درخت دانش

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

(۱۷ پیمانه)

مؤلف این فصل: فرهاد حامی

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

مجموعه، الگو و دنباله

	مبحث	آبی	سبز	زرد	تعداد پیمانه		زیرمبحث‌ها
۱	مجموعه‌های متناهی و نامتناهی				۲ پیمانه	۲۰ تست	۱ مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها ۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۲	متمم یک مجموعه				۳ پیمانه	۳۰ تست	۱ متمم یک مجموعه ۲ تعداد عضوهای اجتماع یک مجموعه
۳	الگو و دنباله				۴ پیمانه	۴۰ تست	۱ الگو و انواع آن (خطی و غیرخطی) ۲ دنباله‌ها
۴	دنباله‌ی حسابی				۴ پیمانه	۴۰ تست	۱ تعریف، شرط تشکیل و جمله‌ی عمومی ۲ مجموع جملات دنباله‌ی حسابی
۵	دنباله‌ی هندسی				۴ پیمانه	۴۰ تست	۱ تعریف، شرط تشکیل و جمله‌ی عمومی ۲ مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

۱۷۰ سؤال شناسنامه‌دار
- ۶۳ سؤال از آزمون‌های کانون
- ۶۱ سؤال از کنکورهای سراسری
- ۴۶ سؤال تألیفی و طراحی شده از کتاب درسی

در درسنامه می‌بینید
۵۹ سوال
- ۳۸ تست طراحی شده با نگاه به رویکرد کنکورهای جدید
- ۲۱ مثال برای ادراک و تثبیت

ریاضی ۱ دهم	فصل اول
	صفحه‌های: ۲ تا ۷

۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱ مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها

مجموعه‌های اعداد ◄ به مجموعه‌های زیر توجه کنید:

مجموعه‌ی اعداد طبیعی : $N=\{۱,۲,۳,۴,...\}$

مجموعه‌ی اعداد حسابی : $W=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

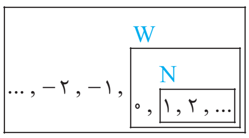
مجموعه‌ی اعداد صحیح : $Z=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}$

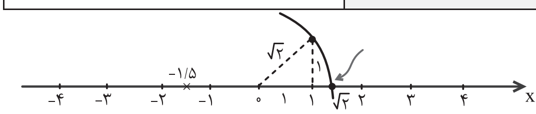
مجموعه‌ی اعداد گویا : $Q=\left\{\frac{a}{b}\middle| a,b\in Z, b\neq ۰\right\}$

مجموعه‌ی اعداد گنگ : $Q'=$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی که گویا نیستند، این اعداد را نمی‌توان به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

مجموعه‌ی اعداد حقیقی : $R=Q\cup Q'$

Q	Q'
● مثال: $\frac{۱}{۲},\frac{-۳}{۲},۳/۱۴,۰/\bar{۳}$	● مثال: $\sqrt{۳},\sqrt[۳]{۲},\pi,\frac{۵}{\pi},$ $۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱...$





مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد را با $O=\{۲k-۱\,|\,k\in N\}$ و مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج را با $E=\{۲k\,|\,k\in N\}$ نمایش می‌دهیم؛ همچنین مجموعه‌ی اعداد حسابی را به‌صورت $W=\{k-۱\,|\,k\in N\}$ می‌توانیم نمایش دهیم.

تذکر ◄ با توجه به تعاریف اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه، روابط زیر در مجموعه‌ی اعداد برقرار است:

۱ در حضور زیرمجموعه: $N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$ و $Q'\subseteq R$

۲ در حضور اشتراک: $N\cap Z=N$ و $N\cap W=N$ و $Q\cap R=Q$

۳ در حضور اجتماع: $N\cup Z=Z$ و $N\cup W=W$ و $Q\cup Q'=R$

۴ در حضور تفاضل: $W-N=\{۰\}$ و $N-W=\varnothing$ و $R-Q=Q'$

به مفهوم تفاضل در مجموعه‌های اعداد توجه کنید، به‌عنوان مثال $Z-W$، یعنی اعداد صحیح غیرحسابی یا $Q-N$ به معنی اعداد گویای غیرطبیعی هستند.

بازه و اعمال بر روی آن ◄ برای نشان‌دادن کلیه‌ی اعداد حقیقی بین دو عدد یا کلیه‌ی اعداد حقیقی بیشتر یا کمتر از یک عدد، از بازه یا فاصله استفاده می‌کنیم. این بازه‌ها را در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم. اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه و $a<b$، آنگاه:

بازه‌های نامحدود				بازه‌های محدود			
نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه	نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
a	$\{x\in R\,|\,x>a\}$	$(a,+\infty)$	باز	a b	$\{x\in R\,|\,a<x<b\}$	(a,b)	باز
a	$\{x\in R\,|\,x\geq a\}$	$[a,+\infty)$	نیم‌باز	a b	$\{x\in R\,|\,a\leq x\leq b\}$	$[a,b]$	بسته
a	$\{x\in R\,|\,x<a\}$	$(-\infty,a)$	باز	a b	$\{x\in R\,|\,a\leq x<b\}$	$[a,b)$	نیم باز
a	$\{x\in R\,|\,x\leq a\}$	$(-\infty,a]$	نیم باز	a b	$\{x\in R\,|\,a<x\leq b\}$	$(a,b]$	نیم باز

تذکر ◄ توجه کنید، وقتی پرانتز می‌گذاریم، یعنی خود آن عدد جزء بازه نیست و در نمایش هندسی نقطه توخالی است، به‌همین ترتیب وقتی کروشه می‌گذاریم، یعنی خود عدد را قبول می‌کنیم و در نمایش هندسی، نقطه توپر است. هم‌چنین اگر $+\infty$ و $-\infty$ در هر طرف بازه باشند، بازه در آن طرف باز است. با توجه به تعریف خواهیم داشت:

۱ برای بازه‌ی (a,b)، طول بازه برابر $b-a$ و نقطه‌ی میانی آن $\frac{a+b}{۲}$ است و همواره در آن $a<b$ است.

۲ در بررسی بازه بودن یک مجموعه، شرط لازم (اولیه) آن است که مجموعه به شکل $\{x\in R\,|\, \bigcirc\}$ باشد، در غیر این صورت مجموعه‌ی داده شده یک بازه نخواهد بود.

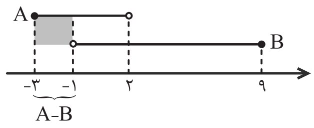
اعمال بر روی بازه‌ها: در محاسبات اجتماع، اشتراک و تفاضل دو یا چند بازه، به طور معمول از نمایش هندسی استفاده کرده و به روش زیر عمل می‌کنیم:

گام اول: ابتدا نمایش هندسی هریک از بازه‌ها را رسم می‌کنیم.

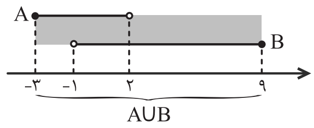
گام دوم: با توجه به تعریف اشتراک دو مجموعه قسمتی را بگیرید که روی هم می‌افتند و برای اجتماع قسمتی را بگیرید که حداقل یک خط داشته باشد. برای تفاضل قسمتی را که نمی‌خواهید حذف کنید. به شکل‌های زیر توجه کنید:

● مثال: اگر $A=[-۳,۲)$ و $B=(-۱,۹]$، آنگاه مجموعه‌های $A\cap B$، $A\cup B$ و $A-B$ را به‌دست آورید.

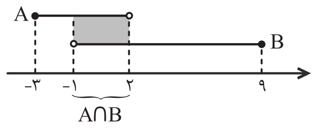
○ حل:



$A-B=[-۳,-۱]$



$A\cup B=[-۳,۹]$

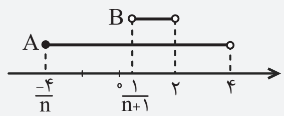


$A\cap B=(-۱,۲)$

تست اگر n عددی طبیعی باشد، اشتراک دو مجموعه‌ی $A=[-\frac{۴}{n},۴)$ و $B=(\frac{۱}{n+۱},۲)$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند عضو دارد؟

۱) یک ۲) پنج ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

پاسخ گزینه‌ی «۱» اگر n عددی طبیعی باشد، $\frac{-۴}{n}$ عددی منفی و $\frac{۱}{n+۱}$ عددی مثبت خواهد بود، بنابراین نمایش هندسی دو بازه به صورت زیر است:



بنابراین اشتراک دو بازه برابر $A\cap B=(\frac{۱}{n+۱},۲)$ است. از طرفی $\frac{۱}{n+۱}$ همواره مثبت و کوچکتر یا مساوی $\frac{۱}{۲}$ است، زیرا:

$$n\in N\Rightarrow n\geq ۱\Rightarrow n+۱\geq ۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{n+۱}\leq\frac{۱}{۲}$$

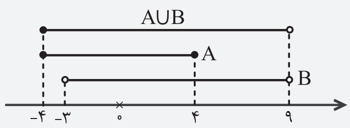
بنابراین در بازه‌ی $(\frac{۱}{n+۱},۲)$ فقط عدد صحیح یک وجود دارد.

تست اگر مجموعه‌های A و B به‌ترتیب برابر $[m,۴]$ و $(-۳,n)$ و اجتماع آنها بازه‌ی $[-۴,۹)$ باشد، آنگاه طول بازه‌ی اشتراک آنها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینه‌ی «۲» به شکل روبه‌رو توجه کنید. با توجه به اینکه اجتماع دو مجموعه بازه‌ی $[-۴,۹)$ است، پس m ابتدای بازه و n انتهای بازه است و داریم:

$n=۹, m=-۴$



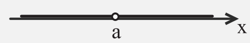
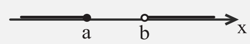
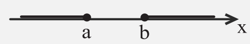
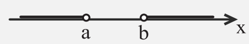
$(-۳,n)\cup[m,۴]=[-۴,۹)$

ابتدای بازه

انتهای بازه

بنابراین $A=[-۴,۴]$ و $B=(-۳,۹)$، بنابراین اشتراک آنها $A\cap B=(-۳,۴]$ و طول بازه $۴-(-۳)=۷$ است.

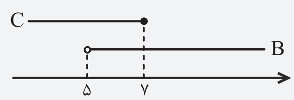
تذکر ◄ وقتی بازه‌ها با هم اشتراکی ندارند، آنها را می‌توانیم به‌صورت اجتماع دو یا چند بازه بنویسیم؛ به برابری‌های زیر توجه کنید:

نمایش هندسی	نمایش بازه‌ای	نمایش مجموعه‌ای
	$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)=R-\{a\}$	$\{x \mid x\neq a\}$
	$(-\infty,a]\cup(b,+\infty)=R-(a,b]$	$\{x \mid x\leq a$ یا $x>b\}$
	$(-\infty,a]\cup[b,+\infty)=R-(a,b)$	$\{x \mid x\leq a$ یا $x\geq b\}$
	$(-\infty,a)\cup(b,+\infty)=R-[a,b]$	$\{x \mid x<a$ یا $x>b\}$
	$(-\infty,a)\cup[b,+\infty)=R-[a,b)$	$\{x \mid x<a$ یا $x\geq b\}$

تست اگر $B=\{x\in R: x>۵\}$ و $C=\{x\in R: x\leq ۷\}$، آنگاه اجتماع دو مجموعه‌ی $B-C$ و $C-B$ برابر مجموعه‌ی $R-A$ گردیده است. مجموعه‌ی A کدام است؟

۱) $[۵,۷]$ ۲) $[۵,۷)$ ۳) $(۵,۷)$ ۴) $(۵,۷]$

پاسخ گزینه‌ی «۴»



$B=(۵,+\infty)$ و $C=(-\infty,۷]$

با توجه به شکل: $B-C=(۷,+\infty)$ و $C-B=(-\infty,۵]$

$\Rightarrow (B-C)\cup(C-B)=(-\infty,۵]\cup(۷,+\infty)=R-(۵,۷]\Rightarrow A=(۵,۷]$

۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ◄ از سال نهم به یاد دارید که تعداد اعضای یک مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم. در مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $n(A)=۴$، در مجموعه‌ی $B=\{x\in N \mid ۵<x<۶\}$، که برابر مجموعه‌ی تهی است، $n(B)=۰$ است. هر دوی این مجموعه‌ها تعداد اعضایشان قابل شمارش‌اند. به این نوع مجموعه‌ها که تعداد اعضایشان را می‌شود شمرد، مجموعه‌ی متناهی گوییم؛ اما مجموعه‌ی اعداد طبیعی، تعداد اعضایش قابل شمارش نیست و آن را مجموعه‌ای نامتناهی می‌نامیم. بنابراین:

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی باشد را مجموعه‌های متناهی می‌نامیم. اگر تعداد اعضای یک مجموعه را نتوان با یک عدد بیان کرد، مجموعه را نامتناهی می‌نامیم. در مجموعه‌های نامتناهی تعداد اعضای مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ‌تر است.

به مثال‌هایی از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی در زیر توجه کنید.

مجموعه‌های زیر نامتناهی‌اند	مجموعه‌های زیر متناهی‌اند
(۱) مجموعه‌ی اعداد طبیعی	(۱) $\{a , b\}$
(۲) مجموعه‌ی اعداد گویای بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۵}$	(۲) مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی
(۳) بازه‌ی $(-۱,۱)$	(۳) مجموعه‌ی حروف الفبای انگلیسی
(۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح کوچک‌تر از -۵	(۴) مجموعه‌ی اتم‌های موجود در جو زمین
(۵) مجموعه‌ی خطوطی که از نقطه‌ی $(۱,۰)$ می‌گذرند	(۵) مجموعه‌ی اعداد اول بین ۱۰۰ تا $۱۰^{۵۰}$
	(۶) مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۳۶

توجه ◄◄ در بحث متناهی بودن یک مجموعه، بزرگی آن مجموعه اهمیت ندارد، بلکه نکته‌ی اصلی آن است که اگر وقت به‌اندازه‌ی کافی داشته باشیم، بتوانیم اعضای آن مجموعه را بشماریم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی موش‌های کره‌ی زمین، یک مجموعه‌ی متناهی است، با اینکه تعداد آنها را نمی‌دانیم، پس ندانستن تعداد اعضای یک مجموعه، دلیلی بر نامتناهی بودن آن مجموعه نیست.

تست اگر $A=\left\{n\in N \mid \frac{۸}{n}\in N\right\}$، $B=\{۶k \mid k\in Z\}$ و $C=\left\{\frac{۱۲}{n}\in Z \mid n\in B\right\}$ آنگاه:

۱) A و C متناهی و B نامتناهی است. ۲) A متناهی و B و C نامتناهی است.

۳) A و B متناهی و C نامتناهی است. ۴) B و C متناهی و A نامتناهی است.

پاسخ گزینه‌ی «۱» هر یک از مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهیم. مجموعه‌ی A، در واقع مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۸ را بیان می‌کند، به‌دلیل آنکه تنها اعداد طبیعی n که به ازای آن $\frac{۸}{n}$ عددی طبیعی باشد، عبارتند از ۱ و ۲ و ۴ و ۸، پس: $A=\{۱,۲,۴,۸\}$ که مجموعه‌ای متناهی است. مجموعه‌ی B، مضارب صحیح عدد ۶ را نمایش می‌دهد که عبارتند از: $B=\{\dots,-۱۲,-۶,۰,۶,۱۲,\dots\} \Rightarrow$ B نامتناهی

در مجموعه‌ی C، ورودی‌ها از مجموعه‌ی B می‌آیند، یعنی مضارب صحیح ۶ و مقادیری به عنوان ورودی قابل قبول‌اند که $\frac{۱۲}{n}$ را عددی صحیح بدهند که تنها اعداد ۱۲، ۶، ۶- و ۱۲- قابل قبول‌اند و حاصل خروجی که اعضای مجموعه‌ی C خواهند بود، عبارتند از ۲، ۱، ۱-، ۲-، پس $C=\{-۲,-۱,۱,۲\}$ که مجموعه‌ای متناهی است. پس A و C مجموعه‌های متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی است.

تذکر ◄ به چند قاعده‌ی کلی در متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ها توجه کنید.

۱ مجموعه‌های N، W، Z، Q، Q' و R همگی نامتناهی‌اند.

۲ مجموعه‌ی اعداد اول و مضارب صحیح یک عدد، مجموعه‌های نامتناهی‌اند.

۳ مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ی متناهی است.

۴ تمامی بازه‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی در نظر گرفته می‌شوند.

● **مثال:** متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

$(۱)\ (R-Q')\cap N$ $\qquad (۲)\ W\cap(Z-N)$ $\qquad (۳)\ N\cap(Q-Z)$

○ **حل:** (۱) $R-Q'=Q$ و اشتراک اعداد گویا با اعداد طبیعی، برابر N است، پس $(R-Q')\cap N=N$ که مجموعه‌ای نامتناهی است.

(۲) $Z-N$، یعنی از اعداد صحیح، اعداد طبیعی را برداریم، بنابراین $Z-N=Z^{-}\cup\{۰\}$ یا اعداد صحیح کوچکتر یا مساوی صفر. اشتراک این مجموعه با اعداد حسابی، مجموعه‌ی $\{۰\}$ خواهد بود که مجموعه‌ای متناهی است.

(۳) $Q-Z$، یعنی از اعداد گویا، اعداد صحیح را برداریم، مجموعه‌ی حاصل با مجموعه‌ی اعداد طبیعی اشتراکی ندارد، پس $N\cap(Q-Z)=\varnothing$ و مجموعه‌ی تهی متناهی است.

۱ **زیرمجموعه‌های متناهی یا نامتناهی:** در مورد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی متناهی (نامتناهی) به دو موضوع زیر توجه کنید:

الف – اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد، تمامی زیرمجموعه‌های آن متناهی است.

ب – اگر A یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه A، مجموعه‌ای نامتناهی است. به عبارت دیگر:

B متناهی $\Rightarrow A\subseteq B$ متناهی است. A $\qquad$ B نامتناهی است. $\Rightarrow A\subseteq B$ نامتناهی A

● **مثال:** اگر $\{x\in R \mid x>2\}\subset B$ باشد، آنگاه B، مجموعه‌ای نامتناهی است، زیرا زیرمجموعه‌ی آن مجموعه‌ای نامتناهی است.

● **مثال:** اگر $A\subseteq\{x\in Z \mid 1<x<10\}$ باشد، آنگاه A، مجموعه‌ای متناهی است، زیرا مجموعه‌ی A، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی است.

تست اگر $A\subseteq\left\{x\in Z \mid x\geq -4 , 2^x\leq 18\right\}$ و $\left\{\frac{x}{8} \mid x\in N\right\}\subseteq B$ آنگاه:

۱) A متناهی و B نامتناهی است. ۲) A و B نامتناهی‌اند.

۳) A و B متناهی‌اند. ۴) A نامتناهی و B متناهی است.

پاسخ گزینه‌ی «۱» مجموعه‌ی $C=\{x\in Z \mid x\geq -4 , 2^x\leq 18\}$، مجموعه‌ای متناهی است، زیرا نامساوی $2^x\leq 18$، به ازای اعداد صحیح کمتر از ۵ برقرار است، پس $C=\{x\in Z \mid x\geq -4 , x<5\}$ یا $C=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$. از آنجایی‌که $A\subseteq C$، پس A مجموعه‌ای متناهی است؛ از طرفی مجموعه‌ی $D=\left\{\frac{x}{8} \mid x\in N\right\}$ مضارب طبیعی عدد $\frac{1}{8}$ است که مجموعه‌ای نامتناهی است. از آنجایی‌که $D\subseteq B$، پس مجموعه‌ی B نامتناهی است.

۲ عملیات روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی: برای تعیین متناهی یا نامتناهی بودن دو مجموعه، وقتی اعمال اشتراک، اجتماع یا تفاضل وارد می‌شوند، جدول زیر کارساز است:

وضعیت	$A\cap B$	$A\cup B$	$A-B$	$B-A$
A متناهی و B متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
A نامتناهی و B متناهی	متناهی	نامتناهی	نامتناهی	متناهی
A نامتناهی و B نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

● **مثال:** مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت و مجموعه‌ی اعداد حسابی هر دو نامتناهی‌اند ولی اشتراک آنها مجموعه‌ی $\{0\}$ است که مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) و مجموعه‌ی اعداد حسابی (W) هر دو نامتناهی‌اند ولی $Z-W=Z^-$، مجموعه‌ای نامتناهی است.

تست اگر $A\subseteq B$ و A، مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $B-A$ چگونه است؟

۱) متناهی است. ۲) نامتناهی است. ۳) تهی است. ۴) ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

پاسخ گزینه‌ی «۴» فرض کنید B مجموعه‌ی اعداد طبیعی و $A=\{2,3,4,...\}$ آنگاه $B-A=\{1\}$ مجموعه‌ای متناهی است، حال فرض کنید $B=(-1,2)$ و $A=(0,2)$، آنگاه $A\subseteq B$ و $B-A=(-1,0]$ که مجموعه‌ای نامتناهی است. پس $B-A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲ پیمانه — ۲۰ تست — پیمانه‌های ۱ و ۲

مجموعه‌های اعداد — تیپ ۱ — صفحه‌های ۲ و ۳ ریاضی ۱

۱. کدام گزینه‌ی زیر درست است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۱)

۱) $(\sqrt{3}+5)\notin(R-Q)$ ۲) $-\frac{3}{4}\in(Z\cup Q')$ ۳) $(0/\bar{6}+\frac{2}{3})\in(Q\cap R)$ ۴) $\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4}\}\subseteq Q'$

۲. اگر مجموعه‌های A، B و C را به صورت $A=R-Z$، $B=W\cap Z$ و $C=Z\cup(R-Q)$ تعریف کنیم، کدام گزینه نادرست است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۴ آبان ۹۷)

۱) $A\cap B=\varnothing$ ۲) $C\subseteq(A\cup B)$ ۳) $B-C=\varnothing$ ۴) $A\cup C=R$

بازه و اعمال بر روی آن — تیپ ۲ — صفحه‌های ۳ تا ۵ ریاضی ۱

۳. اگر بازه‌ی $[2n-1, 3n+14)$ شامل عدد ۵ باشد، حداقل مقداری که n می‌تواند اختیار کند، کدام است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۳- مرتبط با پاراگراف ۲) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۲

۴. اگر $A=\{|x| \mid -15<x<13\}$، $B=(-7,4)$ و $C=(-\infty,-3)$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $(A\cup B)-C$ شامل چند عدد صحیح است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳)

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۱۶

۵. اگر $A\cup B=(-3,2]$، $A-B=(1,2]$ و $B-A=(-3,-1)$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی A در Z چند عضو دارد؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۶. اگر نمایش مجموعه‌های A و B به‌صورت بازه‌های $A=[-1,2)$ و $B=(-3,a]$ و مجموعه‌ی $A\cap B$ غیر تهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی تمام مقادیر ممکن برای a، کدام است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون- ۱۰ بهمن ۹۳)

۱) $\{a \mid a\geq -1\}$ ۲) $\{a \mid -1\leq a<2\}$ ۳) $\{a \mid a<-3\}$ ۴) $\{a \mid -2<a<-1\}$

۷. اگر $m<-1$ باشد، آنگاه چند عدد صحیح در مجموعه‌ی $[\frac{1}{m}, -m]\cap[m, -\frac{1}{m}]$ قرار دارد؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون – ۲۰ مهر ۹۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۸. اگر $A=[\frac{-6}{n}, 2)$ و $B=(\frac{-4}{n}, 3]$، آنگاه مجموعه‌ی $A\cap B$ به ازای هر عدد طبیعی $n>4$، در Z چند عضو دارد؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۹. اگر اشتراک دو مجموعه‌ی $A=(m, n+5)$ و $B=(0, n)$، تهی و اجتماع آنها برابر مجموعه‌ی $(0, 6)-\{1\}$ باشد، آنگاه $m+n$ کدام است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰. اگر داشته باشیم $A=[a, 6]$، $B=(-1, b)$ و $A\cup B=[-2, 8)$، آن‌گاه مجموعه‌ی $A-B$ دارای چند عدد صحیح است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱. اگر $A_n=(-n, n)$ باشد، حاصل $(A_1\cup A_2\cup A_3)-(A_1\cap A_2)$ برابر با کدام گزینه است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) $(-3, 3)$ ۲) $(-1, 1)$ ۳) $(-3, -1)\cup(1, 3)$ ۴) $(-3, -1]\cup[1, 3)$

۱۲. اگر $A_k=\{x \mid -\frac{1}{k}\le x<2k\}$ باشد، آنگاه $(A_1\cap A_2\cap A_3)\cup A_7$ کدام است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳) (آزمون کانون – ۱۹ مهر ۹۸)

۱) $[-\frac{1}{7}, 2)$ ۲) $[-\frac{1}{7}, 14)$ ۳) $[-\frac{1}{3}, 14)$ ۴) $[-\frac{1}{3}, 2)$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی | تیپ ۳ | صفحه‌های ۵ تا ۷ ریاضی ۱

۱۳. کدام مجموعه‌ی زیر نامتناهی <u>نیست</u>؟ (منطبق بر کتاب درسی – ریاضی ۱- صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- ۱)

۱) مجموعه‌ی خطوط مماس بر یک دایره
۲) مجموعه‌ی اعداد گویای بین دو عدد گویا
۳) بازه‌ی $(0, 4)$
۴) مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت که با معکوس خود برابرند.

۱۴. اگر مجموعه‌های $A=\{\frac{1}{x} \mid x\in N\}$ و $B=\{\frac{x}{8} \mid x\in N\}$ مفروض باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۷- مرتبط با تمرین ۲) (سراسری انسانی - ۹۶)

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

۱۵. اگر $A=\{n\in Z \mid \frac{4}{n}\in Z\}$، $B=\{n\in Z \mid \frac{(-1)^n}{n}\in Z\}$ و $C=\{n\in W \mid \frac{1}{n}<1\}$، آنگاه: (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۷- مکمل تمرین ۲)

۱) A و B متناهی و C نامتناهی است.
۲) A و C نامتناهی و B متناهی است.
۳) B و C متناهی و A نامتناهی است.
۴) B و C نامتناهی و A متناهی است.

۱۶. اگر $\{x\in Z \mid x<-2\}\subseteq A$ و $B\subseteq\{x\in W \mid 1<x<158\}$، آنگاه: (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۷- مکمل تمرین ۶)

۱) A متناهی و B نامتناهی است.
۲) A نامتناهی و B متناهی است.
۳) A و B نامتناهی هستند.
۴) A و B متناهی هستند.

۱۷. اگر $A\subseteq B$ و B نامتناهی باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۷- مکمل تمرین ۶) (آزمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) مجموعه‌ی $B-A$ همواره نامتناهی است.
۲) مجموعه‌ی $A\cap B$ همواره متناهی است.
۳) مجموعه‌ی $A\cup B$ همواره نامتناهی است.
۴) مجموعه‌ی $A-B$ همواره نامتناهی است.

۱۸. اگر مجموعه‌ی A متناهی و مجموعه‌های B و C نامتناهی باشند، مجموعه‌های $A\cap(B\cup C)$ و $B-(A\cap C)$، به‌ترتیب از راست به چپ، چگونه‌اند؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۷- مرتبط با تمرین ۳) (آزمون کانون- ۲۳ مهر ۹۵)

۱) متناهی - متناهی ۲) نامتناهی - نامتناهی ۳) متناهی - نامتناهی ۴) نامتناهی – متناهی

۱۹. اگر $A=[\frac{2m-1}{3}, +\infty)$ و $B=(-\infty, \frac{2-m}{6}]$ باشند، به ازای کدام محدوده برای m، مجموعه‌ی $A\cap B$ متناهی است؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۷- مرتبط با تمرین ۳) (آزمون کانون – ۱۹ مهر ۹۸)

۱) $m\ge 0/8$ ۲) $m\ge 0/4$ ۳) $-0/8\le m\le 0/6$ ۴) $m\le 0/8$

۲۰. اگر $A=\left\{\frac{6n}{n+1}\in N \mid n\in N\right\}$ و $B=\{3n \mid n\in N\}$، آنگاه مجموعه‌های $A-(A\cup B)$ و $B-(A\cap B)$ به‌ترتیب چگونه‌اند؟

(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۷- مرتبط با تمرین ۳)

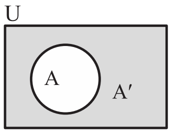
۱) متناهی – نامتناهی ۲) نامتناهی – متناهی ۳) متناهی - متناهی ۴) نامتناهی – نامتناهی

ریاضی ۱	فصل اول
دهم	صفحه‌های: ۸ تا ۱۳

۲ متمم یک مجموعه

۱ متمم یک مجموعه

تعریف مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه ◄ به‌طور کلی در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد مطالعه زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه‌ی مرجع یا مجموعه‌ی جهانی می‌نامیم و با M یا U نمایش می‌دهیم. به مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اصلی یا عام نیز گفته می‌شود. به‌عنوان مثال وقتی از مجموعه‌ی حروف با صدای انگلیسی صحبت می‌کنیم، مجموعه‌ی مرجع آن می‌تواند حروف زبان انگلیسی باشد. توجه کنید که مجموعه‌ی مرجع می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، در هر صورت تا مجموعه‌ی مرجع مشخص نباشد صحبت از زیرمجموعه‌های آن ممکن نیست.



هرگاه U مجموعه‌ی مرجع و $A \subseteq U$، آنگاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم مجموعه‌ی A می‌نامیم و آن را با نماد A' نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل همه‌ی عضوهایی از مجموعه‌ی مرجع هستند که در مجموعه‌ی A نیستند و به زبان ریاضی می‌نویسیم:

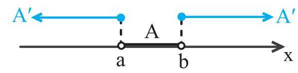
$A' = \{x \in U : x \notin A\}$

A مجموعه‌ی متمم = مجموعه‌ی مرجع − مجموعه‌ی $A \Rightarrow A' = U - A$

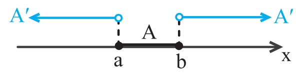
به عبارت دیگر برای یافتن متمم یک مجموعه، در مجموعه‌ی مرجع، اعضای مجموعه‌ی داده شده را حذف می‌کنیم. بنابراین هر عضوی که در A هست در A' نیست و به‌عکس.

۱ **یافتن مجموعه‌ی متمم در بازه‌ها:** در بازه‌ها، مجموعه‌ی مرجع در حالت کلی R است. برای یافتن متمم یک بازه از نمایش هندسی استفاده می‌کنیم، بازه‌ی A را رسم کرده، قسمت‌هایی از محور که متعلق به A نیستند، A' را نمایش می‌دهند. به متمم بازه‌های زیر توجه کنید:

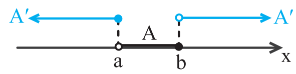
(۱) $A = (a, b) \Rightarrow A' = R - (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$



(۲) $A = [a, b] \Rightarrow A' = R - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$



(۳) $A = (a, b] \Rightarrow A' = R - (a, b] = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$



در حالت کلی برای اعداد a و b، در بازه، از هر سمتی که بسته باشند، متمم آنها باز و از هر سمتی که باز باشند، متمم آنها بسته است.

۲ **خواص متقابل A و A':** به کمک نمودار ون و تعریف متمم، خواص زیر به‌دست می‌آید:

الف – متمم مجموعه‌ی تهی برابر مجموعه‌ی مرجع و متمم مجموعه‌ی مرجع برابر مجموعه‌ی تهی است، یعنی: $\varnothing' = U$ و $U' = \varnothing$

ب – متمم متمم هر مجموعه با خود آن برابر است، یعنی: $(A')' = A$

پ – هر مجموعه با متمم خود اشتراکی ندارد، پس: $A \cap A' = \varnothing$

ت – اجتماع هر مجموعه با متمم آن برابر مجموعه‌ی مرجع است، پس: $A \cup A' = U$

ث – تفاضل هر مجموعه از متمم آن برابر مجموعه‌ی اولی است، یعنی: $A - A' = A$ و $A' - A = A'$

۳ **متمم مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:** تعیین متناهی یا نامتناهی بودن متمم یک مجموعه به مجموعه‌ی مرجع وابسته است. نمودار درختی زیر مسیر راه را مشخص می‌کند. برای مجموعه‌ی مرجع دو حالت در نظر می‌گیریم و کلاً سه حالت داریم:

مجموعه‌ی مرجع U
- متناهی ← A حتماً متناهی ← A' حتماً متناهی
- نامتناهی
  - اگر A متناهی باشد ← A' نامتناهی
  - اگر A نامتناهی باشد ← A' نامعلوم

● **مثال:** اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح که نامتناهی است، مجموعه‌ی مرجع و مجموعه‌ی اعداد حسابی را A در نظر بگیریم، آنگاه A' مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی است که نامتناهی است. حال اگر مجموعه‌ی اعداد حسابی را مجموعه‌ی مرجع بگیریم و $A = N$، آنگاه $A' = \{0\}$ که مجموعه‌ای متناهی است.

۴ **متمم و زیرمجموعه:** فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، آنگاه به کمک نمودار ون می‌توان نشان داد که:

(۱) اگر $A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$ (۲) $A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{cases}$ (۳) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B' \\ B \subseteq A' \end{cases}$

به عبارت دیگر، در مورد (۱)، وقتی متمم اثر کند، جای دو مجموعه و زیرمجموعه‌ها عوض می‌شود. (با نمودار ون درستی را بررسی کنید.)

۵ **متمم در حضور اعمال روی مجموعه‌ها:** اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی U باشند، آنگاه با استفاده از نمودار ون می‌توان درستی قوانین زیر را بررسی کرد:

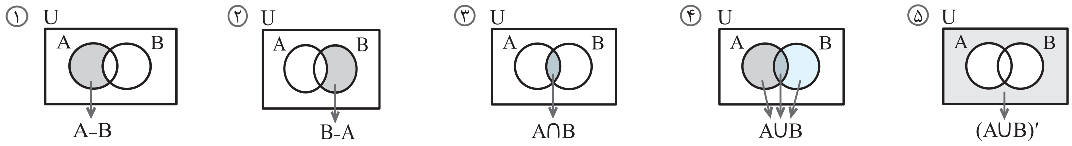
الف – وقتی متمم بر اجتماع (اشتراک) اثر کند، هر دو مجموعه را متمم کرده و علامت اجتماع به اشتراک (اشتراک به اجتماع) تبدیل می‌شود؛ یعنی:

(۱) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (۲) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

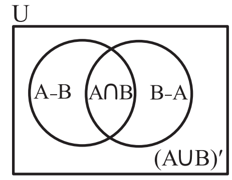
ب – به رابطه‌ی تفاضل و متمم دو مجموعه توجه کنید: (با نمودار ون درستی را بررسی کنید.)

(۱) $A - B = A \cap B'$ (۲) $A' - B' = B - A$

تذکر به کمک نمودار وِن و سایه‌زدن نواحی خواسته شده نیز می‌توانیم حاصل عبارت یا درستی رابطه را بررسی کنیم. استفاده از نمودار ون به‌ویـژه در تفسـیر عبارت کمک بسیاری می‌نماید.



با کمی دقت متوجه می‌شویم که اجتماع سطح سایه زده شده شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۵، برابر مجموعه‌ی مرجع است. بنابراین به‌خاطر سپردن و تفسـیر آنهـا در حـل مسائل کمک زیادی می‌کند.



شامل A باشد ولی شامل B نباشد = اعضای A به‌جز اشتراک با B (۱) $A - B = B$

شامل B باشد ولی شامل A نباشد = اعضای B به‌جز اشتراک با A (۲) $B - A = A$

هم شامل A و هم شامل B (۳) $A \cap B = B$

نه A و نه B = شامل هیچ‌کدام از A و B نیست = شامل A یا B نیست = (۴) $(A \cup B)'$

توجه کلمه شامل در اینجا به معنی همه‌ی اعضای مجموعه است.

تست اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، حاصل $(A - B)' \cap A$ کدام است؟

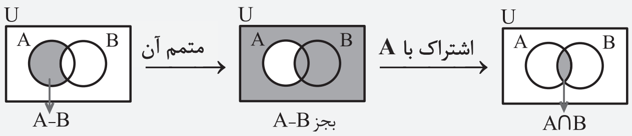
۱) A' ۲) B' ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

پاسخ گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: استفاده‌ی مستقیم از روابط:

$$(A - B)' \cap A = (A \cap B')' \cap A$$
$$= (A' \cup B) \cap A = \underbrace{(A' \cap A)}_{\varnothing} \cup (B \cap A)$$
$$= \varnothing \cup (B \cap A) = B \cap A = A \cap B$$

راه حل دوم: با استفاده از نمودار ون و تفسیر آن:



تست اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $(A \cap B) - (A' - B)$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) B' ۴) $\varnothing$

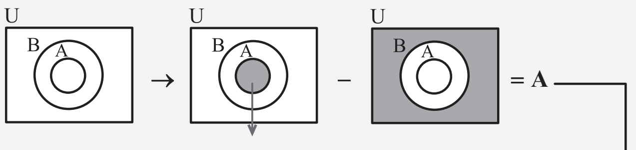
پاسخ گزینه‌ی «۱»

راه حل اول: با استفاده از روابط:

اگر $A \subseteq B$، آنگاه $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$، بنابراین:

$$(A \cap B) - (A' - B) = A - (A' \cap B') = A - (\underbrace{A \cup B}_{B})'$$
$$= A - B' = A \cap B = A$$

راه حل دوم: استفاده از نمودار ون و تفسیر آن:



$A \subseteq B$ $A \cap B = A$ $A' - B$

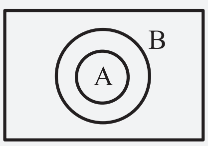
(از A'، B را بردار)

توجه کردید که در A، عضوی از $A' - B$ نداشتیم، پس خودش می‌ماند.

تست اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $B' \subseteq A'$ ۲) $A' \cap B' = B'$ ۳) $A' \cup B' = A'$ ۴) $A' \cup B' = B'$

پاسخ گزینه‌ی «۴» با توجه به نمودار ون، اگر $A \subseteq B$، آنگاه: $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$.



حال هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): درست است، زیرا اگر $A \subseteq B$ باشد، با استفاده از نمودار ون می‌توان نشان داد: $B' \subseteq A'$

گزینه‌ی (۲): درست است، زیرا: $A' \cap B' = (A \cup B)' = B'$ گزینه‌ی (۳): درست است، زیرا: $A' \cup B' = (A \cap B)' = A'$

بنابراین گزینه‌ی (۴) نادرست است.

۲ تعداد عضوهای اجتماع یک مجموعه

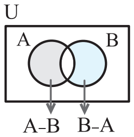
دو مجموعه‌ی جدا از هم ◄ اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا می‌نامیم. بنابراین:

$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ A و B جدا از هم

الف – اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، به کمک نمودار ون دیده می‌شود که:

(۱) $A - B = A$ (۲) $B - A = B$ (۳) $A \subseteq B'$ (۴) $B \subseteq A'$

ب – دو مجموعه‌ی $A - B$ و $B - A$ همواره جدا از هم‌اند، بنابراین:



$$(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$$

پ – مجموعه‌ی تهی با هر مجموعه‌ی دلخواهی جدا از هم‌اند. به‌عبارت دیگر $\varnothing \cap A = \varnothing$.

ت – هر مجموعه با متمم خود، جدا از هم‌اند زیرا اشتراکی ندارند و داریم $A \cap A' = \varnothing$.

ث – اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه: $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

تست اگر A و B دو مجموعه‌ی ناتهی و $A \subset B'$ باشد، اجتماع سه مجموعه‌ی $A \cap B'$ و $B \cap A'$ و $(B' - A)'$ کدام است؟

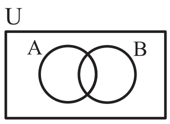
۱) A' ۲) B' ۳) $A \cup B$ ۴) $A - B$

پاسخ گزینه‌ی «۳» $A \subset B'$، بنابراین A و B جدا از هم‌اند، پس $A \cap B = \varnothing$، بنابراین $A \cap B' = A - B = A$ و $B \cap A' = B - A = B$ و

$$(B' - A)' = (B' \cap A')' = A \cup B$$

$$(A \cup B) \cup (\underbrace{A - B}_{A}) \cup (\underbrace{B - A}_{B}) = A \cup B$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه ◄ اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی متناهی از مجموعه‌ی مرجع متناهی U و $n(A)$ و $n(B)$ به‌ترتیب تعداد عضوهای مجموعه‌های A و B باشند، در این صورت تعداد عضوهای اجتماع A و B را با $n(A \cup B)$ نمایش می‌دهیم و داریم:



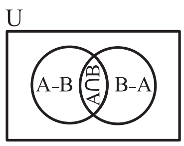
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

که در آن $n(A \cap B)$، تعداد عضوهای اشتراک دو مجموعه است.

الف – اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه $n(A \cap B) = ۰$ و در نتیجه:

A و B جدا از هم $\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

ب – با استفاده از نمودار ون تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را می‌توان از رابطه‌ی زیر نیز به‌دست آورد.

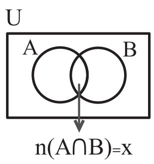


(۱) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$

(۲) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

(۳) $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

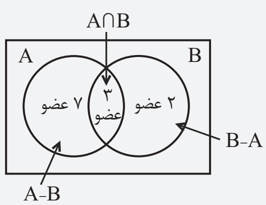
تعیین تعداد اعضای یک مجموعه با نمودار ون: برای تعیین تعداد اعضای یک مجموعه با استفاده از نمودار وِن، یک نمودار کشیده و با نامگذاری A و B، ابتدا وضعیت $A \cap B$ را معلوم می‌کنیم. اگر $n(A \cap B)$ معلوم باشد، آن را قرار داده و از روی آن اطلاعات A و B را تکمیل می‌کنیم، در غیر این‌صورت $n(A \cap B) = x$ را فرض کرده و بقیه‌ی اطلاعات را برحسب x تکمیل می‌کنیم و سپس از رابطه‌ی جمع استفاده می‌کنیم.



تست مجموعه‌ی A، ۱۰ عضوی و مجموعه‌ی B، ۵ عضوی است. اگر مجموعه‌ی $A - B$، ۷ عضوی باشد، مجموعه‌ی $A \cup B$ چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

پاسخ گزینه‌ی «۲» از نمودار ون استفاده می‌کنیم و اطلاعات را قرار می‌دهیم. از ۱۰ عضو A طبق $A - B$، ۷ عضو در B نیست، پس ۳ عضو در اشتراک است، مجموعه‌ی B، ۵ عضوی است، پس $B - A$، ۲ عضوی است. با توجه به نمودار، تعداد اعضای مجموعه‌ی $A \cup B$ برابر است با: $n(A \cup B) = ۷ + ۳ + ۲ = ۱۲$.



● **مثال:** یک روستا ۴۰۰ کشاورز دارد که ۳۰۰ نفر آنها گندم یا جو می‌کارند، در صورتی که ۲۱۰ نفر گندم و ۱۴۰ نفر جو بکارند، آنگاه:

الف – چند نفر هم گندم می‌کارند و هم جو؟

ب – چند نفر فقط گندم می‌کارند؟

پ – چند نفر جو نمی‌کارند؟

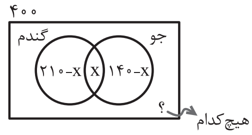
ت – چند نفر نه گندم می‌کارند و نه جو؟

ث – چند نفر حداقل یکی از آنها را می‌کارند؟

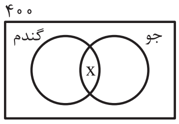
ج – چند نفر دقیقاً یکی از دو محصول را می‌کارند؟

○ حل: تعداد افرادی که هم گندم می‌کارند و هم جو را x می‌گیریم، پس $n(A \cap B) = x$ و نمودار ون را رسم می‌کنیم و اطلاعات را وارد می‌کنیم.

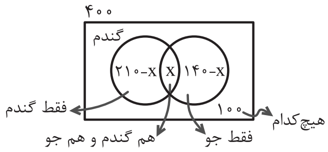
۳۰۰ نفر گندم یا جو می‌کارند، پس $۴۰۰ - ۳۰۰ = ۱۰۰$ نفر هیچ‌کدام را نمی‌کارند



۲۱۰ نفر گندم، پس $۲۱۰ - x$ فقط گندم
۱۴۰ نفر جو، پس $۱۴۰ - x$ فقط جو



افرادی که هم گندم و هم جو می‌کارند. $۴۰۰ = (۲۱۰ - x) + x + (۱۴۰ - x) + ۱۰۰ \Rightarrow x = ۵۰$ ← جمع عددهای داخل برابر ۴۰۰



حال خواسته‌های مسأله را می‌یابیم:

الف – کسانی که هم گندم و هم جو می‌کارند، همان اشتراک است که برابر ۵۰ نفرند.

ب – افرادی که فقط گندم می‌کارند، $۲۱۰ - x$ است که برابر $۲۱۰ - ۵۰ = ۱۶۰$ نفرند.

پ – کسانی که جو نمی‌کارند، برابر $۴۰۰ - ۱۴۰ = ۲۶۰$ نفرند.

ت – کسانی که نه گندم می‌کارند و نه جو، یعنی هیچ‌کدام که برابر ۱۰۰ نفرند.

ث – تعداد افرادی که حداقل یکی از آنها را می‌کارند، همان اجتماع دو مجموعه یعنی ۳۰۰ نفرند.

ج – افرادی که دقیقاً یکی از دو محصول را می‌کارند، یعنی یا فقط گندم یا فقط جو می‌کارند که فقط گندم برابر $۲۱۰ - ۵۰ = ۱۶۰$ و فقط جو برابر $۱۴۰ - ۵۰ = ۹۰$ و در نتیجه $۱۶۰ + ۹۰ = ۲۵۰$ نفر کسانی هستند که دقیقاً یکی از دو محصول را می‌کارند.

تذکر به چند کلمه‌ی کلیدی در مسائل توجه کنید.

کلمه‌ی کلیدی	A و B	A یا B	فقط A	حداقل یکی از A یا B	* بجز A ** A نباشد	* دقیقاً یکی از A یا B ** A یا B ولی نه هر دو	* نه A و نه B ** عضو هیچ‌کدام نباشد.
معادل ریاضی	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$A \cup B$	A'	$(A - B) \cup (B - A)$	$A' \cap B'$

مواردی که با علامت * و ** نمایش داده شده‌اند، یک جواب دارند و جملات مترادف هستند.

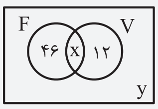
تست در مدرسه‌ای با ۹۰ دانش‌آموز، تعداد ۴۶ نفر فقط عضو تیم فوتبال و ۱۲ نفر فقط عضو تیم والیبال هستند. اگر تعداد اعضای تیم فوتبال ۳ برابر تعداد اعضای تیم والیبال باشد، آنگاه چه تعداد از دانش‌آموزان عضو هیچ‌یک از تیم‌ها نیستند؟ (آزمون کانون- ۴ آبان ۹۷)

۱) ۱۷ ۲) ۳۲ ۳) ۲۷ ۴) ۲۲

پاسخ گزینه‌ی «۳»

F: مجموعه‌ی افراد عضو تیم فوتبال

V: مجموعه‌ی افراد عضو تیم والیبال



$$n(F) = ۳n(V) \Rightarrow ۴۶ + x = ۳(x + ۱۲) \Rightarrow ۴۶ + x = ۳x + ۳۶ \Rightarrow x = ۵$$

تعداد کل دانش‌آموزان ۹۰ نفر است، بنابراین:

$$۴۶ + x + ۱۲ + y = ۹۰ \xrightarrow{x=۵} ۴۶ + ۵ + ۱۲ + y = ۹۰ \Rightarrow y = ۲۷$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پیمانه‌های ۳ تا ۵ | **۳ پیمانه** | **۳۰ تست**

متمم یک مجموعه | تیپ ۴ | صفحه‌های ۸ تا ۱۰ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۲ ریاضی ۱

۲۱. مجموعه‌ی U، مجموعه‌ی مرجع و $A \subseteq U$، کدام مجموعه همواره با A برابر است؟ (منطبق بر کتاب درسی – ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس ۴)

۱) $A' \cup \varnothing'$ ۲) $(A \cup U') \cup U$ ۳) $(A \cap \varnothing) \cup A'$ ۴) $(A' \cap \varnothing) \cup A$

۲۲. اگر $U = \{۱, ۲, ۳, ..., ۲۰\}$ را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم و $A \subseteq U$، آنگاه A را کدام مجموعه‌ی زیر در نظر بگیریم تا تعداد عضوهای مجموعه‌ی A' بیشتر باشد؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۱)

۱) اعداد فرد ۲) مقسوم‌علیه‌های عدد ۳ ۳) اعداد اول ۴) اعداد مربع کامل

۲۳. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی از مجموعه‌ی مرجع U باشد، آن‌گاه کدام گزینه الزاماً نامتناهی است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۲- مرتبط با تمرین ۲) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) $B - A$ ۲) A' ۳) B' ۴) $A \cap B$

۲۴. اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح، مجموعه‌ی مرجع باشد و مجموعه‌ی A' نامتناهی، مجموعه‌ی B متناهی و مجموعه‌ی C' متناهی باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر حتماً متناهی است؟ (ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۲- مرتبط با تمرین ۲) (آزمون کانون – ۳ آبان ۹۸)

۱) $B' - A'$ ۲) $C' \cap B'$ ۳) $(A' \cap C') \cup B'$ ۴) $C - B$

۲۵. اگر $A=\{a\mid -a\in N\}$, $B=\{1-b\mid -b\in W\}$ باشد و مجموعه‌ی Z را مجموعه‌ی مرجع فرض کنیم، مجموعه‌ی $A'\cap B'$ کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون- ۱۹ مرداد ۹۷)

۱) W ۲) $Z-N$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\varnothing$

۲۶. اگر U مجموعه‌ی مرجع و $A\subseteq B\subseteq U$ باشد، کدام گزینه زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی A' است؟
(ریاضی ۱-صفحه‌ی ۱۰-کار در کلاس-۷) (آزمون کانون - ۳ آبان ۹۸)

۱) B ۲) $A\cap B$ ۳) $B'\cap A$ ۴) $(B-A)'$

۲۷. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی با شرط $A\subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۰- کار در کلاس-۶ و ۷) **(سراسری ریاضی - ۹۹)**

۱) $B-A'=A$ ۲) $A-B'=A$ ۳) $A\cap B'=\varnothing$ ۴) $B\cap A'=\varnothing$

۲۸. متمم مجموعه‌ی $A\cup(B-A)$ کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

۱) $A'\cup B'$ ۲) $A'-B$ ۳) $B'-A'$ ۴) $A'-B'$

۲۹. اگر متمم مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ برابر $A\cap B$ باشد، کدام عبارت درست است؟ (S مجموعه‌ی مرجع است.)
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (سراسری انسانی- ۱۴۰۰)

۱) $A\subseteq B$ ۲) $A\subseteq B'$ ۳) $A\cup B=S$ ۴) $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$

۳۰. اگر A، B و C سه مجموعه باشند، اجتماع مجموعه‌های $A\cap C$، $A-C$ و $B-A'$ کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

۱) A ۲) A' ۳) C ۴) B

دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا) | تیپ ۵ | صفحه‌ی ۱۰ ریاضی ۱

۳۱. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعه‌ی مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با نتیجه‌ی ۱) **(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۹)**

۱) $A\subset B'$ ۲) $A-B'=\varnothing$ ۳) $A\cap B'=A$ ۴) $(A\cup B)'=\varnothing$

۳۲. اگر $A\subseteq B'$ باشد، حاصل $((A-B)\cup(B-A))'$، کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با ۱) (سراسری انسانی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۱) $A\cap B$ ۲) $A'\cap B'$ ۳) $A\cup B$ ۴) $A'\cup B'$

۳۳. اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، حاصل $(A\cup B')'\cup(A-B)$ کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با نتیجه‌ی ۱)

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه | تیپ ۶ | صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ ریاضی ۱

۳۴. اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U، $n(A)=14$، $n(A')=10$ و $n(B')=8$ باشند، آنگاه $n(B)$ کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴)

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

۳۵. اگر مجموعه‌ی A دارای ۴ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۱۰ عضو باشد، به طوری‌که $B'\subseteq A'$، آن‌گاه $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضو دارد؟
(ریاضی ۱- صفحه‌های ۱۰ و ۱۳- ترکیبی) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

۱) صفر ۲) ۱۴ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۳۶. اگر $n(U)=50$ ، $n(B)=35$ ، $n(A'\cup B')=30$ و $n(A')=20$ باشند، مقدار $n(A\cup B)$ کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۲۰ مهر ۹۷)

۱) ۳۵ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۲۰

۳۷. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند و $n(U)=100$، $n(A-B)=30$ و $n(A\cup B)=50$ باشد، $n(B'-A)$ کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۳ آبان ۹۸)

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۳۸. اگر مجموعه‌ی مرجع دارای ۳۰ عضو باشد و داشته باشیم: $n(A')=16$، $n(B)=10$ و $n(A\cup B)=16$، آنگاه $n(A\cap B')$ کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۱۸ مهر ۹۹)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۸

۳۹. اگر $n(A)=25$ و $n(B)=15$ و $n(A\cap B)=3$ باشد، آنگاه تعداد اعضای مجموعه‌ی مرجع کدام باشد تا فقط ۷ عضو داشته باشیم که نه عضو A باشد و نه عضو B؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون - ۳ آبان ۹۸)

۱) ۴۲ ۲) ۴۳ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

۴۰. اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (سراسری انسانی- ۹۴)

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

۴۱. مجموعه‌ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی B، کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۴)

۱) ۴۰ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

۴۲. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مکمل تمرین ۵) **(سراسری ریاضی- ۹۸)**

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۴۳. از بین دانش‌آموزان یک کلاس، ۲۹ نفر حداقل عضو یکی از گروه‌های A یا B و سه نفر عضو هر دو گروه هستند. اگر تعداد اعضای گروه A، ۴ نفر بیشتر از گروه B باشد، چند نفر فقط عضو گروه B هستند؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۵) (آزمون کانون - ۴ آبان ۹۷)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

۴۴. در یک کلاس، ۱۰ نفر در هر دو درس ریاضی و شیمی قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزانی که فقط در یکی از دو درس ریاضی یا شیمی قبول شده‌اند، ۲۰ نفر و تعداد دانش‌آموزانی که در هیچ‌کدام از این دو درس قبول نشده‌اند، ۳۰ نفر باشد، تعداد دانش‌آموزان این کلاس کدام است؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۵) (آزمون کانون - ۱۵ آذر ۹۸)

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۴۵. در یک گروه ۵۰ نفره، ۲۵ نفر عینکی و ۲۰ نفر چپ‌دست هستند. اگر در این گروه ۱۵ نفر نه عینکی باشند و نه چپ‌دست، چند درصد از افراد این گروه هم عینکی و هم چپ‌دست هستند؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۵) (آزمون کانون - ۳ آبان ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۴۶. اگر ۶۰ درصد دانش‌آموزان یک کلاس عضو تیم فوتبال و ۵۰ درصد عضو تیم والیبال باشند و ۱۰ درصد عضو هیچ‌کدام از این دو تیم نباشند، چند درصد از دانش‌آموزان حداکثر در یکی از دو تیم حضور دارند؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون - ۱۹ مهر ۹۸)

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۴۷. $\frac{۲}{۵}$ از دبیران مدرسه‌ی A با $\frac{۱}{۳}$ از دبیران مدرسه‌ی B مشترک هستند. اگر تعداد کل دبیران این دو مدرسه، ۴۵ نفر باشد، در این صورت چه تعداد از دبیران این دو مدرسه فقط در یک مدرسه تدریس می‌کنند؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون - ۱۸ مهر ۹۹)

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۳۵

۴۸. در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه‌ی چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آنهایی که نه مزرعه‌ی چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه‌ی چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند.)
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) **(سراسری تجربی - دی ۱۴۰۱)**

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۳۵ ۳) ۲۳۵ ۴) ۲۷۰

۴۹. در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای مشخص شد که در یک ماه گذشته ۷۰ نفر آنها از محصولات شرکت A و ۵۷ نفر از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر نیز اعلام کرده‌اند که در این مدت از محصولات هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این افراد دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟
(منطبق بر کتاب درسی - ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- تمرین ۶)

۱) ۹۵ ۲) ۱۵ ۳) ۶۳ ۴) ۷۸

۵۰. تعدادی از دانش‌آموزان یک کلاس ۴۰ نفری، خود را برای شرکت در المپیادهای ریاضی و شیمی آماده می‌کنند. می‌دانیم ۲۰ نفر از دانش‌آموزان این کلاس یا در هر دو المپیاد ثبت‌نام کرده‌اند یا در هیچ‌کدام ثبت‌نام نکرده‌اند. اگر ۱۵ نفر فقط در المپیاد ریاضی ثبت‌نام کرده باشند، چه تعداد از دانش‌آموزان این کلاس در المپیاد شیمی ثبت‌نام کرده‌اند؟
(ریاضی ۱- صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون - ۱۹ مهر ۹۸)

۱) دقیقاً ۵ نفر ۲) از ۵ تا ۲۵ نفر ۳) دقیقاً ۱۰ نفر ۴) از ۱۰ تا ۲۵ نفر

پاسخ تشریحی مجموعه، الگو و دنباله

پاسخ تشریحی: حسین حاجیلو، فرهاد حامی، فرزانه دانایی

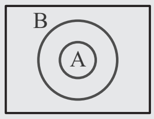
راهبرد حل تیپ (۱)

[۱] هر عدد اعشاری متناوب، عددی گویاست؛ مانند: $۰/\overline{۲}$ ، $۰/۲\overline{۵}$.

[۲] نماد $\in$ برای عضویت و نماد $\notin$ برای عدم عضویت اعضای یک مجموعه استفاده می‌شود. همچنین نماد $\subseteq$ برای زیرمجموعه بودن یک مجموعه استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال:

$$A=\{a,b,c\}$$
$$a\in A \ ، \ d\notin A$$
$$\{a\}\subseteq A \ ، \ \{a,c\}\subseteq A$$

[۳] اگر $A\subseteq B$ باشد، آنگاه:



$$A\cap B=A$$
$$A\cup B=B$$
$$A-B=\varnothing$$

بنابراین برای مجموعه‌های $N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$، اشتراک، مجموعه‌ی سمت چپ و اجتماع، مجموعه‌ی سمت راست خواهد بود، یعنی:

$$N\subseteq W\Rightarrow N\cap W=N \ ، \ N\cup W=W$$
$$Z\subseteq Q\Rightarrow Z\cap Q=Z \ ، \ Z\cup Q=Q$$

✱ تذکر: در اعمال بر روی مجموعه‌ها، حتماً به پرانتزها توجه کنید. ابتدا باید عملیات داخل پرانتزها را انجام دهید.

۱. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): نادرست است، زیرا $\sqrt{۳}+۵$ عددی گنگ است و همچنین داریم: $R-Q=Q'$، بنابراین: $\sqrt{۳}+۵\in(R-Q)$

گزینه‌ی (۲): نادرست است، زیرا $-\frac{۳}{۴}$ عددی گویاست و عضو مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) یا مجموعه‌ی اعداد گنگ (Q') نیست، بنابراین: $-\frac{۳}{۴}\notin(Z\cup Q')$

گزینه‌ی (۳): درست است، زیرا $۰/\overline{۶}$ یک عدد اعشاری متناوب است که عضو مجموعه‌ی اعداد گویاست و مجموع آن با عدد گویای $\frac{۲}{۳}$ نیز همچنان گویاست، همچنین داریم: $Q\cap R=Q$، بنابراین:

$$۰/\overline{۶}+\frac{۲}{۳}\in(Q\cap R)$$

گزینه‌ی (۴): نادرست است، زیرا دو عضو $\sqrt{۱}=۱$ و $\sqrt{۴}=۲$ از مجموعه‌ی $\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴}\}$ اعداد طبیعی هستند، پس مجموعه‌ی $\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴}\}$ نمی‌تواند زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی اعداد گنگ باشد، بنابراین:

$$\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴}\}\not\subseteq Q'$$

۲. گزینه‌ی ۲

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): مجموعه‌ی A شامل همه‌ی اعداد حقیقی به جز اعداد صحیح است. مجموعه‌ی B نیز مجموعه‌ی اعداد حسابی است. پس این دو مجموعه با هم اشتراکی ندارند.

گزینه‌ی (۲): مجموعه‌ی C شامل تمام اعداد صحیح است، اما $A\cup B$ شامل اعداد صحیح منفی نیست. پس این گزینه نادرست است.

گزینه‌ی (۳): مجموعه‌ی C تمام اعداد صحیح را دارا است اما B اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر را در خود دارد. پس $B-C$ برابر تهی خواهد شد.

گزینه‌ی (۴): در مجموعه‌ی A همه‌ی اعداد حقیقی جز اعداد صحیح حضور دارند. مجموعه‌ی C نیز شامل اعداد صحیح است. پس $A\cup C$ برابر همه‌ی اعداد حقیقی (R) خواهد شد.

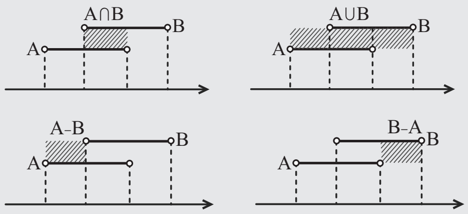
راهبرد حل تیپ (۲)

[۱] همواره به باز یا بسته بودن ابتدا و انتهای بازه توجه کنید.

[۲] اگر عدد k متعلق به بازه‌ی (a,b) باشد، آنگاه: $a<k<b$

[۳] برای انجام اعمال روی بازه‌ها، ابتدا بازه‌ها را روی محور اعداد مشخص کنید و سپس عملیات را انجام دهید.

[۴] اجتماع، اشتراک و تفاضل دو بازه در محورهای زیر، هاشور زده شده است.



۳. گزینه‌ی ۳

بازه‌ی $[۲n-۱,۳n+۱۴)$ شامل عدد ۵ است، بنابراین:

$$۲n-۱<۵\leq ۳n+۱۴$$

نامساوی فوق را به دو نامساوی زیر، تبدیل کرده و اشتراک جواب‌هایشان را می‌یابیم:

$$\Rightarrow\begin{cases}۲n-۱<۵\Rightarrow ۲n<۶\Rightarrow n<۳ & (I)\\ ۵\leq ۳n+۱۴\Rightarrow -۹\leq ۳n\Rightarrow -۳\leq n & (II)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} -۳\leq n<۳$$

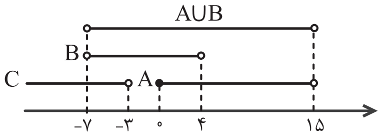
بنابراین حداقل مقدار n برابر با -۳ است.

۴. گزینه‌ی ۱

وقتی $-۱۵<x<۱۳$، قدرمطلق x که مقادیر نامنفی هستند برابر است با: $۰\leq|x|<۱۵$، بنابراین: $A=[۰,۱۵)$

نمایش هندسی بازه‌ها را رسم می‌کنیم:

$$A=[۰,۱۵) \ ، \ B=(-۷,۴) \ ، \ C=(-\infty,-۳)$$

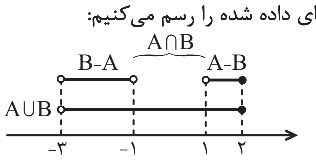


$$(A\cup B)-C=(-۷,۱۵)-(-\infty,-۳)=[-۳,۱۵)$$

بازه‌ی فوق شامل اعداد صحیح -۳ تا ۱۴ است که تعدادشان ۱۸ تاست.

۵. گزینه‌ی ۴

ابتدا نمایش هندسی مجموعه‌های داده شده را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، مشخص است که:

$$A\cap B=[-۱,۱]$$

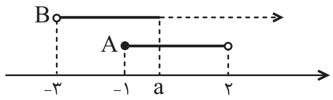
از طرفی داریم: $A=(A-B)\cup(A\cap B)$، بنابراین:

$$A=(A-B)\cup(A\cap B)=(۱,۲]\cup[-۱,۱]=[-۱,۲]$$

پس مجموعه‌ی A، شامل چهار عدد صحیح ۲، ۱، ۰، -۱ است.

۶. گزینه‌ی ۱

نمایش هندسی دو بازه را رسم می‌کنیم.



چون اشتراک دو مجموعه غیر تهی است، پس a باید عددی بزرگتر یا مساوی ۱− باشد؛ لذا $a \geq -۱$.

۷. گزینه‌ی ۲

راه حل اول: از آنجا که $m < -۱$ ، بنابراین $m < \frac{۱}{m} < -\frac{۱}{m} < -m$ است. در نتیجه:

$$[\frac{۱}{m}, -m] \cap [m, -\frac{۱}{m}] = [\frac{۱}{m}, -\frac{۱}{m}]$$

چون $m < -۱$ است؛ پس تنها عدد صحیح موجود در بازه‌ی $[\frac{۱}{m}, -\frac{۱}{m}]$، عدد صفر است.

راه حل دوم: می‌توانیم یک عدد دلخواه در نظر بگیریم. به عنوان مثال $m = -۲$، بنابراین:

$$[\frac{۱}{m}, -m] \cap [m, -\frac{۱}{m}] \xrightarrow{m=-۲} [\frac{-۱}{۲}, ۲] \cap [-۲, \frac{۱}{۲}] = [\frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲}]$$

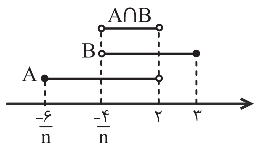
۸. گزینه‌ی ۲

با توجه به اینکه $-۴ > -۶$، داریم: $\frac{-۶}{n} < \frac{-۴}{n}$ (n مثبت است).

بنابراین نمایش هندسی بازه‌ها و اشتراک آنها به‌صورت زیر است:

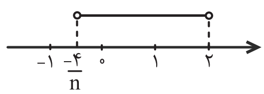
$$A = [\frac{-۶}{n}, ۲) \text{ ، } B = (\frac{-۴}{n}, ۳]$$

$$A \cap B = (\frac{-۴}{n}, ۲)$$



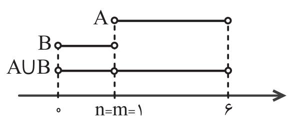
از آنجا که $n > ۴$، داریم: $\frac{۱}{۴} > \frac{۱}{n} > ۰$، بنابراین: $-۱ < \frac{-۴}{n} < ۰$

پس بازه‌ی $(\frac{-۴}{n}, ۲)$ به‌صورت زیر است که همواره دو عدد صحیح صفر و یک در این بازه قرار دارند.



۹. گزینه‌ی ۱

با توجه به اطلاعات مسأله، دو بازه باید به‌صورت زیر باشند:



بنابراین: $n + m = ۱ + ۱ = ۲$

۱۰. گزینه‌ی ۳

با توجه به اینکه اجتماع دو مجموعه بازه‌ی $[-۲, ۸)$ است، پس a ابتدای بازه و b انتهای بازه است و داریم:

$$[a, ۶] \cup (-۱, b) = [-۲, ۸) \Rightarrow a = -۲ \text{ , } b = ۸$$

بنابراین:

$$\Rightarrow A = [-۲, ۶] \text{ , } B = (-۱, ۸)$$

در نتیجه:

$A - B = [-۲, -۱] \Rightarrow$ اعداد صحیح : $\{-۲, -۱\}$

۱۱. گزینه‌ی ۴

هر یک از مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$A_۱ = (-۱, ۱) \quad , \quad A_۲ = (-۲, ۲) \quad , \quad A_۳ = (-۳, ۳)$$

$$\begin{cases} A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ = (-۳, ۳) \\ A_۱ \cap A_۲ = (-۱, ۱) \end{cases}$$

تفاضل $= (-۳, ۳) - (-۱, ۱) = (-۳, -۱] \cup [۱, ۳)$

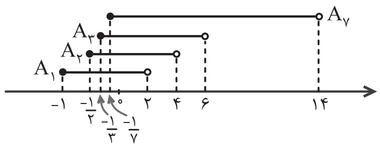
۱۲. گزینه‌ی ۳

هر یک از مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$A_۱ = [-۱, ۲) \text{ ، } A_۲ = [-\frac{۱}{۲}, ۴) \text{ ، } A_۳ = [-\frac{۱}{۳}, ۶)$$

$$A_۷ = [-\frac{۱}{۷}, ۱۴)$$

با توجه به نمایش هندسی بازه‌ها روی محور، خواهیم داشت:



$$A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ = [-\frac{۱}{۳}, ۲)$$

$$\Rightarrow (A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) \cup A_۷ = [-\frac{۱}{۳}, ۲) \cup [-\frac{۱}{۷}, ۱۴)$$

$$= [-\frac{۱}{۳}, ۱۴)$$

راهبرد حل تیپ (۳)

اگر تعداد اعضای یک مجموعه قابل شمارش باشد (هر چقدر هم که آن مجموعه بزرگ باشد)، آنگاه مجموعه متناهی است.

توجه کنید که بازه‌ی $[a, b]$ یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

[۱] در موارد زیر، می‌توان در مورد متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ی حاصل، اظهار نظر قطعی کرد:

{ نامتناهی } ∪ { هر مجموعه‌ای } = { نامتناهی }

{ متناهی } ∩ { هر مجموعه‌ای } = { متناهی }

{ متناهی } − { هر مجموعه‌ای } = { متناهی }

{ نامتناهی } − { متناهی } = { نامتناهی }

{ متناهی } هر عملیاتی { متناهی } = { متناهی }

در بقیه‌ی موارد نمی‌توان در حالت کلی اظهار نظر قطعی کرد.

[۲] کافی است مجموعه‌ی A ، یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه مجموعه‌ی A نامتناهی است.

$\{$ نامتناهی $\} \subseteq A \Rightarrow$ A نامتناهی است.

اگر A ، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی باشد، آنگاه A متناهی است.

$A \subseteq \{$ متناهی $\} \Rightarrow$ A متناهی است.

۱۳. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): نامتناهی است، زیرا بر یک دایره، بی‌شمار خط مماس، قابل رسم است.

گزینه‌ی (۲): بین هر دو عدد گویای دلخواه می‌توان بی‌شمار عدد گویا قرار داد، پس این مجموعه نامتناهی است.

توجه کنید که اگر a و b دو عدد گویا باشند، آنگاه $\frac{a+b}{۲}$ بین a و b است.

گزینه‌ی (۳): بازه‌ی (a, b) نامتناهی است. $(b > a)$

گزینه‌ی (۴): در میان اعداد حقیقی مثبت، عددی که با معکوس خود برابر است تنها عدد ۱ است، پس این مجموعه متناهی است.

۱۴. گزینه‌ی ۳

ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A=\left\{\frac{1}{x}\,|\,x\in N\right\}=\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\right\}$$

$$B=\left\{\frac{x}{8}\,|\,x\in N\right\}=\left\{\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{4}{8},\dots\right\}$$

گزینه‌ی (۱): نامتناهی: $A-B=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\dots\right\}$

گزینه‌ی (۲): نامتناهی: $B-A=\left\{\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{6}{8},\frac{7}{8},\frac{9}{8},\frac{10}{8},\dots\right\}$

گزینه‌ی (۳): متناهی: $A\cap B=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right\}$

گزینه‌ی (۴): مجموعه‌های A و B نامتناهی هستند و اجتماع هر دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

۱۵. گزینه‌ی ۱

ابتدا اعضای هر یک از مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:

$A=\{n\in Z\,|\,\frac{4}{n}\in Z\}=\{\pm 4,\pm 2,\pm 1\}\rightarrow$ متناهی

$B=\{n\in Z\,|\,\frac{(-1)^n}{n}\in Z\}=\{-1,1\}\rightarrow$ متناهی

$C=\{n\in W\,|\,\frac{1}{n}<1\}=\{2,3,4,\dots\}\rightarrow$ نامتناهی

۱۶. گزینه‌ی ۲

مجموعه‌ی $\{x\in Z\,|\,x<-2\}$ برابر است با: $\{\dots,-4,-3\}$ که یک مجموعه‌ی نامتناهی است. بنابراین مجموعه‌ی A یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی دارد، در نتیجه خود مجموعه‌ی A نیز نامتناهی است.
مجموعه‌ی $\{x\in W\,|\,1<x<158\}$ برابر است با: $\{2,3,\dots,157\}$
که یک مجموعه‌ی متناهی است، بنابراین مجموعه‌ی B، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی است، در نتیجه خود مجموعه‌ی B نیز متناهی است.

۱۷. گزینه‌ی ۳

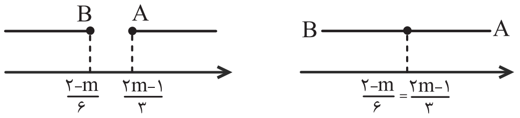
مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی نامتناهی است، بنابراین می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، پس $A\cap B=A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. به همین ترتیب $B-A$ نیز می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد و از آنجا که $A\subseteq B$، بنابراین $A-B=\varnothing$ همواره متناهی و $A\cup B=B$ همواره نامتناهی است.

۱۸. گزینه‌ی ۳

مجموعه‌ی A متناهی است و اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای، متناهی خواهد بود؛ بنابراین مجموعه‌ی $A\cap(B\cup C)$ متناهی است. از آنجا که مجموعه‌ی A متناهی است، بنابراین مجموعه‌ی $A\cap C$ نیز متناهی است. مجموعه‌ی B نامتناهی است و تفاضل مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره نامتناهی خواهد بود، بنابراین مجموعه‌ی $B-(A\cap C)$ نامتناهی است.

۱۹. گزینه‌ی ۱

مجموعه‌های $A=[\frac{2m-1}{3},+\infty)$ و $B=(-\infty,\frac{2-m}{6}]$ هر دو نامتناهی هستند و اشتراک آنها زمانی متناهی خواهد بود که تهی باشد یا تنها یک عضو داشته باشد. به نمودارهای بالا توجه کنید.



$$\frac{2-m}{6}\leq\frac{2m-1}{3}\rightarrow 2-m\leq 2(2m-1)$$

$\Rightarrow 2-m\leq 4m-2\Rightarrow 4\leq 5m\Rightarrow m\geq$ ۰/۸

۲۰. گزینه‌ی ۱

ابتدا هر یک از مجموعه‌ها را با اعضایشان مشخص می‌کنیم:

$$A=\left\{\frac{6n}{n+1}\in N\,\middle|\,n\in N\right\}$$

$$\frac{6n}{n+1}=\frac{6(n+1-1)}{n+1}=\frac{6(n+1)-6}{n+1}=6-\frac{6}{n+1}$$

باید $6-\frac{6}{n+1}$ یعنی خروجی‌ها، عددی طبیعی باشند، پس مخرج کسر یعنی $n+1$ باید مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶ باشد، یعنی ۱، ۲، ۳ و ۶

پس داریم: $n+1=1\Rightarrow n=0$ غ.ق.ق

$n+1=2\Rightarrow n=1\,,\,6-\frac{6}{2}=3$

$n+1=3\Rightarrow n=2\,,\,6-\frac{6}{3}=4$

$n+1=6\Rightarrow n=5\,,\,6-\frac{6}{6}=5$

$\Rightarrow A=\{3,4,5\}$

از طرفی داریم: $B=\{3n\,|\,n\in N\}=\{3,6,9,\dots\}$

بنابراین A یک مجموعه‌ی متناهی و B یک مجموعه‌ی نامتناهی است.
تفاضل هر مجموعه‌ای، از یک مجموعه‌ی متناهی، همواره متناهی است،
بنابراین: $A-(A\cup B)$: متناهی = هر مجموعه‌ای − متناهی
اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی و یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره متناهی خواهد بود، پس $A\cap B$ متناهی است و تفاضل یک مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره نامتناهی است، بنابراین:
$B-(A\cap B)$: نامتناهی = متناهی − نامتناهی

راهبرد حل تیپ (۴)

[۱] اگر U مجموعه‌ی مرجع و $A\subseteq U$ باشد، متمم مجموعه‌ی A برابر است با: $A'=U-A$

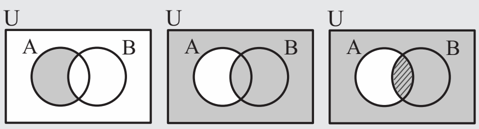
[۲] برای ساده کردن عبارت‌ها، می‌توان از خواص متمم مجموعه‌ها استفاده کرد:

$$(A')'=A$$
$$(A\cap B)'=A'\cup B'$$
$$(A\cup B)'=A'\cap B'$$
$$A-B=A\cap B'$$

[۳] اگر $A\subseteq B$، آنگاه $B'\subseteq A'$.

[۴] در بعضی موارد بهتر است برای به دست آوردن حاصل عبارت‌ها، از نمودار ون استفاده کرد و عملیات هر مرحله را روی آن نشان داد. به عنوان مثال:

$$(A\cap B')'\cap A=(A-B)'\cap A$$



$A-B$ $\qquad (A-B)'$ $\qquad (A-B)'\cap A=A\cap B$

توجه کنید که برای رسم نمودار ون دو مجموعه، آنها را در حالت کلی باید رسم کنید، یعنی دو مجموعه که در قسمتی با هم اشتراک دارند.

۲۱. گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی (۱): $A' \cup \overbrace{\varnothing'}^{U} = A' \cup U = U$

گزینه‌ی (۲): $(A \cup \underbrace{U'}_{\varnothing}) \cup U = (\underbrace{A \cup \varnothing}_{A}) \cup U = A \cup U = U$

گزینه‌ی (۳): $(\underbrace{A \cap \varnothing}_{\varnothing}) \cup A' = \varnothing \cup A' = A'$

گزینه‌ی (۴): $(\underbrace{A' \cap \varnothing}_{\varnothing}) \cup A = \varnothing \cup A = A$

۲۲. گزینه‌ی ۲

هر چه تعداد عضوهای یک مجموعه کمتر باشد، تعداد عضوهای متمم آن مجموعه بیشتر خواهد بود. بنابراین کافی است تعداد عضوهای هر یک از مجموعه‌ها را مشخص کنیم. توجه کنید که هر یک از مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع داده شده هستند.

گزینه‌ی (۱):

اعداد فرد $= \{۱ , ۳ , ۵ , ... , ۱۹\} \rightarrow$ تعداد عضوها $= ۱۰$

گزینه‌ی (۲): مقسوم‌علیه‌های عدد ۳ $= \{۱ , ۳\} \rightarrow$ تعداد عضوها $= ۲$

گزینه‌ی (۳):

اعداد اول $= \{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹\} \rightarrow$ تعداد عضوها $= ۸$

گزینه‌ی (۴): اعداد مربع کامل $= \{۱ , ۴ , ۹ , ۱۶\} \rightarrow$ تعداد عضوها $= ۴$

بنابراین تعداد عضوهای مجموعه‌ی گزینه‌ی (۲) از بقیه کمتر است، در نتیجه تعداد عضوهای مجموعه‌ی متمم آن از بقیه بیشتر خواهد بود.

۲۳. گزینه‌ی ۳

گزینه‌ی (۱): $B - A$ الزاماً متناهی است.

گزینه‌ی (۲): A' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

گزینه‌ی (۳): B' حتماً نامتناهی است.

گزینه‌ی (۴): $A \cap B$ حتماً متناهی است.

بنابراین گزینه‌ی «۳» صحیح است.

۲۴. گزینه‌ی ۲

با توجه به اطلاعات مسأله داریم:

A' نامتناهی $\Leftarrow$ A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

B متناهی $\Leftarrow$ B' نامتناهی است.

C' متناهی $\Leftarrow$ C نامتناهی است.

حال هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $B' - A' =$ نامتناهی $-$ نامتناهی
$=$ متناهی یا نامتناهی

گزینه‌ی (۲): $C' \cap B' =$ نامتناهی $\cap$ متناهی $=$ متناهی

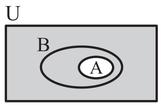
گزینه‌ی (۳): $(A' \cap C') \cup B' =$ (متناهی) $\cup$ نامتناهی
$=$ نامتناهی

گزینه‌ی (۴): $C - B =$ نامتناهی $-$ متناهی $=$ نامتناهی

۲۵. گزینه‌ی ۳

$$A = \{a \mid -a \in N\} \Rightarrow A = \{... , -۳ , -۲ , -۱\}$$
$$\Rightarrow A' = Z - A = \{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ...\}$$
$$B = \{۱ - b \mid -b \in W\}$$
$$-b \in W \Rightarrow -b = ۰ , ۱ , ۲ , ... \Rightarrow ۱ - b = ۱ , ۲ , ۳ , ...$$
$$\Rightarrow B = \{۱ , ۲ , ۳ , ...\}$$
$$\Rightarrow B' = Z - B = \{... , -۲ , -۱ , ۰\}$$
$$\Rightarrow A' \cap B' = \{۰\}$$

۲۶. گزینه‌ی ۳



A' در نمودار مقابل، سایه زده شده است. واضح است که کل مجموعه‌ی B زیرمجموعه‌ی A' نیست.

از طرفی $A \cap B = A$ است و A نیز زیرمجموعه‌ی A' نیست.

همچنین داریم: $B' \cap A = A \cap B' = A - B$ که با توجه به نمودار، $A - B = \varnothing$ است و $\varnothing$ زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است، بنابراین:

$(B' \cap A = \varnothing) \subseteq A'$

نادرستی گزینه‌ی (۴) را با مشخص کردن مجموعه روی نمودار ون، بررسی کنید.

۲۷. گزینه‌ی ۴

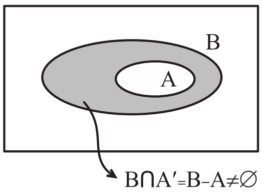
می‌دانیم اگر $A \subset B$ آنگاه $A \cap B = A$ و $A - B = \varnothing$، حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

درست $B - A' = B \cap (A')' = B \cap A = A$: گزینه‌ی (۱)

درست $A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = A$: گزینه‌ی (۲)

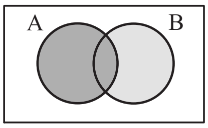
درست $A \cap B' = A - B = \varnothing$: گزینه‌ی (۳)

پس گزینه‌ی (۴) پاسخ سؤال است، برای درک نادرستی گزینه‌ی (۴) به نمودار ون مقابل توجه کنید.



۲۸. گزینه‌ی ۲

با توجه به نمودار ون زیر، داریم:



$$A \cup (B - A) = A \cup B$$

در نتیجه متمم $A \cup (B - A)$ برابر است با:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' = A' - B$$

۲۹. گزینه‌ی ۳

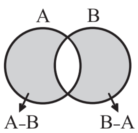
طبق فرض مسأله، داریم:

$$((A - B) \cup (B - A))' = A \cap B$$

می‌دانیم متممِ متممِ یک مجموعه با خود مجموعه برابر است، پس اگر از طرفین تساوی بالا متمم بگیریم، داریم:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B)' \quad (*)$$

از طرفی با توجه به نمودار ون مقابل، داریم:

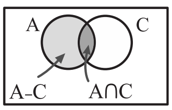


$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

با جایگذاری در رابطه‌ی (*) خواهیم داشت:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = S - (A \cap B) \Rightarrow A \cup B = S$$

۳۰. گزینه‌ی ۱



با توجه به نمودار ون مقابل، داریم:

$$(A - C) \cup (A \cap C) = A$$

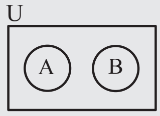
$$B - A' = B \cap (A')' = B \cap A$$

با توجه به اینکه همواره $(A \cap B) \subset A$ است، خواهیم داشت:

$$\underbrace{(A - C) \cup (A \cap C)}_{A} \cup (B - A') = A \cup (A \cap B) = A$$

راهبرد حل تیپ (۵)

[۱] اگر اشتراک دو مجموعه، تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم (مجزا) می‌گویند و نمودار ون آنها به صورت زیر است:

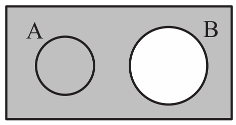


[۲] برای دو مجموعه‌ی جدا از هم A و B، همواره داریم:

$$\begin{cases} A-B=A \\ B-A=B \end{cases} \qquad \begin{cases} A\subseteq B' \\ B\subseteq A' \end{cases}$$

.۳۱ گزینه‌ی ۴

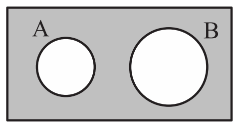
A و B دو مجموعه جدا از هم‌اند، یعنی $A\cap B=\varnothing$ رابطه‌های گزینه‌های (۱) و (۳) با توجه به شکل زیر که در آن B' به‌صورت رنگی نشان داده شده است، درست هستند.



$$A\subset B' \Rightarrow A\cap B'=A$$

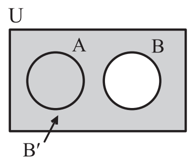
رابطه‌ی گزینه‌ی (۲) هم درست است، زیرا:

$$A-B'=A\cap(B')'=A\cap B=\varnothing$$



اما رابطه‌ی گزینه‌ی (۴) نادرست است. به شکل مقابل دقت کنید که در آن مجموعه‌ی $(A\cup B)'$ به‌صورت رنگی نشان داده شده است و برابر با تهی نیست.

.۳۲ گزینه‌ی ۲



با توجه به نمودار ون مقابل، اگر $A\subseteq B'$ باشد، آنگاه A و B هیچ اشتراکی ندارند و جدا از هم‌اند، پس:

$$A\cap B=\varnothing$$

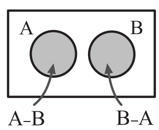
بنابراین داریم: $A-B=A$ و $B-A=B$، لذا:

$$((A-B)\cup(B-A))'=(A\cup B)'=A'\cap B'$$

.۳۳ گزینه‌ی ۴

با توجه به اینکه $(A\cup B)'=A'\cap B'$ و $A-B=A\cap B'$، مجموعه‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(A\cup B')'\cup(A-B)&=(A'\cap(B')')\cup(A-B)\\&=(A'\cap B)\cup(A-B)\\&=(B\cap A')\cup(A-B)\\&=(B-A)\cup(A-B)\end{aligned}$$



A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم‌اند. بنابراین: $A\cap B=\varnothing$ و طبق نمودار ون مقابل داریم:

$$(B-A)\cup(A-B)=B\cup A$$

راهبرد حل تیپ (۶)

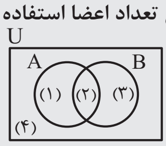
[۱] تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی A و B برابر است با:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

همچنین رابطه‌ی زیر نیز برقرار است:

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$

[۲] از نمودار ون نیز می‌توان برای به دست آوردن تعداد اعضا استفاده کرد. به نمودار مقابل توجه کنید.



برای کامل کردن نمودار، معمولاً از اشتراک مجموعه‌ها شروع می‌کنیم.

$(۱)\rightarrow n(A-B)$ $\qquad$ $(۲)\rightarrow n(A\cap B)$

$(۳)\rightarrow n(B-A)$ $\qquad$ $(۴)\rightarrow n(U-(A\cup B))$

[۳] به کلمات کلیدی زیر و معادل آنها توجه کنید:

$A\cup B$	A یا B حداقل عضو یک مجموعه
$A\cap B$	A و B عضو هر دو مجموعه
$A-B$	فقط A
$(A-B)\cup(B-A)$	دقیقاً عضو یک مجموعه
$U-(A\cap B)$	حداکثر عضو یک مجموعه

.۳۴ گزینه‌ی ۱

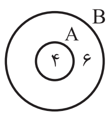
می‌دانیم A و A'، دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند و $A\cup A'=U$، پس:

$$n(A\cup A')=n(A)+n(A')=n(U)$$
$$\Rightarrow n(U)=۱۴+۱۰=۲۴$$

از طرفی B و B' دو مجموعه جدا از هم هستند و $B\cup B'=U$، پس:

$$n(B\cup B')=n(B)+n(B')=n(U)$$
$$\Rightarrow n(U)=n(B)+۸=۲۴\Rightarrow n(B)=۱۶$$

.۳۵ گزینه‌ی ۳



می‌دانیم اگر $B'\subseteq A'$، آنگاه $A\subseteq B$، بنابراین با توجه به اطلاعات مسأله نمودار ون مقابل را داریم:

همچنین داریم:

$$\underbrace{(A-B)}_{\varnothing}\cup(B-A)=B-A$$
$$\Rightarrow n((A-B)\cup(B-A))=n(B-A)=۶$$

.۳۶ گزینه‌ی ۳

می‌دانیم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

برای به دست آوردن $n(A)$ و $n(A\cap B)$، داریم:

$$n(A'\cup B')=n((A\cap B)')=n(U)-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(A\cap B)=n(U)-n(A'\cup B')=۵۰-۳۰=۲۰$$
$$n(A)=n(U)-n(A')=۵۰-۲۰=۳۰$$
$$\Rightarrow n(A\cup B)=۳۰+۳۵-۲۰=۴۵$$

.۳۷ گزینه‌ی ۳

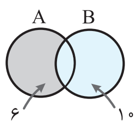
ابتدا مجموعه‌ی $B'-A$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$B'-A=B'\cap A'=(A\cup B)'$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$n(B'-A)=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$
$$=۱۰۰-۵۰=۵۰$$

.۳۸ گزینه‌ی ۱



راه حل اول: با توجه به اینکه $n(B)=۱۰$ و $n(A\cup B)=۱۶$، نمودار ون مقابل را خواهیم داشت.

از آنجا که $A\cap B'=A-B$ است، با توجه به نمودار، داریم:

$$n(A-B)=۶$$

راه حل دوم: $n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

برای به دست آوردن $n(A)$ و $n(A\cap B)$، داریم:

$$n(A)+n(A')=n(U)\Rightarrow n(A)=n(U)-n(A')$$
$$\Rightarrow n(A)=۳۰-۱۶=۱۴$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow ۱۶=۱۴+۱۰-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۸$$

بنابراین داریم:

$$n(A\cap B')=n(A)-n(A\cap B)=۱۴-۸=۶$$

۳۹. گزینه‌ی ۳

۷ عضو نه عضو A هستند نه عضو B، یعنی: $n(A'\cap B')=۷$، در نتیجه:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$$
$$\Rightarrow ۷=n(U)-n(A\cup B)\Rightarrow n(U)=۷+n(A\cup B)$$

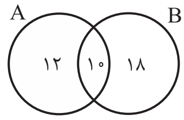
از طرفی داریم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$=۲۵+۱۵-۳=۳۷$$

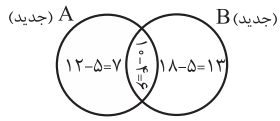
در نتیجه: $n(U)=۷+n(A\cup B)=۷+۳۷=۴۴$

۴۰. گزینه‌ی ۴

چون مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به‌ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند و $(A\cup B)$ دارای ۴۰ عضو است. پس $(A\cap B)$ دارای ۱۰(=۴۰−۱۲−۱۸) عضو است.



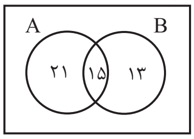
حال اگر از هر کدام از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو کم شود چون از $(A\cap B)$، ۴ عضو کم شده، پس از هر یک از مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ باید ۵ عضو کم شود.



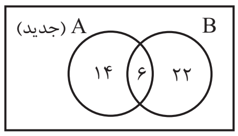
$$\Rightarrow n(A\cup B)_{\text{جدید}}=۷+۶+۱۳=۲۶$$

۴۱. گزینه‌ی ۳

با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون زیر را داریم:



اگر ۱۶ عضو از A کم کنیم، ۹ عضو از اشتراک کم می‌شود (طبق صورت سؤال) و ۷(=۱۶−۹) عضو از $(A-B)$ کم می‌شود و نمودار به صورت زیر درمی‌آید.

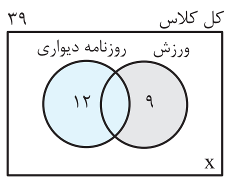


$$n(A\cup B)=۱۴+۶+۲۲=۴۲$$

دقت کنید که چون B دارای ۲۸ عضو است وقتی تعداد اعضای اشتراک برابر ۶ باشد، در نتیجه، تعداد اعضای $(B-A)$ هم $۲۸-۶=۲۲$ است.

۴۲. گزینه‌ی ۴

با توجه به اطلاعات مسئله نمودار ون مقابل را داریم که در آن x تعداد نفراتی است که در هیچ‌یک از دو گروه عضو نیستند. از آنجا که تعداد کل نفرات ۳۹ نفر است، داریم:



$$۱۲+۹+x=۳۹\Rightarrow x=۱۸$$

۴۳. گزینه‌ی ۱

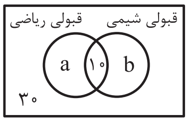
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

طبق فرض $n(A\cup B)=۲۹$ و $n(A\cap B)=۳$ و $n(A)=۴+n(B)$. اگر تعداد اعضای گروه B را x در نظر بگیریم، داریم:

$$۲۹=(x+۴)+x-۳\Rightarrow ۲x+۱=۲۹\Rightarrow x=۱۴\Rightarrow n(B)=۱۴$$
$$\Rightarrow n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۱۴-۳=۱۱$$

۴۴. گزینه‌ی ۲

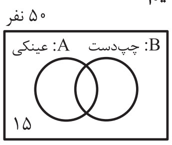
با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار ون مقابل را داریم که در آن a تعداد دانش‌آموزانی است که فقط در درس ریاضی و b تعداد دانش‌آموزانی است که فقط در درس شیمی قبول شده‌اند، بنابراین: $a+b=۲۰$



تعداد کل دانش‌آموزان کلاس $=۳۰+۱۰+a+b=۴۰+۲۰=۶۰$

۴۵. گزینه‌ی ۳

با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار ون زیر را خواهیم داشت:



$$\begin{cases}n(A)=۲۵\\ n(B)=۲۰\end{cases}$$

هم عینکی و هم چپ‌دست، یعنی: $A\cap B$.

از طرفی با توجه به نمودار داریم: $n(A\cup B)=۵۰-۱۵=۳۵$

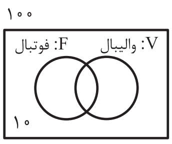
$$\Rightarrow n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۵$$
$$\Rightarrow ۲۵+۲۰-n(A\cap B)=۳۵\Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$$

بنابراین درصد افراد هم عینکی و هم چپ‌دست برابر است با:

$$\frac{۱۰}{۵۰}\times ۱۰۰=۲۰$$

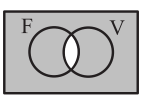
۴۶. گزینه‌ی ۴

اگر فرض کنیم تعداد دانش‌آموزان ۱۰۰ نفر است، با توجه به اطلاعات مسأله و نمودار ون مقابل، خواهیم داشت:



$$n(F)=۶۰\ ،\ n(V)=۵۰$$
$$n(F\cup V)=۱۰۰-۱۰=۹۰$$
$$n(F\cup V)=n(F)+n(V)-n(F\cap V)$$
$$\Rightarrow ۶۰+۵۰-n(F\cap V)=۹۰\Rightarrow n(F\cap V)=۲۰$$

حداکثر در یکی از دو تیم، در نمودار ون مقابل نشان داده شده است که تعداد آن برابر است با:



$$n(U)-n(F\cap V)=۱۰۰-۲۰=۸۰$$

۴۷. گزینه‌ی ۴

با توجه به اطلاعات مسأله، داریم:

$$\begin{cases}n(A\cap B)=\frac{۲}{۵}n(A)=\frac{۱}{۳}n(B)\Rightarrow \begin{cases}n(A)=\frac{۵}{۲}n(A\cap B)\\ n(B)=۳n(A\cap B)\end{cases}\\ n(A\cup B)=۴۵\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۴۵$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{۲}n(A\cap B)+۳n(A\cap B)-n(A\cap B)=۴۵$$

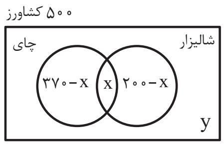
$$\Rightarrow \frac{۹}{۲}n(A\cap B)=۴۵ \Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$$

تعداد دبیرانی که فقط در یک مدرسه تدریس می‌کنند، برابر است با:

$$n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$$
$$=۴۵-۱۰=۳۵$$

۴۸. گزینه‌ی ۳

تعداد کشاورزانی که هم مزرعه‌ی چای و هم شالیزار دارند را x و تعداد کشاورزانی که نه مزرعه‌ی چای و نه شالیزار دارند را y در نظر می‌گیریم. با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون مقابل را خواهیم داشت. بنابراین:



$$۵۰۰=(۳۷۰-x)+x+(۲۰۰-x)+y$$
$$\Rightarrow ۵۰۰=۵۷۰-x+y \Rightarrow x-y=۷۰ \qquad (*)$$

طبق فرض تعداد کشاورزانی که نه مزرعه‌ی چای و نه شالیزار دارند یعنی y برابر با تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند، یعنی $۲۰۰-x$، بنابراین: $y=۲۰۰-x$، با جایگذاری در تساوی $(*)$ داریم:

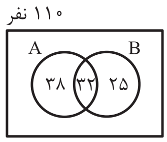
$$x-(۲۰۰-x)=۷۰ \Rightarrow ۲x=۲۷۰ \Rightarrow x=۱۳۵$$

بنابراین تعداد کشاورزانی که فقط مزرعه‌ی چای دارند، برابر است با:

$$۳۷۰-x=۳۷۰-۱۳۵=۲۳۵$$

۴۹. گزینه‌ی ۳

با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار ون زیر را داریم:

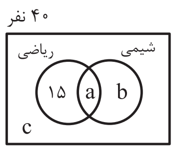


۷۰ نفر از شرکت A و ۳۲ نفر از هر دو شرکت خرید کرده‌اند، پس $۷۰-۳۲=۳۸$ نفر فقط از شرکت A خرید کرده‌اند. ۵۷ نفر از شرکت B و ۳۲ نفر از هر دو شرکت خرید کرده‌اند، پس $۵۷-۳۲=۲۵$ نفر فقط از شرکت B خرید کرده‌اند. دقیقاً از یکی از این دو شرکت، یعنی فقط شرکت A یا فقط شرکت B که تعداد آنها برابر است با:

$$n((A-B)\cup(B-A))=۳۸+۲۵=۶۳$$

۵۰. گزینه‌ی ۲

با توجه به اطلاعات مسأله و نمودار ون مقابل، داریم:



$$\begin{cases} a+c=۲۰ \\ ۱۵+a+b+c=۴۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۱۵+۲۰+b=۴۰ \Rightarrow b=۵$$
$$n(\text{شیمی})=a+b=a+۵$$

از طرفی $a+c=۲۰$، پس می‌توان گفت: $۰\le a\le ۲۰$ است، بنابراین:

$$۵\le a+۵\le ۲۰+۵ \Rightarrow ۵\le n(\text{شیمی})\le ۲۵$$

راهبرد حل تیپ (۷)

ساده ترین الگو، الگوی خطی است که در هر مرحله، مقدار ثابتی به شکل‌ها اضافه می‌شود. برای یافتن الگوی خطی از روی شکل‌ها، باید تشخیص دهیم در هر مرحله، چه مقداری تغییر می‌کند و چه مقداری ثابت می‌ماند. یکی از راه‌هایی که به تشخیص این موضوع کمک می‌کند این است که سعی کنیم شکل بعدی الگو را رسم کنیم.

۵۱. گزینه‌ی ۲

در الگوی خطی، جمله‌ی $n^۲$ و درجات بالاتر از آن را نداریم، پس ضریب جمله‌ی $n^۲$ باید صفر باشد، بنابراین: $a+۲=۰$، در نتیجه: $a=-۲$.

پس جمله‌ی عمومی الگوی خطی برابر است با: $t_n=-۲n-b$، از طرفی $t_۴=۸$ است:

$$-۲\times۴-b=۸ \Rightarrow b=-۱۶$$
$$\Rightarrow t_n=-۲n+۱۶$$
$$t_n\ge ۰ \Rightarrow -۲n+۱۶\ge ۰ \Rightarrow ۲n\le ۱۶$$
$$\Rightarrow n\le ۸ \Rightarrow$$ ۸ جمله‌ی نامنفی دارد.

۵۲. گزینه‌ی ۴

جمله‌ی عمومی الگوی خطی به صورت $a_n=an+b$ است، داریم:

$$\begin{cases} a_{۱۰}=۵ \\ a_۵=۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۰a+b=۵ \\ ۵a+b=۸ \end{cases}$$

تفاضل: $۵a=-۳ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۵} \Rightarrow b=۱۱$

$$\Rightarrow \text{جمله‌ی عمومی}: a_n=-\frac{۳}{۵}n+۱۱$$

$$\Rightarrow a_{۱۶}=-\frac{۴۸}{۵}+۱۱=-۹/۶+۱۱=۱/۴$$

۵۳. گزینه‌ی ۴

جمله‌ی عمومی الگوی خطی را به‌صورت $t_n=an+b$ در نظر می‌گیریم، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} t_۳=۷ \\ t_۷=۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a+b=۷ \\ ۷a+b=۱۵ \end{cases} \Rightarrow ۴a=۸ \Rightarrow a=۲\,,\, b=۱$$

در نتیجه جمله‌ی عمومی الگو به‌صورت $t_n=۲n+۱$ است.

۵۴. گزینه‌ی ۲

ابتدا جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی را به دست می‌آوریم:

۱۷ , ۲۱ , ۲۵ , ۲۹ , ...
+۴ +۴

$$\Rightarrow t_n=۴n+b \xrightarrow{t_۱=۱۷} ۱۷=۴+b \Rightarrow b=۱۳$$
$$\Rightarrow t_n=۴n+۱۳$$

۱۹۹۹ , ۱۹۹۶ , ۱۹۹۳ , ...
−۳ −۳

$$\Rightarrow t'_n=-۳n+b' \xrightarrow{t'_۱=۱۹۹۹} ۱۹۹۹=-۳+b'$$
$$\Rightarrow b'=۲۰۰۲$$
$$\Rightarrow t'_n=-۳n+۲۰۰۲$$
$$\Rightarrow t'_n=t_{۳۰} \Rightarrow -۳n+۲۰۰۲=۴\times۳۰+۱۳$$
$$\Rightarrow ۳n=۲۰۰۲-۱۳۳=۱۸۶۹ \Rightarrow n=\frac{۱۸۶۹}{۳}=۶۲۳$$

۵۵. گزینه‌ی ۱

در هر طرح، ۴ مثلث ثابت است و سه قطعه به قطعات وسط اضافه می‌شود:

$$\begin{array}{cccccc} a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & \dots & a_{۱۰} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ ۴ & ۴+۱\times۳ & ۴+۲\times۳ & ۴+۳\times۳ & \dots & ۴+۹\times۳=۳۱ \end{array}$$

۵۶. گزینه‌ی ۳

با دقت در شکل می‌بینیم که در هر مرحله، سه نقطه به نقاط قبلی اضافه می‌شود، بنابراین الگو خطی است و جمله‌ی عمومی تعداد نقاط را می‌توان به صورت $t_n=۳n+b$ در نظر گرفت. از طرفی $t_۱=۲$ است، بنابراین: $۳+b=۲$، در نتیجه: $b=-۱$، پس:

$$t_n=۳n-۱$$
$$t_n=۲۹۹ \Rightarrow ۳n-۱=۲۹۹ \Rightarrow ۳n=۳۰۰ \Rightarrow n=۱۰۰$$