrow ۲(۰)-x=۲ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow B(-۲\,,\,۰)$$

$$C:\begin{cases} y+۲x=۱۶ \\ y=۰ \end{cases} \Rightarrow ۰+۲x=۱۶ \Rightarrow x=۸ \Rightarrow C(۸\,,\,۰)$$

نقطه‌ی M وسط پاره‌خط BC است، پس:

$$M\left(\frac{x_B+x_C}{۲},\frac{y_B+y_C}{۲}\right)=\left(\frac{-۲+۸}{۲},\frac{۰+۰}{۲}\right)=(۳\,,\,۰)$$

حال باید طول پاره‌خط AM را محاسبه کنیم:

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^۲+(y_M-y_A)^۲}$$
$$=\sqrt{(۳-۶)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

راه حل دوم: شیب خط $AB: ۲y-x=۲$ برابر با $\frac{۱}{۲}$ و شیب خط $AC: y+۲x=۱۶$ برابر با (-۲) است. از آنجا که حاصلضرب شیب‌های این دو خط (-۱) است، این دو خط بر هم عمودند یعنی $AB \perp AC$. به عبارت دیگر مثلث ABC قائم‌الزاویه است و میانه‌ای که طول آن مد نظر است، میانه‌ی وارد بر وتر است، که می‌دانیم طول میانه‌ی وارد بر وتر، نصف طول وتر است، یعنی $AM=\frac{۱}{۲}BC$، پس نیازی به محاسبه‌ی مختصات A نیست و داریم:

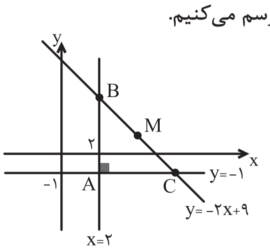
$B(-۲\,,\,۰)$ و $C(۸\,,\,۰)$

$$\xrightarrow{y_B=y_C} BC=|x_C-x_B|=۸-(-۲)=۱۰$$

$$\Rightarrow AM=\frac{۱}{۲}BC=۵$$

۵۳. گزینهٔ ۱

خطوط را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، مثلث حاصل قائم‌الزاویه است و بزرگترین ضلع آن وتر است، پس میانه‌ی AM را باید به دست آوریم.



نقاط برخورد سه خط به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases} \to A(۲\,,\,-۱) \quad ، \quad \begin{cases} x=۲ \\ y=-۲x+۹ \end{cases} \to B(۲\,,\,۵)$$

$$\begin{cases} y=-۱ \\ y=-۲x+۹ \end{cases} \to C(۵\,,\,-۱)$$

مختصات نقطه‌ی M وسط BC برابر است با:

$$M\left(\frac{۲+۵}{۲},\frac{۵+(-۱)}{۲}\right) \Rightarrow M\left(\frac{۷}{۲}\,,\,۲\right)$$

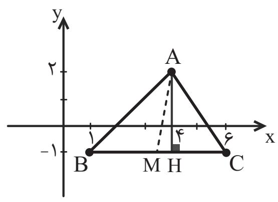
معادله‌ی خط گذرنده از نقاط $A(۲,-۱)$ و $M(\frac{۷}{۲},۲)$ برابر است با:

$$AM: y-(-۱)=\frac{۲-(-۱)}{\frac{۷}{۲}-۲}(x-۲)$$

$$\Rightarrow y+۱=۲(x-۲)\Rightarrow y=۲x-۵$$

۵۴. گزینه ۴

با توجه به شکل، از آنجا که نقاط B و C هم‌عرض هستند و روی یک خط افقی قرار دارند، مختصات پای ارتفاع H به‌صورت $H(۴,-۱)$ است.



از طرفی M وسط پاره‌خط BC است، بنابراین:

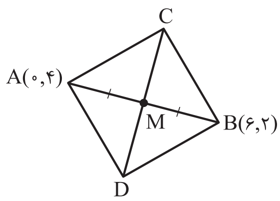
$$M\begin{cases}\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{۱+۶}{۲}=\frac{۷}{۲}\\ \frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{-۱+(-۱)}{۲}=-۱\end{cases}$$

بنابراین فاصله‌ی دو نقطه‌ی هم‌عرض $H(۴,-۱)$ و $M(\frac{۷}{۲},-۱)$ برابر است با:

$$MH=|x_H-x_M|=|۴-\frac{۷}{۲}|=\frac{۱}{۲}$$

۵۵. گزینه ۱

می‌دانیم دو قطر یک مربع، عمود منصف یکدیگرند.



$$m_{AB}=\frac{۴-۲}{۰-۶}=-\frac{۱}{۳}$$

دو پاره‌خط AB و CD بر هم عمودند، پس:

$$m_{CD}=-\frac{۱}{m_{AB}}=۳$$

پاره‌خط CD از نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB می‌گذرد، پس:

$$M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲})=(\frac{۰+۶}{۲},\frac{۴+۲}{۲})$$

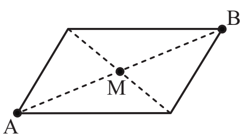
$$\Rightarrow M(۳,۳)$$

بنابراین معادله‌ی پاره‌خط CD برابر است با:

$$y-۳=۳(x-۳)\Rightarrow y=۳x-۶$$

۵۶. گزینه ۳

مختصات نقطه‌ی A در هیچ یک از معادلات داده شده صدق نمی‌کند. بنابراین A روبروی این دو خط است. کافی است محل برخورد دو خط را به دست آوریم. فرض کنیم دو خط همدیگر را در نقطه‌ی B قطع کنند.



$$\begin{cases}۲y-۳x=۱۱\\ ۳y+۴x=۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-۶y+۹x=-۳۳\\ ۶y+۸x=۱۶\end{cases}\Rightarrow ۱۷x=-۱۷$$

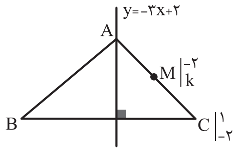
$$\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۴\Rightarrow B(-۱,۴)$$

مختصات وسط پاره‌خط AB یعنی نقطه‌ی M را به‌دست می‌آوریم.

$$M\left(\frac{-۱+۷}{۲},\frac{۴+۶}{۲}\right)\Rightarrow M(۳,۵)$$

۵۷. گزینه ۲

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید. از آنجا که M وسط AC است، داریم:

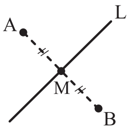


$$x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}\Rightarrow -۲=\frac{x_A+۱}{۲}\Rightarrow x_A=-۵$$

$$\Rightarrow y_A=-۳(-۵)+۲=۱۷$$

۵۸. گزینه ۲

نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۱,۴)$ نسبت به خط $L: y=x+۱$ است، بنابراین خط گذرنده از A و B بر L عمود است. شیب خط L برابر با یک است، پس شیب خط عمود بر آن -۱ است، بنابراین داریم:



$$AB: y-۴=-۱\times(x-(-۱))\Rightarrow y=-x+۳$$

همچنین نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB، محل برخورد دو خط است، بنابراین:

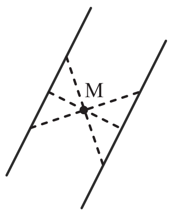
$$\begin{cases}y=x+۱\\ y=-x+۳\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}} y=۲, x=۱\to M(۱,۲)$$

$$AB\text{ وسط } M:\begin{cases}۱=\frac{-۱+x_B}{۲}\Rightarrow x_B=۳\\ ۲=\frac{۴+y_B}{۲}\Rightarrow y_B=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow B(۳,۰)\to B\text{ مجموع طول و عرض }=۳$$

۵۹. گزینه ۲

به شکل مقابل توجه کنید. دو خط در صورتی نسبت به یک نقطه قرینه‌ی یکدیگرند که اولاً موازی هم باشند، ثانیاً آن نقطه در وسط دو خط قرار داشته باشد.



بنابراین داریم:

$$\begin{cases}۵x-۴y=۲۰\to \text{شیب}=-\frac{x\text{ ضریب}}{y\text{ ضریب}}=-\frac{۵}{-۴}=\frac{۵}{۴}\\ y=ax+b\to \text{شیب}=a\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=\frac{۵}{۴}$$

روی خط $۵x-۴y=۲۰$ نقطه‌ی $A(۴,۰)$ را در نظر می‌گیریم. قرینه‌ی این نقطه نسبت به نقطه‌ی $M(۱,۲)$ باید روی خط $y=\frac{۵}{۴}x+b$ قرار داشته باشد.

اگر نقطه‌ی A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی M بنامیم، M در وسط AA' قرار دارد، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\frac{x_A+x_{A'}}{۲}=x_M\Rightarrow\frac{۴+x_{A'}}{۲}=۱\Rightarrow x_{A'}=-۲\\ \frac{y_A+y_{A'}}{۲}=y_M\Rightarrow\frac{۰+y_{A'}}{۲}=۲\Rightarrow y_{A'}=۴\end{cases}$$

بنابراین نقطه‌ی $A'(-۲,۴)$ روی خط $y=\frac{۵}{۴}x+b$ قرار دارد:

$$۴=\frac{۵}{۴}\times(-۲)+b\Rightarrow b=۴+\frac{۵}{۲}=\frac{۱۳}{۲}$$

۶۰. گزینهٔ ۴

عرض از مبدأ خط (-1) است، یعنی خط از نقطه‌ی $(0, -1)$ می‌گذرد، پس معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی $(1, 0)$ و $(0, -1)$ به‌صورت $y = x - 1$ است. برای یافتن نقاط برخورد این خط با سهمی به معادله‌ی $y = -x^2 + 2x + 1$ معادله‌ی تلاقی آنها را حل می‌کنیم:

$$-x^2 + 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{y=x-1} \begin{cases} y = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2, 1) \\ B(-1, -2) \end{cases}$$

$M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ وسط AB

حالا مختصات رأس سهمی را می‌یابیم:

$$y = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x_S = \frac{-2}{2\times(-1)} = 1$$

$$\Rightarrow y_S = -1^2 + 2(1) + 1 = 2 \Rightarrow S(1, 2)$$

$$\Rightarrow SM = \sqrt{(1-\frac{1}{2})^2 + (2+\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

راهبرد حل تیپ (۴)

برای یافتن فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_A, y_A)$ از یک خط، ابتدا معادله‌ی خط را به صورت $ax + by + c = 0$ نوشته و سپس از فرمول زیر، فاصله را به‌دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- نکته‌ی ۱: اگر معادله‌ی یک خط از مربع (ضلع یا قطر آن) و یک رأس غیر واقع بر آن را داشته باشیم، با یافتن فاصله‌ی آن رأس از خط داده شده، می‌توان طول ضلع مربع را به دست آورد.
- نکته‌ی ۲: اگر خطی بر دایره‌ای مماس باشد، فاصله‌ی مرکز دایره تا آن خط برابر با شعاع دایره است.
- نکته‌ی ۳: فاصله‌ی دو خط موازی $ax + by + c_1 = 0$ و $ax + by + c_2 = 0$ برابر است با: $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

✵ تذکر: در استفاده از فرمول بالا، ضرایب x و y در دو خط موازی باید یکسان باشد.

- نکته‌ی ۴: اگر معادله‌ی دو ضلع موازی از یک مربع یا مستطیل را داشته باشیم، فاصله‌ی دو خط برابر با طول ضلع است.

۶۱. گزینهٔ ۳

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(-1, 4)$ تا خط $8x + 6y - k = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|8(-1) + 6(4) - k|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \Rightarrow 3 = \frac{|16 - k|}{10}$$

$$\Rightarrow |16 - k| = 30 \Rightarrow \begin{cases} 16 - k = 30 \Rightarrow k = -14 \\ 16 - k = -30 \Rightarrow k = 46 \end{cases}$$

۶۲. گزینهٔ ۱

خط $2y = mx + b$ از نقطه‌ی $(1, 2)$ می‌گذرد، پس مختصات نقطه، در معادله‌ی خط صدق می‌کند. بنابراین: $4 = m + b$

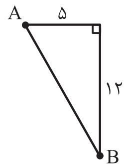
فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $mx - 2y + b = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|b|}{\sqrt{m^2 + 4}} \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{m^2 + 4}} = 1 \Rightarrow \frac{|4 - m|}{\sqrt{m^2 + 4}} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{m^2 + 4} = |4 - m| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} m^2 + 4 = m^2 - 8m + 16$$

$$\Rightarrow 8m = 12 \Rightarrow m = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۶۳. گزینهٔ ۲



با توجه به اطلاعات مسأله، شکل مقابل را خواهیم داشت. شیب خط گذرنده از نقاط A و B برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-12}{5}$$

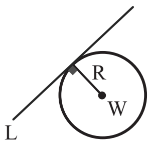
خط گذرنده از A و B، از نقطه‌ی $(0, 2)$ نیز می‌گذرد، پس معادله‌ی آن برابر است با:

$$y - 2 = \frac{-12}{5}(x - 0) \Rightarrow 5y + 12x - 10 = 0$$

فاصله‌ی مبدأ مختصات از این خط برابر است با:

$$d = \frac{|0 + 0 - 10|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{10}{13}$$

۶۴. گزینهٔ ۱



شعاع دایره بر خط مماس در نقطه‌ی تماس، عمود است، بنابراین فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس برابر با شعاع دایره است.

ابتدا معادله‌ی خط L را به دست می‌آوریم؛ طول از مبدأ آن ۲- و عرض از مبدأ آن ۲ است، بنابراین:

$$L: \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow -x + y - 2 = 0$$

فاصله‌ی نقطه‌ی $W(4, 1)$ از خط L برابر است با:

$$R = \frac{|-4 + 1 - 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2/5\sqrt{2}$$: شعاع دایره

۶۵. گزینهٔ ۲

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(3, -2)$ را از هر یک از خطوط می‌یابیم.

گزینه‌ی (۱): محور x ها: $y = 0$

$$d_1 = |y_A| = |-2| = 2$$

گزینه‌ی (۲): خط $x = 2\sqrt{2}$

$$d_2 = |x_A - x| = |3 - 2\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2}$$

گزینه‌ی (۳): نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم: $y + x = 0$

$$d_3 = \frac{|-2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

گزینه‌ی (۴): $x + 2y + 2 = 0$

$$d_4 = \frac{|3 + 2(-2) + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

توجه کنید که: $3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$، بنابراین در بین فاصله‌های به دست آمده، گزینه‌ی (۲) از بقیه کمتر است، پس نقطه‌ی A به این خط نزدیکتر است.

۶۶. گزینهٔ ۳

فرض کنیم $A\left|\begin{matrix} x_0 \\ -x_0 \end{matrix}\right.$ نقطه‌ای روی نیمساز ناحیه‌ی دوم باشد که فاصله‌ی آن از خط $-2x + 3y + 4 = 0$ برابر $3\sqrt{13}$ است. بنابراین:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow 3\sqrt{13} = \frac{|-2x_0 - 3x_0 + 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}$$