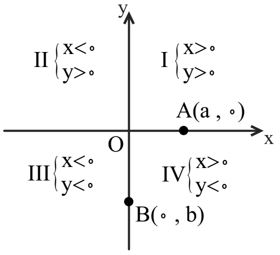
مؤلف درس، تست‌های طراحی‌شده و تنظیم تست‌های این فصل: فرهاد حامی

صفحه‌های ۲ تا ۴ کتاب درسی

۱. هندسه‌ی تحلیلی — یادآوری و تکمیل معادله‌ی خط

یادآوری و تکمیل معادله‌ی خط

نقطه در دستگاه مختصات ◄ شکل زیر، یک دستگاه محورهای مختصات را نمایش می‌دهد. این دستگاه از چهار ناحیه تشکیل شده است و هر نقطه‌ی دلخواه $A(x\,,\,y)$ در آن به طول x و به عرض y است. در شکل مقابل، علامت مختصات هر نقطه در چهار ناحیه مشخص شده است.



۱- اگر نقطه‌ای در ناحیه‌ی اول یا سوم باشد، طول و عرض آن هم‌علامتند.

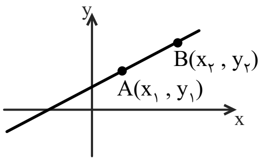
۲- اگر نقطه‌ای در ناحیه‌ی دوم یا چهارم باشد، طول و عرض آن مختلف‌العلامتند.

۳- اگر نقطه‌ای روی محور x ها باشد، عرض آن صفر و مختصات آن $A(a\,,\,۰)$ است.

۴- اگر نقطه‌ای روی محور y ها باشد، طول آن صفر و مختصات آن $B(۰\,,\,b)$ است.

شیب یک خط ◄ از سال نهم به یاد داریم که شیب یک خط برابر $\frac{\text{تغییرات عمودی}}{\text{تغییرات افقی}}$ است، بنابراین برای دو نقطه‌ی $A(x_۱\,,\,y_۱)$ و $B(x_۲\,,\,y_۲)$، شیب خط AB به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_{AB}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$



■ مثال: شیب خطی که از دو نقطه‌ی $A(۱\,,\,-۲)$ و $B(-۲\,,\,۳)$ عبور می‌کند برابر $m_{AB}=\frac{۳-(-۲)}{-۲-۱}=-\frac{۵}{۳}$ است.

تذکر ◄◄ اگر سه نقطه‌ی $A(x_A\,,\,y_A)$، $B(x_B\,,\,y_B)$ و $C(x_C\,,\,y_C)$، بر روی یک خط واقع باشند، آنگاه بر یک استقامتند و خواهیم داشت:

$$m_{AB}=m_{AC}\Rightarrow\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$$

■ مثال: نشان دهید سه نقطه‌ی $A(۱\,,\,۳)$ و $B(۰\,,\,۲)$ و $C(-۱\,,\,۱)$ بر یک استقامتند.

◄ حل: باید نشان دهیم $m_{AB}=m_{AC}$:

$$m_{AB}=\frac{۲-۳}{۰-۱}=۱ \quad \text{و} \quad m_{AC}=\frac{۱-۳}{-۱-۱}=۱$$

معادله‌ی خط ◄ صورت کلی معادله‌ی یک خط (معادله‌ی باز) به‌شکل $ax+by+c=۰$ است که در آن a، b و c ضرایب ثابتی هستند و a و b هر دو با هم صفر نیستند، پس:

$$ax+by+c=۰\Rightarrow \text{شیب خط}=-\frac{x\ \text{ضریب}}{y\ \text{ضریب}}=-\frac{a}{b}$$

نوع دیگر نمایش یک خط به‌شکل زیر است که در آن m، شیب خط و h، عرض از مبدأ خط است.

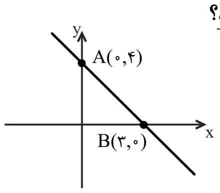
$$\text{معادله‌ی بسته‌ی خط:}\ y=mx+h$$

■ مثال: در معادله‌ی $۵x-y-۳=۰$، شیب خط $m=-\frac{۵}{-۱}=۵$ و در معادله‌ی $y=۳x+۲$، شیب خط ۳ است.

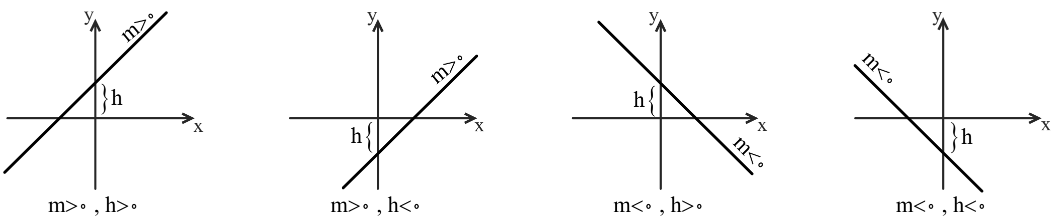
۱- رسم نمودار معادله‌ی خط: اگر معادله‌ی یک خط در اختیار باشد، برای رسم نمودار آن کافی است دو نقطه از آن را بیابیم و در دستگاه مختصات این دو نقطه را رسم و به هم وصل کنیم، برای این منظور معمولاً نقاط تلاقی با محور x ها و y ها را می‌یابیم.

■ مثال: خط به معادله‌ی $۴x+۳y=۱۲$ را رسم کنید. این خط از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

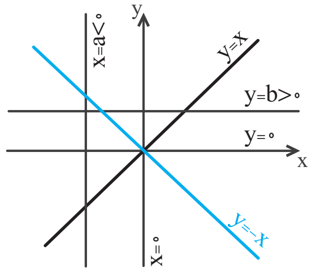
◄ حل: دو نقطه از خط را می‌یابیم، به ازای $x=۰$ در معادله، $y=۴$ حاصل می‌شود، پس یک نقطه‌ی خط، $A(۰\,,\,۴)$ است. به ازای $y=۰$ در معادله، $x=۳$ حاصل می‌شود، پس یک نقطه‌ی دیگر خط، $B(۳\,,\,۰)$ است. بنابراین نمودار خط به‌صورت روبه‌روست، دیده می‌شود که این خط از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات عبور نمی‌کند.



تذکر ◄◄ در شکل‌های زیر نمودار خط به معادله‌ی $y=mx+h$، در حالت‌های مختلف m (شیب خط) و h (عرض از مبدأ خط) رسم شده است.

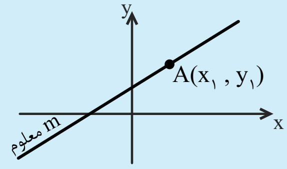
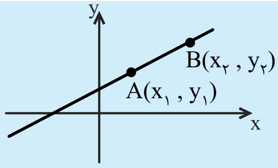
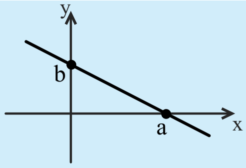


۲- معادله‌ی خطوط خاص: به معادله‌ی خطوط خاص در شکل مقابل توجه کنید:



(۱) $y = x$: نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم
(۲) $y = -x$: نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم
(۳) $y = b$: خطی موازی محور x ها
(۴) $x = a$: خطی موازی محور y ها
(۵) $y = ۰$: معادله‌ی محور x ها
(۶) $x = ۰$: معادله‌ی محور y ها
(۷) $y = mx$: خطی که از مبدأ می‌گذرد.

۳- روش‌های نوشتن معادله‌ی خط: در هر یک از حالت‌های زیر، می‌توان معادله‌ی خط را نوشت.

۱- معلوم بودن شیب و یک نقطه از خط	۲- معلوم بودن دو نقطه از خط	۳- معلوم بودن طول از مبدأ و عرض از مبدأ
		
معادله : $y - y_1 = m(x - x_1)$	معادله : $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	معادله : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

■ مثال: معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی $A(۱ , -۲)$ با شیب ۳ ، به‌صورت $y - (-۲) = ۳(x - ۱)$ است.

■ مثال: معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه‌ی $A(۲ , ۱)$ و $B(۴ , ۵)$، به‌صورت $y - ۱ = \frac{۵ - ۱}{۴ - ۲}(x - ۲)$ است.

■ مثال: معادله‌ی خط با عرض از مبدأ ۲ و طول از مبدأ ۳، به‌صورت $\frac{x}{۳} + \frac{y}{۲} = ۱$ است.

وضعیت دو خط نسبت به‌هم ◄ جدول زیر مقایسه‌ی وضعیت دو خط را نسبت به‌هم در دو حالت معادله‌ی بسته و باز نمایش می‌دهد.
$(a , a' , b , b' , m , m' \neq ۰)$

معادله‌ی بسته		معادله‌ی باز	
$y = mx + h \quad , \quad y = m'x + h'$		$ax + by + c = ۰ \quad , \quad a'x + b'y + c' = ۰$	
دو خط موازی (غیر منطبق)	$(۱)\ m = m' \ ,\ h \neq h'$	دو خط موازی (غیر منطبق)	$(۱)\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$
دو خط عمود بر هم	$(۲)\ m \times m' = -۱$	دو خط عمود بر هم	$(۲)\ aa' + bb' = ۰$
دو خط متقاطع	$(۳)\ m \neq m'$	دو خط متقاطع	$(۳)\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

■ مثال: معادله‌ی خط Δ گذرنده از نقطه‌ی $A(۱ , ۳)$ در دو حالت زیر را بیابید.

الف- خط Δ با خط $L : ۲y + ۳x = ۵$ موازی باشد.   ب- خط Δ بر خط $\Delta' : y = ۵x - ۲$ عمود باشد.

◄ حل: الف- شیب خط Δ با شیب خط L برابر است، پس معادله‌ی آن $۲y + ۳x = k$ است و نقطه‌ی $A(۱ , ۳)$ در آن صدق می‌کند، بنابراین $k = ۲ \times ۳ + ۳ \times ۱$ یا $k = ۹$، پس $\Delta : ۲y + ۳x = ۹$.

ب- باید $m_\Delta . m_{\Delta'} = -۱$، از آن‌جایی‌که $m_{\Delta'} = ۵$، پس $m_\Delta = -\frac{۱}{۵}$، در نتیجه معادله‌ی خط $\Delta : y - ۳ = -\frac{۱}{۵}(x - ۱)$.

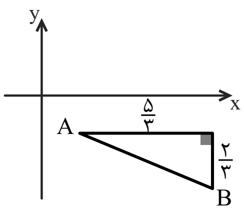
تذکر ⏮ معادله‌ی خط عمود بر خط $y = b$ که از نقطه‌ی (a , b) عبور می‌کند، به‌صورت $x = a$ است.

تذکر ⏮ معادله‌ی خط عمود بر خط $x = a$ که از نقطه‌ی (a , b) عبور می‌کند، به‌صورت $y = b$ است.

یادآوری و تکمیل معادله‌ی خط | صفحه‌های ۲ تا ۴ کتاب درسی

۱- در شکل زیر ضریب زاویه‌ی خطی که از دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد، کدام است؟

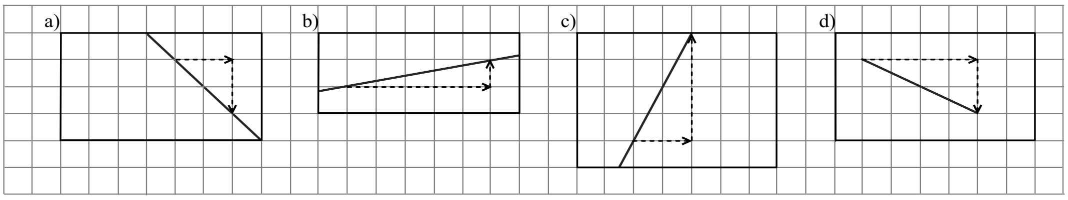
(صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴ - الف) و (سراسری تجربی - ۷۳)



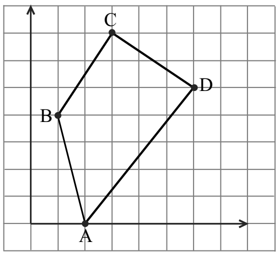
۱) $\frac{۵}{۲}$
۲) $\frac{۲}{۵}$
۳) $-\frac{۲}{۵}$
۴) $-\frac{۵}{۲}$

۲- در شکل‌های زیر، قدر مطلق اختلاف بین بیش‌ترین و کم‌ترین شیب کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴- الف)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

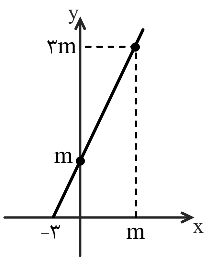


۳- در شکل زیر، چهار ضلعی $ABCD$ رسم شده است. مجموع شیب‌های اضلاع (خطوط) کدام است؟
(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۳- الف)



۱) $-\frac{۲۳}{۱۲}$
۲) $\frac{۲۳}{۱۲}$
۳) $\frac{۲۳}{۶}$
۴) $-\frac{۲۳}{۶}$

۴- مقدار m در شکل زیر، کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴- الف) و (آزمون کانون- ۹۱)

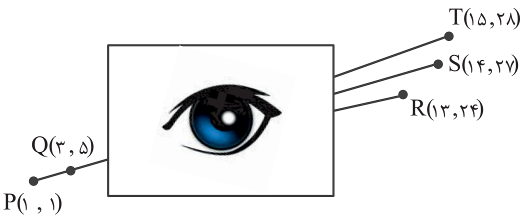


۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۵- به ازای کدام مقادیر a، نقاط $(a,۳)$، $(۴a+۱ , ۶)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟
(صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴- الف) و (سراسری تجربی خارج ازکشور- ۸۵)

۱) $-۲,\frac{۹}{۴}$ ۲) $۲,\frac{۳}{۴}$ ۳) $-۲,\frac{-۳}{۴}$ ۴) $۲,\frac{-۹}{۴}$

۶- (یک خطای دید!) کدام‌یک از نقاط R، S و T روی خط PQ قرار دارند؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴- الف)



۱) R
۲) S
۳) T
۴) هیچ‌کدام

۷- سه نقطه‌ی $C(-۴ , ۸)$، $B(-۳ , ۱)$ و $A(۰ , m)$ را در نظر بگیرید، اگر شیب خطی که دو نقطه‌ی B و C را به‌هم وصل می‌کند عکس و قرینه‌ی شیب خطی باشد که دو نقطه‌ی A و B را به‌هم وصل کرده است، m کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴- الف)

۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۱۰}{۷}$ ۳) $\frac{۱۵}{۷}$ ۴) $\frac{۲۰}{۷}$

۸- عرض از مبدأ خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(۲ - , ۳)$ و $(۱ , ۲)$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۳- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۶) و (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۵)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

۹- خط گذرنده بر دو نقطه‌ی $(-۲,۳)$ و $(۷,-۳)$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟
(صفحه‌ی ۳- کار در کلاس- مکمل تمرین ۶- ب) و (سراسری فنی و حرفه‌ای- ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳/۵ ۴) ۲/۵

۱۰- برای رسیدن از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B، ابتدا ۴ واحد به چپ و سپس ۳ واحد به طرف پایین حرکت می‌کنیم. اگر پاره‌خط AB، محور xها را در نقطه به‌طول ۶ قطع کند، معادله‌ی خط AB کدام است؟

(صفحه‌های ۲ و ۳- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴ و ۶) و (سراسری فنی و حرفه‌ای- ۹۱)

۱) $۳y+۴x=-۸$ ۲) $۴y-۳x=-۱۸$ ۳) $۴y-۳x=۱۸$ ۴) $۴y+۳x=۸$

۱۱- به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=mx+m-۳$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(صفحه‌های ۲ و ۳- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲ و ۶) و (سراسری انسانی- ۹۴)

۱) $۰\le m\le ۳$ ۲) $m\ge ۳$ ۳) $m\le ۰$ ۴) هیچ مقدار m

۱۲- به ازای کدام مقادیر m، خط به معادله‌ی $y=(m-۱)x+۲-m$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(صفحه‌های ۲ و ۳- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲ و ۶) و (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۴)

۱) $m>۱$ ۲) $۱<m<۲$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

۱۳- اگر m و b اعداد حقیقی و $mb>۰$، کدام‌یک از نقاط زیر نمی‌تواند در معادله‌ی خط $y=mx+b$ صدق کند؟

(صفحه‌های ۲ و ۳- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲ و ۶)

۱) $(۰\,,\,۱۳۸۹)$ ۲) $(۰\,,\,-۱۳۸۹)$ ۳) $(۱۳\,,\,۸۹)$ ۴) $(۱۳۸۹\,,\,۰)$

۱۴- خط گذرنده بر نقطه‌ی $(۴,-۲)$ و موازی خط به معادله‌ی $۲y-x=۴$، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

(صفحه‌های ۲ و ۳- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲ و ۶) و (سراسری انسانی- ۸۹)

۱) $(۲,-۴)$ ۲) $(۶,-۱)$ ۳) $(۸,-۱)$ ۴) $(۱۰,۲)$

۱۵- عرض از مبدأ خطی که از نقطه‌ی $(۲,-۳)$ موازی خط گذرنده بر دو نقطه $(۱,۴)$ و $(-۱,۵)$ رسم شود، کدام است؟

(صفحه‌های ۲ و ۳- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۴ و ۶) و (سراسری انسانی خارج از کشور- ۹۰)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۴

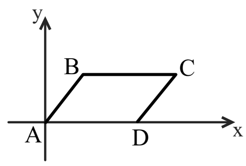
۱۶- مساحت متوازی‌الاضلاع محدود به خطوطی به معادله‌ی $y=x+۳$ و $x=۴$ و محور yها و نیمساز ناحیه‌ی اول برابر کدام است؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری تجربی - ۷۷)

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۷- در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. اگر اندازه‌ی ضلع BC برابر ۵ باشد و معادله خطی که ضلع AB روی آن قرار دارد، $y-۲x=۰$ باشد و معادله خطی که ضلع CD روی آن قرار دارد $ay+bx+۵=۰$ باشد، آن‌گاه $a+b$ برابر کدام گزینه است؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱) و (آزمون کانون- ۹۱)



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) -۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۱۸- دو ضلع OC و OA از متوازی‌الاضلاع $OABC$ به ترتیب روی محور xها و نیمساز ربع اول واقع‌اند و مختصات رأس B به صورت $B(۳\,,\,۲)$ است. مجموع طول و عرض رأس C کدام است؟ (O مبدأ مختصات است.)

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱) و (آزمون کانون- ۱۹ اردیبهشت ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۹- کدام دو خط زیر بر هم عمود نیستند؟

(صفحه‌ی ۳- فعالیت- نتیجه‌ی تمرین ۲)

۱) $x=۱$ و $y=-۲$ ۲) $y=x$ و $y=-x$

۳) $۳x-y+۲=۰$ و $y=-۳x+۲$ ۴) $y+۷=-\frac{۱}{۵}x$ و $y-۵x+۳=۰$

۲۰- عرض از مبدأ خط گذرا بر نقطه‌ی $(-۱\,,\,۵)$ و عمود بر خط $y=۲x+۱$، کدام است؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲- ب) و (سراسری انسانی - ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

۲۱- دو خط $\Delta: y=(۲a-۱)x$ و $\Delta': y-۵x+۳=۰$ بر هم عمودند، خط $y=-۱$، خط Δ را در چه طولی قطع می‌کند؟

(صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مکمل تمرین ۲- ب)

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

۲۲- خط گذرنده بر دو نقطه‌ی $A(a\,,-b)$ و $B(-b\,,a)$ همواره بر کدام خط زیر عمود است؟ (صفحه‌ی ۳ – فعالیت – مرتبط با تمرین‌های ۱ و ۲)

۱) $y=-x$ ۲) $y=x$ ۳) $y=-۲x+a$ ۴) $y=۲x+b$

۲۳- خطی که در نقطه‌ی $A(۱\,,۱)$ بر خط گذرنده بر دو نقطه‌ی A و $B(-۱\,,-۳)$ عمود است، محور y ها را در چه عرضی قطع می‌کند؟
(صفحه‌ی ۳ – فعالیت – مرتبط با تمرین‌های ۱ و ۲)

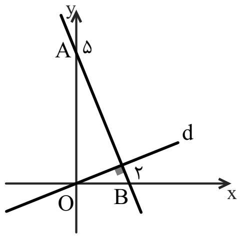
۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

۲۴- مثلث ABC با رئوس $A(۱\,,۱)$، $B(-۱\,,-۳)$ و $C(۲\,,۰)$، در کدام رأس قائمه است؟ (صفحه‌ی ۳ – فعالیت – مرتبط با تمرین ۳)

۱) A ۲) B ۳) C ۴) مثلث قائم‌الزاویه نیست.

۲۵- در شکل زیر، معادله‌ی خط d (ارتفاع وارد بر ضلع AB از مثلث ABO)، کدام است؟ (صفحه‌ی ۳ – فعالیت – مرتبط با تمرین ۱)

۱) $۵y-۲x=۰$
۲) $۵x-۲y=۰$
۳) $۵y+۲x=۰$
۴) $۵x+۲y=۰$



۲۶- اگر $A(-۱,۲)$ ، $B(۳,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادلهٔ ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس A کدام است؟
(صفحه‌ی ۴ – کار در کلاس – مرتبط با تمرین ۳ – ب) و (آزمون کانون – ۱ اردیبهشت ۹۵)

۱) $y=-x-۳$ ۲) $y=-x+۱$ ۳) $y=-۲x$ ۴) $y=x+۳$

۲۷- معادله‌های دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه $x+y=۵$ و $y=۳x+۲$ هستند، اگر خط Δ گذرنده از مبدأ، ضلع سوم این مثلث باشد، طول مختصات رأس قائمهٔ کدام است؟ (صفحه‌ی ۴ – کار در کلاس – مرتبط با تمرین ۳)

۱) $-۰/۶$ ۲) $-۰/۳$ ۳) $-۰/۲$ ۴) $-۰/۱$

۲۸- معادله‌ی سه ضلع یک مثلث $x+y=۱$ و $y=۲x$ و $x=۱$ است، معادله‌ی خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟ (صفحه‌ی ۴ – کار در کلاس – مرتبط با تمرین ۳ – ب) و (سراسری تجربی – ۸۴)

۱) $y=\frac{۲}{۳}$ ۲) $x=\frac{۲}{۳}$ ۳) $y+x=\frac{۲}{۳}$ ۴) $y+x=\frac{۱}{۳}$

۲۹- تصویر نقطه‌ی $A(-۳\,,۲)$ بر روی خط $L:۳y-۲x+۱=۰$، نقطه‌ی $B(a\,,b)$ است. $a+b$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۴ – کار در کلاس – مرتبط با تمرین ۳ – ب)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۱

مسائل کاربردی | صفحه‌ی ۸ کتاب درسی

۳۰- یک آژانس املاک، مجتمعی مرکب از ۵۰ آپارتمان در اختیار دارد. وقتی اجاره ۳۸۰ هزار تومان در ماه است همه‌ی آپارتمان‌ها اشغال هستند. ولی وقتی اجاره ۴۲۵ هزار تومان باشد، تعداد آپارتمان‌های اشغال شده ۴۷ واحد است. اگر رابطه‌ی اجاره ماهیانه (P) برحسب هزار تومان و تقاضای واحد (x)، خطی باشد، معادله‌ی خطی آن کدام است؟ $(x\le ۵۰)$
(صفحه‌ی ۸ – کار در کلاس – مرتبط با تمرین ۳)

۱) $P=-۱۵x+۱۰۰۰$ ۲) $P=-۱۵x+۱۱۳۰$ ۳) $P=۱۵x+۱۱۳۰$ ۴) $P=۱۵x-۱۱۳۰$

۱. هندسه‌ی تحلیلی
- فاصله‌ی دو نقطه
- مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط
- فاصله‌ی نقطه از خط

صفحه‌های ۴ تا ۱۰ کتاب درسی

فاصله‌ی دو نقطه (اندازه‌ی یک پاره‌خط)

اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله‌ی بین A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$AB = |x_B - x_A|$$

فاصله‌ی بین دو نقطه (اندازه‌ی یک پاره‌خط) ◀ فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ را با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه می‌توانیم محاسبه کنیم وخواهیم داشت:

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

چند حالت خاص: ۱- فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۱ , y_۱)$ از مبدأ مختصات برابر $OA = \sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲}$ است.
۲- اگر دو نقطه‌ی A و B هم‌عرض باشند، اندازه‌ی پاره‌خط AB برابر $|x_B - x_A|$ است.
۳- اگر دو نقطه‌ی A و B هم‌طول باشند، اندازه‌ی پاره‌خط AB برابر $|y_B - y_A|$ است.

■ مثال: نقطه‌ی M واقع بر محور طول‌ها از دو نقطه‌ی $A(-۲ , ۳)$ و $B(۴ , -۱)$ به یک فاصله است. مختصات نقطه‌ی M را بیابید.

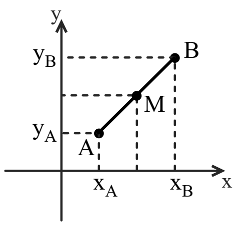
◀ حل: نقطه‌ی M بر روی محور طول‌هاست، پس $M(x , ۰)$. فاصله این نقطه از دو نقطه‌ی A و B برابر است، پس:

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x+۲)^۲ + ۳^۲} = \sqrt{(x-۴)^۲ + ۱^۲} \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۱۳ = x^۲ - ۸x + ۱۷ \Rightarrow ۱۲x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow M(\frac{۱}{۳} , ۰)$$

مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط

هرگاه $A(x_A , y_A)$ و $B(x_B , y_B)$ دو نقطه در دستگاه مختصات باشند، آنگاه مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{۲} , \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$$



■ مثال: اگر $A(۲ , -۱)$ و $C(۳ , \frac{۱}{۲})$، نقطه‌ی B را چنان بیابید که نقطه‌ی A وسط پاره‌خط BC باشد.

◀ حل:

$$BC \text{ وسط } A \Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{x_B + x_C}{۲} \\ y_A = \dfrac{y_B + y_C}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲ = \dfrac{x_B + ۳}{۲} \\ -۱ = \dfrac{y_B + \frac{۱}{۲}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = ۱ \\ y_B = -\frac{۵}{۲} \end{cases} \Rightarrow B(۱ , -\frac{۵}{۲})$$

■ مثال: معادله‌ی خط عمود منصف پاره‌خطی که دو نقطه‌ی $A(۰ , ۴)$ و $B(۲ , ۰)$ را به هم وصل می‌کند، را بیابید.

◀ حل: خط مطلوب (Δ)، بر پاره‌خط AB عمود است، از طرفی نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB در این خط صدق می‌کند، بنابراین:

$$m_{AB} = \frac{۰-۴}{۲-۰} = -۲ \Rightarrow m_\Delta = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad M\left(\frac{۲+۰}{۲} , \frac{۴+۰}{۲}\right) = (۱ , ۲)$$

معادله‌ی خط عمود منصف برابر $y - ۲ = \frac{۱}{۲}(x-۱)$ یا $۲y - x - ۳ = ۰$ است.

فاصله‌ی نقطه از خط

برای یافتن فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_۰ , y_۰)$ از خط $ax + by + c = ۰$، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$AH = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

■ مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۸ , ۸)$ از خط $۴x - ۳y + ۷ = ۰$ را بیابید.

◀ حل:

$$AH = \frac{|۴(۸) - ۳(۸) + ۷|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

تذکر فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط $ax+by+c=0$ برابر $OH=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است.

تذکر برای یافتن فاصله‌ی دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تذکر در دو خط موازی، چنانچه ضرایب x و y دو خط مساوی نباشند، متناسبند و با ضرب یا تقسیم طرفین معادله‌ی یکی از خطوط بر عدد مناسب، باید ضرایب را مساوی می‌کنیم.

مثال: دو ضلع یک مربع بر خطوط $x+y-1=0$ و $x+y-5=0$ منطبق‌اند، محیط آن را بیابید.

حل: دو خط موازیند، پس با یافتن فاصله‌ی آنها، طول ضلع مربع به‌دست می‌آید:

$$\text{طول ضلع مربع}=\frac{|-1+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$$\text{محیط مربع}=4\,(\text{اندازه‌ی ضلع})=4(2\sqrt{2})=8\sqrt{2}$$

فاصله‌ی دو نقطه | **صفحه‌های ۴ تا ۶ و تمرین صفحه‌ی ۹ کتاب درسی**

۳۱- فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات $3y=2x+11$ و $2y+x=5$ کدام است؟

(صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۳) و (سراسری انسانی- ۹۱)

۱) ۲ ۲) $\sqrt{8}$ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{10}$

۳۲- اگر $A(4,4)$ و $C(1,1)$ دو رأس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟

(صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱- پ) و (سراسری تجربی- ۷۱)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۸

۳۳- سه نقطه‌ی $A(0,-1)$ و $B(3,1)$ و $C(2,-4)$ سه رأس یک مثلث‌اند. این مثلث همواره چگونه است؟ (صفحه‌ی ۶- کار در کلاس- مشابه تمرین ۱)

۱) متساوی‌الاضلاع
۲) متساوی‌الساقین است، ولی قائم‌الزاویه نیست.
۳) قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین
۴) قائم‌الزاویه است، ولی متساوی‌الساقین نیست.

۳۴- خطی با شیب $-\frac{3}{4}$ از نقطه‌ی $A\left(2,\frac{5}{2}\right)$ گذشته و محورهای مختصات را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله‌ی این دو نقطه‌ی تقاطع کدام است؟

(صفحه‌های ۳ و ۵- ترکیبی) و (سراسری انسانی خارج از کشور- ۸۸)

۱) $6\frac{1}{3}$ ۲) $6\frac{2}{3}$ ۳) $7\frac{1}{3}$ ۴) $7\frac{2}{3}$

۳۵- نقطه‌ی $(a,2a)$ مرکز دایره‌ی گذرنده بر دو نقطه‌ی $(1,2)$ و $(-1,4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

(صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۴- ب) و (سراسری تجربی - ۸۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۳۶- شعاع دایره‌ای که از دو نقطه‌ی $(0,0)$ و $(1,3)$ گذشته و مرکز آن روی خط به معادله‌ی $y=2x$ باشد، کدام است؟

(صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۴- ب) و (سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۶)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $\sqrt{13}$

۳۷- دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(1,0)$ و $(3,0)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x-y=2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

(صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۴- ب) و (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۳۸- دایره‌ای محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

(صفحه‌ی ۹- مرتبط با تمرین ۴- ب) و (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۵)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

۳۹- مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادله‌های $y+x=2$ و $2y-x=4$ و ضلع دیگر آن بر محور ox قرار دارد، کدام است؟

(صفحه‌ی ۵- فعالیت- نتیجه‌ی پ) و (سراسری تجربی- ۷۳)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۴۰– در مستطیل ABCD داریم $A(۶, -۲۲)$، $B(۲۰۰۶, ۱۷۸)$ و $D(۸, y)$، محیط مستطیل چند برابر $\sqrt{۱۰۱}$ است؟
(صفحه‌ی ۹– مکمل تمرین ۵)

۱) ۴۰۴ ۲) ۲۰۲ ۳) ۲۰۰ ۴) ۴۰۰

مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط	صفحه‌های ۶ تا ۸ و تمرین صفحه‌ی ۹ کتاب درسی

۴۱– قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۳, ۵)$ نسبت به نقطه‌ی $B(۰, -۴)$ روی کدام خط زیر قرار ندارد؟
(صفحه‌ی ۷– کار در کلاس– مکمل تمرین ۲– ب)

۱) $x+y+۱۰=۰$ ۲) $۲x-y-۷=۰$ ۳) $x+۳=۰$ ۴) $y+۱۳=۰$

۴۲– نقطه‌ی وسط دو نقطه‌ی $A(m, -n)$ و $B(-n, m)$ همواره روی کدام خط زیر قرار دارد؟
(صفحه‌ی ۷– مرتبط با فعالیت– ث)

۱) $y=-x$ ۲) $y=x$ ۳) $y=-x+m$ ۴) $y=x+n$

۴۳– دو نقطه‌ی $A(۲, -۱)$ و $C(۳, ۰/۵)$ مفروضند. اگر نقطه‌ی A وسط پاره‌خط BC باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی B از مبدأ مختصات چند برابر $\sqrt{۲۹}$ است؟
(صفحه‌های ۵ و ۷– ترکیبی)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۴۴– اگر $A(۸, ۰)$ و $B(۰, ۰)$ دو رأس یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند، مربع عرض رأس سوم کدام است؟
(صفحه‌ی ۹– مرتبط با تمرین ۳)

۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۵۶ ۴) ۶۸

۴۵– نقاط $A(۲\beta, \beta)$ و $B(\beta+۳, \beta-۴)$ دو رأس مثلث ABC و معادله‌ی میانه‌ی نظیر رأس C خط $y=۵$ می‌باشد، مختصات وسط AB کدام است؟
(صفحه‌ی ۷– کار در کلاس– مکمل تمرین ۱) و (سراسری تجربی– ۷۱)

۱) $(۵, ۹)$ ۲) $(۵, ۱۲)$ ۳) $(۹, ۵)$ ۴) $(۱۲, ۵)$

۴۶– نقاط $A(۲, -۱)$ و $B(۰, ۱)$ و $C(-۱, ۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. طول میانه‌ی CM برابر است با:
(صفحه‌ی ۷– کار در کلاس– مشابه تمرین ۱) و (آزاد غیر پزشکی – ۷۶)

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۴۷– اگر $A(۳,۵)$، $B(-۲,۱)$ و $C(۱,-۱)$ رئوس مثلث ABC باشند، معادله میانه‌ی BM کدام است؟
(صفحه‌ی ۷– کار در کلاس– مشابه تمرین ۱) و (سراسری فنی و حرفه‌ای– ۸۹)

۱) $۲y=x+۶$ ۲) $۲y=x+۴$ ۳) $۴y=x+۴$ ۴) $۴y=x+۶$

۴۸– نقطه‌ی $A(۷, ۶)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $۲y-۳x=۱۱$ و $۳y+۴x=۸$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟
(صفحه‌ی ۹– مکمل تمرین ۵) و (سراسری تجربی – ۹۰)

۱) $(۱, ۵)$ ۲) $(۳, ۴)$ ۳) $(۳, ۵)$ ۴) $(۴, ۳)$

۴۹– نقطه‌ی A به‌طول ۴ واقع بر محور xها و نقطه‌ی B به عرض ۲– روی محور yهاست. معادله‌ی خطی که از وسط AB بر آن عمود باشد، کدام است؟
(صفحه‌های ۳ و ۷– ترکیبی) و (سراسری انسانی خارج کشور – ۸۷)

۱) $۲y+x=۰$ ۲) $۲y+x=۱$ ۳) $y+۲x=۳$ ۴) $y+۲x=۴$

۵۰– اگر $A(۲,۴)$ و $B(-۴,۲)$، آنگاه عمود منصف پاره‌خط AB، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟
(صفحه‌های ۳ و ۷– ترکیبی) و (آزمون کانون– ۲۲ آبان ۸۸)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) صفر

۵۱– سه نقطه‌ی $(۴, ۰)$، $(۰,۲)$ و مبدأ مختصات رأس‌های یک مثلث هستند. ارتفاع و میانه‌ی وارد بر بزرگ‌ترین ضلع این مثلث، آن را به ترتیب در H و M قطع کرده است. طول MH چند برابر $\sqrt{۵}$ است؟
(صفحه‌های ۳ و ۷– ترکیبی) و (آزمون کانون– ۹۱)

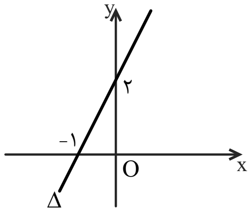
۱) ۰/۸ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۲

۵۲– نقطه‌های $Q(۱, ۲)$، $P(۴, ۰)$ و مبدأ مختصات، رأس‌های یک مثلث‌اند. اگر عمودمنصف ضلع بزرگ این مثلث، امتداد ضلع کوچک آن را در نقطه‌ی R قطع کند، آنگاه فاصله‌ی نزدیک‌ترین رأس مثلث از نقطه‌ی R کدام است؟
(صفحه‌های ۳ و ۷– ترکیبی) و (آزمون کانون– ۹۱)

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) ۳

فاصله‌ی نقطه از خط | صفحه‌های ۸ تا ۱۰ کتاب درسی

۵۳– در شکل مقابل، فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط Δ کدام است؟ (صفحه‌ی ۸– مشابه مثال)



۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۵۴– دو نقطه بر خط به معادله‌ی $y = x - ۱$ قرار دارند که فاصله‌ی این نقاط از خط به معادله‌ی $۲x - ۳y = ۵$، برابر $\sqrt{۱۳}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– کار درکلاس– مکمل تمرین ۱) و (سراسری تجربی– ۸۹)

۱) ۹ و ۱۵- ۲) ۱۱ و ۱۵- ۳) ۱۵ و ۱۱- ۴) ۹- و ۱۱

۵۵– دو نقطه‌ی A و B واقع بر خط به معادله‌ی $۲x - y = ۰$ از خط به معادله‌ی $۳x = ۴y + ۵$ به فاصله‌ی ۲ قرار دارند. طول پاره‌خط AB کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– کار درکلاس– مرتبط با تمرین ۱) و (آزمون کانون– ۲۰ خرداد ۸۹)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۵۶– نقاط $A(۰, ۳)$، $B(۲, ۰)$ و $C(۱, ۱)$ رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– کار درکلاس– مرتبط با تمرین ۱) و (آزمون کانون– ۱۶ خرداد ۹۲)

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$ ۳) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}$

۵۷– خط $۳x - ۴y - ۲ = ۰$ بر دایره به مرکز $O(-۲, ۳)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– کار در کلاس– مشابه تمرین ۲)

۱) ۱۶π ۲) ۴π ۳) ۸π ۴) ۳۲π

۵۸– یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله‌ی $y = x + ۲$ و نقطه‌ی $A(۳, -۱)$ یک رأس آن است. اندازه‌ی قطر مربع کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– مکمل تمرین ۷) و (سراسری ریاضی– ۷۵)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۵۹– نقطه‌ی $A(۳, -۱)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله‌ی $۲y - x = ۵$ است. مساحت این مربع کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– مرتبط با تمرین ۷) و (سراسری تجربی خارج از کشور– ۹۳)

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۶۰– دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $۲y + x = ۶$ و $۲x - y = ۷$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(۸, ۵)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری تجربی خارج از کشور– ۹۰)

۱) ۷/۲ ۲) ۹/۶ ۳) ۱۱/۴ ۴) ۱۲/۸

۶۱– فاصله‌ی دو خط به معادلات $y = \sqrt{۳}x + ۲$ و $\sqrt{۳}y - ۳x + ۶ = ۰$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– مشابه تمرین ۸– ب) و (سراسری تجربی خارج از کشور– ۸۸)

۱) $۲ - \sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳} - ۱$ ۳) $\sqrt{۳} + ۱$ ۴) $۲ + \sqrt{۳}$

۶۲– دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $۲x - ۲y = ۳$ و $y = x + ۱$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– مرتبط با تمرین ۸– ب) و (سراسری تجربی– ۹۲)

۱) $\frac{۹}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۲۵}{۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴}$

۶۳– عرض از مبدأ مثبت خطی که از خط به معادله‌ی $۳x + ۴y = ۱$ به فاصله‌ی ۲ است، کدام است؟ (صفحه‌ی ۹– مرتبط با تمرین ۸) و (آزمون کانون– ۳۱ اردیبهشت ۹۵)

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۷۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۰/۲۵

۲. معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه ۲

روش تغییر متغیر برای حل معادله

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم با استفاده از S و P

صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۸ کتاب درسی

یادآوری (معادله‌ی درجه‌ی دوم) هر معادله به شکل $ax^{2}+bx+c=0$ $(a\neq 0)$، یک معادله‌ی درجه‌ی دوم نامیده می‌شود.

فرمول کلی حل معادله‌ی $ax^{2}+bx+c=0$، $(a\neq 0)$ به‌صورت روبه‌روست: $x'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x''=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

که در آن $\Delta=b^{2}-4ac$، مبین (دلتای) معادله نامیده می‌شود. اگر $\Delta\geq 0$، معادله ریشه‌ی حقیقی دارد و اگر $\Delta<0$ باشد معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

■ **مثال:** به حل معادلات زیر (با روش خواسته شده)، توجه کنید.

(a) $x^{2}+2x=0$ (روش فاکتورگیری) $\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow x=0$ یا $x=-2$

(b) $x^{2}+5x+6=0$ (روش تجزیه) $\Rightarrow (x+...)(x+...)=0$

$\xrightarrow[\text{و مجموع آن‌ها ۵ باشد}]{\text{دو عدد می‌یابیم که حاصلضرب آن‌ها ۶}} (x+3)(x+2)=0 \Rightarrow x=-3$ یا $x=-2$

(c) $x^{2}-2x-11=0$ (فرمول کلی)

$$\Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^{2}-4\times(-11)}}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{48}}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pm 2\sqrt{12}}{2}\Rightarrow x=1\pm\sqrt{12}\Rightarrow x=1+\sqrt{12} \text{ یا } x=1-\sqrt{12}$$

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در حل بعضی از معادلات، می‌توانیم با انتخاب یک متغیر جدید، معادله را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم بر حسب متغیر جدید تبدیل کرده و معادله‌ی به‌دست آمده بر حسب متغیر جدید را حل کنیم و با رجوع به تغییر متغیر صورت گرفته، مقادیر معادله‌ی اولیه را بیابیم.

■ **مثال:** به حل معادلات زیر توجه کنید.

(۱) $x^{4}-8x^{2}+8=0$

◄ **حل:** با فرض $x^{2}=t\geq 0$، معادله‌ی درجه‌ی دوم $t^{2}-8t+8=0$ حاصل می‌شود. با حل این معادله برحسب t خواهیم داشت:

$$t=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^{2}-4(8)}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{32}}{2}=4\pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow t=x^{2}=4\pm 2\sqrt{2}\Rightarrow x=\pm\sqrt{4\pm 2\sqrt{2}}$$

پس معادله ۴ ریشه دارد.

(۲) $x^{6}-6x^{3}+5=0$

◄ **حل:** با فرض $x^{3}=t$، معادله‌ی درجه‌ی دوم $t^{2}-6t+5=0$ حاصل می‌شود. با استفاده از روش تجزیه برای این معادله خواهیم داشت:

$$t^{2}-6t+5=0\Rightarrow (t-5)(t-1)=0\Rightarrow t=1 \text{ یا } t=5$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x^{3}=1\Rightarrow x=1 \\ x^{3}=5\Rightarrow x=\sqrt[3]{5} \end{cases}$$

پس معادله دارای دو ریشه است.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی باشند، آنگاه:

$$(x-x')(x-x'')=0\Rightarrow x^{2}-(x'+x'')x+x'x''=0 \quad (1)$$

از طرفی در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^{2}+bx+c=0$ با ریشه‌های x' و x''، با تقسیم طرفین معادله بر $a\neq 0$، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$ax^{2}+bx+c=0\Rightarrow x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad (2)$$

با مقایسه‌ی دو معادله‌ی معادل (۱) و (۲)، نتیجه می‌گیریم:

$$x'+x''=\frac{-b}{a} \text{ و } x'.x''=\frac{c}{a}$$

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^{2}+bx+c=0$ باشند، آنگاه:

$S=x'+x''=\dfrac{-b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها)   *$P=x'.x''=\dfrac{c}{a}$ (حاصل‌ضرب ریشه‌ها)*

همچنین قدر مطلق تفاضل ریشه‌ها برابر $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است.

■ **مثال:** مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^{2}-5x-3=0$ را بدون حل آن بیابید.

◄ **حل:** توجه کنید که $\Delta=(-5)^{2}-4(-3)=37>0$، بنابراین:

$$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{1}=5 \quad \text{و} \quad P=\frac{c}{a}=\frac{-3}{1}=-3$$

تذکر (۱) در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$:

الف- اگر مجموع ضرایب معادله صفر باشد $(a+b+c=0)$، آنگاه یک ریشه‌ی معادله ۱ و ریشه‌ی دیگر برابر $\frac{c}{a}$ است.

ب- اگر $a+c=b$، آنگاه یک ریشه‌ی معادله (-1) و ریشه‌ی دیگر $\frac{-c}{a}$ است.

■ **مثال:** ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ را بیابید.

◂ **حل:** مجموع ضرایب معادله صفر است، پس یک ریشه ۱ و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$ است.

تذکر (۲) معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$:

الف- اگر دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه‌ی هم باشد، آنگاه $\Delta>0$ و $b=0$. زیرا $x'=-x''$، پس $x'+x''=\frac{-b}{a}=0$، در نتیجه $b=0$.

ب- اگر دارای دو ریشه‌ی حقیقی و عکس هم باشد، آنگاه $\Delta>0$ و $a=c$. زیرا $x'=\frac{1}{x''}$، پس $x'.x''=\frac{c}{a}=1$ در نتیجه $a=c$.

■ **مثال:** به ازای چه مقدار m، معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m^2+1)x^2+(m^2-1)x+m^2+3m-2=0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه است؟

◂ **حل:** باید $b=0$ و $\Delta>0$، در نتیجه $m^2-1=0$ و از آنجا $m=1$ یا $m=-1$. به ازای این مقادیر m، در معادله خواهیم داشت:

$$m=1\Rightarrow 2x^2+2=0\Rightarrow \Delta=0-16<0 \quad \text{(غ ق ق) ریشه‌ی حقیقی ندارد.}$$

$$m=-1\Rightarrow 2x^2-4=0\Rightarrow \Delta=0+32>0 \quad \text{(ق ق)}$$

تذکر (۳) در مواردی که برای محاسبه‌ی مجهول معادله، رابطه‌ای جبری بین دو ریشه داده شده، معمولاً با استفاده از S یا P، یک ریشه‌ی معادله را یافته و با صدق دادن ریشه در خود معادله، مجهول خواسته شده را می یابیم.

■ **مثال:** در معادله‌ی $2x^2-10x+a=0$، یک ریشه از دو برابر ریشه‌ی دیگر، یک واحد بیشتر است. a را بیابید.

◂ **حل:** اگر ریشه‌ها را x' و x'' بنامیم، آنگاه $x'=2x''+1$. با افزودن x'' به طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$x'+x''=3x''+1\xrightarrow{x'+x''=\frac{10}{2}=5}5=3x''+1\Rightarrow x''=\frac{4}{3}$$

همواره ریشه‌ی معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس با قراردادن $\frac{4}{3}$ در معادله خواهیم داشت:

$$2(\frac{4}{3})^2-10(\frac{4}{3})+a=0\Rightarrow\frac{32}{9}-\frac{40}{3}+a=0\Rightarrow a=\frac{88}{9}$$

تذکر (۴) در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، با توجه به شرایط Δ (مبین معادله)، $S=\frac{-b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $P=\frac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها)، می‌توانیم تعداد و علامت ریشه‌های معادله را بیابیم.

$(1)\ \Delta>0\Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد $\Rightarrow$
- $\frac{c}{a}>0$ دو ریشه‌ی متحدالعلامت $\Rightarrow$
  - $\frac{-b}{a}>0$ هر دو ریشه مثبت
  - $\frac{-b}{a}<0$ هر دو ریشه منفی
- $\frac{c}{a}<0$ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت

$(2)\ \Delta=0\Rightarrow$ یک ریشه‌ی مضاعف دارد $\Rightarrow x'=x''=\frac{-b}{2a}\Rightarrow$
- $\frac{-b}{a}>0$ ریشه‌ی مضاعف مثبت است.
- $\frac{-b}{a}<0$ ریشه‌ی مضاعف منفی است.

$(3)\ \Delta<0\Rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد

■ **مثال:** بدون حل معادله، در مورد تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-7x+1=0$ نظر دهید.

◂ **حل:** $\Delta=(-7)^2-4(2)(1)>0$، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، از طرفی $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}>0$، پس هر دو ریشه متحدالعلامت هستند. همچنین $\frac{-b}{a}=\frac{7}{2}>0$، پس هر دو ریشه مثبت‌اند.

توجه در معادله‌ی درجه دوم اگر $\frac{c}{a} < 0$ یا $ac < 0$ باشد، آنگاه معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت است.

■ **مثال:** معادله‌ی $3x^2 - ax - m^2 - 1 = 0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

◄ **حل:** چون $\frac{c}{a} = \frac{-m^2 - 1}{3} < 0$ ، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

■ **مثال:** تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $x^4 - 4x^2 - 7 = 0$ را بدون حل آن بیابید.

◄ **حل:** با انتخاب $x^2 = t \geq 0$، معادله‌ی $t^2 - 4t - 7 = 0$ حاصل می‌شود. در این معادله:

$$\Delta = 16 - 4(-7) = 16 + 28 > 0 \quad \text{و} \quad \frac{c}{a} = -7 < 0 \quad \text{(دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت)}$$

پس معادله برحسب t، دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت است، یعنی یک ریشه‌ی مثبت (t_1) و یک ریشه‌ی منفی (t_2). از آنجایی که $x^2 = t \geq 0$، فقط مقدار مثبت t برای x^2 قابل قبول است. بنابراین معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه $(x = \pm\sqrt{t_1})$ است.

تشکیل معادله‌ی درجه دوم با استفاده از S و P

معادله‌ی درجه‌ی‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با ریشه‌های حقیقی x' و x'' را می‌توان بر حسب S و P به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت، که در آن $S = \frac{-b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $P = \frac{c}{a}$ (حاصل‌ضرب ریشه‌ها) است.

■ **مثال:** معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $3 - 2\sqrt{2}$ و $3 + 2\sqrt{2}$ باشند.

◄ **حل:**
$$S = x' + x'' = (3 + 2\sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2}) = 6 \quad \text{و} \quad P = x'.x'' = (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$$

بنابراین $S = 6$ و $P = 1$، پس:
$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{S=6\ ,\ P=1} x^2 - 6x + 1 = 0$$

■ **مثال:** محیط مستطیلی ۲۲ سانتی‌متر و مساحت آن ۲۸ سانتی‌متر مربع است. ابعاد مستطیل را بیابید.

◄ **حل:** اگر طول و عرض مستطیل را به‌ترتیب x' و x'' بنامیم، بنابراین:

$$2(x' + x'') = 22 \Rightarrow x' + x'' = 11 \quad \text{و} \quad x'.x'' = 28$$

معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = 11$ و $P = 28$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^2 - 11x + 28 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x - 4)(x - 7) = 0 \Rightarrow x' = 7\ ,\ x'' = 4$$

روش تغییر متغیر برای حل معادله | صفحه‌ی ۱۱ و تمرین صفحه‌ی ۱۸ کتاب درسی

۶۴- تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ کدام است؟ **(صفحه‌ی ۱۱ - مشابه مثال) و (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۲)**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۵- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ کدام است؟ **(صفحه‌ی ۱۱ - مشابه کار در کلاس)**

۱) ۱- ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) صفر

۶۶- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $2x^6 - 7x^3 + 5 = 0$ کدام است؟ **(صفحه‌ی ۱۸ - مکمل تمرین ۱ - ب)**

۱) ۱ ۲) $\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ ۳) $-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ ۴) صفر

۶۷- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$، کدام است؟ **(صفحه‌ی ۱۱ - مکمل کار در کلاس) و (سراسری تجربی - ۹۰)**

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه ۲ | صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۸ کتاب درسی

۶۸- در معادله‌ی درجه دوم $6x^2 + (k + 1)x + k = 0$، اگر مجموع دو ریشه‌ی حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه‌ی مثبت آن کدام است؟
(صفحه‌ی ۱۳ - مرتبط با کار در کلاس) و (سراسری انسانی - ۹۴)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۶۹– در معادلهٔ درجه دوم $2x^2+kx+1-k=0$، اگر حاصلضرب دو ریشه برابر ۵ باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر کدام است؟

(صفحهٔ ۱۳– مرتبط با کار در کلاس) و (سراسری انسانی خارج از کشور – ۹۴)

۱) ۲/۵　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۵

۷۰– به ازای یک مقدار m، ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3mx+2m+6=0$، معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (سراسری انسانی خارج از کشور – ۹۵)

۱) ۱/۵-　　۲) ۱/۵　　۳) ۲　　۴) ۳

۷۱– به ازای کدام مقدار m عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (سراسری ریاضی– ۸۴)

۱) ۳　　۲) ۳-　　۳) ۴　　۴) ۴-

۷۲– به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2-5x+m^2-3=0$ است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۴)

۱) ۱　　۲) ۱-　　۳) ۳　　۴) ۳-

۷۳– اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $4x^2-kx+25=0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (سراسری ریاضی – ۹۰)

۱) ۲۷　　۲) ۲۸　　۳) ۲۹　　۴) ۳۱

۷۴– اگر $a+3b+9c=0$، آن‌گاه یکی از جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ همواره کدام است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (آزمون کانون– ۲۲ آبان ۹۴)

۱) $\frac{-b}{3a}$　　۲) $\frac{c}{3a}$　　۳) $\frac{3c}{a}$　　۴) $\frac{-3b}{a}$

۷۵– در معادلهٔ $3x^2-15x+m=0$، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (سراسری ریاضی – ۸۲)

۱) $\frac{59}{5}$　　۲) $\frac{63}{5}$　　۳) $\frac{59}{4}$　　۴) $\frac{63}{4}$

۷۶– به ازای کدام مقدار k در معادلهٔ درجه دوم $2x^2-x+k=0$ بین ریشه‌ها رابطهٔ $x_1+2x_2=3$ برقرار است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (سراسری تجربی – ۷۹)

۱) ۱۲-　　۲) ۱۰-　　۳) ۸　　۴) ۶

۷۷– در معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2+ax+9=0$، یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است، مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (سراسری تجربی خارج از کشور – ۸۴)

۱) ۳/۵　　۲) ۴　　۳) ۴/۵　　۴) ۵

۷۸– در معادلهٔ $3x^2-17x+m=0$ یک ریشه از سه برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (سراسری ریاضی – ۸۷)

۱) ۹　　۲) ۱۰　　۳) ۱۲　　۴) ۱۵

۷۹– در معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

(صفحهٔ ۱۳– متن درس– مرتبط با پاراگراف ۱) و (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۱)

۱) ۱۰　　۲) ۱۲　　۳) ۱۴　　۴) ۱۵

۸۰– معادلهٔ $(x-1)(x-3)+2+k^2=0$ چه وضعی دارد؟

(صفحهٔ ۱۲– فعالیت– مرتبط با تمرین ۱) و (آزاد پزشکی عصر – ۸۹)

۱) دو ریشهٔ مثبت دارد.　　۲) دو ریشهٔ منفی دارد.　　۳) دو ریشهٔ مختلف العلامه دارد.　　۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

۸۱– به ازای کدام مقادیر a معادلهٔ درجه دوم $2x^2+ax+a-\frac{3}{2}=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

(صفحهٔ ۱۲– فعالیت– مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری تجربی – ۸۱)

۱) $a<2$ یا $a>6$　　۲) $a<3$ یا $a>4$　　۳) $2<a<6$　　۴) $3<a<4$

۸۲- به ازای کدام مقدار m معادله‌ی $(m+1)x^2+m(m^2-9)x-2=0$، دو ریشه‌ی قرینه‌ی حقیقی دارد؟

(صفحه‌ی ۱۲- فعالیت- مرتبط با تمرین ۲) و (آزاد ریاضی - ۷۵)

۱) -1 ۲) -3 ۳) 3 ۴) 9

۸۳- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2+3x+m^2=2$، معکوس یکدیگرند؟

(صفحه‌ی ۱۲- فعالیت- مرتبط با تمرین ۲) و (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۸۴- حدود m برای آن‌که معادله‌ی $(m-1)x^2+mx+m-3=0$ دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه داشته باشد کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۲- فعالیت- مرتبط با تمرین ۲) و (آزاد ریاضی - ۷۲)

۱) $m>2$ ۲) $1<m<3$ ۳) $m<1$ ۴) $0<m<1$

۸۵- اگر معادله‌ی $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز باشد، مجموعه‌ی مقادیر m به کدام صورت است؟

(صفحه‌های ۱۱ و ۱۳- ترکیبی) و (سراسری تجربی - ۸۵)

۱) $m<-4$ ۲) $m>4$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $4<m<9$

۸۶- مجموعه مقادیر a کدام باشد تا معادله‌ی $x^4+(3a+1)x^2+(a^2-1)=0$ دارای دو جواب قرینه باشد؟

(صفحه‌های ۱۱ و ۱۳- ترکیبی) و (آزمون کانون - ۷ آبان ۹۵)

۱) $\{-\frac{1}{3}\}$ ۲) $\{a\in R \mid -1<a<1\}$ ۳) $\{a\in R \mid a<-1 \cup a>1\}$ ۴) تهی

تشکیل معادله‌ی درجه ۲ با استفاده از S و P | صفحه‌ی ۱۳ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۸ کتاب درسی

۸۷- معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $5-2\sqrt{3}$ و $5+2\sqrt{3}$ است، برابر است با:

(صفحه‌ی ۱۸- مشابه تمرین ۲)

۱) $x^2+10x+13=0$ ۲) $x^2-10x+13=0$ ۳) $x^2+10x-13=0$ ۴) $x^2-10x-13=0$

۸۸- جواب‌های کدام معادله‌ی زیر به‌صورت $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ است؟

(صفحه‌ی ۱۳- کار در کلاس- مشابه تمرین ۳) و (سراسری انسانی - ۹۱)

۱) $x^2+2x-1=0$ ۲) $x^2-2x+\frac{1}{4}=0$ ۳) $2x^2-2x+1=0$ ۴) $4x^2-2x+1=0$

۸۹- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌هایش $2-\sqrt{4-a}$ و $2+\sqrt{4-a}$ باشد، کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۳- کار در کلاس- مشابه تمرین ۳) و (سراسری ریاضی - ۶۸)

۱) $x^2-4x+a=0$ ۲) $x^2+ax-4=0$ ۳) $x^2+4x-a=0$ ۴) $x^2-ax+4=0$

۹۰- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x+1=0$ و $\alpha>\beta$، آنگاه معادله‌ای که ریشه‌هایش 5α و 4β باشد، کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۳- متن درس- مرتبط با پاراگراف ۳) و (آزمون کانون - ۸۷)

۱) $x^2-15x+9=0$ ۲) $x^2+7x+10=0$ ۳) $x^2-7x+10=0$ ۴) $x^2+15x+9=0$

مسائل کاربردی | صفحه‌ی ۱۳ کتاب درسی

۹۱- فاصله‌ی هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل، ثابت و یکسان است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، مساحت قالی کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۳- کار در کلاس- مکمل تمرین ۲) و (سراسری تجربی - ۷۵)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۲. معادله‌ی درجه‌ی دوم و تابع درجه ۲

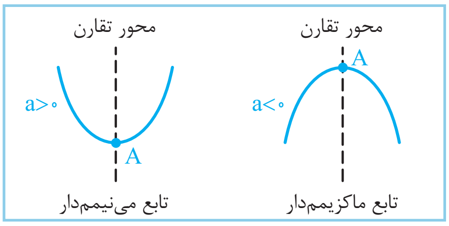
ماکزیمم و می‌نیمم سهمی

صفرهای تابع درجه ۲

صفحه‌های ۱۴ تا ۱۸ کتاب درسی

ماکزیمم و می‌نیمم سهمی

یادآوری (سهمی) از سال دهم به یاد می‌آوریم که هر معادله به شکل $f(x)=ax^۲+bx+c$ را یک سهمی یا تابع درجه‌ی دوم می‌نامیم.
نمودار هر تابع درجه‌ی دوم به یکی از دو شکل مقابل است، نقطه‌ی A را رأس سهمی (نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم تابع) می‌نامیم. خطی عمود بر محور xها که از رأس سهمی می‌گذرد، محور تقارن تابع نامیده می‌شود و معادله‌ی آن $x=-\frac{b}{۲a}$ است.



ماکزیمم (می‌نیمم) تابع درجه‌ی دوم: با توجه به شکل بالا، در تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ اگر $a>۰$ باشد، تابع می‌نیمم‌دار و رو به بالا باز می‌شود و در صورتی‌که $a<۰$ باشد، تابع ماکزیمم‌دار و رو به پایین باز می‌شود، مقدار ماکزیمم (می‌نیمم) تابع در هر دو حالت، به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ به‌دست می‌آید، یعنی باید $f(-\frac{b}{۲a})$ را بیابیم.

تذکر (۱) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ax^۲+bx+c$ ، نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) به مختصات $A(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ است، که در آن طول رأس سهمی $x_A=-\frac{b}{۲a}$ و عرض آن $y_A=-\frac{\Delta}{۴a}$ است.

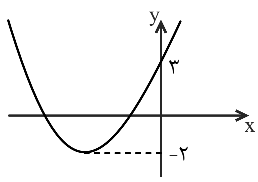
تذکر (۲) در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a(x-h)^۲+k$ ، نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) به مختصات $A(h,k)$ است، که در آن طول رأس سهمی $x_A=h$ و عرض آن $y_A=k$ است.

■ **مثال:** به طریقه‌ی یافتن ماکزیمم (می‌نیمم) توابع زیر توجه کنید.

(۲) $f(x)=-۳x^۲-۱۲x+۲$
$a=-۳<۰\Rightarrow$ تابع ماکزیمم‌دار است.
طول رأس: $x=-\frac{-۱۲}{۲(-۳)}=-۲$
نقطه‌ی ماکزیمم: $f(-۲)=-۳(-۲)^۲-۱۲(-۲)+۲=۱۴\Rightarrow A(-۲,۱۴)$

(۱) $f(x)=۲x^۲-۴x+۱$
$a=۲>۰\Rightarrow$ تابع می‌نیمم‌دار است.
طول رأس: $x=-\frac{-۴}{۲(۲)}=۱$
نقطه‌ی می‌نیمم: $f(۱)=۲-۴+۱=-۱\Rightarrow A(۱,-۱)$

■ **مثال:** نمودار تابع درجه دوم $P(x)=۳x^۲+bx+c$ به شکل روبه‌رو است، b را بیابید.



◄ **حل:** تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است، در نتیجه $P(۰)=۳$ است:

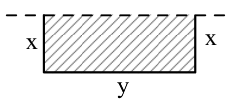
$$P(۰)=c=۳\Rightarrow P(x)=۳x^۲+bx+۳$$

عرض نقطه‌ی می‌نیمم تابع برابر ۲− است، پس $y_{min}=-\frac{\Delta}{۴a}=-۲$، در نتیجه:

$$\frac{۴ac-b^۲}{۴a}=-۲\Rightarrow\frac{۴(۳)(۳)-b^۲}{۴\times۳}=-۲\Rightarrow\frac{۳۶-b^۲}{۱۲}=-۲\Rightarrow ۳۶-b^۲=-۲۴\Rightarrow b^۲=۶۰\Rightarrow\begin{cases}b=\sqrt{۶۰}\\ b=-\sqrt{۶۰}\end{cases}$$

با توجه به شکل، طول رأس منفی است، یعنی $x=-\frac{b}{۲\times۳}<۰$، در نتیجه $b>۰$، پس $b=\sqrt{۶۰}$.

■ **مثال:** با طنابی به طول ۳۰۰ متر، می‌خواهیم قطعه زمینی به شکل مستطیل را که یک طرف آن رودخانه است محصور کنیم. ماکزیمم مساحت این زمین را بیابید.



◄ **حل:** اگر طول مستطیل را y و عرض مستطیل را x فرض کنیم، طول سیم برابر مجموع سه ضلع مستطیل است، یعنی: $۲x+y=۳۰۰\Rightarrow y=۳۰۰-۲x$

مساحت مستطیل: $S=x\times y$

$$S(x)=x(۳۰۰-۲x)=۳۰۰x-۲x^۲\Rightarrow S(x)=-۲x^۲+۳۰۰x\Rightarrow x_{max}=-\frac{۳۰۰}{۲(-۲)}=۷۵\Rightarrow S(۷۵)=۷۵(\underbrace{۳۰۰-۲\times۷۵}_{۱۵۰})=۱۱۲۵۰$$

صفرهای تابع درجه ۲

صفرهای تابع: در تابع با ضابطه‌ی $y = f(x)$ نقاط برخورد نمودار تابع با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم. به عبارت دیگر این نقاط، ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = ۰$ هستند.

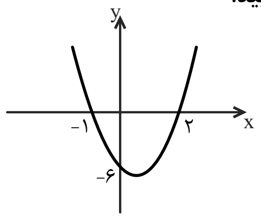
صفرهای تابع درجه‌ی دوم ◄ صفرهای تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$، ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ هستند، بسته به اینکه $\Delta > ۰$، $\Delta = ۰$ یا $\Delta < ۰$ باشد، تابع درجه‌ی دوم، محور x ها را به ترتیب در دو نقطه، یک نقطه (در این حالت مماس است) قطع می‌کند یا اصلاً قطع نمی‌کند.

■ **مثال:** صفرهای تابع $f(x) = ۳x^۲ + ۵x + ۲$ را بیابید.

◄ **حل:** باید ریشه‌های معادله‌ی $۳x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$ را پیدا کنیم. از آنجای که $a + c = b$، پس یک ریشه‌ی معادله $x' = -۱$ و ریشه‌ی دیگر $x'' = -\frac{۲}{۳}$ است. بنابراین صفرهای معادله برابر -۱ و $\frac{-۲}{۳}$ هستند.

نکته: اگر نمودار تابع درجه‌ی دوم، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع کند، آنگاه ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم به‌شکل $f(x) = a(x - x_۱)(x - x_۲)$ است. در این حالت مقدار ماکزیمم (مینیمم) تابع به ازای $x = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$ به‌دست می‌آید.

■ **مثال:** نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ در شکل مقابل رسم شده است. a، b و c را بیابید.

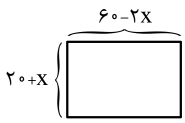


◄ **حل:** محل‌های تلاقی تابع با محور x ها به طول‌های ۲ و ۱- هستند، بنابراین ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x) = a(x - ۲)(x + ۱)$ در نظر بگیریم. از طرفی عرض از مبدأ تابع ۶- است، یعنی $f(۰) = -۶$، در نتیجه:

$$f(۰) = a(۰ - ۲)(۰ + ۱) = -۶ \Rightarrow a = ۳$$

بنابراین: $f(x) = ۳(x - ۲)(x + ۱)$ یا $f(x) = ۳x^۲ - ۳x - ۶$، پس $a = ۳$، $b = -۳$ و $c = -۶$.

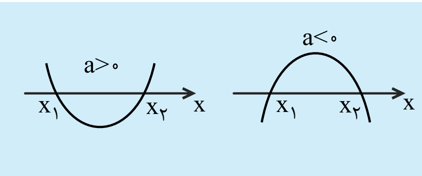
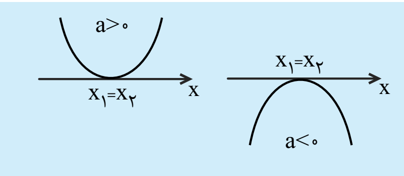
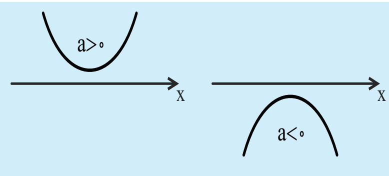
■ **مثال:** مستطیل‌هایی با ابعاد متفاوت را در نظر بگیرید. باریک‌ترین آن‌ها با عرض ۲۰ و طول ۶۰ سانتی‌متر است. به ازای هر یک سانتی‌متر که به عرض آن افزوده شود ۲ سانتی‌متر از طول آن کم می‌شود، بیش‌ترین مساحت بین این مستطیل‌ها بر حسب سانتی‌متر مربع را بیابید.



◄ **حل:** هر ۱ واحد که به عرض اضافه شود، ۲ واحد از طول کم می‌شود. پس اگر x واحد به عرض اضافه شود، ۲x واحد از طول آن کم می‌شود و مساحت $S(x) = (۲۰ + x)(۶۰ - ۲x)$ یا $S(x) = ۲(۲۰ + x)(۳۰ - x)$ خواهد شد. بنابراین بیش‌ترین مقدار مساحت به ازای $x_S = \frac{-۲۰ + ۳۰}{۲} = ۵$، به‌دست می‌آید، در نتیجه:

$$S(۵) = ۲(۲۰ + ۵)(۳۰ - ۵) = ۲ \times ۲۵ \times ۲۵ = ۱۲۵۰$$ سانتی‌متر مربع

تعیین وضعیت تابع درجه دوم با محور x ها ◄ جدول زیر وضعیت نمودار تابع درجه‌ی دوم را با توجه به شرایط Δ و a (ضریب $x^۲$) با محور x ها نمایش می‌دهد.

$(۱)\ \Delta > ۰$ نمودار محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند	$(۲)\ \Delta = ۰$ نمودار بر محور x ها مماس است.	$(۳)\ \Delta < ۰$ نمودار محور x ها را قطع نمی‌کند.
		

■ **مثال:** به ازای چه حدودی از a، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ax^۲ + ۲x + a$ همواره بالای محور x هاست؟

◄ **حل:** برای آنکه تابع همواره بالای محور x ها باشد، باید $a > ۰$ (ضریب $x^۲$) و $\Delta < ۰$ باشد، پس:

$$\begin{cases} x^۲ \text{ ضریب } > ۰ \Rightarrow a > ۰ & (۱) \\ \Delta = ۴ - ۴a^۲ < ۰ \Rightarrow a^۲ > ۱ \Rightarrow a > ۱ \text{ یا } a < -۱ & (۲) \end{cases}$$

از اشتراک (۱) و (۲)، $a > ۱$، مجموعه مقادیر قابل قبول برای a است.

تعیین علامت صفرهای تابع درجه دو با استفاده از Δ، S و P ◄ در تابع درجه دو با ضابطه‌ی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ، با استفاده از Δ، S و P می‌توان علامت ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ را یافت، به الگوریتم زیر توجه کنید:

تعیین علامت S (مجموع ریشه‌ها) ← تعیین علامت P (ضرب ریشه‌ها) ← تعیین علامت Δ (بررسی وجود ریشه)

■ **مثال:** به طریقه‌ی یافتن علامت صفرهای توابع زیر توجه کنید.

(۱) $f(x)=x^{۲}-۶x+۴$

$\Delta=۳۶-۴(۴)(۱)>۰$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

$P=\frac{c}{a}=۴>۰$ دو ریشه هم‌علامتند.

$S=-\frac{b}{a}=۶>۰$ هر دو ریشه مثبت‌اند.

(۲) $f(x)=۴x^{۲}-۳x-۲$

$\Delta=۹-۴(۴)(-۲)>۰$ دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

$P=\frac{c}{a}=\frac{-۲}{۴}<۰$ دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند.

$S=-\frac{b}{a}=-\frac{-۳}{۴}>۰$ ریشه‌ی مثبت از قدرمطلق ریشه‌ی منفی بزرگتر است.

رابطه‌ی بین نمودار تابع و ضرایب معادله ◄ اگر نمودار تابع در اختیار باشد، می‌توانیم علامت ضرایب معادله را بیابیم. همچنین با داشتن ضرایب معادله و علامت آنها، می‌توانیم تعیین کنیم که تابع درجه‌ی دوم از کدام نواحی دستگاه مختصات عبور می‌کند. برای تعیین علامت ضرایب معمولاً به خواص زیر توجه می‌کنیم:

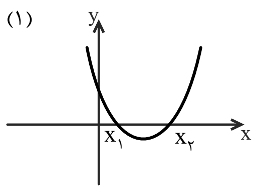
الف) ماکزیمم و می‌نیمم: علامت a را مشخص می‌کند.

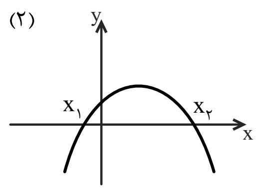
ب) عرض از مبدأ تابع: علامت $(f(۰)=)c$ را می‌دهد.

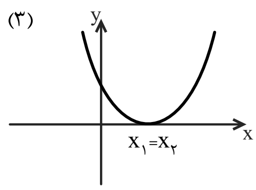
پ) طول رأس: $x=-\frac{b}{۲a}$، به تعیین علامت a و b کمک می‌کند.

ت) Δ ی معادله: وضعیت تقاطع تابع با محور x ها را مشخص می‌کند.

■ **مثال:** در هر یک از شکل‌های زیر، سهمی به معادله‌ی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ رسم شده است. در مورد علامت ضرایب a، b و c نظر دهید.







◄ **حل:** (۱) تابع می‌نیمم‌دار است، بنابراین $a>۰$. از طرفی با توجه به شکل؛ عرض از مبدأ مثبت است، یعنی $f(۰)=c>۰$ ، در نتیجه $c>۰$ ، همچنین طول رأس سهمی مثبت است، بنابراین $x_S=-\frac{b}{۲a}>۰$ ، از آن‌جایی‌که $a>۰$ باید $-b>۰$ یا $b<۰$ ، در نتیجه:

$$a>۰\ ,\ b<۰\ ,\ c>۰$$

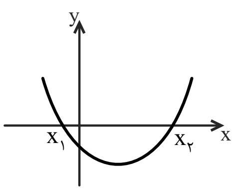
(۲) تابع ماکزیمم‌دار است، پس $a<۰$. از طرفی عرض از مبدأ تابع مثبت است، بنابراین $f(۰)=c>۰$، طول رأس سهمی نیز مثبت است، پس $\frac{-b}{۲a}>۰$ در نتیجه:

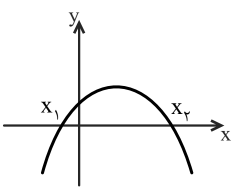
$$\frac{-b}{۲a}>۰\xrightarrow{a<۰}b>۰\Rightarrow a<۰\ ,\ b>۰\ ,\ c>۰$$

(۳) تابع می‌نیمم‌دار است، پس $a>۰$. از طرفی عرض از مبدأ تابع مثبت است، پس $f(۰)=c>۰$، همچنین طول رأس سهمی، مثبت است، بنابراین $x=\frac{-b}{۲a}>۰$، در نتیجه:

$$\frac{-b}{۲a}>۰\xrightarrow{a>۰}-b>۰\Rightarrow b<۰\Rightarrow a>۰\ ,\ b<۰\ ,\ c>۰$$

تذکر (۳) ⏮ در تابع درجه‌ی دوم $y=ax^{۲}+bx+c$، اگر $ac<۰$ باشد، تابع محور x ها را در دو طرف محور y ها قطع کرده و در نتیجه نمودار آن از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور می‌کند.





ماکزیمم و می‌نیمم سهمی | صفحه‌های ۱۴ و ۱۵ و تمرین‌های صفحه‌ی ۱۸ کتاب درسی

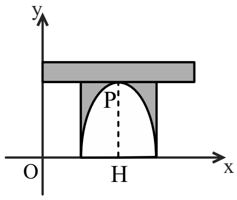
۹۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^۲ + bx + ۱$ روی محور oy دارای می‌نیمم است. b کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۵- کار در کلاس- مکمل تمرین ۱) و (سراسری تجربی - ۷۶)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۳- مطابق شکل، معادله‌ی منحنی طاقی به صورت $y = -x^۲ + ۶x - ۵$ است. طول ارتفاع طاق (PH) کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۴- مشابه مثال ۱) و (سراسری ریاضی- ۷۴)



۱) ۳
۲) ۳/۵
۳) ۴
۴) ۴/۵

۹۴- اگر بیش‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (K+۳)x^۲ - ۴x + K$ برابر صفر باشد، مقدار K کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۴- مکمل مثال ۱) و (سراسری ریاضی - ۸۳)

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۴

۹۵- بیشترین مقدار تفاضل $\frac{۱}{۹}$ مربع عددی، از ۶ برابر آن عدد، کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) و (سراسری انسانی- ۹۴)

۱) ۵۴ ۲) ۶۳ ۳) ۷۲ ۴) ۸۱

۹۶- رأس سهمی به معادله‌ی $y = -x^۲ + ax + ۵$ بر روی خط به معادله‌ی $x = ۲$ قرار دارد. این سهمی از کدام نقطه‌ی زیر می‌گذرد؟

(صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) و (سراسری انسانی- ۸۵)

۱) $(-۱ , ۴)$ ۲) $(-۱ , ۵)$ ۳) $(۱ , ۸)$ ۴) $(۱ , ۹)$

۹۷- به ازای کدام مقدار a نقطه‌ی می‌نیمم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ax^۲ - ۲\sqrt{۲}x + a$ بر روی خط $y = ۱$ واقع است؟

(صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) و (سراسری ریاضی - ۷۷)

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۹۸- خط به معادله‌ی $y = -\frac{۵}{۲}$ محور تقارن منحنی تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۳x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) و (سراسری تجربی- ۷۴)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۹۹- نقطه‌ی می‌نیمم تابع با ضابطه‌ی $y = x^۲ + ax + ۲$ روی نیمساز ربع سوم قرار دارد. a کدام است؟ (صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) و (سراسری تجربی - ۷۵)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

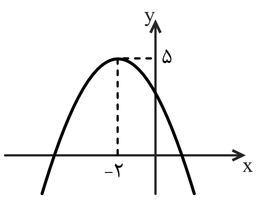
۱۰۰- نقطه‌ی $(-۱ , -۴)$ رأس سهمی به معادله‌ی $y = ۳x^۲ + ax + b$ است. این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

(صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۳) و (سراسری انسانی- ۹۰)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۲

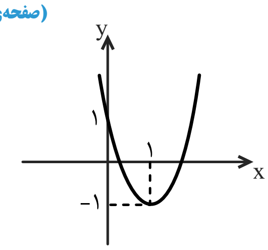
۱۰۱- شکل روبه‌رو، نمودار کدام تابع زیر است؟ (صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۶- ج) و (سراسری انسانی- ۹۴)

۱) $y = x^۲ + ۴x + ۳$
۲) $y = -x^۲ - ۲x + ۴$
۳) $y = -\frac{۱}{۲}x^۲ - ۲x + ۵$
۴) $y = -\frac{۱}{۲}x^۲ - ۲x + ۳$



۱۰۲- شکل روبه‌رو، نمودار کدام تابع زیر است؟

(صفحه‌ی ۱۸ مشابه تمرین ۶- ب) و (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۴)



۱) $y=۲x^{۲}+۴x+۱$

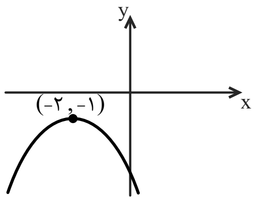
۲) $y=۲x^{۲}-۲x+۱$

۳) $y=۲x^{۲}-۴x+۱$

۴) $y=-۲x^{۲}+۴x+۱$

۱۰۳- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^{۲}+bx+c$، به‌شکل زیر است. این نمودار محور y ها را با چه عرضی قطع می‌کند؟

(صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۶- ث)



۱) ۵-

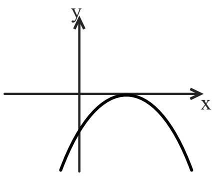
۲) ۴-

۳) ۳-

۴) ۶-

۱۰۴- شکل زیر، نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^{۲}+bx-۱$ است. کدام دوتایی برای $(a\ ,\ b)$ قابل قبول است؟

(صفحه‌ی ۱۸- مرتبط با تمرین ۶- پ)



۱) $(۱\ ,\ -۲)$

۲) $(-۲\ ,\ -۱)$

۳) $(-۱\ ,\ ۴)$

۴) $(-۱\ ,\ ۲)$

صفرهای تابع درجه ۲	صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸ کتاب درسی

۱۰۵- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^{۲}-۳x-۱۰$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی باشد؟

(صفحه‌ی ۱۶- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۲) و (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

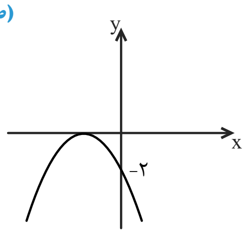
۱۰۶- نمودار سهمی به معادله‌ی $y=۲x^{۲}-۸x+۱$ از کدام ناحیه‌ی محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

(صفحه‌ی ۱۶- کار در کلاس- مرتبط با تمرین ۱) و (سراسری انسانی - ۹۱)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۱۰۷- شکل روبه‌رو، نمودار کدام تابع با ضابطه‌ی زیر است؟

(صفحه‌ی ۱۸- مشابه تمرین ۶- پ) و (سراسری انسانی - ۹۵)



۱) $y=-۲x^{۲}+۴x-۲$

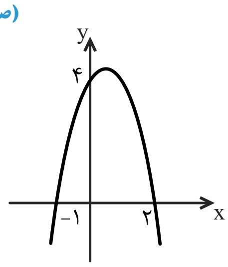
۲) $y=-۲x^{۲}-۴x-۲$

۳) $y=-x^{۲}-۲x-۲$

۴) $y=۲x^{۲}+۴x-۲$

۱۰۸- معادله‌ی سهمی در شکل روبه‌رو، کدام است؟

(صفحه‌ی ۱۶- مشابه مثال) و (سراسری انسانی خارج از کشور - ۹۲)



۱) $y=-x^{۲}+۲x+۴$

۲) $y=۲x^{۲}-۲x-۴$

۳) $y=-۲x^{۲}-۲x+۴$

۴) $y=-۲x^{۲}+۲x+۴$