

۲. احتمال

تعریف‌های مهم و محاسبه‌ی احتمال با استفاده از تعریف

پدیده (آزمایش) تصادفی: پدیده‌ای (آزمایشی) که از همه‌ی حالت‌های ممکن در بوقوع پیوستن آن مطلع باشیم، اما از این که کدام حالت قطعاً رخ خواهد داد، اطمینان نداشته باشیم.

مانند پرتاب تاس، پرتاب سکه، جنسیت نوزاد قبل از تولد و ...

فضای نمونه‌ای: مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن در بوقوع پیوستن یک پدیده‌ی تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده‌ی تصادفی نامیده و معمولاً آن را با S نشان می‌دهیم.

مثلاً فضای نمونه‌ای در پرتاب یک تاس $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است و یا فضای نمونه‌ای فرزندان یک خانواده‌ی ۳ فرزند به صورت $\{ \text{پپپ، پپد، پدپ، ددپ، دپد، ددد} \}$ است.

پیشامد تصادفی: اگر یک پدیده‌ی تصادفی رخ دهد و S فضای نمونه‌ای آن باشد، آنگاه هر زیرمجموعه‌ی S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

مثلاً اگر پیشامد تصادفی A ، به صورت بیشتر بودن تعداد فرزندان دختر در یک خانواده‌ی ۳ فرزند تعریف شود، آنگاه $A = \{ \text{ددد، ددپ، دپد، دد} \}$.

وقوع پیشامد تصادفی: وقتی می‌گوییم پیشامدی به وقوع پیوسته (رخ داده) است، یعنی عضوی از آن پیشامد به عنوان نتیجه‌ی آزمایش مشاهده شده است.

احتمال پیشامد تصادفی: احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با نماد $P(A)$ نشان می‌دهیم که برای محاسبه‌ی آن، تعداد اعضای مجموعه‌ی A (یعنی $n(A)$ که تعداد حالت‌های مطلوب است) را بر تعداد اعضای مجموعه‌ی S (یعنی $n(S)$ که تعداد حالت‌های ممکن است) تقسیم می‌کنیم (یعنی $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$). از آنجا که A زیرمجموعه‌ی S است، پس $0 \leq n(A) \leq n(S)$ ، بنابراین $0 \leq P(A) \leq 1$ ؛ بیشتر بودن $P(A)$ ، بیشتر بودن شانس وقوع پیشامد A را نشان می‌دهد و بالعکس.

مثلاً با توجه به مثال قبل، احتمال آنکه در یک خانواده‌ی ۳ فرزند، تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

توجه:

$$\begin{cases} P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \phi & (\text{پیشامد غیر ممکن}) \\ P(A) = 1 \Leftrightarrow A = S & (\text{پیشامد قطعی}) \end{cases}$$

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۷

۴۵۷- اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار گرفتن ارقام متمایز ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ به وجود آید، احتمال آن که این عدد زوج باشد، کدام است؟ (سراسری ریاضی-۸۵)

$$\begin{array}{cccc} \frac{3}{8} & (1) & \frac{1}{2} & (2) \\ \frac{3}{5} & (3) & \frac{5}{8} & (4) \end{array}$$

۴۵۸- در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی‌درپی بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌ی فرد متوالیاً خارج نمی‌شوند؟ (سراسری تجربی-۹۲)

$$\begin{array}{cccc} 0/1 & (1) & 0/15 & (2) \\ 0/2 & (3) & 0/25 & (4) \end{array}$$

تیپ ۸

۴۵۹- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟ (سراسری تجربی-۹۲)

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{9} & (1) & \frac{5}{18} & (2) \\ \frac{1}{4} & (3) & \frac{5}{12} & (4) \end{array}$$

تیپ ۹

۴۶۰- ۴ لامپ از ۱۰ لامپ موجود، سوخته است. اگر ۳ لامپ به تصادف از بین آن‌ها اختیار کنیم، احتمال این که هر سه لامپ سالم باشند، کدام است؟ (سراسری ریاضی-۸۱)

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{6} & (1) & \frac{1}{6} & (2) \\ \frac{1}{5} & (3) & \frac{1}{4} & (4) \end{array}$$

۴۶۱- احتمال آن که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هر سه موش سفید باشند، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور-۸۴)

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{8} & (1) & \frac{4}{33} & (2) \\ \frac{5}{32} & (3) & \frac{5}{33} & (4) \end{array}$$

۴۶۲- در یک کیسه ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه موجود است. ۲ مهره از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این که دو مهره، هم‌رنگ نباشند، کدام است؟ (سراسری ریاضی-۸۴)

$$\begin{array}{cccc} \frac{6}{11} & (1) & \frac{19}{33} & (2) \\ \frac{35}{66} & (3) & \frac{37}{66} & (4) \end{array}$$

۴۶۳- از بین ۵ داوطلب گروه ریاضی و ۳ داوطلب گروه تجربی، به تصادف ۳ نفر برای انجام آزمونی معرفی می‌شوند. با کدام احتمال دو نفر از معرفی شدگان، از گروه ریاضی هستند؟

$$(1) \frac{25}{56} \quad (2) \frac{15}{32} \quad (3) \frac{15}{28} \quad (4) \frac{9}{14}$$

۴۶۴- در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می‌شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن‌ها جهت آزمایشی برداشته شوند، با کدام احتمال فقط یکی از موش‌های مورد آزمایش، سفید است؟

$$(1) \frac{2}{7} \quad (2) \frac{2}{5} \quad (3) \frac{3}{7} \quad (4) \frac{3}{5}$$

۴۶۵- از هر چهار گروه آزمایشی به ترتیب ۳، ۲ و ۱ نفر داوطلب شرکت در آزمونی هستند. اگر به تصادف ۴ نفر از بین آنان معرفی شوند، با کدام احتمال از هر گروه یک نفر معرفی شده‌اند؟

$$(1) \frac{1}{8} \quad (2) \frac{1}{7} \quad (3) \frac{2}{21} \quad (4) \frac{3}{14}$$

۴۶۶- در ظرفی پنج مهره با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع شماره‌های این دو مهره عددی فرد است؟

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{5} \quad (3) \frac{1}{6} \quad (4) \frac{1}{7}$$

۴۶۷- اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته‌اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟

$$(1) \frac{2}{5} \quad (2) \frac{4}{9} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{5}{9}$$

۴۶۸- در ظرفی شش مهره با شماره‌های ۱ تا ۶ و ۲ ریخته شده‌اند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال، شماره‌های این دو مهره اعداد متوالی‌اند؟

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{2}{5} \quad (3) \frac{3}{5} \quad (4) \frac{2}{3}$$

۴۶۹- شش گوی یکسان با شماره‌های ۱ تا ۶ در یک ظرف قرار دارند، به تصادف دو گوی از آن‌ها برمی‌داریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو گوی کم‌تر از ۶ است؟

$$(1) \frac{4}{15} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{5}{12}$$

۴۷۰- اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ بر روی ۶ مهره‌ی یکسان نوشته شده‌اند. اگر دو مهره با هم بیرون بیاوریم، با کدام احتمال مجموع اعداد این دو مهره مضرب ۳ می‌باشد؟

$$(1) \frac{2}{5} \quad (2) \frac{3}{5} \quad (3) \frac{1}{3} \quad (4) \frac{1}{4}$$

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۴۷۱- اگر با ارقام ۱ و ۲ یک عدد چهار رقمی بسازیم، چقدر احتمال دارد این عدد زوج باشد؟

$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{3}{4} \quad (4) 1$$

۴۷۲- در پرتاب دو تاس احتمال آن که مجموع دو تاس، عددی مضرب ۳ باشد کدام است؟

$$(1) \frac{1}{5} \quad (2) \frac{2}{3} \quad (3) \frac{1}{3} \quad (4) \frac{1}{4}$$

۴۷۳- از جعبه‌ای شامل ۵ مهره‌ی سبز، ۴ مهره‌ی آبی و ۲ مهره‌ی زرد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه فقط ۲ تا از این مهره‌ها آبی باشند کدام است؟

$$(1) \frac{14}{55} \quad (2) \frac{2}{55} \quad (3) \frac{7}{165} \quad (4) \frac{14}{165}$$

۴۷۴- کارمندان اداره‌ی مطابق جدول زیر توزیع شده‌اند. در این اداره، احتمال آنکه «کارمندی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد» چند برابر احتمال آن است که «کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد»؟

$$(1) \frac{3}{5} \quad (2) \frac{25}{39} \quad (3) \frac{3}{4} \quad (4) \frac{5}{6}$$

		جنسیت	
		زن	مرد
تحصیلات	دانشگاهی	۱۰	۱۵
	کمتر از دانشگاهی	۸۰	۹۰

(ریاضی عمومی - صفحه ۹)

(آزاد غیرپزشکی - ۸۷)

(آزاد پزشکی عصر - ۸۸)

(ریاضی ۳ - صفحه ۹ - مثال ۳-ج)

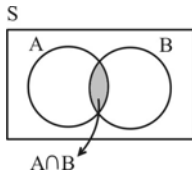
(ریاضی عمومی - صفحه ۹)

۲. احتمال

ترکیب پیشامدها

پیشامدهای ناسازگار و قانون جمع احتمالات

خواص پیشامد متمم

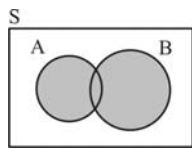


۱- اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه اشتراک آنها را با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهد».

توجه: اگر پیشامد A زیرمجموعه‌ی پیشامد B باشد، آنگاه داریم $A \cap B = A$ و بالعکس، یعنی از $A \cap B = A$ می‌توان نتیجه گرفت که $A \subseteq B$.
توجه: در مسائل احتمال، اشتراک (\cap) متناظر با عبارت «و» است.



پیشامدهای ناسازگار: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $A \cap B = \emptyset$ ، آنگاه دو پیشامد A و B ناسازگار نامیده می‌شوند، یعنی این دو پیشامد نمی‌توانند بطور همزمان اتفاق بیفتند.



۲- اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه اجتماع آنها را با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دوی آنها رخ دهد».

با توجه به اینکه $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ، از تقسیم طرفین این تساوی بر $n(S)$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

توجه: در مسائل احتمال، اجتماع (\cup) متناظر با عبارت «یا» است.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

اگر دو پیشامد A و B ناسازگار باشند، آنگاه $A \cap B = \emptyset$ و در نتیجه $P(A \cap B) = 0$ ، پس:

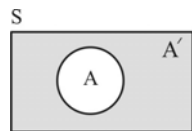
قانون جمع احتمالات برای پیشامدهای ناسازگار: تعمیم رابطه‌ی بالا به این صورت است: اگر A, B, C, \dots پیشامدهایی دو به دو ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند آنگاه:

$$P(A \cup B \cup C \cup \dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots$$

■ مثال: کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است. ۲ مهره به تصادف و به طور همزمان خارج می‌کنیم. احتمال هم‌رنگ بودن این دو مهره چقدر است؟

◀ حل: اگر A را پیشامد سفید بودن هر دو مهره خارج شده و B را پیشامد سیاه بودن هر دو مهره خارج شده در نظر بگیریم، آنگاه A و B ناسازگارند و $P(A \cup B)$ مورد نظر مسأله است، پس:

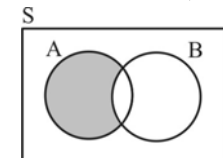
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{3+4}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{3+4}{2}} = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3+6}{21} = \frac{3}{7}$$



۳- متمم یک پیشامد: اگر A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه متمم آن را A' نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که A رخ ندهد».
خواص پیشامد متمم:

- ۱) $A \cap A' = \emptyset$
- ۲) $A \cup A' = S$
- ۳) $P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$ یا $P(A') = 1 - P(A)$

در بعضی مسائل، محاسبه‌ی $P(A')$ ساده‌تر از محاسبه‌ی $P(A)$ است، برای حل این مسائل از خاصیت ۳ در بالا استفاده می‌کنیم.



۴- تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه تفاضل B از A را با نماد $A - B$ نشان می‌دهیم که تعبیر آن چنین است: «پیشامد $A - B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد».

با توجه به اینکه $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ ، از تقسیم طرفین تساوی اخیر بر $n(S)$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{6}$ (۲)

$\frac{1}{12}$ (۱)

۴۷۶- احتمال آن که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود، ۵۵٪ و در درس شیمی قبول شود، ۶۰٪ است. اگر احتمال آن که حداقل در یکی از دروس قبول شود، ۷۵٪ باشد، با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟

(سراسری ریاضی - ۸۱)

$$(1) \frac{3}{5} \quad (2) \frac{2}{5} \quad (3) \frac{4}{5} \quad (4) \frac{1}{5}$$

تیپ ۱۱

۴۷۷- در ظرفی ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

$$(1) \frac{1}{6} \quad (2) \frac{3}{14} \quad (3) \frac{2}{9} \quad (4) \frac{5}{12}$$

تیپ ۱۲

۴۷۸- تعداد مسافری در یک هتل ۷۲ نفرند که ۲۳ نفر آنان تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. ۸ نفر از این تاجری برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه برای اولین بار سفر کرده است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۷)

$$(1) \frac{4}{9} \quad (2) \frac{5}{9} \quad (3) \frac{5}{8} \quad (4) \frac{3}{4}$$

۴۷۹- از بین اعداد طبیعی سه رقمی، به تصادف یک عدد برداشته‌ایم. با کدام احتمال، لاقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۶)

$$(1) \frac{1}{24} \quad (2) \frac{2}{25} \quad (3) \frac{3}{26} \quad (4) \frac{4}{28}$$

۴۸۰- برای انجام مسابقه‌ای، ۴ نفر از گروه ریاضی و ۶ نفر از گروه تجربی داوطلب شده‌اند. اگر به طور تصادفی ۴ نفر از بین آنان انتخاب شوند، با کدام احتمال تعداد افراد انتخابی در این دو گروه، متفاوت‌اند؟

(سراسری ریاضی - ۸۵)

$$(1) \frac{5}{14} \quad (2) \frac{3}{7} \quad (3) \frac{4}{7} \quad (4) \frac{5}{7}$$

۴۸۱- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است. به تصادف ۳ موش از بین آنها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لاقل یکی از موش‌ها سفید است؟

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۱)

$$(1) \frac{8}{11} \quad (2) \frac{9}{11} \quad (3) \frac{28}{33} \quad (4) \frac{29}{33}$$

۴۸۲- در ظرفی ۴ مهره‌ی آبی، ۳ مهره‌ی قرمز و ۲ مهره‌ی سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، حداقل یک مهره‌ی آبی خارج می‌شود؟

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)

$$(1) \frac{31}{42} \quad (2) \frac{37}{42} \quad (3) \frac{67}{84} \quad (4) \frac{73}{84}$$

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۴۸۳- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. احتمال آنکه فرزندان یک در میان پسر باشند و یا خانواده ۲ فرزند پسر داشته باشد، کدام است؟ (ریاضی عمومی - صفحه‌ی ۴ و ۵)

$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{8} \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{3}{8}$$

۴۸۴- تمام اعداد دو رقمی را که می‌توان با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ ساخت روی کارت‌های متمایزی نوشته و در یک کیسه قرار می‌دهیم و سپس یکی از کارت‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه عدد خارج شده مضرب ۴ یا کوچکتر از ۴۰ باشد کدام است؟

(ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۲ - تمرین ۵)

$$(1) \frac{5}{8} \quad (2) \frac{7}{8} \quad (3) \frac{3}{8} \quad (4) \frac{1}{8}$$

۴۸۵- اگر $P(A) = 2P(B) = 3P(A \cap B)$ حاصل $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$ کدام است؟ (آزاد ریاضی - ۸۲)

$$(1) 2 \quad (2) \frac{5}{2} \quad (3) \frac{7}{2} \quad (4) \frac{9}{2}$$

۴۸۶- از سه دانش‌آموز رشته‌ی ریاضی و دو دانش‌آموز رشته‌ی تجربی، دو نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد هر دو هم‌رشته باشند؟ (آزاد غیر پزشکی - ۸۸)

$$(1) \frac{2}{5} \quad (2) \frac{3}{10} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{1}{10}$$

۴۸۷- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. پیشامدهای A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A: فرزندهای سوم و چهارم دختر باشند.

B: تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد.

C: احتمال پیشامد $A - C$ کدام است؟

$$(1) \frac{3}{16} \quad (2) \frac{1}{8} \quad (3) \frac{1}{16} \quad (4) \frac{1}{4}$$

۴۸۸- A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ی S هستند. پیشامد «فقط A رخ می‌دهد یا فقط B رخ می‌دهد» در کدام گزینه بیان شده است؟ (ریاضی ۳ - صفحه‌ی ۱۱ - تمرین ۴)

$$(1) A \cup B \quad (2) S - (A \cap B) \quad (3) A' \cap B' \quad (4) (A - B) \cup (B - A)$$

۴۸۹- در پرتاب دو تاس، احتمال آن که مجموع دو تاس عددی کوچکتر از ۱۱ باشد، چقدر است؟ (آزاد پزشکی عصر - ۸۹)

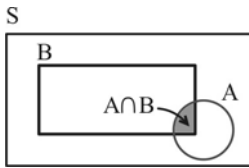
$$(1) \frac{3}{4} \quad (2) \frac{7}{12} \quad (3) \frac{11}{12} \quad (4) \frac{5}{6}$$

۲. احتمال

احتمال شرطی

قانون احتمال کل و نمودار درختی

پیشامدهای مستقل و قانون ضرب احتمالات



$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

■ مثال: در پرتاب دو تاس می‌دانیم که هر دو عدد رو شده فرد هستند، احتمال آنکه مجموع آنها بیش از ۷ باشد چقدر است؟

◀ حل: در نظر می‌گیریم: A : مجموع دو تاس بیش از ۷ باشد.
 B : هر دو تاس فرد باشد.

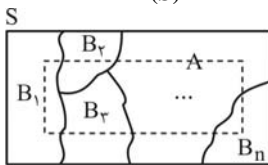
طبق اصل ضرب برای آنکه هر دو تاس فرد باشند، برای هر کدام ۳ حالت (ω, ω) وجود دارد، پس $n(B) = 3 \times 3 = 9$.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ پس } A \cap B = \{(3,5), (5,3), (5,5)\}$$

یعنی در واقع از بین ۹ حالت $B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$ ، ۳ حالتی که زیر آنها خط کشیده شده است مطلوب هستند که احتمال آن $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ است.

نتیجه‌ی مهم تعریف احتمال شرطی: در تساوی $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ ، اگر صورت و مخرج کسر را بر $n(S)$ تقسیم کنیم به رابطه‌ی مهم زیر می‌رسیم:

$$P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \end{cases}$$



قانون احتمال کل: فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند که حتماً یکی از آنها رخ می‌دهد (به عبارت دیگر یعنی $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$) و همچنین فقط یکی از این پیشامدها بتواند رخ دهد (یعنی B_1, B_2, \dots, B_n دو به دو ناسازگار باشند) آنگاه برای هر پیشامد دلخواه مانند A در این فضای نمونه‌ای، با توجه به شکل بالا، داریم:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n) \\ \Rightarrow P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$$

توجه کنید که معمولاً مسائل مربوط به قانون احتمال کل را با استفاده از نمودار درختی حل می‌کنیم.

■ مثال: کیسه‌ی (۱) شامل ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و کیسه‌ی (۲) شامل ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. کیسه‌ای را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای به تصادف از آن خارج می‌کنیم. احتمال سفید بودن این مهره چقدر است؟

◀ حل: روش اول: A : پیشامد سفید بودن مهره، B_1 : پیشامد انتخاب کیسه‌ی (۱)، B_2 : پیشامد انتخاب کیسه‌ی (۲)

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{2}$$

پیشامدهای مستقل: فرض کنید A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، با این خاصیت که وقوع B در کاهش یا افزایش احتمال وقوع A بی‌تأثیر باشد، یعنی $P(A) = P(A|B)$ در این صورت دو پیشامد A و B مستقل نامیده می‌شوند. در چنین حالتی رابطه‌ی احتمال شرطی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{A \text{ و } B \text{ مستقل}} \frac{P(A)}{P(A|B)=P(A)} \Rightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

عکس این موضوع هم صحیح است، یعنی $\left. \begin{array}{l} \text{اگر } P(A \cap B) = P(A) \times P(B), \text{ آنگاه } A \text{ و } B \text{ مستقل هستند.} \\ \text{اگر } P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B), \text{ آنگاه } A \text{ و } B \text{ وابسته هستند.} \end{array} \right\}$

قانون ضرب احتمال‌های پیشامدهای مستقل: اگر A, B, C, \dots پیشامدهایی دوبه‌دو مستقل از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه:

$$P(A \cap B \cap C \cap \dots) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times \dots$$

□ نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، آنگاه:

- ۱- A' و B مستقل از همند. ۲- A و B' مستقل از همند. ۳- A' و B' مستقل از همند.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۱۳

۴۹۰- در یک خانواده‌ی دو فرزند، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{2}{3} \quad (4) \frac{3}{4}$$

۴۹۱- یک خانواده‌ی سه فرزند با کدام احتمال، حداقل دو فرزند دختر دارد، در صورتی که می‌دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است؟

$$(1) \frac{3}{8} \quad (2) \frac{5}{8} \quad (3) \frac{3}{7} \quad (4) \frac{4}{7} \quad (\text{سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۷})$$

۴۹۲- در یک خانواده سه فرزند می‌دانیم فرزند اول آن‌ها دختر است، با کدام احتمال لاقبل یکی از فرزندان پسر است؟ (سراسری تجربی - ۸۷)

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{1}{2} \quad (3) \frac{5}{8} \quad (4) \frac{3}{4}$$

۴۹۳- یک تاس همگن را انداخته‌ایم. برآمد مضرب ۳ نیست، احتمال آن که شماره‌ی ظاهر شده ۲ باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۶)

$$(1) \frac{1}{6} \quad (2) \frac{1}{5} \quad (3) \frac{1}{4} \quad (4) \frac{1}{3}$$

تیپ ۱۴

۴۹۴- در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می‌شوند. اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، با کدام احتمال، فقط یکی از موش‌های فراری، دیابتی است؟

$$(1) \frac{15}{56} \quad (2) \frac{5}{14} \quad (3) \frac{3}{8} \quad (4) \frac{15}{28}$$

۴۹۵- در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آنها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟

$$(1) \frac{11}{56} \quad (2) \frac{17}{56} \quad (3) \frac{13}{56} \quad (4) \frac{15}{56}$$

تیپ ۱۵

۴۹۶- ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟

$$(1) 61/4 \quad (2) 61/8 \quad (3) 62/4 \quad (4) 62/8$$

۴۹۷- در یک روستا ۵۴ درصد جمعیت را مردان و ۴۶ درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر ۶۰ درصد مردان و ۷۵ درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آن‌ها، دفترچه سلامت دارد؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۰)

$$(1) 0/658 \quad (2) 0/669 \quad (3) 0/685 \quad (4) 0/696$$

۴۹۸- احتمال انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر، ۱۰ درصد و به فرزند دختر، ۶ درصد است. با کدام احتمال، فرزندی که به دنیا می‌آید، این نوع بیماری را ندارد؟ (سراسری تجربی - ۸۳)

$$(1) 0/91 \quad (2) 0/92 \quad (3) 0/93 \quad (4) 0/94$$

۴۹۹- احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند ۰/۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟ (سراسری تجربی - ۸۹)

$$(1) 0/13 \quad (2) 0/14 \quad (3) 0/15 \quad (4) 0/16$$

۵۰۰- از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جاگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو کارت هم‌رنگ هستند؟ (سراسری تجربی - ۹۱)

$$(1) \frac{2}{7} \quad (2) \frac{5}{14} \quad (3) \frac{3}{7} \quad (4) \frac{4}{7}$$

۵۰۱- در جعبه‌ی اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه‌ی دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

$$(1) \frac{31}{168} \quad (2) \frac{11}{56} \quad (3) \frac{17}{84} \quad (4) \frac{13}{56}$$

۵۰۲- ظرف A دارای ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه است و هر یک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

$$(1) \frac{25}{63} \quad (2) \frac{26}{63} \quad (3) \frac{10}{21} \quad (4) \frac{11}{21}$$

تیپ ۱۶

۵۰۳- خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اول آن‌ها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند، کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۲)

$$(1) \frac{3}{16} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{5}{16} \quad (4) \frac{3}{8}$$

۵۰۴- احتمال این که روز تولد دو نفر در یک روز از ایام هفته نباشد، کدام است؟ (سراسری انسانی - ۸۴)

$$(1) \frac{4}{5} \quad (2) \frac{5}{6} \quad (3) \frac{5}{7} \quad (4) \frac{6}{7}$$

تیپ ۱۷

۵۰۵- در پرتاب دو تاس، با کدام احتمال اعداد ۵ یا ۶ هر دو ظاهر می‌شوند؟ (سراسری انسانی - ۹۲)

$$(1) \frac{1}{3} \quad (2) \frac{4}{9} \quad (3) \frac{5}{9} \quad (4) \frac{11}{18}$$

۵۰۶- چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر از آنها یکسان است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۲)

$$(1) \frac{19}{48} \quad (2) \frac{41}{96} \quad (3) \frac{23}{48} \quad (4) \frac{55}{96}$$

تیپ ۱۸

۵۰۷- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال، حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی - ۹۱)

$$(1) \frac{27}{64} \quad (2) \frac{37}{64} \quad (3) \frac{19}{32} \quad (4) \frac{39}{64}$$

تیپ ۱۹

۵۰۸- در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی‌بافی دارند؛ اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ (سراسری تجربی - ۹۰)

$$(1) 0/7 \quad (2) 0/75 \quad (3) 0/8 \quad (4) 0/85$$

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۵۰۹- دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آنکه اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند، کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۹- تمرین ۹-ب)

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{4}{9} \quad (3) \frac{1}{9} \quad (4) \frac{1}{8}$$

۵۱۰- تاسی را سه بار می‌اندازیم. احتمال آنکه «هر ۳ عدد رو شده متمایز باشند»، چند برابر احتمال آن است که «هر ۳ عدد رو شده مثل هم باشند»؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۷- مثال ۷-الف و ب)

$$(1) 35 \quad (2) 15 \quad (3) 10 \quad (4) 20$$

۵۱۱- چقدر احتمال دارد در یک تیم ۶ نفره، هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۵- مثال ۴)

$$(1) \frac{\binom{12}{6}}{12^6} \quad (2) \frac{6!}{12^6} \quad (3) \frac{P(12,6)}{12^6} \quad (4) \frac{1}{12^6}$$

۵۱۲- آزمایش‌ها نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A بعد از یک عمل جراحی ۸۰ درصد و همین احتمال برای شخص B، ۶۰ درصد است. احتمال آنکه حداقل یکی از این دو نفر بعد از این عمل جراحی بهبود یابد، کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۴- مثال ۲)

$$(1) 91\% \quad (2) 92\% \quad (3) 90\% \quad (4) 89\%$$

۵۱۳- احتمال آنکه شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۶ و همین احتمال برای شخص B، برابر ۰/۷ است. احتمال آنکه حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند، کدام است؟ (ریاضی ۳- صفحه‌ی ۱۹- تمرین ۷-ب)

$$(1) 0/58 \quad (2) 0/77 \quad (3) 0/66 \quad (4) 0/42$$

۵۱۴- اگر بدانیم که ۴۰ درصد زن‌های تعیین‌کننده‌ی عامل RH خون منفی هستند، آنگاه احتمال آنکه RH خون فردی منفی نباشد، چند برابر احتمال آن است که RH خون او منفی باشد؟ (ریاضی عمومی- صفحه‌ی ۷- مثال ۱۱ و مسئله‌ی ۱)

$$(1) 1/5 \quad (2) 4 \quad (3) 5/25 \quad (4) 6$$

۵۱۵- احتمال تولد فرزند پسر در یک خانواده $\frac{1}{4}$ است. چقدر احتمال دارد فرزند اول و دوم این خانواده هم‌جنس باشند؟ (آزاد پزشکی - ۸۶)

$$(1) \frac{1}{16} \quad (2) \frac{5}{8} \quad (3) \frac{5}{16} \quad (4) \frac{9}{16}$$

۵۱۶- احتمال آن که در یک خانواده چهار فرزندی ۲ فرزند بزرگ‌تر هم‌جنس و دو فرزند کوچک‌تر جنسیت مختلف داشته باشند، چه قدر است؟ (آزاد غیرپزشکی - ۸۴)

$$(1) \frac{1}{8} \quad (2) \frac{1}{4} \quad (3) \frac{1}{2} \quad (4) \frac{1}{16}$$