مؤلف این فصل: فرهاد حامی

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

(۲۲ پیمانه)

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

مجموعه، الگو و دنباله

۲۲۰ سؤال شناسنامه‌دار

- ۸۷ سؤال از آزمون‌های کانون
- ۷۰ سؤال تألیفی و طراحی شده از کتاب درسی
- ۶۳ سؤال از کنکورهای سراسری

در درسنامه می‌بینید ۵۸ سوال

- ۳۴ تست طراحی شده با نگاه به رویکرد کنکورهای جدید
- ۲۴ مثال برای ادراک و تثبیت

۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۳ پیمانه
۳۰ تست

۱ مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها
۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۲ متمم یک مجموعه

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۶ پیمانه
۶۰ تست

۱ مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه
۲ تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

۳ الگو و دنباله

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۵ پیمانه
۵۰ تست

۱ الگو و انواع آن (خطی و غیرخطی)
۲ دنباله‌ها

۴ دنباله‌ی حسابی

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۴ پیمانه
۴۰ تست

۵ دنباله‌ی هندسی

آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

۴ پیمانه
۴۰ تست

ریاضی ۱ دهم	فصل اول
	صفحه‌های: ۲ تا ۷

۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱ مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها

مجموعه‌های اعداد ◄ به مجموعه‌های زیر توجه کنید:

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$: مجموعه‌ی اعداد طبیعی

$W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: مجموعه‌ی اعداد حسابی

$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$: مجموعه‌ی اعداد صحیح

$Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in Z, b \neq 0\right\}$: مجموعه‌ی اعداد گویا

$Q' =$: مجموعه‌ی اعداد گنگ

مجموعه‌ی اعداد حقیقی که گویا نیستند، این اعداد را نمی‌توان به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

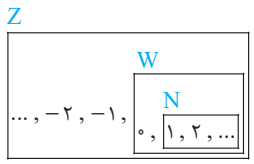
$R = Q \cup Q'$: مجموعه‌ی اعداد حقیقی

Q′

● مثال: $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \pi, \frac{5}{\pi}, 0/101001000\ldots$

Q

● مثال: $\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, 3/14, 0/\overline{3}$



مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد را با $O = \{2k-1 \mid k \in N\}$ و مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج را با $E = \{2k \mid k \in N\}$ نمایش می‌دهیم؛ همچنین مجموعه‌ی اعداد حسابی را به‌صورت $W = \{k-1 \mid k \in N\}$ می‌توانیم نمایش دهیم.

تذکر ◄ با توجه به تعاریف اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه، روابط زیر در مجموعه‌ی اعداد برقرار است:

۱ در حضور زیرمجموعه: $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ و $Q' \subseteq R$

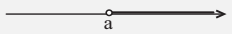
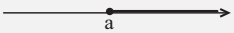
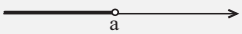
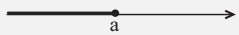
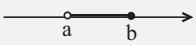
۲ در حضور اشتراک: $N \cap Z = N$ و $N \cap W = N$ و $Q \cap R = Q$

۳ در حضور اجتماع: $N \cup Z = Z$ و $N \cup W = W$ و $Q \cup Q' = R$

۴ در حضور تفاضل: $W - N = \{0\}$ و $N - W = \varnothing$ و $R - Q = Q'$

به مفهوم تفاضل در مجموعه‌های اعداد توجه کنید، به‌عنوان مثال $Z - W$، یعنی اعداد صحیح غیرحسابی یا $Q - N$ به معنی اعداد گویای غیرطبیعی هستند.

بازه و اعمال بر روی آن ◄ برای نشان‌دادن کلیه‌ی اعداد حقیقی بین دو عدد یا کلیه‌ی اعداد حقیقی بیشتر یا کمتر از یک عدد، از بازه یا فاصله استفاده می‌کنیم. این بازه‌ها را در جدول زیر خلاصه کرده‌ایم. اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه و $a < b$، آنگاه:

بازه‌های نامحدود				بازه‌های محدود			
نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه	نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in R \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز		$\{x \in R \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in R \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز		$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in R \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز		$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم باز
	$\{x \in R \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم باز		$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم باز

تذکر ◄ توجه کنید، وقتی پرانتز می‌گذاریم، یعنی خود آن عدد جزء بازه نیست و در نمایش هندسی نقطه توخالی است، به‌همین ترتیب وقتی کروشه می‌گذاریم، یعنی خود عدد را قبول می‌کنیم و در نمایش هندسی، نقطه توپر است. هم‌چنین اگر $+\infty$ و $-\infty$ در هر طرف بازه باشند، بازه در آن طرف باز است. با توجه به تعریف خواهیم داشت:

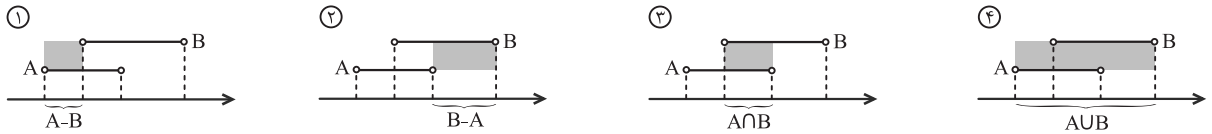
۱ برای بازه‌ی (a, b)، طول بازه برابر $b-a$ و نقطه‌ی میانی آن $\frac{a+b}{2}$ است و همواره در آن $a < b$ است.

۲ در بررسی بازه بودن یک مجموعه، شرط لازم (اولیه) آن است که مجموعه به شکل $\{x \in R \mid \square\}$ باشد، در غیر این صورت مجموعه‌ی داده شده یک بازه نخواهد بود.

اعمال بر روی بازه‌ها: در محاسبات اجتماع، اشتراک و تفاضل دو یا چند بازه، به طور معمول از نمایش هندسی استفاده کرده و به روش زیر عمل می‌کنیم:

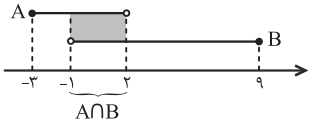
گام اول: ابتدا نمایش هندسی هریک از بازه‌ها را رسم می‌کنیم.

گام دوم: با توجه به تعریف اشتراک دو مجموعه قسمتی را بگیرید که روی هم می‌افتند و برای اجتماع قسمتی را بگیرید که حداقل یک خط داشته باشد. برای تفاضل قسمتی را که نمی‌خواهید حذف کنید. به شکل‌های زیر توجه کنید:

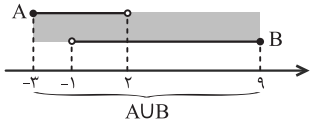


● **مثال:** اگر $A=[-۳,۲)$ و $B=(-۱,۹]$، آنگاه مجموعه‌های $A\cap B$، $A\cup B$ و $A-B$ را به‌دست آورید.

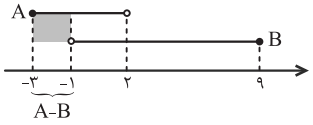
○ **حل:**



$A\cap B=(-۱,۲)$



$A\cup B=[-۳,۹]$

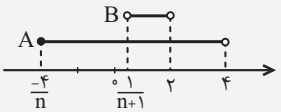


$A-B=[-۳,-۱]$

تست اگر n عددی طبیعی باشد، اشتراک دو مجموعه‌ی $A=[-\frac{۴}{n},۴)$ و $B=(\frac{۱}{n+۱},۲)$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند عضو دارد؟

۱) یک ۲) پنج ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

پاسخ **گزینه‌ی «۱»** اگر n عددی طبیعی باشد، $\frac{-۴}{n}$ عددی منفی و $\frac{۱}{n+۱}$ عددی مثبت خواهد بود، بنابراین نمایش هندسی دو بازه به صورت زیر است:



بنابراین اشتراک دو بازه برابر $A\cap B=(\frac{۱}{n+۱},۲)$ است. از طرفی $\frac{۱}{n+۱}$ همواره مثبت و کوچکتر یا مساوی $\frac{۱}{۲}$ است، زیرا:

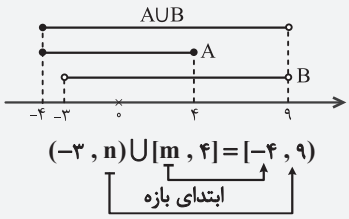
$$n\in N\Rightarrow n\geq ۱\Rightarrow n+۱\geq ۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{n+۱}\leq\frac{۱}{۲}$$

بنابراین در بازه‌ی $(\frac{۱}{n+۱},۲)$ فقط عدد صحیح یک وجود دارد.

تست اگر مجموعه‌های A و B به‌ترتیب برابر $[m,۴]$ و $(n,-۳)$ و اجتماع آنها بازه‌ی $[-۴,۹)$ باشد، آنگاه طول بازه‌ی اشتراک آنها کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴

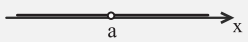
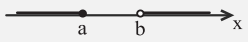
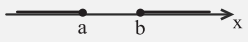
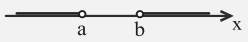
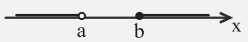
پاسخ **گزینه‌ی «۲»** به شکل روبه‌رو توجه کنید. با توجه به اینکه اجتماع دو مجموعه بازه‌ی $[-۴,۹)$ است، پس m ابتدای بازه و n انتهای بازه است و داریم:



$n=۹, m=-۴$

بنابراین $A=[-۴,۴)$ و $B=(-۳,۹)$، بنابراین اشتراک آنها $A\cap B=(-۳,۴)$ و طول بازه $۴-(-۳)=۷$ است.

تذکر ◀ وقتی بازه‌ها با هم اشتراکی ندارند، آنها را می‌توانیم به‌صورت اجتماع دو یا چند بازه بنویسیم؛ به برابری‌های زیر توجه کنید:

نمایش هندسی	نمایش بازه‌ای	نمایش مجموعه‌ای
	$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)=R-\{a\}$	$\{x\mid x\neq a\}$
	$(-\infty,a]\cup(b,+\infty)=R-(a,b]$	$\{x\mid x\leq a$ یا $x>b\}$
	$(-\infty,a]\cup[b,+\infty)=R-(a,b)$	$\{x\mid x\leq a$ یا $x\geq b\}$
	$(-\infty,a)\cup(b,+\infty)=R-[a,b]$	$\{x\mid x<a$ یا $x>b\}$
	$(-\infty,a)\cup[b,+\infty)=R-[a,b)$	$\{x\mid x<a$ یا $x\geq b\}$

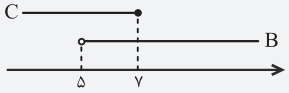
تست اگر $B=\{x\in R: x>۵\}$ و $C=\{x\in R: x\leq ۷\}$، آنگاه اجتماع دو مجموعه‌ی $B-C$ و $C-B$ برابر مجموعه‌ی $R-A$ گردیده است. مجموعه‌ی A کدام است؟

۱) $[۵,۷]$ ۲) $[۵,۷)$ ۳) $(۵,۷)$ ۴) $(۵,۷]$

پاسخ **گزینه‌ی «۴»**

$B=(۵,+\infty)$ و $C=(-\infty,۷]$

با توجه به شکل: $B-C=(۷,+\infty)$ و $C-B=(-\infty,۵]$



$\Rightarrow (B-C)\cup(C-B)=(-\infty,۵]\cup(۷,+\infty)=R-(۵,۷]\Rightarrow A=(۵,۷]$

۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ◄ از سال نهم به یاد دارید که تعداد اعضای یک مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم. در مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، $n(A)=۴$، در مجموعه‌ی $B=\{x\in N \mid ۵<x<۶\}$، که برابر مجموعه‌ی تهی است، $n(B)=۰$ است. هر دوی این مجموعه‌ها تعداد اعضایشان قابل شمارش‌اند. به این نوع مجموعه‌ها که تعداد اعضایشان را می‌شود شمرد، مجموعه‌ی متناهی گوییم؛ اما مجموعه‌ی اعداد طبیعی، تعداد اعضایش قابل شمارش نیست و آن را مجموعه‌ای نامتناهی می‌نامیم.

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی باشد را مجموعه‌های متناهی می‌نامیم. اگر تعداد اعضای یک مجموعه را نتوان با یک عدد بیان کرد، مجموعه را نامتناهی می‌نامیم. در مجموعه‌های نامتناهی تعداد اعضای مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگتر است.

به مثال‌هایی از مجموعه‌های متناهی و نامتناهی در زیر توجه کنید.

مجموعه‌های زیر نامتناهی‌اند	مجموعه‌های زیر متناهی‌اند
(۱) مجموعه‌ی اعداد طبیعی	(۱) $\{a,b\}$
(۲) مجموعه‌ی اعداد گویای بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۵}$	(۲) مجموعه‌ی اعداد طبیعی دو رقمی
(۳) بازه‌ی $(-۱,۱)$	(۳) مجموعه‌ی حروف الفبای انگلیسی
(۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح کوچکتر از -۵	(۴) مجموعه‌ی اتم‌های موجود در جو زمین
(۵) مجموعه‌ی خطوطی که از نقطه‌ی $(۰,۱)$ می‌گذرند	(۵) مجموعه‌ی اعداد اول بین ۱۰۰ تا $۱۰^{۵۰}$
	(۶) مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۳۶

توجه در بحث متناهی بودن یک مجموعه، بزرگی آن مجموعه اهمیت ندارد، بلکه نکته‌ی اصلی آن است که اگر وقت به‌اندازه‌ی کافی داشته باشیم، بتوانیم اعضای آن مجموعه را بشماریم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی موش‌های کره‌ی زمین، یک مجموعه‌ی متناهی است، با اینکه تعداد آنها را نمی‌دانیم، پس ندانستن تعداد اعضای یک مجموعه، دلیلی بر نامتناهی بودن آن مجموعه نیست.

تذکر ◄ به چند قاعده‌ی کلی در متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ها توجه کنید.

۱ مجموعه‌های N، W، Z، Q، Q' و R همگی نامتناهی‌اند.

۲ مجموعه‌ی اعداد اول و مضارب صحیح یک عدد، مجموعه‌های نامتناهی‌اند.

۳ مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ی متناهی است.

۴ تمامی بازه‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی در نظر گرفته می‌شوند.

● **مثال:** متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

(۱) $(R-Q')\cap N$ (۲) $W\cap(Z-N)$ (۳) $N\cap(Q-Z)$

○ حل: (۱) $R-Q'=Q$ و اشتراک اعداد گویا با اعداد طبیعی، برابر N است، پس $(R-Q')\cap N=N$ که مجموعه‌ای نامتناهی است.

(۲) $Z-N$، یعنی از اعداد صحیح، اعداد طبیعی را برداریم، بنابراین $Z-N=Z^-\cup\{۰\}$ یا اعداد صحیح کوچکتر یا مساوی صفر. اشتراک این مجموعه با اعداد حسابی، مجموعه‌ی $\{۰\}$ خواهد بود که مجموعه‌ای متناهی است.

(۳) $Q-Z$، یعنی از اعداد گویا، اعداد صحیح را برداریم، مجموعه‌ی حاصل با مجموعه‌ی اعداد طبیعی اشتراکی ندارد، پس $N\cap(Q-Z)=\varnothing$ و مجموعه‌ی تهی متناهی است.

● **مثال:** متناهی یا نامتناهی بودن هریک از مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

(۱) $A=\{\sqrt{x}\mid x\in W\}$ (۲) $B=\{۲n^۲-۳\mid n\in N, -۱<\sqrt[۳]{n}<۲\}$

○ حل: (۱) برای تشکیل مجموعه‌ی A، به جای x در $\sqrt{x}$ اعداد حسابی قرار می‌دهیم و داریم:

$A=\{\sqrt{۰},\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},...\}\Rightarrow$ A نامتناهی است.

(۲) از نامساوی $-۱<\sqrt[۳]{n}<۲$، نتیجه می‌شود $-۱<n<۸$، در اعداد طبیعی این نامساوی ۷ مقدار می‌پذیرد، بنابراین مجموعه‌ی B متناهی خواهد بود.

۱ **زیرمجموعه‌های متناهی یا نامتناهی:** در مورد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی متناهی (نامتناهی) به دو موضوع زیر توجه کنید:

الف – اگر A یک مجموعه‌ی متناهی باشد، تمامی زیرمجموعه‌های آن متناهی است.

ب – اگر A یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه A، مجموعه‌ای نامتناهی است. به عبارت دیگر:

A متناهی است. $\Rightarrow B\subseteq A$ متناهی است. B نامتناهی است. $\Rightarrow A\subseteq B$ نامتناهی

● **مثال:** اگر $B\subset\{x\in R\mid x>۲\}$ باشد، آنگاه B، مجموعه‌ای نامتناهی است، زیرا زیرمجموعه‌ی آن مجموعه‌ای نامتناهی است.

● **مثال:** اگر $A\subseteq\{x\in Z\mid ۱<x<۱۰\}$ باشد، آنگاه A، مجموعه‌ای متناهی است، زیرا مجموعه‌ی A، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی است.

۲ **عملیات روی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:** برای تعیین متناهی یا نامتناهی بودن دو مجموعه، وقتی اعمال اشتراک، اجتماع یا تفاضل وارد می‌شوند، جدول زیر کارساز است:

$B-A$	$A-B$	$A\cup B$	$A\cap B$	وضعیت
متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	A متناهی و B متناهی
متناهی	نامتناهی	نامتناهی	متناهی	A نامتناهی و B متناهی
می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	نامتناهی	می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.	A نامتناهی و B نامتناهی

● **مثال:** مجموعه‌ی اعداد صحیح نامثبت و مجموعه‌ی اعداد حسابی هر دو نامتناهی‌اند ولی اشتراک آنها مجموعه‌ی $\{0\}$ است که مجموعه‌ای متناهی است. از طرفی مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) و مجموعه‌ی اعداد حسابی (W) هر دو نامتناهی‌اند ولی $Z-W=Z^-$، مجموعه‌ای نامتناهی است.

تست اگر $A\subseteq B$ و A، مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $B-A$ چگونه است؟

۱) متناهی است. ۲) نامتناهی است. ۳) تهی است. ۴) ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

پاسخ گزینه‌ی «۴» فرض کنید B مجموعه‌ی اعداد طبیعی و $A=\{2,3,4,\dots\}$ آنگاه $B-A=\{1\}$ مجموعه‌ای متناهی است، حال فرض کنید $B=(-1,2)$ و $A=(0,2)$، آنگاه $A\subseteq B$ و $B-A=(-1,0]$ که مجموعه‌ای نامتناهی است. پس $B-A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳ پیمانه ۳۰ تست | پیمانه‌های ۱ تا ۳

مجموعه‌های اعداد

تیپ ۱ | صفحه‌های ۲ و ۳ ریاضی ۱

۱. کدام گزینه‌ی زیر درست است؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۱)

۱) $(\sqrt{3}+5)\notin(R-Q)$ ۲) $-\frac{3}{4}\in(Z\cup Q')$ ۳) $(0/\overline{6}+\frac{2}{3})\in(Q\cap R)$ ۴) $\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4}\}\subseteq Q'$

۲. اگر مجموعه‌های A، B و C را به صورت $A=R-Z$، $B=W\cap Z$ و $C=Z\cup(R-Q)$ تعریف کنیم، کدام گزینه نادرست است؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با ۱) (آزمون کانون- ۴ آبان ۹۷)

۱) $A\cap B=\varnothing$ ۲) $C\subseteq(A\cup B)$ ۳) $B-C=\varnothing$ ۴) $A\cup C=R$

بازه و اعمال بر روی آن

تیپ ۲ | صفحه‌های ۳ تا ۵ ریاضی ۱

۳. اگر مجموعه‌ی $B=\{x\in A\mid -1<x<2\}$ یک بازه را نمایش دهد، آنگاه A کدام مجموعه می‌تواند باشد؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- ۱)

۱) $R-Z$ ۲) $Q\cup Q'$ ۳) $Z-W$ ۴) $R-Q$

۴. اگر بازه‌ی $[3n+14,2n-1)$ شامل عدد ۵ باشد، حداقل مقداری که n می‌تواند اختیار کند، کدام است؟ (صفحه‌ی ۳- مرتبط با پاراگراف ۲) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) ۲

۵. دو بازه‌ی $A=(a-2,b)$ و $B=[a,b+3)$ مفروض‌اند، حاصل $A\cap B$ کدام است؟ $(a<b)$ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

۱) $[b,b+3)$ ۲) $[a,b)$ ۳) $(a-2,b+3)$ ۴) $(a-2,a)$

۶. اگر $A=[3,9]$ و $B=(n-2,2n-5)$، آنگاه بیشترین مقدار طبیعی n که اشتراک دو مجموعه‌ی A و B، تهی نباشد، کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۵

۷. مجموعه‌ی $[1,-\infty)-[2,-\infty)\cup(4,-1]$ شامل چند عدد صحیح است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) بیشمار

۸. اگر $A=\{x\in R,2\le x<6\}$، $A\cap B=(3,6)$ و $A\cup B=[2,7]$ باشد، مجموعه‌ی B برابر کدام بازه است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون- ۱۶ آذر ۹۷)

۱) $(3,7)$ ۲) $(3,7]$ ۳) $[3,7]$ ۴) $(2,7)$

۹. اگر $A=[-1,4)$ و $B=(-5,2]$ باشد، مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ شامل کدام بازه است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳) (آزمون کانون - ۲۰ مهر ۹۷)

۱) $[-4,-1]$ ۲) $[2,3]$ ۳) $(2,4)$ ۴) $(-1,2)$

۱۰. اگر $A=\{|x||-15<x<13\}$، $B=(-7,4)$ و $C=(-\infty,-3)$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $(A\cup B)-C$ شامل چند عدد صحیح است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳)

۱) ۱۸ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۱۶

۱۱. اگر $A\cup B=(-3,2]$، $A-B=(1,2]$ و $B-A=(-1,-3)$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی A در Z چند عضو دارد؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۱۲. اگر اشتراک مجموعه‌های $A=(-\infty,\frac{۲a-۵}{۳}]$ و $B=[a,+\infty)$، مجموعه‌ای تک عضوی باشد، a کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) -۵

۱۳. اگر نمایش مجموعه‌های A و B به‌صورت بازه‌های $A=[-۱,۲)$ و $B=(-۳,a]$ و مجموعه‌ی $A\cap B$ غیر تهی باشد، آنگاه مجموعه‌ی تمام مقادیر ممکن برای a، کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون- ۱۰ بهمن ۹۳)

۱) $\{a\,|\,a\geq -۱\}$ ۲) $\{a\,|\,-۱\leq a<۲\}$ ۳) $\{a\,|\,a<-۳\}$ ۴) $\{a\,|\,-۲<a<-۱\}$

۱۴. اگر $m<-۱$ باشد، آنگاه چند عدد صحیح در مجموعه‌ی $[\frac{۱}{m},-m]\cap[m,-\frac{۱}{m}]$ قرار دارد؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون – ۲۰ مهر ۹۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۱۵. اگر $R=(-\infty,+\infty)=(-\infty,\frac{a}{۲}]\cup[۲a-۱,+\infty)$، آنگاه حدود a کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

۱) $a\leq\frac{۲}{۳}$ ۲) $a\leq ۱$ ۳) $a\geq ۱$ ۴) $a\geq\frac{۲}{۳}$

۱۶. اگر اشتراک دو مجموعه‌ی $A=(m,n+۵)$ و $B=(۰,n)$، تهی و اجتماع آنها برابر مجموعه‌ی $(۰,۶)-\{۱\}$ باشد، آنگاه $m+n$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۷. اگر داشته باشیم $A=[a,۶]$، $B=(-۱,b)$ و $A\cup B=[-۲,۸)$، آن‌گاه مجموعه‌ی $A-B$ دارای چند عدد صحیح است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۸. اگر $(-\infty,x^۲+۲x]\cap[۴x^۲-x,+\infty)$ برابر با $\{۳\}$ باشد، آنگاه مقدار x برابر است با: (بازه و معادله‌ی درجه دوم- سؤال ترکیبی) (آزمون کانون- ۱۸ مهر ۹۹)

۱) -۱ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۹. اگر $A=[\frac{-۶}{n},۲)$ و $B=(\frac{-۴}{n},۳]$، آنگاه مجموعه‌ی $A\cap B$ به ازای هر عدد طبیعی $n>۴$، در Z چند عضو دارد؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۰. اگر $A_n=(-n,n)$ باشد، حاصل $(A_۱\cup A_۲\cup A_۳)-(A_۱\cap A_۲)$ برابر با کدام گزینه است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۳) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) $(-۳,۳)$ ۲) $(-۱,۱)$ ۳) $(-۳,-۱)\cup(۱,۳)$ ۴) $(-۳,-۱]\cup[۱,۳)$

۲۱. اگر $A_k=\{x\,|\,-\frac{۱}{k}\leq x<۲k\}$ باشد، آنگاه $(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)\cup A_۷$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۳) (آزمون کانون – ۱۹ مهر ۹۸)

۱) $[-\frac{۱}{۷},۲)$ ۲) $[-\frac{۱}{۷},۱۴)$ ۳) $[-\frac{۱}{۳},۱۴)$ ۴) $[-\frac{۱}{۳},۲)$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی | تیپ ۳ | صفحه‌های ۵ تا ۷ ریاضی ۱

۲۲. کدام مجموعه‌ی زیر نامتناهی نیست؟ (منطبق بر کتاب درسی – صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- ۱)

۱) مجموعه‌ی خطوط مماس بر یک دایره
۲) مجموعه‌ی اعداد گویای بین دو عدد گویا
۳) بازه‌ی $(۰,۴)$
۴) مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت که با معکوس خود برابرند.

۲۳. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، مجموعه‌ای متناهی را نشان می‌دهد؟ (صفحه‌ی ۷- مشابه تمرین ۲) (آزمون کانون – ۲۳ آذر ۹۲)

۱) $A=\{x^۲\,|\,x\in R,x\leq ۵\}$ ۲) $B=\{۲x\,|\,x\in N,۱-x<۳\}$ ۳) $C=\{x^۳\,|\,x\in N,x\leq ۱۰\}$ ۴) $D=\{۱-x\,|\,x\in Z,x<۴\}$

۲۴. اگر $A=\{n\in Z\,|\,\frac{۴}{n}\in Z\}$، $B=\{n\in Z\,|\,\frac{(-۱)^n}{n}\in Z\}$ و $C=\{n\in W\,|\,\frac{۱}{n}<۱\}$، آنگاه: (صفحه‌ی ۷- مکمل تمرین ۲)

۱) A و B متناهی و C نامتناهی است.
۲) A و C نامتناهی و B متناهی است.
۳) B و C متناهی و A نامتناهی است.
۴) B و C نامتناهی و A متناهی است.

۲۵. اگر مجموعه‌های $A=\{\frac{۱}{x}\,|\,x\in N\}$ و $B=\{\frac{x}{۸}\,|\,x\in N\}$ مفروض باشند، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟ (صفحه‌ی ۷- مرتبط با تمرین ۲) (سراسری انسانی - ۹۶)

۱) $A-B$ ۲) $B-A$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

۲۶. اگر $A=[\frac{۲m-۱}{۳},+\infty)$ و $B=(-\infty,\frac{۲-m}{۶}]$ باشند، به ازای کدام محدوده برای m، مجموعه‌ی $A\cap B$ متناهی است؟ (صفحه‌ی ۷- مرتبط با تمرین ۳) (آزمون کانون – ۱۹ مهر ۹۸)

۱) $m\geq ۰/۸$ ۲) $m\geq ۰/۴$ ۳) $-۰/۸\leq m\leq ۰/۶$ ۴) $m\leq ۰/۸$

۲۷. اگر $A \subseteq \{x \in Z \mid x < -۲\}$ و $B \subseteq \{x \in W \mid ۱ < x < ۱۵۸\}$، آنگاه: (صفحه‌ی ۷- مکمل تمرین ۶)

۱) A متناهی و B نامتناهی است.
۲) A نامتناهی و B متناهی است.
۳) A و B نامتناهی هستند.
۴) A و B متناهی هستند.

۲۸. اگر $A \subseteq B$ و B نامتناهی باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (صفحه‌ی ۷- مکمل تمرین ۶) (ازمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) مجموعه‌ی $B - A$ همواره نامتناهی است.
۲) مجموعه‌ی $A \cap B$ همواره متناهی است.
۳) مجموعه‌ی $A \cup B$ همواره نامتناهی است.
۴) مجموعه‌ی $A - B$ همواره نامتناهی است.

۲۹. اگر مجموعه‌ی A متناهی و مجموعه‌های B و C نامتناهی باشند، مجموعه‌های $A \cap (B \cup C)$ و $B - (A \cap C)$، به‌ترتیب از راست به چپ، چگونه‌اند؟ (صفحه‌ی ۷- مرتبط با تمرین ۳) (ازمون کانون- ۲۳ مهر ۹۵)

۱) متناهی - متناهی
۲) نامتناهی - نامتناهی
۳) متناهی - نامتناهی
۴) نامتناهی – متناهی

۳۰. اگر $A = \left\{ \frac{۶n}{n+۱} \in N \mid n \in N \right\}$ و $B = \{۳n \mid n \in N\}$، آنگاه مجموعه‌های $A - (A \cup B)$ و $B - (A \cap B)$ به‌ترتیب چگونه‌اند؟ (صفحه‌ی ۷- مرتبط با تمرین ۳)

۱) متناهی – نامتناهی
۲) نامتناهی – متناهی
۳) متناهی - متناهی
۴) نامتناهی – نامتناهی

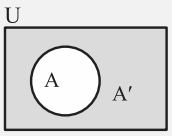
ریاضی ۱ دهم | فصل اول | صفحه‌های: ۸ تا ۱۳

۲ متمم یک مجموعه

۱ مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه

تعریف مجموعه‌ی مرجع و متمم یک مجموعه ◄ به‌طور کلی در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد مطالعه زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه‌ی مرجع یا مجموعه‌ی جهانی می‌نامیم و با M یا U نمایش می‌دهیم. به مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اصلی یا عام نیز گفته می‌شود. به‌عنوان مثال وقتی از مجموعه‌ی حروف با صدای انگلیسی صحبت می‌کنیم، مجموعه‌ی مرجع آن می‌تواند حروف زبان انگلیسی باشد. توجه کنید که مجموعه‌ی مرجع می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، در هر صورت تا مجموعه‌ی مرجع مشخص نباشد صحبت از زیرمجموعه‌های آن ممکن نیست.

هرگاه U مجموعه‌ی مرجع و $A \subseteq U$، آنگاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم مجموعه‌ی A می‌نامیم و آن را با نماد A' نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل همه‌ی عضوهایی از مجموعه‌ی مرجع هستند که در مجموعه‌ی A نیستند و به زبان ریاضی می‌نویسیم:



$$A' = \{x : x \notin A\}$$

$$A' = U - A \Leftarrow \text{متمم مجموعه‌ی } A = \text{مجموعه‌ی مرجع} - \text{مجموعه‌ی } A$$

به عبارت دیگر برای یافتن متمم یک مجموعه، در مجموعه‌ی مرجع، اعضای مجموعه‌ی داده شده را حذف می‌کنیم. بنابراین هر عضوی که در A هست در A' نیست و به‌عکس.

● **مثال:** اگر $U = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ مجموعه‌ی مرجع و $A = \{۰, ۱, ۵\}$، آنگاه A' را بیابید.

○ حل: باید از مجموعه‌ی U، عضوهای A را خط بزنیم، پس:

$$U = \{\not۰, \not۱, ۲, ۳, ۴, \not۵, ۶, ۷, ۸\}$$
$$\Rightarrow A' = \{۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۸\}$$

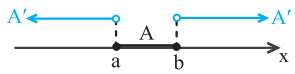
● **مثال:** اگر W (اعداد حسابی) را به‌عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، آنگاه متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی را بیابید.

○ حل: متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با N' نمایش می‌دهیم. N' اعداد حسابی هستند که طبیعی نباشند، پس $N' = W - N = \{۰\}$.

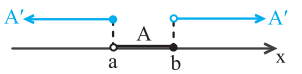
۱ یافتن مجموعه‌ی متمم در بازه‌ها: در بازه‌ها، مجموعه‌ی مرجع در حالت کلی R است. برای یافتن متمم یک بازه از نمایش هندسی استفاده می‌کنیم، بازه‌ی A را رسم کرده، قسمت‌هایی از محور که متعلق به A نیستند، A' را نمایش می‌دهند. به متمم بازه‌های زیر توجه کنید:

(۱) $A = (a, b) \Rightarrow A' = R - (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$

(۲) $A = [a, b] \Rightarrow A' = R - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$



(۳) $A = (a, b] \Rightarrow A' = R - (a, b] = (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$



در حالت کلی برای اعداد a و b، در بازه، از هر سمتی که بسته باشند، متمم آنها باز و از هر سمتی که باز باشند، متمم آنها بسته است.

● **مثال:** اگر R مجموعه‌ی مرجع، $A=[1,2)$ و $B=(-1,+\infty)$ باشند، آنگاه مجموعه‌های A' و B' به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$A'=R-A=R-[1,2)=(-\infty,1)\cup[2,+\infty) \qquad B'=R-(-1,+\infty)=(-\infty,-1]$$

۲ خواص متقابل A و A': به کمک نمودار ون و تعریف متمم، خواص زیر به‌دست می‌آید:

الف- متمم مجموعه‌ی تهی برابر مجموعه‌ی مرجع و متمم مجموعه‌ی مرجع برابر مجموعه‌ی تهی است، یعنی: $U'=\varnothing$ و $\varnothing'=U$

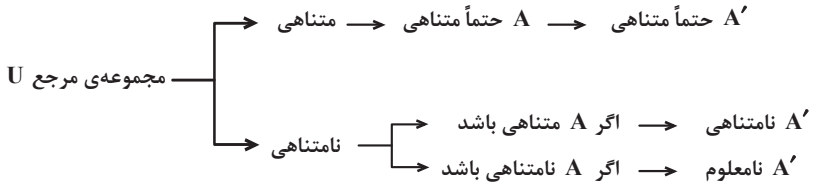
ب- متمم متمم هر مجموعه با خود آن برابر است، یعنی: $(A')'=A$

پ- هر مجموعه با متمم خود اشتراکی ندارد، پس: $A\cap A'=\varnothing$

ت- اجتماع هر مجموعه با متمم آن برابر مجموعه‌ی مرجع است، پس: $A\cup A'=U$

ث- تفاضل هر مجموعه از متمم آن برابر مجموعه‌ی اولی است، یعنی: $A-A'=A$ و $A'-A=A'$

۳ متمم مجموعه‌های متناهی و نامتناهی: تعیین متناهی یا نامتناهی بودن متمم یک مجموعه به مجموعه‌ی مرجع وابسته است. نمودار درختی زیر مسیر راه را مشخص می‌کند. برای مجموعه‌ی مرجع دو حالت در نظر می‌گیریم و کلاً سه حالت داریم:



● **مثال:** اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح که نامتناهی است، مجموعه‌ی مرجع و مجموعه‌ی اعداد حسابی را A در نظر بگیریم، آنگاه A' مجموعه‌ی اعداد صحیح منفی است که نامتناهی است. حال اگر مجموعه‌ی اعداد حسابی را مجموعه‌ی مرجع بگیریم و $A=N$، آنگاه $A'=\{0\}$ که مجموعه‌ای متناهی است.

۴ متمم و زیرمجموعه: فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U باشند، آنگاه به کمک نمودار ون می‌توان نشان داد که:

(۱) اگر $A\subseteq B\Leftrightarrow B'\subseteq A'$ (۲) $A\subseteq B\Rightarrow\begin{cases}A\cap B=A\\A\cup B=B\end{cases}$ (۳) $A\cap B=\varnothing\Rightarrow\begin{cases}A\subseteq B'\\B\subseteq A'\end{cases}$

به عبارت دیگر، در مورد (۱)، وقتی متمم اثر کند، جای دو مجموعه و زیرمجموعه‌ها عوض می‌شود. (با نمودار ون درستی را بررسی کنید.)

۵ متمم در حضور اعمال روی مجموعه‌ها: اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی U باشند، آنگاه با استفاده از نمودار ون می‌توان درستی قوانین زیر را بررسی کرد:

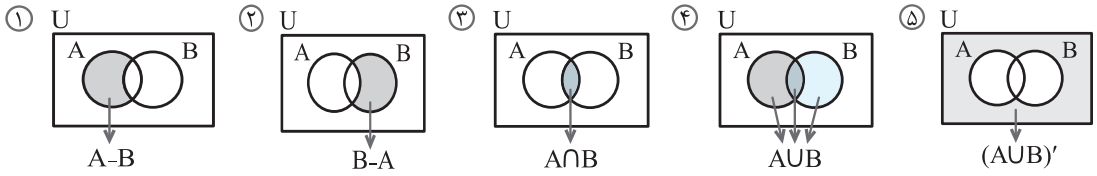
الف- وقتی متمم بر اجتماع (اشتراک) اثر کند، هر دو مجموعه را متمم کرده و علامت اجتماع به اشتراک (اشتراک به اجتماع) تبدیل می‌شود؛ یعنی:

(۱) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ (۲) $(A\cup B)'=A'\cap B'$

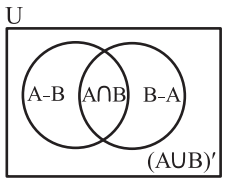
ب- به رابطه‌ی تفاضل و متمم دو مجموعه توجه کنید: (با نمودار ون درستی را بررسی کنید.)

(۱) $A-B=A\cap B'$ (۲) $A'-B'=B-A$

تذکر ◀ به کمک نمودار وِن و سایه‌زدن نواحی خواسته شده نیز می‌توانیم حاصل عبارت یا درستی رابطه را بررسی کنیم. استفاده از نمودار ون به‌ویژه در تفسیر عبارت کمک بسیاری می‌نماید.



با کمی دقت متوجه می‌شویم که اجتماع سطح سایه زده شده شکل‌های ۱، ۲، ۳ و ۵، برابر مجموعه‌ی مرجع است. بنابراین به‌خاطر سپردن و تفسیر آنها در حل مسائل کمک زیادی می‌کند.



(۱) $A-B=B$ شامل A باشد ولی شامل B نباشد = اعضای A به‌جز اشتراک با B

(۲) $B-A=A$ شامل B باشد ولی شامل A نباشد = اعضای B به‌جز اشتراک با A

(۳) $A\cap B=B$ هم شامل A و هم شامل B

(۴) $(A\cup B)'$ = شامل هیچ‌کدام از A و B نیست = شامل A یا B نیست = نه A و نه B

توجه⏮ کلمه‌ی شامل در اینجا به معنی همه‌ی اعضای مجموعه است.

تست اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، حاصل $(A-B)'\cap A$ کدام است؟

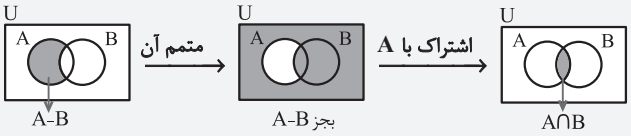
۱) A' ۲) B' ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

پاسخ گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: استفاده‌ی مستقیم از روابط:

$$(A-B)'\cap A=(A\cap B')'\cap A$$
$$=(A'\cup B)\cap A=\underbrace{(A'\cap A)}_{\varnothing}\cup(B\cap A)$$
$$=\varnothing\cup(B\cap A)=B\cap A=A\cap B$$

راه حل دوم: با استفاده از نمودار ون و تفسیر آن:



تست اگر $A\subseteq B$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $(A\cap B)-(A'-B)$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) B' ۴) $\varnothing$

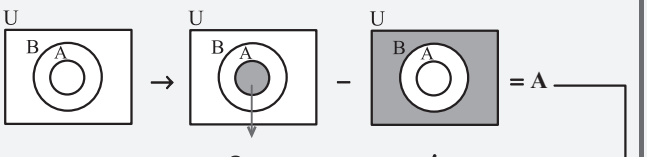
پاسخ گزینه‌ی «۱»

راه حل اول: با استفاده از روابط:

اگر $A\subseteq B$، آنگاه $A\cap B=A$ و $A\cup B=B$، بنابراین:

$$(A\cap B)-(A'-B)=A-(A'\cap B')=A-\underbrace{(A\cup B)'}_{B}$$
$$=A-B'=A\cap B=A$$

راه حل دوم: استفاده از نمودار ون و تفسیر آن:



توجه کردید که در A، عضوی از $A'-B$ نداشتیم، پس خودش می‌ماند.

۲ تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

دو مجموعه‌ی جدا از هم ◄ اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا می‌نامیم. بنابراین:

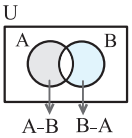
A و B جدا از هم $\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$

الف – اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، به کمک نمودار ون دیده می‌شود که:

(۱) $A-B=A$ (۲) $B-A=B$ (۳) $A\subseteq B'$ (۴) $B\subseteq A'$

ب – دو مجموعه‌ی $A-B$ و $B-A$ همواره جدا از هم‌اند، بنابراین:

$$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$$

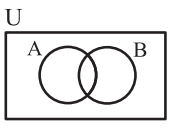


پ – مجموعه‌ی تهی با هر مجموعه‌ی دلخواهی جدا از هم‌اند. به‌عبارت دیگر $\varnothing\cap A=\varnothing$.

ت – هر مجموعه با متمم خود، جدا از هم‌اند زیرا اشتراکی ندارند و داریم $A\cap A'=\varnothing$.

ث – اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه: $(A-B)\cup(B-A)=A\cup B$.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه ◄ اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی متناهی از مجموعه‌ی مرجع متناهی U و $n(A)$ و $n(B)$ به‌ترتیب تعداد عضوهای مجموعه‌های A و B باشند، در این صورت تعداد عضوهای اجتماع A و B را با $n(A\cup B)$ نمایش می‌دهیم و داریم:



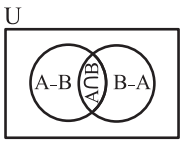
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

که در آن $n(A\cap B)$، تعداد عضوهای اشتراک دو مجموعه است.

الف – اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آنگاه $n(A\cap B)=0$ و در نتیجه:

A و B جدا از هم $\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

ب – با استفاده از نمودار ون تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را می‌توان از رابطه‌ی زیر نیز به‌دست آورد.

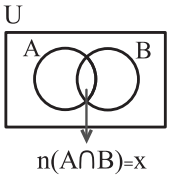


(۱) $n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$
(۲) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
(۳) $n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$

● **مثال:** در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۰ نفر والیبال و ۵ نفر هر دو را بازی می‌کنند. چند نفر در این کلاس فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند؟

○ **حل:** اگر مجموعه‌ی A را دانش‌آموزان فوتبالیست و مجموعه‌ی B را دانش‌آموزان والیبالیست در نظر بگیریم، آنگاه $n(A)=۱۵$، $n(B)=۱۰$ و $n(A\cap B)=۵$، پس:

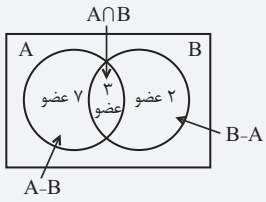
$$n(A\cup B)=۱۵+۱۰-۵=۲۰$$



تعیین تعداد اعضای یک مجموعه با نمودار ون: برای تعیین تعداد اعضای یک مجموعه با استفاده از نمودار وِن، یک نمودار کشیده و با نامگذاری A و B، ابتدا وضعیت $A\cap B$ را معلوم می‌کنیم. اگر $n(A\cap B)$ معلوم باشد، آن را قرار داده و از روی آن اطلاعات A و B را تکمیل می‌کنیم، در غیر این‌صورت $n(A\cap B)=x$ را فرض کرده و بقیه‌ی اطلاعات را برحسب x تکمیل می‌کنیم و سپس از رابطه‌ی جمع استفاده می‌کنیم.

تست مجموعه‌ی A، ۱۰ عضوی و مجموعه‌ی B، ۵ عضوی است. اگر مجموعه‌ی $A-B$، ۷ عضوی باشد، مجموعه‌ی $A\cup B$ چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

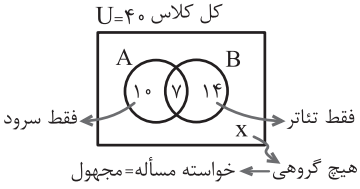


پاسخ گزینه‌ی «۲» از نمودار ون استفاده می‌کنیم و اطلاعات را قرار می‌دهیم. از ۱۰ عضو A طبق $A-B$، ۷ عضو در B نیست، پس ۳ عضو در اشتراک است، مجموعه‌ی B، ۵ عضوی است، پس $B-A$، ۲ عضوی است. با توجه به نمودار، تعداد اعضای مجموعه‌ی $A\cup B$ برابر است با: $n(A\cup B)=۷+۳+۲=۱۲$.

● **مثال:** در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۷ نفر عضو گروه سرود، ۲۱ نفر عضو گروه تئاتر و ۷ نفر عضو هر دو گروه هستند. چند نفر از دانش‌آموزان عضو هیچ گروهی نیستند؟

○ **حل:** نمودار ون را رسم می‌کنیم. A را اعضای گروه سرود و B را اعضای گروه تئاتر می‌گیریم. اشتراک را داریم که برابر ۷ است، پس تعداد اعضایی که فقط عضو سرود هستند $۱۰=۷-۱۷$ و تعداد اعضایی که فقط عضو تئاتر هستند $۱۴=۷-۲۱$؛ خواسته‌ی مسأله x است و جمع اعداد داخل مستطیل برابر ۴۰ است و داریم:

$$۴۰=۱۰+۷+۱۴+x\Rightarrow x=۹$$ (تعداد افرادی که عضو هیچ گروهی نیستند.)



● **مثال:** یک روستا ۴۰۰ کشاورز دارد که ۳۰۰ نفر آنها گندم یا جو می‌کارند، در صورتی که ۲۱۰ نفر گندم و ۱۴۰ نفر جو بکارند، آنگاه:

الف – چند نفر هم گندم می‌کارند و هم جو؟

ب – چند نفر فقط گندم می‌کارند؟

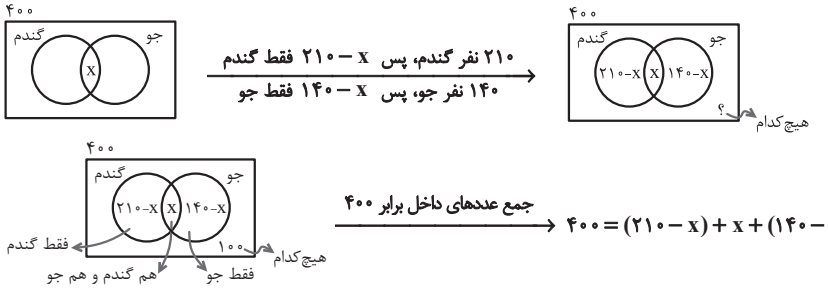
پ – چند نفر جو نمی‌کارند؟

ت – چند نفر نه گندم می‌کارند و نه جو؟

ث – چند نفر حداقل یکی از آنها را می‌کارند؟

ج – چند نفر دقیقاً یکی از دو محصول را می‌کارند؟

○ **حل:** تعداد افرادی که هم گندم می‌کارند و هم جو را x می‌گیریم، پس $n(A\cap B)=x$ و نمودار ون را رسم می‌کنیم و اطلاعات را وارد می‌کنیم.



افرادی که هم گندم و هم جو می‌کارند. $۴۰۰=(۲۱۰-x)+x+(۱۴۰-x)+۱۰۰\Rightarrow x=۵۰$

حال خواسته‌های مسأله را می‌یابیم:

الف – کسانی که هم گندم و هم جو می‌کارند، همان اشتراک است که برابر ۵۰ نفرند.

ب – افرادی که فقط گندم می‌کارند، $۲۱۰-x$ است که برابر $۲۱۰-۵۰=۱۶۰$ نفرند.

پ – کسانی که جو نمی‌کارند، برابر $۴۰۰-۱۴۰=۲۶۰$ نفرند.

ت – کسانی که نه گندم می‌کارند و نه جو، یعنی هیچ‌کدام که برابر ۱۰۰ نفرند.

ث – تعداد افرادی که حداقل یکی از آنها را می‌کارند، همان اجتماع دو مجموعه یعنی ۳۰۰ نفرند.

ج – افرادی که دقیقاً یکی از دو محصول را می‌کارند، یعنی یا فقط گندم یا فقط جو می‌کارند که فقط گندم برابر $۲۱۰-۵۰=۱۶۰$ و فقط جو برابر $۱۴۰-۵۰=۹۰$ و در نتیجه $۱۶۰+۹۰=۲۵۰$ نفر کسانی هستند که دقیقاً یکی از دو محصول را می‌کارند.

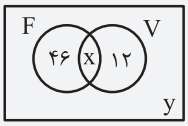
تذکر ◀ به چند کلمه‌ی کلیدی در مسائل توجه کنید.

کلمه‌ی کلیدی	A و B	A یا B	فقط A	حداقل یکی از A یا B	* بجز A ** A نباشد	* دقیقاً یکی از A یا B ** A یا B ولی نه هر دو	* نه A و نه B ** عضو هیچ‌کدام نباشد.
معادل ریاضی	$A\cap B$	$A\cup B$	$A-B$	$A\cup B$	A'	$(A-B)\cup(B-A)$	$A'\cap B'$

مواردی که با علامت * و ** نمایش داده شده‌اند، یک جواب دارند و جملات مترادف هستند.

تست در مدرسه‌ای با ۹۰ دانش‌آموز، تعداد ۴۶ نفر فقط عضو تیم فوتبال و ۱۲ نفر فقط عضو تیم والیبال هستند. اگر تعداد اعضای تیم فوتبال ۳ برابر تعداد اعضای تیم والیبال باشد، آنگاه چه تعداد از دانش‌آموزان عضو هیچ‌یک از تیم‌ها نیستند؟ (آزمون کانون- ۴ آبان ۹۷)

۱) ۱۷ ۲) ۳۲ ۳) ۲۷ ۴) ۲۲



پاسخ گزینه‌ی «۳»

مجموعه‌ی افراد عضو تیم فوتبال : F

مجموعه‌ی افراد عضو تیم والیبال : V

$n(F)=۳n(V) \Rightarrow ۴۶+x=۳(x+۱۲) \Rightarrow ۴۶+x=۳x+۳۶ \Rightarrow x=۵$

تعداد کل دانش‌آموزان ۹۰ نفر است، پس:

$۴۶+x+۱۲+y=۹۰ \xrightarrow{x=۵} ۴۶+۵+۱۲+y=۹۰ \Rightarrow y=۲۷$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶ پیمانه ۶۰ تست | پیمانه‌های ۹ تا ۴

متمم یک مجموعه

تیپ ۴ | صفحه‌های ۸ تا ۱۰ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۲ ریاضی ۱

۳۱. کدام مجموعه را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم تا N' یک مجموعه‌ی متناهی باشد؟

(منطبق بر کتاب درسی – صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- ۵) (آزمون کانون – ۱۹ مهر ۹۸)

۱) Q ۲) Z ۳) $W \cap Q$ ۴) R

۳۲. اگر R مجموعه‌ی مرجع باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (صفحه‌ی ۹- کار درکلاس- مرتبط با ۵) (آزمون کانون – ۲۱ مهر ۹۶)

۱) $-۲/۱ \in N'$ ۲) $۲\sqrt{۵} \in (R-Q')$ ۳) $-\frac{۰/۱}{۳} \in Q$ ۴) $\sqrt{۲} \in Z'$

۳۳. اگر N مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم مجموعه‌ی $A=\{x \in N : x^۲ < ۱۰۰\}$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۸- مرتبط با فعالیت) (آزمون کانون- ۲۳ مهر ۹۵)

۱) $[۱۰۰,+\infty)$ ۲) $\{۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,...\}$ ۳) $\{x \in N | x > ۱۱\}$ ۴) $\{x \in N | x > ۹\}$

۳۴. مجموعه‌ی U، مجموعه‌ی مرجع و $A \subseteq U$، کدام مجموعه همواره با A برابر است؟ (منطبق بر کتاب درسی – صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- ۴)

۱) $A' \cup \varnothing$ ۲) $(A \cup U') \cup U$ ۳) $(A \cap \varnothing) \cup A'$ ۴) $(A' \cap \varnothing) \cup A$

۳۵. اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، $A=\{۴,۵,۶\}$ و $B'=\{۱,۲,۳,۴\}$، آنگاه مجموعه‌ی $A-B$ چند عضو دارد؟ (صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مشابه ۶)

۱) ۱ عضو ۲) ۲ عضو ۳) ۳ عضو ۴) ۴ عضو

۳۶. اگر A و B زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی مرجع M باشند به‌طوری‌که $M=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$، A مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی و $B=\{۳k-۲ | k \in Z, ۱ \le k \le ۴\}$، آنگاه $(A-B)'$ چند عضو دارد؟ (صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

۱) ۱۲ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۷

۳۷. اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی از مجموعه‌ی مرجع U باشد، آن‌گاه کدام گزینه الزاماً نامتناهی است؟

(صفحه‌ی ۱۲- مرتبط با تمرین ۲) (آزمون کانون – ۱۸ آبان ۹۷)

۱) $B-A$ ۲) A' ۳) B' ۴) $A \cap B$

۳۸. اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه کدام مجموعه حتماً نامتناهی است؟ (صفحه‌ی ۱۲- مرتبط با تمرین ۲) (آزمون کانون – ۱۶ آذر ۹۷)

۱) B' ۲) $A \cap B$ ۳) $B-A$ ۴) $A' \cap B'$

۳۹. اگر R مجموعه‌ی مرجع باشد، آن‌گاه کدام یک از روابط زیر صحیح نمی‌باشد؟ (صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون – ۲۰ مهر ۹۷)

۱) $W'-Z'=\{-K | K \in N\}$ ۲) $N'-W'=\{۰\}$ ۳) $Q' \cup N \subseteq W'$ ۴) $Q-W \subseteq N'$

۴۰. اگر $A \cup B = U$ باشد، کدام گزاره همواره صحیح است؟ (صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون - ۵ آبان ۹۶)

۱) $A \cap B' = \varnothing$ ۲) $A-B=B-A$ ۳) $A'=B-A$ ۴) $A' \cup B' = U$

۴۱. اگر مجموعه‌ی اعداد صحیح، مجموعه‌ی مرجع باشد و مجموعه‌ی A' نامتناهی، مجموعه‌ی B متناهی و مجموعه‌ی C' متناهی باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر حتماً متناهی است؟

(صفحه‌ی ۱۲- مرتبط با تمرین ۲) (آزمون کانون – ۳ آبان ۹۸)

۱) $B'-A'$ ۲) $C' \cap B'$ ۳) $(A' \cap C') \cup B'$ ۴) $C-B$

۴۲. اگر $A=\{x \in R | -۱ < ۲-x \le ۵\}$ و $B=\{x \in Z | \frac{۲x+۳}{x} \in W\}$، آنگاه مجموعه‌ی $A \cap B'$ شامل چند عدد طبیعی است؟

(صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

۱) سه ۲) دو ۳) یک ۴) هیچ

۴۳. اگر $A=\{a | -a \in N\}$, $B=\{۱-b | -b \in W\}$ باشد و مجموعه‌ی Z را مجموعه‌ی مرجع فرض کنیم، مجموعه‌ی $A' \cap B'$ کدام است؟

(صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون- ۱۹ مرداد ۹۷)

۱) W ۲) $Z-N$ ۳) $\{۰\}$ ۴) $\varnothing$

۴۴. اگر U مجموعه‌ی مرجع و $A \subseteq B \subseteq U$ باشد، کدام گزینه زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی A' است؟ (صفحه‌ی ۱۰-کار در کلاس-۷) (آزمون کانون - ۳ آبان ۹۸)

۱) B ۲) $A \cap B$ ۳) $B' \cap A$ ۴) $(B-A)'$

۴۵. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی با شرط $A \subset B$ باشند، آنگاه کدام رابطه نادرست است؟ (صفحه‌ی ۱۰- کار در کلاس-۶ و ۷) **(سراسری ریاضی- ۹۹)**

۱) $B-A'=A$ ۲) $A-B'=A$ ۳) $A \cap B'=\varnothing$ ۴) $B \cap A'=\varnothing$

۴۶. اگر $A \subset B$ و U مجموعه‌ی مرجع آن‌ها باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- مرتبط با ۳)

۱) $A' \cup B'=U$ ۲) $A \cup B=U$ ۳) $A' \cup B=U$ ۴) $A \cap B=B$

۴۷. متمم مجموعه‌ی $A \cup (B-A)$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

۱) $A' \cup B'$ ۲) $A'-B$ ۳) $B'-A'$ ۴) $A'-B'$

۴۸. اگر متمم مجموعه‌ی $(A-B) \cup (B-A)$ برابر $A \cap B$ باشد، کدام عبارت درست است؟ (S مجموعه‌ی مرجع است.) (صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶) (سراسری انسانی- ۱۴۰۰)

۱) $A \subseteq B$ ۲) $A \subseteq B'$ ۳) $A \cup B=S$ ۴) $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$

۴۹. اگر A، B و C سه مجموعه باشند، اجتماع مجموعه‌های $A \cap C$، $A-C$ و $B-A'$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

۱) A ۲) A' ۳) C ۴) B

۵۰. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، به‌گونه‌ای که اجتماع B و متمم A برابر مجموعه‌ی مرجع باشد، در این صورت کدام مجموعه، همواره تهی است؟ (صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

۱) $B-A$ ۲) $A \cap B$ ۳) $B'-A'$ ۴) $A'-B'$

۵۱. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند، متمم مجموعه‌ی $(A' \cap B) \cup B'$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۹- کار در کلاس- مرتبط با ۶)

۱) $A \cap B$ ۲) $A-B$ ۳) $B-A$ ۴) $A'-B$

دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا) | تیپ ۵ | صفحه‌ی ۱۰ ریاضی ۱

۵۲. اگر $E-F=E$ باشد، چه رابطه‌ای بین دو مجموعه‌ی ناتهی E و F، همواره برقرار است؟ (صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با نتیجه‌ی ۱) (آزمون کانون -۲۲ آذر ۹۲)

۱) $E \subset F$ ۲) $F \subset E$ ۳) $E=F$ ۴) E و F جدا از هم هستند.

۵۳. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعه‌ی مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟ (صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با نتیجه‌ی ۱) **(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۹)**

۱) $A \subset B'$ ۲) $A-B'=\varnothing$ ۳) $A \cap B'=A$ ۴) $(A \cup B)'=\varnothing$

۵۴. اگر $A \subseteq B'$ باشد، حاصل $((A-B) \cup (B-A))'$، کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با ۱) (سراسری انسانی خارج از کشور- ۱۴۰۰)

۱) $A \cap B$ ۲) $A' \cap B'$ ۳) $A \cup B$ ۴) $A' \cup B'$

۵۵. اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، حاصل $(A \cup B')' \cup (A-B)$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با نتیجه‌ی ۱)

۱) A ۲) B ۳) $A \cap B$ ۴) $A \cup B$

۵۶. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی باشند به‌طوری‌که $(A \cap B) \subset (A-B)$، آنگاه $A'-B'$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۰- فعالیت- مرتبط با نتیجه‌ی ۱)

۱) A ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) A'

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه | تیپ ۶ | صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ ریاضی ۱

۵۷. اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، در صورتی که $n(A)=۴$ و $n(B)=۹$، آنگاه $n(A \cup B)$ کدام است؟ (**منطبق بر کتاب درسی** – صفحه‌ی ۱۳- تمرین ۳)

۱) ۱۳ ۲) ۵ ۳) ۳۶ ۴) ۹

۵۸. مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m-k=۱۴$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه‌ی $A-B$ چند عضو دارد؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) **(سراسری تجربی – تیر ۱۴۰۲)**

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

۵۹. مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m-k=۵$ و تعداد اعضای مجموعه $A \cup B$ برابر ۱۱ باشد، کمترین مقدار ممکن برای m کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) **(سراسری تجربی خارج از کشور – تیر ۱۴۰۲)**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۶۰. اگر A و B دو مجموعه‌ی غیرتهی و $A \cap B$، ۳ عضو و $B-A$، ۹ عضو و $A \cup B$، ۱۴ عضو داشته باشند، آنگاه $A-B$ چند عضو دارد؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴)

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

۶۱. اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U، $n(A)=۱۴$، $n(A')=۱۰$ و $n(B')=۸$ باشند، آنگاه $n(B)$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴)

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

۶۲. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی U باشند، به‌طوری‌که $n(U)=۱۰۰$ و $n(A)=n(B)=\frac{۳}{۲}n(A\cap B)=۳$ باشد، آنگاه $n(A'\cap B)$ کدام است؟ (منطبق بر کتاب درسی – صفحه‌ی ۱۳- تمرین ۴)

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

۶۳. اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع U، $n(A)=۹$، $n(A')=۶$ و $n(B-A)=۳$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $A'\cap B'$ چند عضوی است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون – ۱۸ مهر ۹۹)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۴. اگر مجموعه‌ی A دارای ۴ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۱۰ عضو باشد، به طوری‌که $A'\subseteq B'$، آن‌گاه $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضو دارد؟ (صفحه‌های ۱۰ و ۱۳- ترکیبی) (آزمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) صفر ۲) ۱۴ ۳) ۶ ۴) ۱۰

۶۵. اگر $n(U)=۵۰$، $n(B)=۳۵$، $n(A'\cup B')=۳۰$ و $n(A')=۲۰$ باشند، مقدار $n(A\cup B)$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون – ۲۰ مهر ۹۷)

۱) ۳۵ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۲۰

۶۶. اگر $n((A\cup B)-(A\cap B))=۱۰$، $n(A\cap B)=۲$ و $n(A-B)=۴$ باشند، آن‌گاه مجموعه‌ی B چند عضو دارد؟ (صفحه‌ی ۱۳- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۶۷. دو مجموعه‌ی A و B به‌ترتیب دارای ۷ و ۶ عضو هستند. اگر اجتماع $A-B$ و $B-A$ دارای ۱۳ عضو باشد، آنگاه $A-B'$ چند عضو دارد؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) قابل تعیین نیست.

۶۸. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند و $n(U)=۱۰۰$، $n(A-B)=۳۰$ و $n(A\cup B)=۵۰$ باشد، $n(B'-A)$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون – ۳ آبان ۹۸)

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۶۹. اگر مجموعه‌ی مرجع دارای ۳۰ عضو باشد و داشته باشیم: $n(A')=۱۶$، $n(B)=۱۰$ و $n(A\cup B)=۱۶$، آنگاه $n(A\cap B')$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون – ۱۸ مهر ۹۹)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۸

۷۰. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند، $n(U)=۱۷$، $n(B-A)=۱۰$، $n(A-B)=۲$ و $n(B)=۳n(A)$ باشد، $n(A'\cap B')$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مکمل تمرین ۴) (آزمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷۱. اگر $n(A)=۲۵$ و $n(B)=۱۵$ و $n(A\cap B)=۳$ باشد، آنگاه تعداد اعضای مجموعه‌ی مرجع کدام باشد تا فقط ۷ عضو داشته باشیم که نه عضو A باشد و نه عضو B؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (آزمون کانون – ۳ آبان ۹۸)

۱) ۴۲ ۲) ۴۳ ۳) ۴۴ ۴) ۴۵

۷۲. مجموعه‌ی A دارای ۳۶ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آنها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعه‌ی A حذف شود، از اشتراک آنها ۹ عضو حذف می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع مجموعه‌ی جدید با مجموعه‌ی B، کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۴)

۱) ۴۰ ۲) ۴۱ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

۷۳. اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌ی اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدید کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴) (سراسری انسانی- ۹۴)

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

۷۴. فرض کنید مجموعه‌های A و B و اشتراک آنها به‌ترتیب دارای ۳۰، ۳۵ و ۱۱ عضو هستند. با حذف تعدادی عضو از مجموعه‌ی B، از اشتراک آنها ۳ عضو کم شده و اجتماع مجموعه‌ی جدید B با A دارای ۴۴ عضو است. در این صورت از مجموعه‌ی B چند عضو کم شده است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۴)

۱) ۷ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۷۵. مجموعه‌ی A از اعداد طبیعی دو رقمی تشکیل شده و $B=\{۵k-۱ : k\in A\}$ است. متمم مجموعه‌ی $A'\cup B'$ چند عضو دارد؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین۴)

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۱۱ ۴) ۷۳

۷۶. در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (صفحه‌ی ۱۳- مکمل تمرین ۵) (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۷۷. در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (صفحه‌ی ۱۳- مکمل تمرین ۵) **(سراسری ریاضی– ۹۸)**

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۷۸. از بین دانش‌آموزان یک کلاس، ۲۹ نفر حداقل عضو یکی از گروه‌های A یا B و سه نفر عضو هر دو گروه هستند. اگر تعداد اعضای گروه A، ۴ نفر بیشتر از گروه B باشد، چند نفر فقط عضو گروه B هستند؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۵) (آزمون کانون – ۴ آبان ۹۷)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۸

۷۹. در یک کلاس، ۱۰ نفر در هر دو درس ریاضی و شیمی قبول شده‌اند. اگر تعداد دانش‌آموزانی که فقط در یکی از دو درس ریاضی یا شیمی قبول شده‌اند، ۲۰ نفر و تعداد دانش‌آموزانی که در هیچ‌کدام از این دو درس قبول نشده‌اند، ۳۰ نفر باشد، تعداد دانش‌آموزان این کلاس کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۵) (آزمون کانون – ۱۵ آذر ۹۸)

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۸۰. در یک گروه ۵۰ نفره، ۲۵ نفر عینکی و ۲۰ نفر چپ‌دست هستند. اگر در این گروه ۱۵ نفر نه عینکی باشند و نه چپ‌دست، چند درصد از افراد این گروه هم عینکی و هم چپ‌دست هستند؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۵) (آزمون کانون – ۳ آبان ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۵ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰

۸۱. در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۸ نفر در فوق برنامه‌ی هنری و ۲۱ نفر در فوق برنامه‌ی علمی شرکت کرده‌اند. اگر ۹ نفر آنها در این دو برنامه شرکت نکرده باشند، چند نفر آنان در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند؟ (صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- مشابه ۲) (سراسری انسانی - ۹۵)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۸۲. در یک کلاس ۳۰ نفری، اگر ۹ نفر در برنامه‌های پژوهشی و ۴ نفر هم در هر دو نوع برنامه‌ی پژوهشی و پرورشی شرکت کرده باشند و ۷ نفر در هیچ کدام از برنامه‌ها شرکت نکرده باشند، چند نفر فقط در برنامه‌های پرورشی شرکت کرده‌اند؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون - ۲۱ مهر ۹۶)

۱) ۱۴ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

۸۳. در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه‌ی چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آنهایی که نه مزرعه‌ی چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه‌ی چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند.) (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) **(سراسری تجربی – دی ۱۴۰۱)**

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۳۵ ۳) ۲۳۵ ۴) ۲۷۰

۸۴. در یک مهمانی ۲۵ نفر شرکت کرده‌اند. اگر ۱۴ نفر چای و ۱۷ نفر قهوه نوشیده باشند و ۶ نفر نه چای و نه قهوه نوشیده باشند، چند نفر حداکثر یک نوع نوشیدنی نوشیده‌اند؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون- ۲۴ شهریور ۹۶)

۱) ۱۲ ۲) ۷ ۳) ۱۳ ۴) ۱۹

۸۵. اگر ۶۰ درصد دانش‌آموزان یک کلاس عضو تیم فوتبال و ۵۰ درصد عضو تیم والیبال باشند و ۱۰ درصد عضو هیچ‌کدام از این دو تیم نباشند، چند درصد از دانش‌آموزان حداکثر در یکی از دو تیم حضور دارند؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون – ۱۹ مهر ۹۸)

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۸۶. $\frac{۲}{۵}$ از دبیران مدرسه‌ی A با $\frac{۱}{۳}$ از دبیران مدرسه‌ی B مشترک هستند. اگر تعداد کل دبیران این دو مدرسه، ۴۵ نفر باشد، در این صورت چه تعداد از دبیران این دو مدرسه فقط در یک مدرسه تدریس می‌کنند؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون – ۱۸ مهر ۹۹)

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۳۵

۸۷. در یک کلاس، نصف دانش‌آموزان به ورزش فوتبال، $\frac{۳}{۸}$ دانش‌آموزان به ورزش والیبال و $\frac{۱}{۸}$ دانش‌آموزان به هر دو رشته ورزشی علاقه‌مند هستند. اگر ۱۰ نفر به هیچ‌یک از این دو رشته ورزشی علاقه‌مند نباشند، تعداد دانش‌آموزانی که به هر دو رشته ورزشی علاقه‌مندند، کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۲- کار در کلاس- مکمل ۲) (آزمون کانون – ۲۰ مهر ۹۷)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۸۸. در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای مشخص شد که در یک ماه گذشته ۷۰ نفر آنها از محصولات شرکت A و ۵۷ نفر از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر نیز اعلام کرده‌اند که در این مدت از محصولات هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این افراد دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟ **(منطبق بر کتاب درسی** – صفحه‌ی ۱۳- تمرین ۶)

۱) ۹۵ ۲) ۱۵ ۳) ۶۳ ۴) ۷۸

۸۹. تعدادی از دانش‌آموزان یک کلاس ۴۰ نفری، خود را برای شرکت در المپیادهای ریاضی و شیمی آماده می‌کنند. می‌دانیم ۲۰ نفر از دانش‌آموزان این کلاس یا در هر دو المپیاد ثبت‌نام کرده‌اند یا در هیچ‌کدام ثبت‌نام نکرده‌اند. اگر ۱۵ نفر فقط در المپیاد ریاضی ثبت‌نام کرده باشند، چه تعداد از دانش‌آموزان این کلاس در المپیاد شیمی ثبت‌نام کرده‌اند؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون – ۱۹ مهر ۹۸)

۱) دقیقاً ۵ نفر ۲) از ۵ تا ۲۵ نفر ۳) دقیقاً ۱۰ نفر ۴) از ۱۰ تا ۲۵ نفر

۹۰. افراد A و B به‌تنهایی چندین مداد رنگی با رنگ‌های غیرتکراری دارند. مجموع تعداد مدادهای این دو نفر ۴۸ تاست که ۱۸ رنگ مشترک بین آنها وجود دارد. فرد B به بازار رفته و ۱۰ مداد خریده است. اگر ۳ مداد به مشترک‌ها اضافه شود، مجموع مدادهای غیرمشترک این دو نفر در حال حاضر کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۳- مرتبط با تمرین ۶) (آزمون کانون – ۱۸ مهر ۹۹)

۱) ۴۰ ۲) ۳۷ ۳) ۳۴ ۴) ۳۰

پاسخ تشریحی مجموعه، الگو و دنباله

پاسخ تشریحی: فرهاد حامی، فرزانه دانایی

راهبرد حل تیپ (۱)

[۱] هر عدد اعشاری متناوب، عددی گویاست؛ مانند: $۰/\overline{۲}$ ، $۰/۲\overline{۵}$.

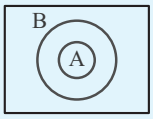
[۲] نماد $\in$ برای عضویت و نماد $\notin$ برای عدم عضویت اعضای یک مجموعه استفاده می‌شود. همچنین نماد $\subseteq$ برای زیرمجموعه بودن یک مجموعه استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال:

$A=\{a,b,c\}$

$a\in A$ ، $d\notin A$

$\{a\}\subseteq A$ ، $\{a,c\}\subseteq A$

[۳] اگر $A\subseteq B$ باشد، آنگاه:



$A\cap B=A$

$A\cup B=B$

$A-B=\varnothing$

بنابراین برای مجموعه‌های $R\subseteq Q\subseteq Z\subseteq W\subseteq N$، اشتراک، مجموعه‌ی سمت چپ و اجتماع، مجموعه‌ی سمت راست خواهد بود، یعنی:

$N\subseteq W\Rightarrow N\cap W=N$ ، $N\cup W=W$

$Z\subseteq Q\Rightarrow Z\cap Q=Z$ ، $Z\cup Q=Q$

✸ تذکر: در اعمال بر روی مجموعه‌ها، حتماً به پرانتزها توجه کنید. ابتدا باید عملیات داخل پرانتزها را انجام دهید.

۱. گزینهٔ ۳

گزینه‌ی (۱): نادرست است، زیرا $\sqrt{۳}+۵$ عددی گنگ است و همچنین داریم: $R-Q=Q'$، بنابراین: $\sqrt{۳}+۵\in(R-Q)$

گزینه‌ی (۲): نادرست است، زیرا $-\frac{۳}{۴}$ عددی گویاست و عضو مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) یا مجموعه‌ی اعداد گنگ (Q') نیست، بنابراین: $-\frac{۳}{۴}\notin(Z\cup Q')$

گزینه‌ی (۳): درست است، زیرا $۰/\overline{۶}$ یک عدد اعشاری متناوب است که عضو مجموعه‌ی اعداد گویاست و مجموع آن با عدد گویای $\frac{۲}{۳}$ نیز همچنان گویاست، همچنین داریم: $Q\cap R=Q$، بنابراین: $۰/\overline{۶}+\frac{۲}{۳}\in(Q\cap R)$

گزینه‌ی (۴): نادرست است، زیرا دو عضو $\sqrt{۱}=۱$ و $\sqrt{۴}=۲$ از مجموعه‌ی $\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴}\}$ اعداد طبیعی هستند، پس مجموعه‌ی $\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴}\}$ نمی‌تواند زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی اعداد گنگ باشد، بنابراین: $\{\sqrt{۱},\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۴}\}\not\subseteq Q'$

۲. گزینهٔ ۲

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): مجموعه‌ی A شامل همه‌ی اعداد حقیقی به جز اعداد صحیح است. مجموعه‌ی B نیز مجموعه‌ی اعداد حسابی است. پس این دو مجموعه با هم اشتراکی ندارند.

گزینه‌ی (۲): مجموعه‌ی C شامل تمام اعداد صحیح است، اما $A\cup B$ شامل اعداد صحیح منفی نیست. پس این گزینه نادرست است.

گزینه‌ی (۳): مجموعه‌ی C تمام اعداد صحیح را دارا است امّا B اعداد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی صفر را در خود دارد. پس $B-C$ برابر تهی خواهد شد.

گزینه‌ی (۴): در مجموعه‌ی A همه‌ی اعداد حقیقی جز اعداد صحیح حضور دارند. مجموعه‌ی C نیز شامل اعداد صحیح است. پس $A\cup C$ برابر همه‌ی اعداد حقیقی (R) خواهد شد.

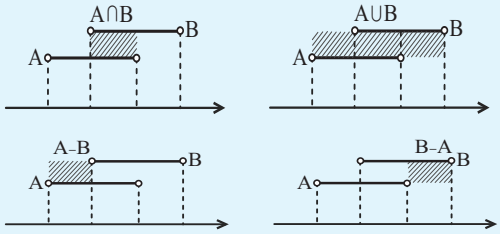
راهبرد حل تیپ (۲)

[۱] همواره به باز یا بسته بودن ابتدا و انتهای بازه توجه کنید.

[۲] اگر عدد k متعلق به بازه‌ی (a,b) باشد، آنگاه: $a<k<b$

[۳] برای انجام اعمال روی بازه‌ها، ابتدا بازه‌ها را روی محور اعداد مشخص کنید و سپس عملیات را انجام دهید.

[۴] اجتماع، اشتراک و تفاضل دو بازه در محورهای زیر، هاشور زده شده است.



۳. گزینهٔ ۲

برای اینکه مجموعه‌ی $B=\{x\in A\mid -۱<x<۲\}$ یک بازه را نمایش دهد، باید A نیز خود یک بازه باشد. در گزینه‌ی (۲) داریم:

$Q\cup Q'=R$

که به صورت بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ است.

گزینه‌ی (۱) به صورت مجموعه‌ای از بازه‌ها است و گزینه‌ی (۳) نیز به صورت مجموعه‌ی $\{...,-۱,-۲,...\}$ است و گزینه‌ی (۴) را به‌صورت مجموعه‌ای از بازه‌ها نمی‌توان نشان داد.

۴. گزینهٔ ۳

بازه‌ی $[۳n+۱۴,۲n-۱)$ شامل عدد ۵ است، بنابراین:

$۲n-۱<۵\le ۳n+۱۴$

نامساوی فوق را به دو نامساوی زیر، تبدیل کرده و اشتراک جواب‌هایشان را می‌یابیم:

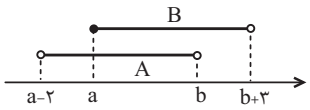
$$\Rightarrow\begin{cases}۲n-۱<۵\Rightarrow ۲n<۶\Rightarrow n<۳ & (I)\\ ۵\le ۳n+۱۴\Rightarrow -۹\le ۳n\Rightarrow -۳\le n & (II)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I)\cap(II)} -۳\le n<۳$$

بنابراین حداقل مقدار n برابر با ۳- است.

۵. گزینهٔ ۲

از آنجا که $a<b$ است، نمایش بازه‌های A و B روی محور اعداد به صورت زیر است:



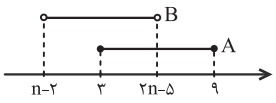
بنابراین داریم: $A\cap B=[a,b)$

۶. گزینهٔ ۲

ابتدا توجه کنید برای اینکه $(n-۲,۲n-۵)$ بازه باشد، باید داشته باشیم:

$n-۲<۲n-۵\Rightarrow n>۳$

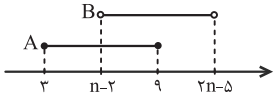
برای اینکه اشتراک دو مجموعه‌ی $A=[۳,۹)$ و $B=(n-۲,۲n-۵)$، تهی نباشد، نمایش هندسی دو بازه، باید به یکی از دو حالت زیر باشد:



$۳<۲n-۵<۹$

$\Rightarrow ۸<۲n<۱۴$

$\Rightarrow ۴<n<۷$



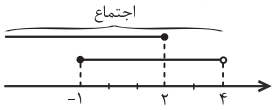
$۳<n-۲<۹$

$\Rightarrow ۵<n<۱۱$

بنابراین حداکثر مقدار طبیعی n می‌تواند ۱۰ باشد. توجه کنید که در حالت‌های فوق، حالتی که $B\subset A$ باشد، دیده شده است ولی حالتی که $A\subset B$ باشد با توجه به محدوده‌ی n امکان‌پذیر نیست و اتفاق نمی‌افتد.

۷. **گزینهٔ ۱**

با نمایش هر یک از بازه‌ها روی محور خواهیم داشت:



$$[-1,4)\cup(-\infty,2]=(-\infty,4)$$

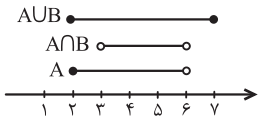
$$(-\infty,4)-(-\infty,1]=(1,4)$$

بازه‌ی فوق شامل دو عدد صحیح ۲ و ۳ است.

۸. **گزینهٔ ۲**

مطابق شکل زیر، از آنجا که $A\cap B=(3,6)$ پس مجموعه‌ی B از عدد ۳ (بدون احتساب خود ۳) شروع می‌شود و چون $A\cup B=[2,7]$ مجموعه‌ی B به عدد ۷ (با احتساب خود ۷) ختم می‌شود، پس:

$B=(3,7]$



۹. **گزینهٔ ۳**

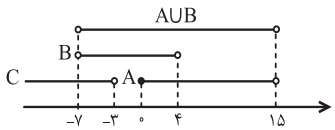
$$\begin{cases}A-B=[-1,4)-(-5,2]=(2,4)\\ B-A=(-5,2]-[-1,4)=(-5,-1)\end{cases}$$
$$\Rightarrow (A-B)\cup(B-A)=(-5,-1)\cup(2,4)$$

بنابراین این مجموعه شامل بازه‌ی $(2,4)$ است.

۱۰. **گزینهٔ ۱**

وقتی $-15<x<13$، قدرمطلق x که مقادیر نامنفی هستند برابر است با: $|x|<15$ و $|x|\geq 0$، بنابراین: $A=[0,15)$

$$A=[0,15)\ ,\ B=(-7,4)\ ,\ C=(-\infty,-3)$$

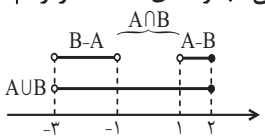


$$(A\cup B)-C=(-7,15)-(-\infty,-3)=[-3,15)$$

بازه‌ی فوق شامل اعداد صحیح -3 تا ۱۴ است که تعدادشان ۱۸ تاست.

۱۱. **گزینهٔ ۴**

ابتدا نمایش هندسی مجموعه‌های داده شده را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، مشخص است که: $A\cap B=[-1,1]$

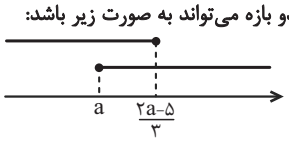
از طرفی داریم: $(A-B)\cup(A\cap B)=A$، بنابراین:

$$A=(A-B)\cup(A\cap B)=(1,2]\cup[-1,1]=[-1,2]$$

پس مجموعه‌ی A، شامل چهار عدد صحیح ۲، ۱، ۰، ۱- است.

۱۲. **گزینهٔ ۴**

نمایش هندسی دو بازه می‌تواند به صورت زیر باشد:

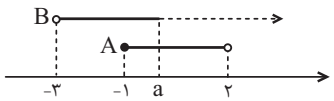


برای اینکه اشتراک دو بازه، یک مجموعه‌ی تک عضوی باشد، دو بازه فقط باید در یک نقطه اشتراک داشته باشند، بنابراین:

$$a=\frac{2a-5}{3}\Rightarrow 3a=2a-5\Rightarrow a=-5$$

۱۳. **گزینهٔ ۱**

نمایش هندسی دو بازه را رسم می‌کنیم.



چون اشتراک دو مجموعه غیر تهی است، پس a باید عددی بزرگتر یا مساوی -1 باشد؛ لذا $a\geq -1$.

۱۴. **گزینهٔ ۲**

راه حل اول: از آنجا که $m<-1$ ، بنابراین $m<\frac{1}{m}<-\frac{1}{m}<-m$ است. در نتیجه:

$$[\frac{1}{m},-m]\cap[m,-\frac{1}{m}]=[\frac{1}{m},-\frac{1}{m}]$$

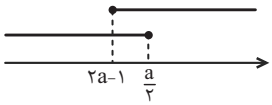
چون $m<-1$ است؛ پس تنها عدد صحیح موجود در بازه‌ی $[\frac{1}{m},-\frac{1}{m}]$، عدد صفر است.

راه حل دوم: می‌توانیم یک عدد دلخواه در نظر بگیریم. به عنوان مثال $m=-2$، بنابراین:

$$[\frac{1}{m},-m]\cap[m,-\frac{1}{m}]\xrightarrow{m=-2}[\frac{-1}{2},2]\cap[-2,\frac{1}{2}]$$
$$=[\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$$

۱۵. **گزینهٔ ۱**

نمایش هندسی بازه‌ها می‌تواند به صورت زیر باشد:

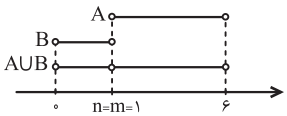


برای اینکه اجتماع دو بازه‌ی فوق برابر با مجموعه‌ی اعداد حقیقی شود، باید:

$$2a-1\leq\frac{a}{2}\Rightarrow 2a-\frac{a}{2}\leq 1\Rightarrow\frac{3a}{2}\leq 1\Rightarrow a\leq\frac{2}{3}$$

۱۶. **گزینهٔ ۱**

با توجه به اطلاعات مسأله، دو بازه باید به‌صورت زیر باشند:



بنابراین: $n+m=1+1=2$

۱۷. **گزینهٔ ۳**

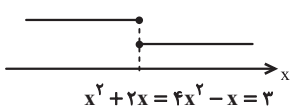
با توجه به اینکه اجتماع دو مجموعه بازه‌ی $[-2,8)$ است، پس a ابتدای بازه و b انتهای بازه است و داریم:

$$[a,6]\cup(-1,b)=[-2,8)\Rightarrow a=-2\ ,\ b=8$$
$$\Rightarrow A=[-2,6]\ ,\ B=(-1,8)$$ بنابراین:

$A-B=[-2,-1]\Rightarrow$ اعداد صحیح : $\{-2,-1\}$ در نتیجه:

۱۸. **گزینهٔ ۳**

برای اینکه اشتراک دو بازه‌ی داده شده برابر با $\{3\}$ باشد، باید دو بازه به‌صورت زیر باشند:



$$x^2+2x=4x^2-x\Rightarrow 3x^2-3x=0\Rightarrow 3x(x-1)=0$$
$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

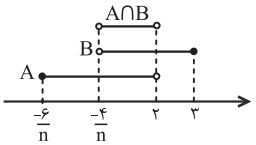
فقط به ازای $x=1$، مقادیر x^2+2x و $4x^2-x$ برابر با ۳ می‌شوند.

۱۹. گزینهٔ ۲

با توجه به اینکه $-۴ > -۶$، داریم: $\frac{-۶}{n} < \frac{-۴}{n}$ (n مثبت است.).

بنابراین نمایش هندسی بازه‌ها و اشتراک آنها به‌صورت زیر است:

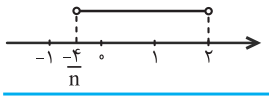
$$A = [\frac{-۶}{n}, ۲) \quad ، \quad B = (\frac{-۴}{n}, ۳]$$



$$A \cap B = (\frac{-۴}{n}, ۲)$$

از آنجا که $n > ۴$، داریم: $۰ < \frac{۱}{n} < \frac{۱}{۴}$، بنابراین: $-۱ < \frac{-۴}{n} < ۰$

پس بازه‌ی $(\frac{-۴}{n}, ۲)$ به‌صورت زیر است که همواره دو عدد صحیح صفر و یک در این بازه قرار دارند.



۲۰. گزینهٔ ۴

هر یک از مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$A_۱ = (-۱, ۱) \quad , \quad A_۲ = (-۲, ۲) \quad , \quad A_۳ = (-۳, ۳)$$

$$\begin{cases} A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ = (-۳, ۳) \\ A_۱ \cap A_۲ = (-۱, ۱) \end{cases}$$

$$\text{تفاضل} = (-۳, ۳) - (-۱, ۱) = (-۳, -۱] \cup [۱, ۳)$$

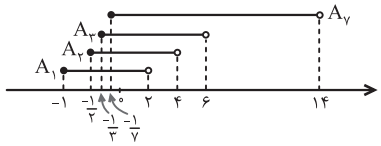
۲۱. گزینهٔ ۳

هر یک از مجموعه‌ها را تشکیل می‌دهیم:

$$A_۱ = [-۱, ۲) \quad ، \quad A_۲ = [-\frac{۱}{۲}, ۴) \quad ، \quad A_۳ = [-\frac{۱}{۳}, ۶)$$

$$A_۷ = [-\frac{۱}{۷}, ۱۴)$$

با توجه به نمایش هندسی بازه‌ها روی محور، خواهیم داشت:



$$A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ = [-\frac{۱}{۳}, ۲)$$

$$\Rightarrow (A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) \cup A_۷ = [-\frac{۱}{۳}, ۲) \cup [-\frac{۱}{۷}, ۱۴)$$

$$= [-\frac{۱}{۳}, ۱۴)$$

راهبرد حل تیپ (۳)

اگر تعداد اعضای یک مجموعه قابل شمارش باشد (هر چقدر هم که آن مجموعه بزرگ باشد)، آنگاه مجموعه متناهی است.

توجه کنید که بازه‌ی $[a, b]$ یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

[۱] در موارد زیر، می‌توان در مورد متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ی حاصل، اظهار نظر قطعی کرد:

$\{\text{نامتناهی}\} = \{\text{هر مجموعه‌ای}\} \cup \{\text{نامتناهی}\}$

$\{\text{متناهی}\} = \{\text{هر مجموعه‌ای}\} \cap \{\text{متناهی}\}$

$\{\text{متناهی}\} = \{\text{هر مجموعه‌ای}\} - \{\text{متناهی}\}$

$\{\text{نامتناهی}\} = \{\text{متناهی}\} - \{\text{نامتناهی}\}$

$\{\text{متناهی}\} = \{\text{متناهی}\}$ (هر عملیاتی) $\{\text{متناهی}\}$

در بقیه‌ی موارد نمی‌توان در حالت کلی اظهار نظر قطعی کرد.

[۲] کافی است مجموعه‌ی A، یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه مجموعه‌ی A نامتناهی است.

A نامتناهی است. $\Rightarrow A \subseteq \{\text{نامتناهی}\}$

اگر A، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی باشد، آنگاه A متناهی است.

A متناهی است. $\Rightarrow A \subseteq \{\text{متناهی}\}$

۲۲. گزینهٔ ۴

گزینه‌ی (۱): نامتناهی است، زیرا بر یک دایره، بی‌شمار خط مماس، قابل رسم است.

گزینه‌ی (۲): بین هر دو عدد گویای دلخواه می‌توان بی‌شمار عدد گویا قرار داد، پس این مجموعه نامتناهی است.

توجه کنید که اگر a و b دو عدد گویا باشند، آنگاه $\frac{a+b}{۲}$ بین a و b است.

گزینه‌ی (۳): بازه‌ی (a, b) نامتناهی است. $(b > a)$

گزینه‌ی (۴): در میان اعداد حقیقی مثبت، عددی که با معکوس خود برابر است تنها عدد ۱ است، پس این مجموعه متناهی است.

۲۳. گزینهٔ ۳

$$C = \{x^۳ | x \in N, x \leq ۱۰\} = \{۱, ۸, ۲۷, ۶۴, \ldots, ۱۰^۳\}$$

سایر گزینه‌ها:

گزینه‌ی (۱): این مجموعه نامتناهی است، چون بی‌نهایت عدد حقیقی کوچک‌تر از ۵ وجود دارد.

گزینه‌ی (۲): این مجموعه نامتناهی است، زیرا:

$$۱ - x < ۳ \Rightarrow x > ۱ - ۳ \Rightarrow x > -۲$$

$$\Rightarrow B = \{۲, ۴, ۶, ۸, \ldots\}$$

گزینه‌ی (۴): این مجموعه نامتناهی است، زیرا:

$$D = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots\}$$

۲۴. گزینهٔ ۱

ابتدا اعضای هر یک از مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$A = \{n \in Z | \frac{۴}{n} \in Z\} = \{\pm ۴, \pm ۲, \pm ۱\} \rightarrow \text{متناهی}$$

$$B = \{n \in Z | \frac{(-۱)^n}{n} \in Z\} = \{-۱, ۱\} \rightarrow \text{متناهی}$$

$$C = \{n \in W | \frac{۱}{n} < ۱\} = \{۲, ۳, ۴, \ldots\} \rightarrow \text{نامتناهی}$$

۲۵. گزینهٔ ۳

ابتدا اعضای مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم:

$$A = \{\frac{۱}{x} | x \in N\} = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \ldots\}$$

$$B = \{\frac{x}{۸} | x \in N\} = \{\frac{۱}{۸}, \frac{۲}{۸}, \frac{۳}{۸}, \frac{۴}{۸}, \ldots\}$$

گزینه‌ی (۱): نامتناهی: $A - B = \{\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۷}, \frac{۱}{۹}, \ldots\}$

گزینه‌ی (۲): نامتناهی: $B - A = \{\frac{۳}{۸}, \frac{۵}{۸}, \frac{۶}{۸}, \frac{۷}{۸}, \frac{۹}{۸}, \frac{۱۰}{۸}, \ldots\}$

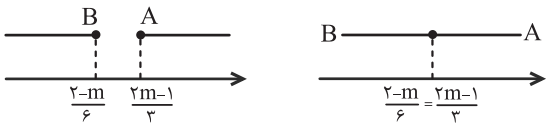
گزینه‌ی (۳): متناهی: $A \cap B = \{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}\}$

گزینه‌ی (۴): مجموعه‌های A و B نامتناهی هستند و اجتماع هر دو مجموعه‌ی نامتناهی، نامتناهی است.

۲۶. گزینهٔ ۱

مجموعه‌های $A = [\frac{۲m-۱}{۳}, +\infty)$ و $B = (-\infty, \frac{۲-m}{۶}]$ هر دو نامتناهی هستند و اشتراک آنها زمانی متناهی خواهد بود که تهی باشد یا تنها یک عضو داشته باشد.

به نمودارهای زیر توجه کنید:



$$\frac{۲-m}{۶} \le \frac{۲m-۱}{۳} \to ۲-m \le ۲(۲m-۱)$$

$$\Rightarrow ۲-m \le ۴m-۲ \Rightarrow ۴ \le ۵m \Rightarrow m \ge ۰/۸$$

۲۷. گزینهٔ ۲

مجموعه‌ی $\{x \in Z \mid x < -۲\}$ برابر است با: $\{..., -۴, -۳\}$ که یک مجموعه‌ی نامتناهی است. بنابراین مجموعه‌ی A یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی دارد، در نتیجه خود مجموعه‌ی A نیز نامتناهی است.

مجموعه‌ی $\{x \in W \mid ۱ < x < ۱۵۸\}$ برابر است با:

$\{۲, ۳, ..., ۱۵۷\}$

که یک مجموعه‌ی متناهی است، بنابراین مجموعه‌ی B، زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی متناهی است، در نتیجه خود مجموعه‌ی B نیز متناهی است.

۲۸. گزینهٔ ۳

مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی نامتناهی است، بنابراین می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، پس $A \cap B = A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. به همین ترتیب $B - A$ نیز می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد و از آنجا که $A \subseteq B$، بنابراین $A - B = \varnothing$ همواره متناهی و $A \cup B = B$ همواره نامتناهی است.

۲۹. گزینهٔ ۳

مجموعه‌ی A متناهی است و اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با هر مجموعه‌ای، متناهی خواهد بود؛ بنابراین مجموعه‌ی $A \cap (B \cup C)$ متناهی است.

از آنجا که مجموعه‌ی A متناهی است، بنابراین مجموعه‌ی $A \cap C$ نیز متناهی است. مجموعه‌ی B نامتناهی است و تفاضل مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره نامتناهی خواهد بود، بنابراین مجموعه‌ی $B - (A \cap C)$ نامتناهی است.

۳۰. گزینهٔ ۱

ابتدا هر یک از مجموعه‌ها را با اعضایشان مشخص می‌کنیم:

$$A = \left\{ \frac{۶n}{n+۱} \in N \mid n \in N \right\}$$

$$\frac{۶n}{n+۱} = \frac{۶(n+۱-۱)}{n+۱} = \frac{۶(n+۱)-۶}{n+۱} = ۶ - \frac{۶}{n+۱}$$

باید $۶ - \frac{۶}{n+۱}$ یعنی خروجی‌ها، عددی طبیعی باشند، پس مخرج کسر یعنی $n+۱$ باید مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶ باشد، یعنی ۱، ۲، ۳ و ۶، پس داریم:

$n+۱=۱ \Rightarrow n=۰$ غ.ق.ق

$n+۱=۲ \Rightarrow n=۱ \;,\; ۶-\frac{۶}{۲}=۳$

$n+۱=۳ \Rightarrow n=۲ \;,\; ۶-\frac{۶}{۳}=۴$

$n+۱=۶ \Rightarrow n=۵ \;,\; ۶-\frac{۶}{۶}=۵$

$\Rightarrow A = \{۳, ۴, ۵\}$

از طرفی داریم:

$B = \{۳n \mid n \in N\} = \{۳, ۶, ۹, ...\}$

بنابراین A یک مجموعه‌ی متناهی و B یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

تفاضل هر مجموعه‌ای، از یک مجموعه‌ی متناهی، همواره متناهی است، بنابراین: متناهی = هر مجموعه‌ای − متناهی : $A-(A \cup B)$

اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی و یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره متناهی خواهد بود، پس $A \cap B$ متناهی است و تفاضل یک مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی نامتناهی، همواره نامتناهی است، بنابراین:

نامتناهی = متناهی − نامتناهی : $B-(A \cap B)$

راهبرد حل تیپ (۴)

[۱] اگر U مجموعه‌ی مرجع و $A \subseteq U$ باشد، متمم مجموعه‌ی A برابر است با: $A' = U - A$

[۲] برای ساده کردن عبارت‌ها، می‌توان از خواص متمم مجموعه‌ها استفاده کرد:

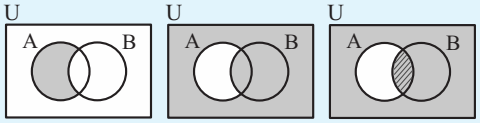
(۱) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (۲) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(۳) $A - B = A \cap B'$

[۳] اگر $A \subseteq B$، آنگاه $B' \subseteq A'$.

[۴] در بعضی موارد بهتر است برای به دست آوردن حاصل عبارت‌ها، از نمودار ون استفاده کرد و عملیات هر مرحله را روی آن نشان داد. مثلاً:

$(A \cap B')' \cap A = (A - B)' \cap A$



$A - B$ $(A - B)'$ $(A - B)' \cap A = A \cap B$

توجه کنید که برای رسم نمودار ون دو مجموعه، آنها را در حالت کلی باید رسم کنید، یعنی دو مجموعه که در قسمتی با هم اشتراک دارند.

۳۱. گزینهٔ ۳

N' را برای هر یک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم:

گزینه‌ی (۱): نامتناهی : $N' = Q - N$

گزینه‌ی (۲): نامتناهی : $N' = Z - N = \{۰, -۱, -۲, ...\}$

گزینه‌ی (۳): متناهی : $N' = \underbrace{(W \cap Q)}_{W} - N = W - N = \{۰\}$

گزینه‌ی (۴): نامتناهی : $N' = R - N$

۳۲. گزینهٔ ۲

گزینه‌ی (۱): $-۲/۱ \notin N \Rightarrow -۲/۱ \in N'$

گزینه‌ی (۲): $۲\sqrt{۵}$ عددی گنگ است و $R - Q' = Q$. پس:

$۲\sqrt{۵} \notin (R - Q')$

گزینه‌ی (۳): $-\frac{۰/۱}{۳} = -\frac{۱}{۳۰} \in Q$

گزینه‌ی (۴): $\sqrt{۲} \notin Z \Rightarrow \sqrt{۲} \in Z'$

۳۳. گزینهٔ ۴

$A = \{x \in N \mid x^۲ < ۱۰۰\} = \{۱, ۲, ۳, ..., ۹\}$

$A' = N - A = \{۱۰, ۱۱, ۱۲, ...\} = \{x \in N \mid x > ۹\}$

۳۴. گزینهٔ ۴

گزینه‌ی (۱): $A' \cup \overset{U}{\varnothing'} = A' \cup U = U$

گزینه‌ی (۲): $(A \cup \underbrace{U'}_{\varnothing}) \cup U = (\underbrace{A \cup \varnothing}_{A}) \cup U = A \cup U = U$

گزینه‌ی (۳): $(\underbrace{A \cap \varnothing}_{\varnothing}) \cup A' = \varnothing \cup A' = A'$

گزینه‌ی (۴): $(\underbrace{A' \cap \varnothing}_{\varnothing}) \cup A = \varnothing \cup A = A$

۳۵. گزینهٔ ۱

$A=\{۴,۵,۶\}$ و $B'=\{۱,۲,۳,۴\}$

$A-B=A\cap B'=\{۴\}$

۳۶. گزینهٔ ۴

ابتدا مجموعه‌های A و B را مشخص می‌کنیم. توجه کنید که A و B زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی مرجع داده شده هستند.

$A=\{۲,۳,۵,۷\}=\{\text{اعداد اول یک رقمی}\}$

$B=\{۳k-۲\mid k\in Z, ۱\le k\le ۴\}=\{۱,۴,۷,۱۰\}$

$A-B=\{۲,۳,۵,۷\}-\{۱,۴,۷,۱۰\}=\{۲,۳,۵\}$

$(A-B)'=M-(A-B)$

$=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}-\{۲,۳,۵\}=\{۱,۴,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$

دارای ۷ عضو است.

۳۷. گزینهٔ ۳

گزینه‌ی (۱): $B-A$ الزاماً متناهی است.

گزینه‌ی (۲): A' می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

گزینه‌ی (۳): B' حتماً نامتناهی است.

گزینه‌ی (۴): $A\cap B$ حتماً متناهی است.

بنابراین گزینه‌ی «۳» صحیح است.

۳۸. گزینهٔ ۲

A مجموعه‌ای نامتناهی و $A\subseteq B$ است، پس مجموعه‌ی B نیز نامتناهی است. حال هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $B'=U-B=$ نامتناهی $-$ نامتناهی $=$ متناهی یا نامتناهی

گزینه‌ی (۲): $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$ نامتناهی

گزینه‌ی (۳): $B-A=$ نامتناهی $-$ نامتناهی $=$ متناهی یا نامتناهی

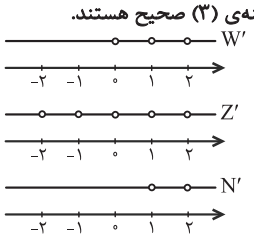
گزینه‌ی (۴): $A'\cap B'=(A\cup B)'$

$\xrightarrow[A\cup B=B]{A\subseteq B}B'=$ متناهی یا نامتناهی

بنابراین گزینه‌ی (۲) الزاماً نامتناهی است.

۳۹. گزینهٔ ۳

با توجه به مجموعه‌های W'، Z' و N' که نشان داده شده‌اند، تمام گزینه‌ها به جز گزینه‌ی (۳) صحیح هستند.



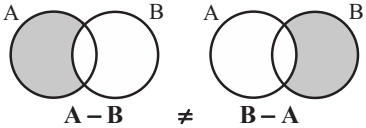
در گزینه‌ی «۳» داریم: $\left.\begin{matrix}\{۱\}\subseteq Q'\cup N\\ \{۱\}\not\subseteq W'\end{matrix}\right\}\Rightarrow Q'\cup N\not\subseteq W'$

۴۰. گزینهٔ ۳

گزینه‌ی (۱): $A\cap B'=A-B$

$A-B$ در صورتی برابر با تهی می‌شود که $A\subseteq B$ باشد که از $A\cup B=U$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A\subseteq B$ است.

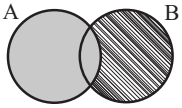
گزینه‌ی (۲):



$A-B\neq B-A$

در هیچ حالتی $A-B=B-A$ نیست مگر اینکه $A=B$ باشد که از $A\cup B=U$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A=B$ است.

گزینه‌ی (۳): با توجه به نمودار ون زیر، داریم:



$A'=U-A=(A\cup B)-A=B-A$

گزینه‌ی (۴): $A'\cup B'=(A\cap B)'=U-(A\cap B)$

عبارت بالا در صورتی برابر با U می‌شود که $A\cap B=\varnothing$ باشد که از $A\cup B=U$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $A\cap B=\varnothing$ است.

۴۱. گزینهٔ ۲

با توجه به اطلاعات مسأله داریم:

A' نامتناهی $\Leftarrow A$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

B متناهی $\Leftarrow B'$ نامتناهی است.

C' متناهی $\Leftarrow C$ نامتناهی است.

حال هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $B'-A'=$ نامتناهی $-$ نامتناهی $=$ متناهی یا نامتناهی

گزینه‌ی (۲): $C'\cap B'=$ متناهی $\cap$ نامتناهی $=$ متناهی

گزینه‌ی (۳): $(A'\cap C')\cup B'=$ (متناهی) $\cup$ نامتناهی $=$ نامتناهی

گزینه‌ی (۴): $C-B=$ متناهی $-$ نامتناهی $=$ نامتناهی

۴۲. گزینهٔ ۳

$A=\{x\in R\mid -۱<۲-x\le ۵\}$

$-۱<۲-x\le ۵\xrightarrow{\times(-۱)}-۵\le x-۲<۱\xrightarrow{+۲}-۳\le x<۳$

$\Rightarrow A=[-۳,۳)$

$B=\{x\in Z\mid \frac{۲x+۳}{x}\in W\}$

برای آنکه عبارت $\frac{۲x+۳}{x}=۲+\frac{۳}{x}$ عضو مجموعه‌ی اعداد حسابی باشد، باید x برابر با ۱ یا ۳± باشد، پس: $B=\{۱,\pm ۳\}$، بنابراین:

$A\cap B'=A-B=[-۳,۳)-\{۱,\pm ۳\}=(-۳,۳)-\{۱\}$

مجموعه‌ی فوق فقط شامل عدد طبیعی ۲ است.

۴۳. گزینهٔ ۳

$A=\{a\mid -a\in N\}$

$-a\in N\Rightarrow -a=۱,۲,۳,\dots\Rightarrow a=-۱,-۲,-۳,\dots$

$\Rightarrow A=\{\dots,-۳,-۲,-۱\}$

$\Rightarrow A'=Z-A=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$

$B=\{۱-b\mid -b\in W\}$

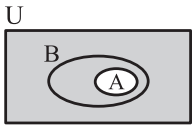
$-b\in W\Rightarrow -b=۰,۱,۲,\dots\Rightarrow ۱-b=۱,۲,۳,\dots$

$\Rightarrow B=\{۱,۲,۳,\dots\}$

$\Rightarrow B'=Z-B=\{\dots,-۲,-۱,۰\}$

$\Rightarrow A'\cap B'=\{۰\}$

۴۴. گزینهٔ ۳



A' در نمودار مقابل، سایه زده شده است. واضح است که کل مجموعه‌ی B زیرمجموعه‌ی A' نیست.

از طرفی $A\cap B=A$ است و A نیز زیرمجموعه‌ی A' نیست.

همچنین داریم: $B'\cap A=A\cap B'=A-B$ که با توجه به نمودار، $A-B=\varnothing$ است و $\varnothing$ زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است، بنابراین: $(B'\cap A=\varnothing)\subseteq A'$

نادرستی گزینه‌ی (۴) را با مشخص کردن مجموعه روی نمودار ون، بررسی کنید.

۴۵. گزینهٔ ۴

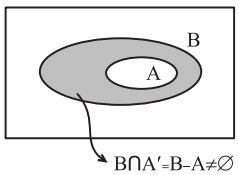
می‌دانیم اگر $A \subset B$ آنگاه $A \cap B = A$ و $A - B = \varnothing$، حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه‌ی (۱): $B - A' = B \cap (A')' = B \cap A = A$ درست

گزینه‌ی (۲): $A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = A$ درست

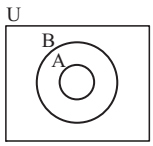
گزینه‌ی (۳): $A \cap B' = A - B = \varnothing$ درست

پس گزینه‌ی (۴) پاسخ سؤال است، برای درک نادرستی گزینه‌ی (۴) به نمودار ون مقابل توجه کنید.



۴۶. گزینهٔ ۳

با توجه به نمودار ون داریم:



گزینه‌ی (۱): نادرست است، زیرا:

$A \subset B \Rightarrow B' \subset A' \Rightarrow A' \cup B' = A'$

گزینه‌ی (۲): نادرست است، زیرا: $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

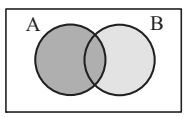
گزینه‌ی (۳): درست است.

با توجه به نمودار ون، $A' \cup B = U$ است (نمودار بالا را هاشور بزنید.)

گزینه‌ی (۴): نادرست است، زیرا: $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

۴۷. گزینهٔ ۲

با توجه به نمودار ون زیر، داریم:



$$A \cup (B - A) = A \cup B$$

در نتیجه متمم $A \cup (B - A)$ برابر است با:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' = A' - B$$

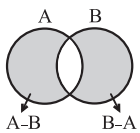
۴۸. گزینهٔ ۳

طبق فرض مسأله، داریم: $((A - B) \cup (B - A))' = A \cap B$

می‌دانیم متممِ متمم یک مجموعه با خود مجموعه برابر است، پس اگر از طرفین تساوی بالا متمم بگیریم، داریم:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cap B)' \quad (*)$$

از طرفی با توجه به نمودار ون مقابل، داریم:



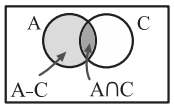
$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

با جایگذاری در رابطه‌ی (*) خواهیم داشت:

$$(A \cup B) - (A \cap B) = S - (A \cap B) \Rightarrow A \cup B = S$$

۴۹. گزینهٔ ۱

با توجه به نمودار ون مقابل، داریم:



$$(A - C) \cup (A \cap C) = A$$

از طرفی داریم:

$$B - A' = B \cap (A')' = B \cap A$$

با توجه به اینکه همواره $(A \cap B) \subset A$ است، خواهیم داشت:

$$\underbrace{(A - C) \cup (A \cap C)}_{A} \cup (B - A') = A \cup (A \cap B) = A$$

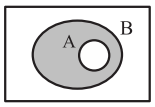
۵۰. گزینهٔ ۳

طبق فرض داریم: $A' \cup B = M \xrightarrow{\text{متمم}} (A' \cup B)' = M'$

$$\Rightarrow (A')' \cap B' = \varnothing \Rightarrow A \cap B' = \varnothing \Rightarrow A - B = \varnothing$$
$$\Rightarrow A \subseteq B$$

حال هر یک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

گزینه‌ی (۱): اگر $A \neq B$، با توجه به نمودار ون مقابل داریم: $B - A \neq \varnothing$



گزینه‌ی (۲): اگر $A \subseteq B$، آنگاه: $A \cap B = A$ (A غیرتهی است.)

گزینه‌ی (۳): $B' - A' = A - B = \varnothing$

گزینه‌ی (۴): $A' - B' = B - A$

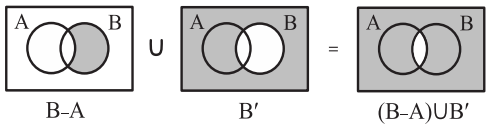
که در گزینه‌ی (۱) نشان دادیم: $B - A$ همواره تهی نیست.

۵۱. گزینهٔ ۱

با توجه به اینکه $A - B = A \cap B'$، داریم:

$$(B \cap A') \cup B' = (B - A) \cup B'$$

با استفاده از نمودار ون، داریم:

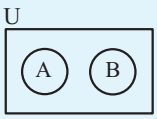


طبق نمودار زیر، متمم $(B - A) \cup B'$ برابر است با:

$$((B - A) \cup B')' = A \cap B$$

راهبرد حل تیپ (۵)

[۱] اگر اشتراک دو مجموعه، تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم (مجزا) می‌گویند و نمودار ون آنها به صورت زیر است:



[۲] برای دو مجموعه‌ی جدا از هم A و B، همواره داریم:

$$\begin{cases} A - B = A \\ B - A = B \end{cases} \quad \begin{cases} A \subseteq B' \\ B \subseteq A' \end{cases}$$

۵۲. گزینهٔ ۴

$E - F = E$ است، یعنی در مجموعه‌ی E هیچ عضوی وجود ندارد که در مجموعه‌ی F نیز موجود باشد، بنابراین داریم:

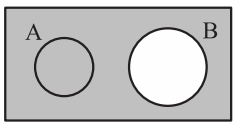
$$E \cap F = \varnothing$$

لذا، دو مجموعه‌ی مذکور هیچ اشتراکی با هم ندارند و دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند.

۵۳. گزینهٔ ۴

A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم‌اند، یعنی $A \cap B = \varnothing$؛ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

رابطه‌های گزینه‌های (۱) و (۳) با توجه به شکل زیر که در آن B' به‌صورت رنگی نشان داده شده است، درست هستند.

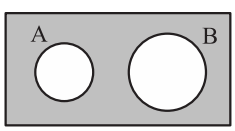


$$A \subset B' \Rightarrow A \cap B' = A$$

رابطه‌ی گزینه‌ی (۲) هم درست است، زیرا:

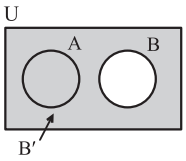
$$A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = \varnothing$$

اما رابطه‌ی گزینه‌ی (۴) نادرست است. به شکل مقابل دقت کنید که در آن مجموعه‌ی $(A \cup B)'$ به‌صورت رنگی نشان داده شده است و برابر با تهی نیست.



۵۴. **گزینهٔ ۲**

با توجه به نمودار ون مقابل، اگر $A \subseteq B'$ باشد، آنگاه A و B هیچ اشتراکی ندارند و جدا از هم‌اند، پس:



$$A \cap B = \varnothing$$

بنابراین داریم: $A - B = A$ و $B - A = B$، لذا:

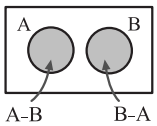
$$((A-B)\cup(B-A))' = (A\cup B)' = A' \cap B'$$

۵۵. **گزینهٔ ۴**

با توجه به اینکه $(A\cup B)' = A' \cap B'$ و $A - B = A \cap B'$، مجموعه‌ی داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(A\cup B')'\cup(A-B) &= (A'\cap(B')')\cup(A-B)\\ &= (A'\cap B)\cup(A-B)\\ &= (B\cap A')\cup(A-B)\\ &= (B-A)\cup(A-B)\end{aligned}$$

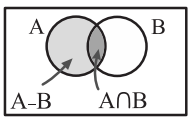
A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم‌اند. بنابراین: $A \cap B = \varnothing$ و طبق نمودار ون مقابل داریم:



$$(B-A)\cup(A-B) = B \cup A$$

۵۶. **گزینهٔ ۲**

به نمودار ون مقابل دقت کنید. دو مجموعه‌ی $A - B$ و $A \cap B$ هیچ اشتراکی ندارند، بنابراین



$A \cap B$ در صورتی می‌تواند زیرمجموعه‌ی $A - B$ باشد که $A \cap B = \varnothing$ باشد، بنابراین:

$$\begin{aligned}A' - B' &= A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A\\ &= B - \underbrace{(A \cap B)}_{\varnothing} = B\end{aligned}$$

راهبرد حل تیپ (۶)

[۱] تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی A و B برابر است با:

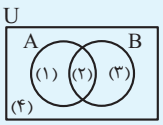
$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$$

همچنین رابطه‌ی زیر نیز برقرار است:

$$n(A\cup B) = n(A-B) + n(B-A) + n(A\cap B)$$

[۲] از نمودار ون نیز می‌توان برای به دست آوردن تعداد اعضا استفاده کرد. به نمودار مقابل توجه کنید.

برای کامل کردن نمودار، معمولاً از اشتراک مجموعه‌ها شروع می‌کنیم.



$(۱) \to n(A-B)$ $\quad$ $(۲) \to n(A\cap B)$

$(۳) \to n(B-A)$ $\quad$ $(۴) \to n(U-(A\cup B))$

[۳] به کلمات کلیدی زیر و معادل آنها توجه کنید:

$A\cup B$	A یا B حداقل عضو یک مجموعه
$A\cap B$	A و B عضو هر دو مجموعه
$A-B$	فقط A
$(A-B)\cup(B-A)$	دقیقاً عضو یک مجموعه
$U-(A\cap B)$	حداکثر عضو یک مجموعه

۵۷. **گزینهٔ ۱**

A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، پس $A \cap B = \varnothing$ و $n(A\cap B) = ۰$، لذا:

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - \underbrace{n(A\cap B)}_{۰}$$

$$\Rightarrow n(A\cup B) = ۴ + ۹ = ۱۳$$

۵۸. **گزینهٔ ۴**

$$n(A) = m \ , \ n(B) = k \ , \ m - k = ۱۴$$

$$n(A\cup B) - n(A\cap B) = ۲۰$$

$$\Rightarrow n(A) + n(B) - n(A\cap B) - n(A\cap B) = ۲۰$$

$$\Rightarrow m + k - ۲n(A\cap B) = ۲۰ \Rightarrow n(A\cap B) = \frac{m+k-۲۰}{۲}$$

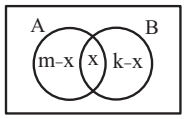
با توجه به اینکه $n(B-A) = n(B) - n(A\cap B)$ خواهیم داشت:

$$n(B-A) = k - \frac{m+k-۲۰}{۲} = \frac{۲k-m-k+۲۰}{۲}$$

$$= \frac{k-m+۲۰}{۲} = \frac{۲۰-(m-k)}{۲} = \frac{۲۰-۱۴}{۲} = ۳$$

۵۹. **گزینهٔ ۳**

اگر تعداد اعضای مشترک A و B را x فرض کنیم، آنگاه: $n(A\cap B) = x$



از طرفی $n(A) = m$ و $n(B) = k$ و $n(A\cup B) = ۱۱$ بنابراین:

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow m + k - x = ۱۱$$

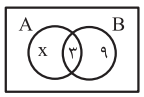
از طرفی $m - k = ۵$، بنابراین $k = m - ۵$، باجایگذاری در رابطهٔ بالا خواهیم داشت:

$$m + m - ۵ - x = ۱۱ \Rightarrow ۲m = x + ۱۶ \Rightarrow m = \frac{x}{۲} + ۸$$

برای آنکه m کمترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید $x = ۰$ باشد، در نتیجه $m = ۸$.

۶۰. **گزینهٔ ۱**

با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار ون مقابل را خواهیم داشت. بنابراین داریم:



$$n(A\cup B) = ۱۴ \Rightarrow x + ۳ + ۹ = ۱۴ \Rightarrow x = ۲$$

$$n(A-B) = x = ۲$$

۶۱. **گزینهٔ ۱**

می‌دانیم A و A'، دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند و $A\cup A' = U$، پس:

$$n(A\cup A') = n(A) + n(A') = n(U)$$

$$\Rightarrow n(U) = ۱۴ + ۱۰ = ۲۴$$

از طرفی B و B' دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند و $B\cup B' = U$، پس:

$$n(B\cup B') = n(B) + n(B') = n(U)$$

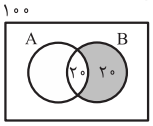
$$\Rightarrow n(U) = n(B) + ۸ = ۲۴ \Rightarrow n(B) = ۱۶$$

۶۲. **گزینهٔ ۱**

$$۳n(A\cap B) = \frac{۳}{۲}n(B) = n(A) = ۶۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(B) = \frac{۲}{۳}\times ۶۰ = ۴۰ \\ n(A\cap B) = \frac{۶۰}{۳} = ۲۰ \end{cases}$$

از آنجا که $B \cap A' = B - A$ است، خواهیم داشت:



$$n(B-A) = n(B) - n(A\cap B)$$

$$= ۴۰ - ۲۰ = ۲۰$$

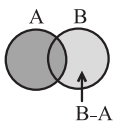
۶۳. **گزینهٔ ۱**

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

برای به دست آوردن $n(U)$ و $n(A \cup B)$، داریم:

$$n(A) + n(A') = n(U) \Rightarrow n(U) = ۶ + ۹ = ۱۵$$

با توجه به نمودار مقابل، داریم:

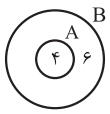


$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A)$$
$$\Rightarrow n(A \cup B) = ۹ + ۳ = ۱۲$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = ۱۵ - ۱۲ = ۳$$

۶۴. **گزینهٔ ۳**



می‌دانیم اگر $A' \subseteq B'$، آنگاه $A \subseteq B$، بنابراین با توجه به اطلاعات مسأله نمودار ون مقابل را داریم:

همچنین داریم:

$$\underbrace{(A - B)}_{\varnothing} \cup (B - A) = B - A$$
$$\Rightarrow n((A - B) \cup (B - A)) = n(B - A) = ۶$$

۶۵. **گزینهٔ ۳**

می‌دانیم:

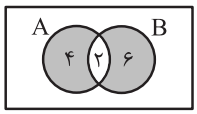
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

برای به دست آوردن $n(A)$ و $n(A \cap B)$، داریم:

$$n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(U) - n(A \cap B)$$
$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(U) - n(A' \cup B') = ۵۰ - ۳۰ = ۲۰$$
$$n(A) = n(U) - n(A') = ۵۰ - ۲۰ = ۳۰$$
$$\Rightarrow n(A \cup B) = ۳۰ + ۳۵ - ۲۰ = ۴۵$$

۶۶. **گزینهٔ ۳**

با توجه به اطلاعات مسأله، می‌توان نمودار ون زیر را رسم کرد:



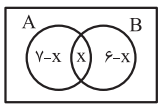
توجه کنید که قسمت سایه زده شده، مجموعه‌ی $(A \cup B) - (A \cap B)$ را نشان می‌دهد.

با توجه به نمودار، تعداد عضوهای مجموعه‌ی B برابر است با:

$$n(B) = ۲ + ۶ = ۸$$

۶۷. **گزینهٔ ۳**

$$A - B' = A \cap (B')' = A \cap B$$



اگر اشتراک دو مجموعه‌ی A و B را x در نظر بگیریم، با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار ون مقابل را خواهیم داشت.

از طرفی داریم:

$$n((A - B) \cup (B - A)) = ۱۳$$
$$\Rightarrow (۷ - x) + (۶ - x) = ۱۳ \Rightarrow ۱۳ - ۲x = ۱۳ \Rightarrow x = ۰$$

بنابراین: $n(A - B') = n(A \cap B) = x = ۰$

۶۸. **گزینهٔ ۳**

ابتدا مجموعه‌ی $B' - A$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

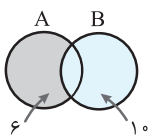
$$B' - A = B' \cap A' = (A \cup B)'$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$n(B' - A) = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$
$$= ۱۰۰ - ۵۰ = ۵۰$$

۶۹. **گزینهٔ ۱**

با توجه به اینکه $n(B) = ۱۰$ و $n(A \cup B) = ۱۶$، نمودار ون مقابل را خواهیم داشت.

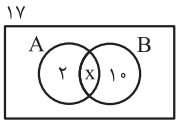


از آنجا که $A \cap B' = A - B$ است، با توجه به نمودار، داریم:

$$n(A - B) = ۶$$

۷۰. **گزینهٔ ۲**

با توجه به اطلاعات مسأله، اگر تعداد اعضای مشترک A و B را x در نظر بگیریم، نمودار ون زیر را خواهیم داشت.



از طرفی: $n(B) = ۳n(A)$

$$\Rightarrow ۱۰ + x = ۳(۲ + x)$$
$$\Rightarrow x + ۱۰ = ۳x + ۶ \Rightarrow x = ۲$$

از آنجا که $A' \cap B' = (A \cup B)'$، خواهیم داشت:

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

با توجه به نمودار داریم: $n(A \cup B) = ۲ + x + ۱۰ = ۱۴$، بنابراین:

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = ۱۷ - ۱۴ = ۳$$

۷۱. **گزینهٔ ۳**

۷ عضو نه عضو A هستند نه عضو B، یعنی: $n(A' \cap B') = ۷$، در نتیجه:

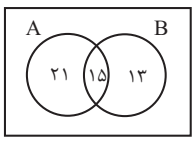
$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$
$$\Rightarrow ۷ = n(U) - n(A \cup B) \Rightarrow n(U) = ۷ + n(A \cup B)$$

از طرفی داریم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

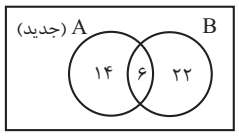
$$= ۲۵ + ۱۵ - ۳ = ۳۷$$
$$n(U) = ۷ + n(A \cup B) = ۷ + ۳۷ = ۴۴$$

۷۲. **گزینهٔ ۳**

با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون زیر را داریم:



اگر ۱۶ عضو از A کم کنیم، ۹ عضو از اشتراک کم می‌شود (طبق صورت سؤال) و $۷ (= ۹ - ۱۶)$ عضو از $(A - B)$ کم می‌شود و نمودار به صورت زیر درمی‌آید.

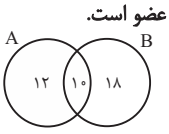


$$n(A \cup B) = ۱۴ + ۶ + ۲۲ = ۴۲$$

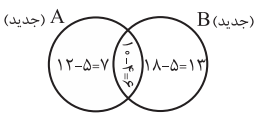
دقت کنید که چون B دارای ۲۸ عضو است وقتی تعداد اعضای اشتراک برابر ۶ باشد، در نتیجه، تعداد اعضای $(A - B)$ هم $۲۲ = ۶ - ۲۸$ است.

۷۳. **گزینهٔ ۴**

چون مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ به‌ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند و $(A \cup B)$ دارای ۴۰ عضو است. پس $(A \cap B)$ دارای $۱۰ (= ۴۰ - ۱۲ - ۱۸)$ عضو است.



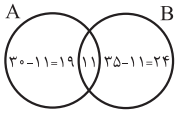
حال اگر از هر کدام از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو کم شود چون از $(A \cap B)$، ۴ عضو کم شده، پس از هر یک از مجموعه‌های $(A - B)$ و $(B - A)$ باید ۵ عضو کم شود.



$$\Rightarrow n(A \cup B)_{\text{جدید}} = ۷ + ۶ + ۱۳ = ۲۶$$

۷۴. گزینهٔ ۲

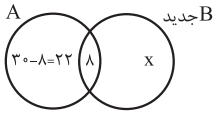
با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار ون مقابل را داریم:



با حذف تعدادی عضو از B، از اشتراک آنها ۳ عضو کم می‌شود، پس اشتراک مجموعه‌ی A و مجموعه‌ی B جدید برابر با $۱۱-۳=۸$ می‌شود.

توجه کنید که هیچ عضوی از A حذف نشده، پس تعداد اعضای مجموعه‌ی A همان ۳۰ تا باقی می‌ماند.

با توجه به نمودار ون مقابل خواهیم داشت:



$$n(A \cup B_{\text{جدید}}) = ۴۴$$

$$\Rightarrow ۲۲+۸+x=۴۴ \Rightarrow x=۱۴$$

بنابراین مجموعه‌ی B جدید دارای $۸+۱۴=۲۲$ عضو است. پس $۳۵-۲۲=۱۳$ عضو از مجموعه‌ی B حذف شده است.

۷۵. گزینهٔ ۳

متمم مجموعه‌ی $A' \cup B'$ برابر است با:

$$(A' \cup B')' = (A')' \cap (B')' = A \cap B$$

بنابراین باید تعداد عضوهای اشتراک دو مجموعه‌ی A و B را به‌دست آوریم. مجموعه‌های A و B به صورت زیر هستند:

$$A = \{۱۰, ۱۱, \dots, ۹۹\}$$

$$B = \{۵k-۱ \mid k \in A\} = \{۵k-۱ \mid k \in \{۱۰, \dots, ۹۹\}\}$$
$$= \{۴۹, ۵۴, \dots, ۵\times۹۹-۱\}$$

مجموعه‌ی A شامل همه‌ی اعداد دورقمی است؛ یعنی اعداد ۱۰ تا ۹۹ و مجموعه‌ی B شامل اعداد به صورت $۵k-۱$ به‌طوری‌که $k \in N$ و $۱۰ \le k \le ۹۹$ است، پس اشتراک آنها اعداد دو رقمی به صورت $۵k-۱$ است:

$$۵k-۱ \le ۹۹ \Rightarrow k \le ۲۰ \rightarrow ۵\times۲۰-۱=۹۹$$

بنابراین:

$$A \cap B = \{۴۹, ۵۴, \dots, ۹۹\}$$

برای تعیین تعداد اعضای این مجموعه داریم:

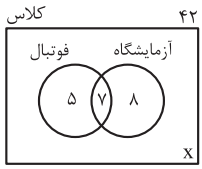
$$\begin{cases} ۴۹ = ۵k_۱ - ۱ \Rightarrow k_۱ = ۱۰ \\ ۹۹ = ۵k_۲ - ۱ \Rightarrow k_۲ = ۲۰ \end{cases}$$

بنابراین تعداد اعضای $A \cap B$ برابر است با:

$$n(A \cap B) = k_۲ - k_۱ + ۱ = ۲۰ - ۱۰ + ۱ = ۱۱$$

۷۶. گزینهٔ ۴

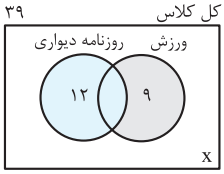
با استفاده از نمودار ون، سؤال را حل می‌کنیم. ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۷ نفر در هر دو گروه عضو هستند، پس $۱۵-۷=۸$ نفر فقط در گروه آزمایشگاهی عضو هستند.



به همین ترتیب از آنجا که ۱۲ نفر در گروه فوتبال عضو هستند، نتیجه می‌گیریم که $۱۲-۷=۵$ نفر فقط در گروه فوتبال عضو هستند. با توجه به نمودار، داریم: $۵+۷+۸+x=۴۲ \Rightarrow x=۲۲$

۷۷. گزینهٔ ۴

با توجه به اطلاعات مسئله نمودار ون مقابل را داریم که در آن x تعداد نفراتی است که در هیچ‌یک از دو گروه عضو نیستند. از آنجا که تعداد کل نفرات ۳۹ نفر است، داریم:



$$۱۲+۹+x=۳۹ \Rightarrow x=۱۸$$

۷۸. گزینهٔ ۱

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

طبق فرض $n(A \cup B) = ۲۹$ و $n(A \cap B) = ۳$ و $n(A) = ۴ + n(B)$. اگر تعداد اعضای گروه B را x در نظر بگیریم، داریم:

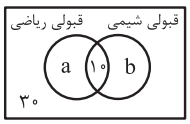
$$۲۹ = (x+۴) + x - ۳ \Rightarrow ۲x+۱ = ۲۹ \Rightarrow x = ۱۴$$

$$\Rightarrow n(B) = ۱۴$$

$$\Rightarrow n(B-A) = n(B) - n(A \cap B) = ۱۴ - ۳ = ۱۱$$

۷۹. گزینهٔ ۲

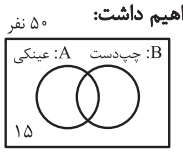
با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار ون مقابل را داریم که در آن a تعداد دانش‌آموزانی است که فقط در درس ریاضی و b تعداد دانش‌آموزانی است که فقط در درس شیمی قبول شده‌اند، بنابراین: $a+b=۲۰$



تعداد کل دانش‌آموزان کلاس $= ۳۰+۱۰+a+b = ۴۰+۲۰ = ۶۰$

۸۰. گزینهٔ ۳

با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار ون زیر را خواهیم داشت:



$$\begin{cases} n(A) = ۲۵ \\ n(B) = ۲۰ \end{cases}$$

هم عینکی و هم چپ‌دست، یعنی: $A \cap B$.

از طرفی با توجه به نمودار داریم: $n(A \cup B) = ۵۰ - ۱۵ = ۳۵$

$$\Rightarrow n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۳۵$$

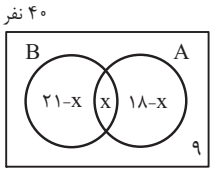
$$\Rightarrow ۲۵ + ۲۰ - n(A \cap B) = ۳۵ \Rightarrow n(A \cap B) = ۱۰$$

بنابراین درصد افراد هم عینکی و هم چپ‌دست برابر است با:

$$\frac{۱۰}{۵۰} \times ۱۰۰ = ۲۰$$

۸۱. گزینهٔ ۴

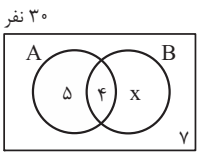
اگر مجموعه‌ی A افرادی باشند که در فوق برنامه‌ی هنری و مجموعه‌ی B افرادی باشند که در فوق برنامه‌ی علمی شرکت کرده‌اند و تعداد افرادی که در هر دو برنامه شرکت کرده‌اند را x در نظر بگیریم، داریم:



$$۴۰ = (۲۱-x) + x + (۱۸-x) + ۹ \Rightarrow x = ۴۸ - ۴۰ = ۸$$

۸۲. گزینهٔ ۱

اگر A را مجموعه‌ی افراد شرکت‌کننده در برنامه‌های پژوهشی و B را مجموعه‌ی افراد شرکت‌کننده در برنامه‌های پرورشی در نظر بگیریم، با توجه به نمودار ون زیر خواهیم داشت:



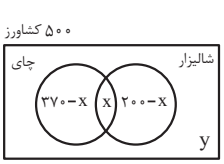
$$۳۰ = ۵ + ۴ + x + ۷$$

$$\Rightarrow x = ۳۰ - ۱۶ = ۱۴$$

افرادی که فقط در برنامه‌های پرورشی شرکت کرده‌اند برابر با $B-A$ است، لذا: $n(B-A) = x = ۱۴$

۸۳. گزینهٔ ۳

تعداد کشاورزانی که هم مزرعه‌ی چای و هم شالیزار دارند را x و تعداد کشاورزانی که نه مزرعه‌ی چای و نه شالیزار دارند را y در نظر می‌گیریم. با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار ون مقابل را خواهیم داشت. بنابراین:



$$۵۰۰ = (۳۷۰-x) + x + (۲۰۰-x) + y$$

$\Rightarrow ۵۰۰=۵۷۰-x+y \Rightarrow x-y=۷۰ \quad (*)$

طبق فرض تعداد کشاورزانی که نه مزرعه‌ی چای و نه شالیزار دارند یعنی y برابر با تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند، یعنی $۲۰۰-x$، بنابراین: $y=۲۰۰-x$، با جایگذاری در تساوی $(*)$ داریم:

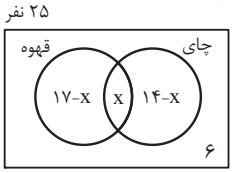
$x-(۲۰۰-x)=۷۰ \Rightarrow ۲x=۲۷۰ \Rightarrow x=۱۳۵$

بنابراین تعداد کشاورزانی که فقط مزرعه‌ی چای دارند، برابر است با:

$۳۷۰-x=۳۷۰-۱۳۵=۲۳۵$

۸۴. گزینهٔ ۳

اگر x تعداد نفراتی باشد که هم چای نوشیده‌اند و هم قهوه، با توجه به نمودار ون زیر، خواهیم داشت:



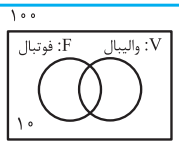
$۲۵=۱۷-x+x+۱۴-x+۶ \Rightarrow ۲۵=۳۷-x \Rightarrow x=۱۲$

n (هر دو نوشیدنی را نوشیده‌اند) $= n(U) - n$ (حداکثر یک نوع نوشیدنی نوشیده‌اند)

$= ۲۵-x=۲۵-۱۲=۱۳$

۸۵. گزینهٔ ۴

اگر فرض کنیم تعداد دانش‌آموزان ۱۰۰ نفر است، با توجه به اطلاعات مسأله و نمودار ون مقابل، خواهیم داشت.



$n(F)=۶۰$ ، $n(V)=۵۰$

$n(F \cup V)=۱۰۰-۱۰=۹۰$

$n(F \cup V)=n(F)+n(V)-n(F \cap V)$

$\Rightarrow ۶۰+۵۰-n(F \cap V)=۹۰ \Rightarrow n(F \cap V)=۲۰$

حداکثر در یکی از دو تیم، در نمودار ون مقابل نشان داده شده است که تعداد آن برابر است با:

$n(U)-n(F \cap V)=۱۰۰-۲۰=۸۰$

۸۶. گزینهٔ ۴

با توجه به اطلاعات مسأله، داریم:

$$\begin{cases} n(A \cap B)=\frac{۲}{۵}n(A)=\frac{۱}{۳}n(B) \Rightarrow \begin{cases} n(A)=\frac{۵}{۲}n(A \cap B) \\ n(B)=۳n(A \cap B) \end{cases} \\ n(A \cup B)=۴۵ \end{cases}$$

بنابراین داریم: $n(A)+n(B)-n(A \cap B)=۴۵$

$\Rightarrow \frac{۵}{۲}n(A \cap B)+۳n(A \cap B)-n(A \cap B)=۴۵$

$\Rightarrow \frac{۹}{۲}n(A \cap B)=۴۵ \Rightarrow n(A \cap B)=۱۰$

تعداد دبیرانی که فقط در یک مدرسه تدریس می‌کنند، برابر است با:

$n((A-B) \cup (B-A))=n(A \cup B)-n(A \cap B)$

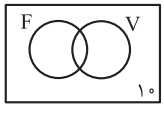
$=۴۵-۱۰=۳۵$

۸۷. گزینهٔ ۱

دانش‌آموزان علاقه‌مند به والیبال : V

دانش‌آموزان علاقه‌مند به فوتبال : F

اگر تعداد کل دانش‌آموزان کلاس را x فرض کنیم، خواهیم داشت:



$n(F \cup V)=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۸}x-\frac{۱}{۸}x=\frac{۳}{۴}x$

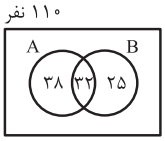
$n(U)-n(F \cup V)=۱۰$: از طرفی

$\Rightarrow x-\frac{۳}{۴}x=۱۰ \Rightarrow x=۴۰$

$\frac{۱}{۸}x=\frac{۱}{۸}\times ۴۰=۵$: تعداد دانش‌آموزانی که به هر دو رشته علاقه‌مندند.

۸۸. گزینهٔ ۳

با توجه به اطلاعات مسأله، نمودار ون زیر را داریم:

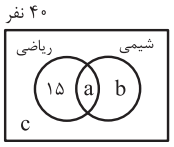


۷۰ نفر از شرکت A و ۳۲ نفر از هر دو شرکت خریده کرده‌اند، پس $۷۰-۳۲=۳۸$ نفر فقط از شرکت A خرید کرده‌اند. ۵۷ نفر از شرکت B و ۳۲ نفر از هر دو شرکت خرید کرده‌اند، پس $۵۷-۳۲=۲۵$ نفر فقط از شرکت B خرید کرده‌اند. دقیقاً از یکی از این دو شرکت، یعنی فقط شرکت A یا فقط شرکت B که تعداد آنها برابر است با:

$n((A-B) \cup (B-A))=۳۸+۲۵=۶۳$

۸۹. گزینهٔ ۲

با توجه به اطلاعات مسأله و نمودار ون مقابل، داریم:



$$\begin{cases} a+c=۲۰ \\ ۱۵+a+b+c=۴۰ \end{cases}$$

$\Rightarrow ۱۵+۲۰+b=۴۰ \Rightarrow b=۵$

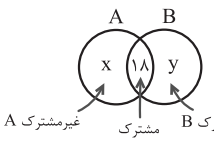
n (شیمی) $= a+b=a+۵$

از طرفی $a+c=۲۰$، پس می‌توان گفت: $۰ \le a \le ۲۰$ است، بنابراین:

$۵ \le a+۵ \le ۲۰+۵ \Rightarrow ۵ \le n$ (شیمی) ≤ ۲۵

۹۰. گزینهٔ ۳

با توجه به اینکه $n(A \cap B)=۱۸$ و $n(A \cup B)=۴۸$، می‌توان نمودار ون زیر را رسم کرد:



$$\begin{cases} n(A)=x+۱۸ \\ n(B)=y+۱۸ \\ n(A \cup B)=x+۱۸+y=۴۸ \end{cases} \Rightarrow x+y=۳۰$$

۱۰ مداد به مدادهای فرد B اضافه می‌شود، یعنی:

$n(B_{\text{جدید}})=y+۱۸+۱۰=y+۲۸$

که ۳ تای آن با A مشترک است. پس تعداد مدادهای مشترک برابر می‌شود با:

$n(A \cap B_{\text{جدید}})=۱۸+۳=۲۱$

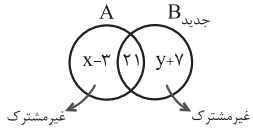
پس تعداد مدادهای غیر مشترک B برابر می‌شود با:

$n(B_{\text{جدید}}-A)=y+۲۸-۲۱=y+۷$

از طرفی تعداد مدادهای A تغییری نکرده است و باید همان تعداد $n(A)=x+۱۸$ باشد، حال ۲۱ مداد مشترک با B دارد، پس تعداد مدادهای غیرمشترک آن برابر می‌شود با:

$n(A-B_{\text{جدید}})=x+۱۸-۲۱=x-۳$

به نمودار ون مقابل توجه کنید. تعداد مدادهای غیرمشترک در این حالت برابر است با:



$(x-۳)+(y+۷)=x+y+۴=۳۰+۴=۳۴$