فصل اول

جبر و معادله

(۲۳ پیمانه)

گزینش و تنظیم سؤال‌ها: حمیدرضا رحیم‌خانلو
درس‌نامه: فرهاد حامی

مرجع کتاب درسی:
حسابان ۱ - فصل اول
صفحه‌های ۱ تا ۳۶

بارم این فصل در امتحان	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور
نمره در امتحان	۱۰	۴	۴

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.

آبی: مسلطم.

سبز: نسبتاً مسلطم.

زرد: مسلط نیستم.

گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

جبر و معادله

۱۱۵ سؤال امتحانی شناسنامه‌دار
۲۳ پیمانهٔ ۵ سؤالی

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی — ۴ پیمانه، ۲۰ سؤال (آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐)
- ۱ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی
- ۲ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

۲ معادلات درجه دوم — ۶ پیمانه، ۳۰ سؤال (آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐)
- ۱ روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم
- ۲ صفرهای تابع و تابع درجهٔ دوم
- ۳ روش تقسیم و تغییر متغیر برای یافتن صفرهای تابع
- ۴ روش هندسی حل معادلات

۳ معادلات گویا و گنگ — ۴ پیمانه، ۲۰ سؤال (آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐)
- ۱ معادلات شامل عبارت‌های گویا
- ۲ معادلات شامل عبارت‌های گنگ

۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن — ۳ پیمانه، ۱۵ سؤال (آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐)

۵ آشنایی با هندسه تحلیلی — ۵ پیمانه، ۲۵ سؤال (آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐)
- ۱ فاصلهٔ بین دو نقطه و مختصات نقطهٔ وسط یک پاره‌خط
- ۲ فاصلهٔ یک نقطه از یک خط

سؤال‌های ویژهٔ برترها — ۱ پیمانه، ۵ سؤال (آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐)

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

صفحه‌های ۲ تا ۶ حسابان ۱

۱ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی | راهبرد حل سؤال‌های امتحانی ۱ تا ۱۲

در یک دنبالهٔ حسابی، با جملهٔ اول a_1، قدر نسبت d و جملهٔ عمومی a_n، مجموع n جملهٔ اول با S_n نمایش داده می‌شود و می‌نویسیم:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

مجموع این جملات از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$(1)\quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \qquad (2)\quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

تیپ ۱ امتحانی محاسبهٔ مجموع جملات با یافتن جملهٔ اول و قدر نسبت: **برای یافتن S_n (مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی) به حالت‌های زیر توجه کنید:**

۱ **از رابطهٔ داده شده، جملهٔ اول و قدر نسبت را یافته و سپس از فرمول (۱) استفاده می‌کنیم.**

الف رابطهٔ بازگشتی $a_{n+1} - a_n = d$ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت d است.

ب جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی به صورت $a_n = bn + c$ است که جملهٔ اول و دوم را با قرار دادن $n = 1$ و $n = 2$ یافته و قدر نسبت برابر $d = a_2 - a_1$ می‌شود.

۲ **اگر جملهٔ اول و آخر در اختیار باشد، از فرمول (۲) استفاده می‌کنیم. در این حالت برای یافتن تعداد جملات از رابطهٔ جملهٔ عمومی استفاده می‌کنیم.**

نمونهٔ امتحانی: حاصل عبارت $12 + ... + 80 + 84 + 88$ را بیابید.

حل: در عبارت داده شده، هر عدد از عدد قبل خود ۴ واحد کمتر است، پس عبارت داده شده مجموع یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1 = 88$، جملهٔ آخر $a_n = 12$ و قدر نسبت $d = -4$ است. ابتدا تعداد جملات را می‌یابیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 12 = 88 + (n-1)(-4) \Rightarrow 4(n-1) = 76 \Rightarrow n - 1 = \frac{76}{4} = 19 \Rightarrow n = 20$$

با استفاده از فرمول $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ حاصل عبارت را می‌یابیم:

$$\text{حاصل عبارت} = \frac{20}{2}(88 + 12) = 10 \times 100 = 1000$$

توجه مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n به راحتی با استفاده از فرمول (۲) قابل محاسبه است. به طریق مشابه می‌توانیم برای اعداد طبیعی فرد (زوج) نیز فرمولی بیابیم.

$$\xrightarrow[\text{با استفاده از فرمول ۱}]{a_1=1\ ,\ d=2\ ,\ \text{تعداد جملات}=n} 1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2 \qquad \xrightarrow[\text{با استفاده از فرمول ۲}]{a_1=1\ ,\ a_n=n} 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

نمونهٔ امتحانی: مجموع ۵۰ جملهٔ اول اعداد طبیعی فرد را بیابید.

حل: اولین جملهٔ فرد $a_1 = 1$ و قدرنسبت $d = 2$ است، بنابراین جملهٔ پنجاهم یعنی، a_{50} را می‌یابیم:

$$a_{50} = a_1 + 49d \Rightarrow a_{50} = 1 + 49 \times 2 = 99 \Rightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(1 + 99) = 25 \times 100 = 2500$$

توجه وقتی مجموع اعداد طبیعی مضرب یک عدد را می‌خواهند، مثلاً «مجموع مضارب دو رقمی عدد ۷» یا «مجموع مضارب عدد ۳ بین ۱۱۳ و ۲۳۵»، ابتدا باید جملهٔ اول و آخر را یافته و سپس تعداد جملات را با استفاده از رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-1)d$ بیابیم. توجه کنید که مضارب طبیعی عددی مثل a را به صورت $ka\ (k \in \mathbb{N})$ نمایش می‌دهیم.

نمونهٔ امتحانی: مجموع تمام اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را بیابید.

حل: اولین عدد دو رقمی مضرب ۷، عدد ۱۴ و آخرین آنها عدد ۹۸ است، پس باید مجموع $98 + ... + 21 + 14$ را حساب کنیم که مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۱۴ و قدرنسبت ۷ است. تعداد این جملات را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 98 = 14 + (n-1)(7) \Rightarrow 7(n-1) = 84 \Rightarrow n - 1 = 12 \Rightarrow n = 13$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}(14 + 98) = \frac{13}{2} \times 112 = 728$$

تیپ ۲ امتحانی یافتن تعداد جملات با معلوم بودن S_n: **اگر S_n (مجموع جملات) عددی معلوم باشد و n (تعداد جملات) را بخواهند، در این حالت با استفاده از فرمول $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$، به یک معادلهٔ درجهٔ دوم خواهیم رسید که با حل آن، مقدار طبیعی n را می‌یابیم.**

نمونهٔ امتحانی: حداقل چند جملهٔ اول از دنبالهٔ حسابی $3, 9, 15, ...$ را باید جمع کنیم تا حاصل آن از ۳۰۰ بیشتر شود؟

حل: باید کمترین مقدار از n را بیابیم که به ازای آن نامساوی $S_n > 300$ برقرار باشد. از آنجایی که جملهٔ اول $a_1 = 3$ و قدر نسبت $d = 9 - 3 = 6$ است. داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow[S_n > 300]{a_1=3\ ,\ d=6} \frac{n}{2}(2 \times 3 + (n-1) \times 6) > 300 \Rightarrow \frac{n}{2}(6n) > 300 \Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow n \geq 11$$

بنابراین حداقل باید ۱۱ جمله از دنباله را با هم جمع کنیم تا حاصل آن بیشتر از ۳۰۰ شود.

تیپ ۳ امتحانی یافتن جملهٔ دلخواه وقتی S_n بر حسب n داده شده: **وقتی S_n داده شده است، توجه به مفهوم مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی برای یافتن جملهٔ اول، قدرنسبت یا هر جملهٔ دلخواهی از دنباله کارساز است. دقت کنید که:**

$$S_1 = a_1 \quad \text{و} \quad S_2 = a_1 + a_2$$

همچنین با توجه به مفهوم مجموع جملات داریم:

$$S_8 - S_6 = (a_1 + a_2 + ... + a_6 + a_7 + a_8) - (a_1 + a_2 + ... + a_6) = a_7 + a_8$$

نمونهٔ امتحانی: در یک دنبالهٔ حسابی مجموع n جملهٔ اول از رابطهٔ $S_n = 3n^2 + 5n$ به دست می‌آید. جملهٔ اول، قدر نسبت و حاصل $a_4 + a_6$ را بیابید.

حل: ابتدا جملهٔ اول و دوم دنباله و سپس قدر نسبت را به دست می‌آوریم:

$$S_n = 3n^2 + 5n \Rightarrow \begin{cases} S_1 = 3 + 5 = 8 \\ S_2 = 3\times 2^2 + 5\times 2 = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = a_1 = 8 \\ S_2 = a_1 + a_2 = 22 \xrightarrow{a_1 = 8} 8 + a_2 = 22 \Rightarrow a_2 = 14 \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 14 - 8 = 6$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + (n-1)\times 6 \Rightarrow a_n = 6n + 2 \xrightarrow[a_6 = 6\times 6 + 2 = 38]{a_4 = 6\times 4 + 2 = 26} a_4 + a_6 = 26 + 38 = 64$$

توجه در دنبالهٔ حسابی $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ با قدر نسبت d، جملات ردیف فرد به صورت $a_1, a_3, a_5, \dots$ و جملات ردیف زوج به صورت $a_2, a_4, a_6, \dots$ هستند که در هر دو حالت قدرنسبت دنبالهٔ جدید 2d است. همچنین توجه کنید که:

$$S_{\text{ردیف فرد}} + S_{\text{ردیف زوج}} = S_{\text{مجموع جملات}}$$

تیپ ۴ امتحانی محاسبهٔ مجموع در مسائل کاربردی: در مسائل کاربردی دنبالهٔ حسابی، یک متغیر (مانند زمان، اندازه، فاصله، دستمزد، دوز دارو و ....) با عدد ثابتی افزایش (یا کاهش) می‌یابد، که همان قدر نسبت است.

نمونهٔ امتحانی: جسمی از ارتفاع ۴۵۰۰ متری سقوط می‌کند. در صورتی که جسم در ثانیهٔ اول ۵ متر و در ثانیهٔ دوم ۱۵ متر و در ثانیهٔ سوم ۲۵ متر را طی کند، با این فرض که افزایش طول مسیر طی شده در هر ثانیه مقدار ثابتی باشد، جسم پس از چند ثانیه به زمین می‌رسد؟

حل: مسافت‌های طی شده در ثانیه‌های متوالی، دنبالهٔ ... , ۲۵ , ۱۵ , ۵ را تشکیل می‌دهند که یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1 = 5$ و قدرنسبت $d = 15 - 5 = 10$ است. مجموع مسافت‌های طی شده باید ۴۵۰۰ متر شود تا جسم به زمین برسد، پس داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow \frac{n}{2}(2\times 5 + (n-1)\times 10) = 4500 \Rightarrow \frac{n}{2}\times(10 + 10n - 10) = 4500 \Rightarrow 5n^2 = 4500 \Rightarrow n^2 = 900 \xrightarrow{n>0} n = 30$$

بنابراین جسم پس از $n = 30$ ثانیه به زمین می‌رسد.

۲ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی — راهبرد حل سؤال‌های امتحانی ۱۳ تا ۲۰

در یک دنبالهٔ هندسی، با جملهٔ اول a_1، قدر نسبت q و جملهٔ عمومی a_n، مجموع n جملهٔ اول با S_n نمایش داده می‌شود و می‌نویسیم:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \quad (q \neq 1) \quad (*)$$

حاصل عبارت بالا را می‌توانیم از فرمول زیر بیابیم:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \; q \neq 1$$

تیپ ۵ امتحانی محاسبهٔ مجموع جملات با یافتن جملهٔ اول و قدر نسبت: برای یافتن S_n باید جملهٔ اول و قدر نسبت را بیابیم. به حالت‌های زیر توجه کنید:

الف) رابطهٔ بازگشتی $a_{n+1} = k\times a_n$ یک دنبالهٔ هندسی با قدر نسبت k است.

ب) اگر جملهٔ عمومی داده شده باشد، جملهٔ اول و دوم را با قرار دادن $n=1$ و $n=2$ یافته و سپس از $a_2 = a_1q$ قدر نسبت را می‌یابیم.

پ) اگر دو جملهٔ a_n و a_m داده شده باشد، با تشکیل نسبت $\frac{a_m}{a_n}$ قدر نسبت را یافته و با قرار دادن آن در یکی از جملات، a_1 را می‌یابیم.

نمونهٔ امتحانی: جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت $a_n = 3(2)^{n+2}$ است. مجموع ده جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

حل: ابتدا جملهٔ اول دنباله و قدرنسبت آن را می‌یابیم.

$$a_n = 3(2)^{n+2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3\times 2^3 = 24 \\ a_2 = 3\times 2^4 \end{cases} \xrightarrow{\text{قدر نسبت را می‌یابیم}} q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3\times 2^4}{3\times 2^3} = 2$$

بنابراین مجموع ۱۰ جملهٔ اول برابر است با:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \xrightarrow{a_1 = 24 \;,\; q = 2} S_{10} = \frac{24(1-2^{10})}{1-2} = \frac{24(1-2^{10})}{-1} = 24\times 1023 = 24552$$

تیپ ۶ امتحانی یافتن تعداد جملات با معلوم بودن S_n: اگر S_n (مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی) مقداری معلوم باشد و تعداد جملات را بخواهند، با جای‌گذاری معلومات در فرمول $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$، تعداد جملات یعنی n را می‌یابیم. همچنین ممکن است در مسئله گفته شود که حداقل مقدار n را طوری بیابید که $S_n > k$ شود که باید کوچکترین مقدار طبیعی n را که نامساوی را برآورده کند، بیابیم.

نمونهٔ امتحانی: مجموع چند جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی ... , ۱۲ , ۶ , ۳ برابر ۱۵۳۳ است؟

حل: جملهٔ اول دنباله $a_1 = 3$ و قدر نسبت $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$ است. طبق فرض $S_n = 1533$، پس:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \xrightarrow{a_1 = 3 \,,\, q = 2} S_n = \frac{3(1-2^n)}{1-2} = \frac{3(1-2^n)}{-1} = 3(2^n - 1) \xrightarrow{S_n = 1533} 3(2^n - 1) = 1533$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 = 511 \Rightarrow 2^n = 512 \xrightarrow{2^9 = 512} 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

تیپ ۷ امتحانی کاربرد مجموع جملات هندسی در اتحادها: برای یافتن حاصل $S=1+a+...+a^{n-2}+a^{n-1}$ از فرمول مجموع در دنبالهٔ هندسی استفاده می‌کنیم ($a_1=1$ و قدر نسبت a است.) و داریم:

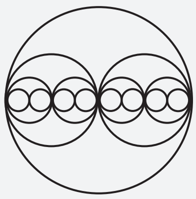
$$S=1+a+...+a^{n-2}+a^{n-1}=\frac{1\times(1-a^n)}{1-a}=\frac{a^n-1}{a-1}\quad,\ a\neq 1$$

بنابراین اتحادهای روبه‌رو را خواهیم داشت:

$(1)\ a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1)$ (عددی‌طبیعی n)

$(2)\ a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+...-a+1)$ (عددی‌طبیعی و فرد n)

تیپ ۸ امتحانی محاسبهٔ مجموع در مسائل کاربردی: در مسائل کاربردی، وقتی متغیر (مثلاً شعاع دایره یا ضلع مربع و مثلث ...) با ضریب ثابتی افزایش (یا کاهش) می‌یابد، آنگاه مقادیر (محیط، مساحت و ...) در هر مرحله تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. برای حل مسئله باید جملهٔ اول الگو و همچنین ضریب ثابت (همان قدر نسبت) را با یافتن جملهٔ دوم بیابیم و سپس مجموع خواسته شده را از فرمول S_n پیدا کنیم.



نمونهٔ امتحانی: در نمودار شکل مقابل، شعاع دایرهٔ بزرگتر مساوی ۲ است. اگر مطابق شکل، داخل هر دایره، دو دایره بر آن مماس شود و این روند ادامه یابد، مجموع مساحت‌های تمام دایره‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

حل: شعاع دایره‌ها به ترتیب ۲ و ۱ و $\frac{1}{2}$ و .... است، برای دایرهٔ دوم باید مساحت دو دایره، برای دایرهٔ سوم باید مساحت ۴ دایره و .... را در نظر بگیریم. بنابراین دنبالهٔ مساحت‌ها به صورت زیر است:

$$\therefore\ 4\pi\ ,\ 2\pi\ ,\ \pi\ ,\ ...\Rightarrow S_n=4\pi+2\pi+\pi+...\xrightarrow{q=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}\ ,\ a_1=4\pi}S_n=\frac{4\pi(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=8\pi(1-(\frac{1}{2})^n)$$

وقتی n بسیار بزرگ می‌شود، مقدار $(\frac{1}{2})^n$ بسیار کوچک شده و به صفر نزدیک می‌شود، بنابراین داریم: $S\simeq 8\pi$.

سؤال‌های امتحانی

۴ پیمانه — **۲۰ سؤال** — **پیمانه‌های ۱ تا ۴**

۱ مجموع جملات دنبالهٔ حسابی — صفحه‌های ۲ تا ۴ و تمرین‌های صفحهٔ ۶ کتاب درسی

	مرجع
۱. جاهای خالی عبارت‌های (الف) تا (ث) را با اعداد مناسب کامل کنید و درستی یا نادرستی عبارت (ج) را مشخص کنید. الف) مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۶۰ برابر است با .... ب) روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطهٔ متمایز وجود دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده برابر است با .... پ) از بین ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $... , -1 , -4 , -7$ مجموع جمله‌های ردیف زوج .... و مجموع جمله‌های ردیف فرد .... است. ت) اگر $S_n=n^2+n$ مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی باشد، جملهٔ دوم دنباله .... است. ث) مجموع جملات دنبالهٔ حسابی $199 , ... , 5 , 3 , 1$ برابر .... است. (۰/۲۵ نمره) ج) حاصل عبارت $2+4+6+...+100$ برابر ۲۵۰۰ است. (۰/۲۵ نمره)	صفحه‌های ۲ و ۳- مرتبط با فعالیت و مثال (الف-تهران- عترت- دی ۱۴۰۲) (۴ بار تکرار) (ب- قزوین- پگاه- دی ۱۴۰۲) (۶ بار تکرار) (پ- یزد- حیات طیبه- دی ۱۴۰۲) (۶ بار تکرار) (ت- میانه- علامه امینی- دی ۱۴۰۲) (۷ بار تکرار) ث- امتحان نهایی- غایب موجه- شهریور ۱۴۰۲ ج- امتحان نهایی- شهریور ۱۴۰۲ (۱۰ بار تکرار)
۲. مجموع بیست جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $... , 22 , 16 , 10 , 4$ را به دست آورید.	صفحهٔ ۳- مرتبط با مثال دوم (تهران- تلاش مهر پاینده- خرداد ۱۴۰۱) (۳۰ بار تکرار)
۳. در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ عمومی $a_n=1+4n$، مجموع بیست جملهٔ اول آن را به دست آورید.	صفحهٔ ۳- مکمل مثال دوم (اراک- فرزانگان قلمچی- دی ۱۴۰۲) (۷ بار تکرار)
۴. در دنبالهٔ حسابی $... , 10 , 6 , 2$ حداقل چند جملهٔ اول آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن بیشتر از ۴۵۰ شود؟ (۱ نمره)	صفحهٔ ۶- مشابه تمرین ۳ شبه نهایی- اردیبهشت ۱۴۰۳ (عصر) (۲۴ بار تکرار)
۵. مجموع همهٔ اعداد طبیعی دو رقمی را که مضرب ۵ هستند، بنویسید.	صفحهٔ ۴- مشابه کار در کلاس ۲ (تهران- امام محمد باقر (ع)- دی ۱۴۰۱) (۲۰ بار تکرار)
۶. در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ اول ۳ و مجموع ۱۰ جملهٔ نخست ۱۶۵ است. قدر نسبت آن را بیابید.	صفحهٔ ۳- مکمل فعالیت (شیراز- شهید فتاحی- دی ۱۴۰۲) (۱۰ بار تکرار)

۷. در یک دنبالهٔ حسابی جملات هشتم و شانزدهم به ترتیب ۲۳ و ۴۷ است. مجموع ده جملهٔ اول را محاسبه کنید.

صفحهٔ ۳- مکمل فعالیت
(شهرضا- سما- دی ۱۴۰۲)
(۴ بار تکرار)

۸. در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول از فرمول $S_n = n^{۲} + ۲n$ محاسبه می‌شود:
الف) جملهٔ اول دنباله و قدر نسبت را بیابید.
ب) حاصل $a_۶ + a_۷ + a_۸$ را بیابید.

صفحهٔ ۳- مکمل فعالیت
(ساری- اندیشمند- دی ۱۴۰۱)
(۸ بار تکرار)

۹. مجموع جملات منفی دنبالهٔ حسابی $... , -۶۵ , x , -۷۱$ را محاسبه کنید.

صفحهٔ ۳- مکمل مثال دوم
(تهران- امام صادق (ع)- دی ۱۴۰۲)
(۴ بار تکرار)

۱۰. ثابت کنید: $۱ + ۳ + ۵ + ... + (۲n - ۱) = n^{۲}$

صفحهٔ ۶- تمرین ۱-ب
(قشم- خرد- دی ۱۴۰۱)
(۳ بار تکرار)

۱۱. در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات با شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات با شماره‌های زوج ۱۵۰ است. قدر نسبت و جملهٔ اول را به دست آورید.

صفحهٔ ۶- تمرین ۴
(تبریز- سعدی- دی ۱۴۰۲)
(۲۴ بار تکرار)

۱۲. در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصلهٔ ۳ متر از هم قرار دارند. فاصلهٔ توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است. دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد و سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه می‌دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد، حساب کنید او مجموعاً چند توپ را در سبد انداخته است.

صفحهٔ ۴- مثال
(تهران- علوی- دی ۱۴۰۲)
(۶ بار تکرار)

۲ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی
صفحه‌های ۴ تا ۶ کتاب درسی

۱۳. مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ $... , \frac{۱}{۸} , \frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۲}$ را بیابید.

صفحهٔ ۵- کار در کلاس
(تبریز- مشکات نور- دی ۱۴۰۲)
(۳۲ بار تکرار)

۱۴. مجموع چند جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $... , ۲۴ , -۱۲ , ۶$ برابر ۱۰۲۶ می‌شود؟

صفحهٔ ۶- مرتبط با تمرین ۵
(کرمانشاه- استقلال- دی ۱۴۰۲)
(۲۴ بار تکرار)

۱۵. جملهٔ عمومی یک دنباله به صورت $a_n = ۲^{n-۱}$ است. جملات اول تا سوم این دنباله را بنویسید و سپس با استفاده از فرمول، تعیین کنید چند جمله اول از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر ۲۵۵ شود. (۱ نمره)

صفحهٔ ۶- مشابه تمرین ۵
شبه نهایی - اردیبهشت ۱۴۰۳ (صبح)
(۱۲ بار تکرار)

۱۶. در یک دنبالهٔ هندسی $a_۲ = ۶$ و $a_۷ = ۱۹۲$ است. مجموع ده جملهٔ اول چقدر است؟

صفحهٔ ۵- مکمل کار در کلاس
(بجنورد- نرجس- دی ۱۴۰۲)
(۶ بار تکرار)

۱۷. در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع شش جملهٔ اول دنباله ۹ برابر مجموع سه جملهٔ اول آن است. مجموع ده جملهٔ اول این دنباله چند برابر مجموع پنج جملهٔ اول آن است؟ (۱/۲۵ نمره)

صفحه‌های ۵ و ۶- مکمل فعالیت
امتحان نهایی - غایب موجه - شهریور ۱۴۰۲
(۱۶ بار تکرار)

۱۸. توپی را از ارتفاع ۱۵ متری سطح زمین رها می‌کنیم. این توپ پس از هر بار برخورد با زمین $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع خود را از دست می‌دهد. حساب کنید تا لحظهٔ برخورد پنجم، توپ چه مسافتی را طی می‌کند؟

صفحهٔ ۵- مشابه مثال
(اردبیل- شیخ مفید- دی ۱۴۰۲)
(۶ بار تکرار)

۱۹. طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقیمانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقیمانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ (۱/۲۵ نمره)

صفحهٔ ۶- تمرین ۶
امتحان نهایی - شهریور ۱۴۰۲
(۸ بار تکرار)

۲۰. الف) برای هر عدد حقیقی a $(a \neq ۱)$ و عدد طبیعی n داریم: $a^n - ۱ = (a - ۱)(..........)$
ب) حاصل عبارت $A = (۱ + x + x^{۲} + ... + x^{۸})(۱ - x + x^{۲} - ... + x^{۸})$ را به ازای $x = \sqrt{۳}$ بیابید.

صفحهٔ ۶- مرتبط با تمرین ۷
(الف- سقز- فجر- دی ۱۴۰۱)
(۴ بار تکرار)
(ب- همدان- علامه حلی (۱)- دی ۱۴۰۲)
(۵ بار تکرار)

۲ معادلات درجه دوم

صفحه‌های ۷ تا ۱۶ حسابان ۱

۱ روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

صفحه‌های ۷ تا ۹ کتاب درسی

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$، اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله باشند، آنگاه:

مجموع ریشه‌ها : $S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ حاصلضرب ریشه‌ها: $P=\alpha\beta=\frac{c}{a}$

توجه در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$:

۱ اگر دو ریشه قرینهٔ هم باشند، آنگاه $b=۰$ است. (یعنی $\alpha=-\beta$ یا $\alpha+\beta=۰$، پس: $b=۰$)

۲ اگر دو ریشه معکوس هم باشند، آنگاه $a=c$ است. (یعنی $\alpha=\frac{۱}{\beta}$ یا $\alpha\beta=۱$، پس: $\frac{c}{a}=۱$).

در هر دو حالت باید $\Delta>۰$ باشد تا هر دو ریشه حقیقی باشند.

تیپ ۱ امتحانی تشکیل معادله با داشتن ریشه‌ها: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، می‌توانیم معادلهٔ آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=۰\Rightarrow x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰\Rightarrow \boxed{x^۲-Sx+P=۰}$$

نمونهٔ امتحانی: معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۳+\sqrt{۲}$ و $۳-\sqrt{۲}$ باشد.

حل:
$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=(۳+\sqrt{۲})+(۳-\sqrt{۲})=۶\\ P=\alpha\beta=(۳+\sqrt{۲})(۳-\sqrt{۲})=۹-۲=۷\end{cases}\xrightarrow{S=۶,\ P=۷} x^۲-۶x+۷=۰$$

تیپ ۲ امتحانی روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله: در معادلهٔ درجهٔ دوم گاهی به حالت‌هایی برمی‌خوریم که رابطهٔ جبری بین دو ریشه، جزو خواستهٔ (دادهٔ) مسئله است. در این حالت معمولاً استفاده از روش‌های زیر راهگشاست.

۱ رابطهٔ خواسته شده بین دو ریشه متقارن است: رابطهٔ متقارن، رابطه‌ای است که اگر جای دو ریشه را عوض کنیم عبارت تغییری نکند. نمونه‌های روابط متقارن عبارت‌اند از: $\alpha^۲+\beta^۲$ یا $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$. در این حالت برای حل مسأله از فاکتورگیری یا اتحادها استفاده کرده و عبارت خواسته شده را برحسب S و P بیان می‌کنیم.

نمونهٔ امتحانی: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲+۵x-۸=۰$ باشند، حاصل $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ را بیابید.

حل: ابتدا توجه کنید که $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۵$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۸$.

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}=\frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta}\xrightarrow{\text{استفاده از اتحاد } a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab \text{ در صورت}}=\frac{(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(-۵)^۲-۲(-۸)}{-۸}=\frac{۲۵+۱۶}{-۸}=-\frac{۴۱}{۸}$$

۲ رابطهٔ داده شده بین دو ریشه متقارن نباشد: وقتی رابطه‌ای غیرمتقارن بین دو ریشه داده می‌شود (به عنوان مثال: $\alpha=۴\beta-۳$ یا $\alpha=۲\beta$) و مجهولی در معادله خواسته شده باشد (به عنوان مثال، k , m ...)، برای یافتن این مجهول، با تشکیل مجموع (یا ضرب) دو ریشه در رابطه، یک ریشهٔ معادله را می‌یابیم، سپس با قرار دادن این ریشه در خود معادله، مجهول معادله را پیدا می‌کنیم.

● **مثال:** اگر رابطهٔ $\alpha=۴\beta-۳$ بین دو ریشه داده شده باشد، کافی است β را به طرفین تساوی اضافه کنیم: $\alpha+\beta=۵\beta-۳$،

نمونهٔ امتحانی: در معادلهٔ $x^۲-۶x+m=۰$ یک ریشهٔ معادله از سه برابر دیگری، ۲ واحد بیشتر است. m را بیابید.

حل: اگر ریشه‌های معادله را α و β در نظر بگیریم، آنگاه طبق فرض $\alpha=۳\beta+۲$. باید مقدار یک ریشه را بیابیم.

$$\alpha=۳\beta+۲\xrightarrow{\text{به طرفین تساوی } \beta \text{ را اضافه می‌کنیم.}}\alpha+\beta=۴\beta+۲\xrightarrow{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۶}۶=۴\beta+۲\Rightarrow\beta=۱$$

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، پس:
$$۱^۲-۶\times۱+m=۰\Rightarrow۱-۶+m=۰\Rightarrow m=۵$$

تیپ ۳ امتحانی تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم جدید: در این حالت دو معادله داریم که ریشه‌های یک معادله، برحسب ریشه‌های معادلهٔ دیگر داده می‌شوند. ریشه‌های معادلهٔ اول α و β در نظر گرفته می‌شوند و ریشه‌های معادلهٔ جدید بر حسب α و β نوشته می‌شوند. برای یافتن معادلهٔ جدید، مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ جدید را S' و P' نامیده و آنها را برحسب S و P معادلهٔ اول یافته و سپس معادلهٔ جدید را به صورت $x^۲-S'x+P'=۰$ می‌نویسیم.

نمونهٔ امتحانی: معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش از سه برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$، یک واحد کمتر باشد.

حل: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۱=۰$ باشند، آنگاه:

$$x^۲-x-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۱}{۱}=۱\\ P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۱}=-۱\end{cases}$$

سه برابر ریشه‌ها برابر ۳α و ۳β و یک واحد کمتر از سه برابر $۳\alpha-۱$ و $۳\beta-۱$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} S'=(۳\alpha-۱)+(۳\beta-۱)=۳(\alpha+\beta)-۲=۳\times ۱-۲=۱ \\ P'=(۳\alpha-۱)(۳\beta-۱)=۹\alpha\beta-۳(\alpha+\beta)+۱=۹(-۱)-۳\times ۱+۱=-۱۱ \end{cases} \xrightarrow{S'=۱,\ P'=-۱۱} x^۲-x-۱۱=۰$$

سؤال‌های امتحانی

۲ پیمانه | **۱۰ سؤال** | **پیمانه‌های ۵ و ۶**

۱ روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

صفحه‌های ۷ تا ۹ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

۲۱. جاهای خالی زیر را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف) حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲+۳x-۸=۰$ مساوی .... است. (۰/۲۵ نمره)

ب) ریشه‌های معادلهٔ .... اعداد -۵ و ۲ است. (۰/۲۵ نمره)

پ) اگر $x=۱$ یک ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲-۴mx+۱=۰$ باشد، مقدار $m=$ .... و ریشهٔ دیگر آن $x=$ .... است.

ت) ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+(m-۲)x-m=۰$ در صورتی قرینهٔ یکدیگرند که m مساوی .... باشد.

مرجع: صفحه‌های ۸ و ۹– مکمل فعالیت
الف– امتحان نهایی– شهریور ۱۴۰۲
ب– شبه نهایی– اردیبهشت ۱۴۰۳ (صبح)
(۱۶ بار تکرار)
(پ– شیراز– شاهد– خرداد ۱۴۰۱)
(۶ بار تکرار)
(ت– بوشهر– دانشگاه خلیج فارس– خرداد ۱۴۰۱)
(۴ بار تکرار)

۲۲. معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۳+۲\sqrt{۳}$ و $۳-۲\sqrt{۳}$ باشند.

صفحهٔ ۹– مشابه کار در کلاس
(میبد– شهید رحیمی‌فر– دی ۱۴۰۲)
(۲۴ بار تکرار)

۲۳. اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $-۳x^۲+x+۲=۰$ باشند:

الف) مقادیر $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ را حساب کنید.

ب) حاصل $۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲$ را به دست آورید.

صفحهٔ ۸– مرتبط با مثال
(کرمان– شهید مهدوی– خرداد ۱۴۰۱)
(۱۴ بار تکرار)

۲۴. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+(k-۱)x+۸=۰$ باشند و $\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{\beta}+\frac{۱}{\alpha}$ باشد، مقدار k را بیابید.

صفحهٔ ۸– مکمل فعالیت ۳
(تهران– سرای دانش رسالت– دی ۱۴۰۱)
(۱۲ بار تکرار)

۲۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x+k=۰$ باشند، به ازای کدام مقدار k، بین ریشه‌ها رابطهٔ $\alpha+۲\beta=۳$ برقرار است؟

صفحهٔ ۸– مکمل فعالیت ۳
(اردبیل– رشد دانش– خرداد ۱۴۰۱)
(۹ بار تکرار)

۲۶. اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۶x+۲m+۲=۰$، دو برابر ریشهٔ دیگر باشد، دو ریشه و m را به دست آورید.

صفحهٔ ۹– مرتبط با فعالیت
(کرج– شهید سلطانی– دی ۱۴۰۲)
(۸ بار تکرار)

۲۷. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $۲x^۲-x-۴=۰$ باشند، طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha}=$

ب) $-۴\alpha^۲+۲\alpha-۱=$

پ) $۲\beta^۲+\alpha+۱=$

صفحهٔ ۸– مرتبط با فعالیت ۳
(اردبیل– شیخ مفید– دی ۱۴۰۲)
(۱۳ بار تکرار)

۲۸. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۷x-۳=۰$ باشند، بدون یافتن α و β، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $۳\alpha-۱$ و $۳\beta-۱$ باشد.

صفحهٔ ۹– مرتبط با فعالیت ۲
(بابل– البرز– دی ۱۴۰۲)
(۱۰ بار تکرار)

۲۹. معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۱=۰$ یک واحد کمتر باشد.

صفحهٔ ۹– مکمل فعالیت ۲
(اردبیل– المهدی– دی ۱۴۰۱)
(۱۲ بار تکرار)

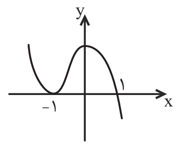
۳۰. طول یک کاشی از دو برابر عرض آن یک سانتی‌متر بلندتر است. اگر برای پوشاندن یک دیوار به مساحت ۱۱ متر مربع، دو هزار کاشی مصرف شده باشد، عرض هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

صفحهٔ ۱۶– مشابه تمرین ۹
(تهران– علامه حلی– دی ۱۴۰۲)
(۴ بار تکرار)

۲ معادلات درجه دوم

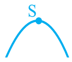
صفحه‌های ۷ تا ۱۶ حسابان ۱

۲ صفرهای تابع و تابع درجهٔ دوم | راهبرد حل سؤال‌های امتحانی ۳۱ تا ۴۲



❖ **صفرهای تابع:** در تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را صفرهای تابع می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f، طول نقطه (نقاط) تلاقی نمودار تابع f با محور x هاست. شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ و صفرهای تابع ۱ و ۱− است. تابع f در $x=1$ محور x ها را قطع می‌کند و در $x=-1$ بر محور x ها مماس است. بنابراین معادلهٔ $f(x)=0$، دارای یک ریشهٔ سادهٔ $x=1$ و یک ریشهٔ مضاعف $x=-1$ است.

❖ **تابع درجهٔ دوم (صفرهای تابع و معادلهٔ آن):** ضابطهٔ یک تابع درجهٔ دوم به شکل $f(x)=ax^2+bx+c$، $(a\neq 0)$ و نمودار آن یک سهمی است.

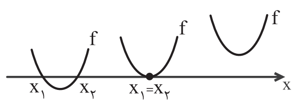
۱ اگر $a>0$ باشد، تابع دارای مینیمم و دهانهٔ آن رو به بالا به شکل  است. اگر $a<0$ باشد، تابع دارای ماکزیمم و دهانهٔ آن رو به پایین به شکل  است.

۲ نقطهٔ S در نمودارهای بالا را رأس سهمی یا نقطهٔ ماکزیمم (مینیمم) تابع می‌نامیم. طول نقطهٔ ماکزیمم (مینیمم) $x_S=\frac{-b}{2a}$ است و عرض آن با قرار دادن این طول در ضابطهٔ تابع به دست می‌آید که برابر $y_S=f(\frac{-b}{2a})=-\frac{\Delta}{4a}$ است. بنابراین رأس سهمی $S(\frac{-b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ است.

توجه وقتی گفته می‌شود «ماکزیمم یا مینیمم» تابع را بیابید، منظور یافتن عرض ماکزیمم یا مینیمم تابع است.

نمونهٔ امتحانی: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+4x+5$ را بیابید.

حل: چون $a=-1<0$ منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است و ماکزیمم دارد. طول نقطهٔ ماکزیمم برابر $x_S=-\frac{4}{2\times(-1)}=2$ است برای یافتن عرض نقطهٔ ماکزیمم کافی است $f(2)$ را بیابیم: $f(2)=-(2^2)+4\times 2+5=9$



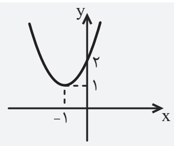
۳ در تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، صفرهای تابع، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ هستند. بسته به اینکه $\Delta>0$ یا $\Delta=0$ یا $\Delta<0$ باشد، نمودار تابع درجهٔ دوم محور x ها را به ترتیب در دو نقطه قطع می‌کند یا در یک نقطه مماس است یا اصلاً قطع نمی‌کند.

● **مثال:** برای تعیین صفرهای تابع $f(x)=2x^2-5x-7$، باید معادلهٔ $2x^2-5x-7=0$ را حل کنیم. از آنجا که در این معادله $a+c=b$، پس یک ریشهٔ معادله $x'=-1$ و ریشهٔ دیگر $x''=-\frac{c}{a}=-\frac{-7}{2}=\frac{7}{2}$ است. بنابراین صفرهای تابع ۱− و $\frac{7}{2}$ هستند.

تیپ ۱ امتحانی نوشتن معادلهٔ سهمی (تعیین مقادیر ضرایب معادله): **وقتی اطلاعاتی بر روی نمودار سهمی داده شده باشد و معادلهٔ سهمی خواسته مسئله باشد، استفاده از حالت‌های زیر کارساز است:**

۱ مختصات رأس و یک نقطهٔ دیگر معلوم باشد: **اگر رأس سهمی به مختصات $S(h,k)$ در نظر گرفته شود بهتر است از معادلهٔ $y=a(x-h)^2+k$ استفاده کنیم و برای یافتن مجهول a، کافی است مختصات نقطهٔ معلوم را در معادله قرار دهیم.**

نمونهٔ امتحانی: معادلهٔ سهمی شکل مقابل را بیابید.

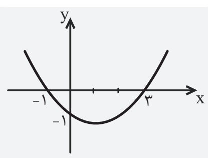


حل: با توجه به نمودار سهمی، نقطهٔ $(-1,1)$ رأس سهمی است، بنابراین می‌توان معادلهٔ آن را به صورت $y=a(x-(-1))^2+1$ نوشت. از طرفی نقطهٔ $(0,2)$ روی نمودار سهمی قرار دارد، پس در معادلهٔ آن صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{(0,2)\in\text{سهمی}} 2=a(0+1)^2+1\Rightarrow 2=a+1\Rightarrow a=1\Rightarrow y=(x+1)^2+1=x^2+2x+2$$

۲ صفرهای تابع و یک نقطهٔ دیگر معلوم باشد: **اگر نمودار تابع، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، آنگاه معادلهٔ آن را می‌توانیم به شکل $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ بنویسیم و برای یافتن مجهول a، کافی است مختصات نقطهٔ معلوم را در معادله قرار دهیم.**

نمونهٔ امتحانی: معادلهٔ سهمی شکل مقابل را بیابید.



حل: نمودار تابع داده شده، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱− و ۳ قطع کرده است، پس معادلهٔ آن را می‌توان به صورت $y=a(x+1)(x-3)$ نوشت. از طرفی نمودار تابع از نقطهٔ $(0,-1)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ تابع صدق می‌کند:

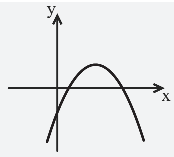
$$\xrightarrow{(0,-1)\in\text{سهمی}} -1=a(0+1)(0-3)\Rightarrow -1=-3a\Rightarrow a=\frac{1}{3}\Rightarrow y=\frac{1}{3}(x+1)(x-3)$$

تیپ ۲ امتحانی تعیین علامت ضرایب معادله: **وقتی نمودار سهمی داده می‌شود، برای تعیین علامت ضرایب معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ یا به عکس، یعنی اگر معادله را بدهند و نیاز باشد نمودار متناظر آن را تشخیص دهیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:**

۱ تعیین علامت a: اگر دهانهٔ سهمی رو به بالا باشد، آنگاه $a>0$ و اگر دهانهٔ سهمی رو به پایین باشد، آنگاه $a<0$ است.

۲ تعیین علامت c: اگر محل تلاقی نمودار با محور y ها (عرض از مبدأ) مثبت باشد، آنگاه $c>0$ و اگر عرض از مبدأ نمودار منفی باشد، آنگاه $c<0$ است.

۳ تعیین علامت b: اگر طول رأس $(x_S=\frac{-b}{2a})$ مثبت باشد، a و b مختلف‌العلامت‌اند و اگر طول رأس منفی باشد، a و b هم‌علامت‌اند.



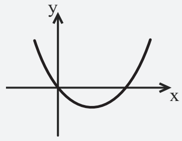
نمونهٔ امتحانی: نمودار تابع به معادلهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$ در زیر رسم شده است. علامت ضرایب a ، b و c را مشخص کنید.

حل: دهانهٔ سهمی رو به پایین است، پس ضریب $x^۲$ منفی است، یعنی $a<۰$. از طرفی طول نقطهٔ ماکزیمم تابع مثبت است،

بنابراین:
$$x_{max}=-\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow\frac{b}{۲a}<۰\xrightarrow{a<۰}b>۰$$

همچنین عرض از مبدأ نمودار که به ازای $x=۰$ به دست می‌آید مقداری منفی است، لذا:
$$f(۰)=a(۰)^۲+b(۰)+c=c<۰$$

توجه در مواردی نمودار داده نمی‌شود و خواستهٔ مسئله تعیین علامت ضرایب (یا یافتن پارامتر مجهول) به گونه‌ای است که نمودار از یک (یا چند) ناحیه عبور کند. در این حالت شکل مطلوب را رسم کرده و به کمک آن علامت ضرایب را تعیین می‌کنیم.



نمونهٔ امتحانی: به ازای چه حدودی از m نمودار تابع $f(x)=mx^۲+(m-۱)x$ از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند؟

حل: ابتدا توجه کنید که نمودار از مبدأ می‌گذرد پس شکل مطلوب برای آنکه نمودار از ناحیهٔ سوم عبور نکند به شکل مقابل است. با توجه به شکل، تابع دارای مینیمم است، پس $m>۰$ ، از طرفی طول رأس مثبت است، بنابراین:
$$x_S=-\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow x_S=-\frac{m-۱}{۲m}>۰\xrightarrow{m>۰}m-۱<۰\Rightarrow m<۱\bigcap m>۰\Rightarrow ۰<m<۱$$

۳ روش تقسیم و تغییر متغیر برای یافتن صفرهای تابع | راهبرد حل سؤال‌های امتحانی ۴۳ تا ۴۷

برای یافتن صفرهای توابع چندجمله‌ای با درجات بالاتر از ۲، می‌توانیم از روش فاکتورگیری، تجزیه و تقسیم یا در مواردی از تغییر متغیر مناسب استفاده کنیم. مثلاً برای یافتن صفرهای تابع $f(x)=x^۳-۹x$ کافی است از فاکتورگیری استفاده کنیم: $f(x)=x(x^۲-۹)=۰$ ، ریشه‌ها صفر و ±۳ خواهند بود.

تیپ ۳ امتحانی یافتن صفرهای تابع با روش تقسیم: **اگر a یکی از صفرهای تابع f (ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$) در اختیار باشد، با تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ و نوشتن قاعدهٔ تقسیم، $f(x)$ را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تبدیل کرده و صفرهای دیگر تابع (ریشه‌های معادله) را در صورت وجود می‌یابیم.**

توجه ریشهٔ معادله همواره در خود معادله صدق می‌کند.

نمونهٔ امتحانی: a را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^۳-۳x^۲+ax+۲۴$ برابر ۲ باشد. سپس صفرهای دیگر را به‌دست آورید.

حل: صفرهای تابع، ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند، پس $x=۲$ در معادله صدق می‌کند:
$$x^۳-۳x^۲+ax+۲۴=۰\xrightarrow{x=۲}(۲)^۳-۳(۲)^۲+a(۲)+۲۴=۰$$
$$\Rightarrow ۸-۱۲+۲a+۲۴=۰\Rightarrow ۲a=-۲۰\Rightarrow a=-۱۰\Rightarrow f(x)=x^۳-۳x^۲-۱۰x+۲۴$$

با تقسیم $f(x)$ بر $x-۲$ دیگر عامل‌ها را می‌یابیم. با توجه به قاعدهٔ تقسیم داریم:
$$f(x)=(x-۲)(x^۲-x-۱۲)\xrightarrow{\text{با استفاده از تجزیه}}f(x)=(x-۲)(x-۴)(x+۳)=۰$$

$$\begin{array}{r|l}
x^۳-۳x^۲-۱۰x+۲۴ & x-۲\\
\hline
-(x^۳-۲x^۲) & x^۲-x-۱۲\\
\hline
-x^۲-۱۰x+۲۴ & \\
-(-x^۲+۲x) & \\
\hline
-۱۲x+۲۴ & \\
-(-۱۲x+۲۴) & \\
\hline
۰ &
\end{array}$$

بنابراین دو صفر دیگر ۴ و -۳ هستند.

تیپ ۴ امتحانی یافتن صفرهای تابع با تغییر متغیر: **در بعضی از موارد برای یافتن صفرهای یک تابع (ریشه‌های معادله)، می‌توان عبارت مناسبی بر حسب متغیر جدید مانند u را انتخاب و معادلهٔ جدیدی را تشکیل داد که بر حسب u از درجهٔ دوم باشد. با حل معادلهٔ جدید، مقادیر u را یافته و از آنجا مقادیر x (صفرهای تابع) را می‌یابیم.**

نمونهٔ امتحانی: صفرهای تابع $f(x)=x^۴-۱۳x^۲+۳۶$ را بیابید.

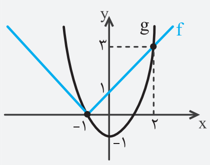
حل: با تغییر متغیر $x^۲=u$ خواهیم داشت:
$$u^۲-۱۳u+۳۶=۰\Rightarrow(u-۹)(u-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}u-۹=۰\Rightarrow u=۹\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow x=\pm۳\\ u-۴=۰\Rightarrow u=۴\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲\end{cases}$$

بنابراین تابع f دارای ۴ صفر $۳ , ۲ , -۲ , -۳$ است.

۴ روش هندسی حل معادلات | راهبرد حل سؤال‌های امتحانی ۴۸ تا ۵۰

یک روش حل معادلات، تعیین تعداد (یا گاهی جای دقیق) ریشه‌های یک معادله به کمک ترسیم است. وقتی نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ یکدیگر را در نقطه‌ای به طول $x_۰$ قطع کنند، آنگاه $x_۰$ ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=g(x)$ است.

تیپ ۵ امتحانی حل معادله به روش هندسی: **در این روش معادلهٔ داده شده را به گونه‌ای به صورت $f(x)=g(x)$ در نظر می‌گیریم که رسم هر یک از دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ به سادگی ممکن باشد. با رسم نمودار دو تابع در یک دستگاه مختصات، ریشه‌ها را می‌یابیم. معمولاً باید یک طرف تابع درجهٔ دوم و طرف دیگر تابع قدرمطلقی ساخته شود.**



نمونهٔ امتحانی: معادلهٔ $|x+۱|=x^۲-۱$ را به روش هندسی حل کنید.

حل: نمودار دو تابع $f(x)=|x+۱|$ و $g(x)=x^۲-۱$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $f(x)=|x+۱|$ کافی است نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به چپ انتقال دهیم. برای رسم نمودار تابع $g(x)=x^۲-۱$ کافی است نمودار تابع $y=x^۲$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم. همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار در دو نقطهٔ $x=-۱$ و $x=۲$ متقاطع‌اند، پس جواب‌های معادله -۱ و ۲ است.

سؤال‌های امتحانی

۴ پیمانه | **۲۰ سؤال** | **پیمانه‌های ۷ تا ۱۰**

۲ صفرهای تابع و تابع درجهٔ دوم — صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

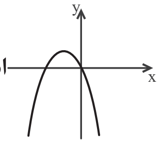
مرجع

۳۱. درستی یا نادرستی مورد «الف» را مشخص کرده و جاهای خالی سایر موارد را با عبارات مناسب کامل کنید.

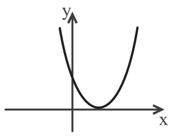
الف) صفرهای تابع f طول نقاط تلاقی نمودار $f(x)$ با محور x ها است. (۰/۲۵ نمره)

ب) مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=-x^2+3x+2$ برابر .... است.

پ) کمترین مقدار تابع $f(x)=3x^2+5x-2$ در نقطهٔ .... رخ می‌دهد.

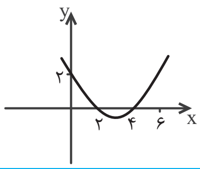
ت) نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به شکل  است، علامت b .... است.

ث) در شکل مقابل، سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. در این صورت علامت a ....، علامت b .... و علامت c .... است و معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای .... ریشه است.



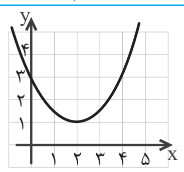
صفحه‌های ۱۰ و ۱۲- مرتبط با فعالیت و کار در کلاس
الف- امتحان نهایی- غایب موجه- شهریور ۱۴۰۲
(۸ بار تکرار)
(ب- آمل- کیمیای دانش- دی ۱۴۰۲)
(۶ بار تکرار)
(پ- اردبیل- الزهرا (س)- دی ۱۴۰۱)
(۳ بار تکرار)
(ت- کرج- فرهنگ آموزش- دی ۱۴۰۲)
(۶ بار تکرار)
(ث- کرج- شهید سلطانی- دی ۱۴۰۲)
(۶ بار تکرار)

۳۲. اگر نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به صورت زیر باشد، ضابطهٔ سهمی را مشخص کنید. (۱ نمره)



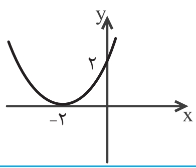
صفحهٔ ۱۱- مشابه مثال دوم
شبه نهایی- اردیبهشت ۱۴۰۳ (عصر)
(۲۲ بار تکرار)

۳۳. در شکل مقابل نمودار سهمی $p(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید. (۱ نمره)



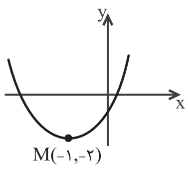
صفحهٔ ۱۵- مشابه تمرین ۲
امتحان نهایی- شهریور ۱۴۰۲
(۱۶ بار تکرار)

۳۴. در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. ضرایب a، b و c را تعیین کنید.



صفحهٔ ۱۵- مشابه تمرین ۲- الف
(مشهد- سروش هدایت- دی ۱۴۰۲)
(۱۴ بار تکرار)

۳۵. در نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$، اگر $|a|=1$ باشد، صفرهای تابع $f(x)$ و ضابطهٔ تابع را بیابید.



صفحهٔ ۱۶- مشابه تمرین ۷- ت
(یزد- شهید طباطبایی- دی ۱۴۰۲)
(۸ بار تکرار)

۳۶. معادلهٔ تابع درجه دومی را بنویسید که صفرهای آن ۵ و ۸- باشند و از نقطهٔ $(-2,-2)$ بگذرد.

صفحهٔ ۱۱- مکمل مثال دوم
(تبریز- علامه جعفری- دی ۱۴۰۲)
(۶ بار تکرار)

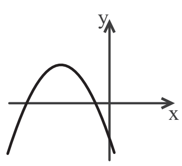
۳۷. شخصی توپی را شوت کرد. اگر مسیر توپ به شکل سهمی $y=-\frac{1}{20}x^2+3x$ باشد؛

الف) حداکثر ارتفاع توپ چقدر خواهد بود؟

ب) توپ در چه فاصله‌ای از نقطهٔ شوت به زمین می‌خورد؟

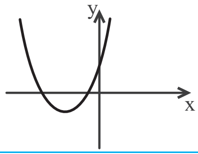
صفحهٔ ۱۵- مشابه تمرین ۳
(نطنز- امام خمینی (ره)- دی ۱۴۰۲)
(۴ بار تکرار)

۳۸. نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به صورت زیر است. علامت ضرایب a، b و c را تعیین کنید. (۰/۷۵ نمره)



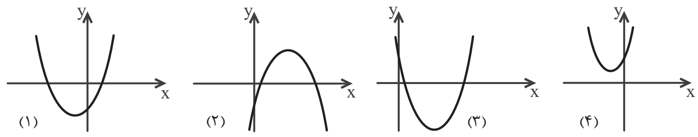
صفحهٔ ۱۲- مشابه کار در کلاس
شبه نهایی- اردیبهشت ۱۴۰۳ (صبح)
(۸ بار تکرار)

۳۹. اگر نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ به صورت زیر باشد، در مورد علامت a، b، c و Δ نظر دهید.



صفحهٔ ۱۲- مشابه کار در کلاس
(همدان- علامه حلی- دی ۱۴۰۲)
(۱۱ بار تکرار)

۴۰. با توجه به تابع $f(x)=ax^2+bx+c$، نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های جدول زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)



ویژگی	شمارهٔ نمودار (نمودارها)
علامت b منفی است.	....
دارای مینیمم است و ریشه ندارد.	....
علامت c منفی است.	....

صفحهٔ ۱۲- مشابه کار در کلاس
امتحان نهایی- غایب موجه- شهریور ۱۴۰۲
(۴ بار تکرار)

۴۱. نمودار تابع به شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ را رسم کنید که همهٔ شرایط $\Delta=0$، $b>0$ و $a<0$ در آن برقرار باشد.

صفحهٔ ۱۲- مکمل کار در کلاس
(آبادان- بهجت- دی ۱۴۰۲)
(۴ بار تکرار)

۴۲. اگر منحنی به معادلهٔ $y=2x^2-4x+m-3$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، مجموعهٔ مقادیر m را به دست آورید.

صفحهٔ ۱۲- مکمل کار در کلاس
(اراک- علامه حلی- دی ۱۴۰۲)
(۸ بار تکرار)

۳ روش تقسیم و تغییر متغیر برای یافتن صفرهای تابع | صفحهٔ ۱۳ و تمرین‌های صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی

۴۳. مقدار m را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+mx^2-x-2$ برابر -1 باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید. (۱/۲۵ نمره)

صفحهٔ ۱۳- مرتبط با کار در کلاس
امتحان نهایی- غایب موجه- خرداد ۱۴۰۲
(۱۵ بار تکرار)

۴۴. ابتدا نشان دهید $x=1$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^3-2x^2-8x+9$ می‌باشد، سپس صفرهای دیگر آن را بیابید.

صفحهٔ ۱۳- مرتبط با مثال اول
(تهران- فرزانگان ۶- دی ۱۴۰۱)
(۱۰ بار تکرار)

۴۵. صفرهای توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=x^3-4x$

ب) $g(x)=x^4+6x^2-40$

صفحهٔ ۱۵- مرتبط با تمرین ۴
(الف- قشم- خرد- دی ۱۴۰۱)
(۴ بار تکرار)
(ب- بابل- شهید بهشتی- دی ۱۴۰۲)
(۱۲ بار تکرار)

۴۶. صفرهای تابع $f(x)=(4-x^2)^2+2(4-x^2)-15$ را در صورت وجود بیابید. (۱/۲۵ نمره)

صفحهٔ ۱۵- مشابه تمرین ۵- پ
شبه نهایی- اردیبهشت ۱۴۰۳ (صبح)
(۱۲ بار تکرار)

۴۷. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4-3x^2+2=0$

ب) $(\frac{x^2}{2}-1)^2+(\frac{x^2}{2}-1)-2=0$

پ) $(x^2+4x)^2-2x^2-8x-15=0$

صفحهٔ ۱۵- مشابه تمرین ۵
(الف- کرج- سلاله- دی ۱۴۰۲)
(۱۲ بار تکرار)
(ب- شهر ری- دانشجو- دی ۱۴۰۲)
(۱۶ بار تکرار)
(پ- تهران- امام صادق (ع)- دی ۱۴۰۲)
(۸ بار تکرار)

۴ روش هندسی حل معادلات | صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶ کتاب درسی

۴۸. معادلهٔ $|x+2|=x^2-4$ را به روش هندسی حل کنید.

صفحهٔ ۱۶- مرتبط با تمرین ۶
(ساری- شریف‌العلما- دی ۱۴۰۲)
(۱۰ بار تکرار)

۴۹. ریشه‌های معادلهٔ $|x|=x^2-2x$ را به کمک رسم نمودار (روش هندسی) بیابید.

صفحهٔ ۱۴- مشابه مثال
(مشهد- کیان- دی ۱۴۰۲)
(۱۶ بار تکرار)

۵۰. تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادلهٔ $x+|x-1|=x^2-1$ را به روش هندسی به دست آورید.

صفحهٔ ۱۶- تمرین ۶
(اردبیل- شیخ مفید- دی ۱۴۰۲)
(۶ بار تکرار)

پاسخ تشریحی جبر و معادله، فصل اول

پاسخ تشریحی: فرزانهٔ دانایی

۱. الف) ۱۸۳۰

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ است، بنابراین:

$$1+2+\dots+60=\frac{60\times 61}{2}=30\times 61=1830$$

ب) ۱۹۰

از یک نقطه شروع کرده و با وصل آن به ۱۹ نقطهٔ دیگر، ۱۹ وتر حاصل می‌شود. نقطهٔ بعدی را بـه ۱۸ نقطـهٔ دیگر و بـه همـین ترتیب تا نقطهٔ آخر پیش می‌رویم. بنابراین تعداد کل وترها برابر می‌شود با:

$$19+18+\dots+1=\frac{19\times 20}{2}=190$$

پ) ۲۰۰ , ۲۳۰

قدر نسبت دنبالهٔ حسابی $\dots,-1,-4,-7$ برابر با $d=-4-(-7)=3$ است. جملات ردیف زوج بـه صورت $\dots,2,-4$ است که جملهٔ اول آن $a_1=-4$ و قدر نسبت آن $d_1=2d=6$ است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن با استفاده از فرمول $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ برابر است با:

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2\times(-4)+9\times 6)=10(-4+27)$$
$$=10\times 23=230$$

جملات ردیف فرد بـه صورت $\dots,-1,-7$ است کـه جملهٔ اول آن $a'_1=-7$ و قدر نسبت آن $d_2=2d=6$ است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن برابر است با:

$$S'_{10}=\frac{10}{2}(2\times(-7)+9\times 6)=10(-7+27)=10\times 20=200$$

ت) ۴

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی $S_n=n^2+n$ است، بنابراین داریم:

$$\xrightarrow{n=1} S_1=a_1=1+1=2$$
$$\xrightarrow{n=2} S_2=a_1+a_2=2^2+2=6 \xrightarrow{a_1=2} 2+a_2=6$$
$$\Rightarrow a_2=4$$

ث) ۱۰۰۰۰ (۰/۲۵)

جملهٔ اول دنباله $a_1=1$، قدر نسبت دنباله $d=3-1=2$ و جملهٔ آخر $a_n=199$ است. ابتدا تعداد جملات را می‌یابیم:

$$a_n=a_1+(n-1)d \xrightarrow{a_n=199} 199=1+(n-1)\times 2$$
$$\Rightarrow 199=2n-1\Rightarrow 2n=200\Rightarrow n=100$$

با استفاده از فرمول مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$، مجموع ۱۰۰ جملهٔ اول برابر است با:

$$S_{100}=\frac{100}{2}(1+199)=50\times 200=10000$$

ج) نادرست است (۰/۲۵).

اگر از ۲ فاکتور بگیریم، داریم:

$$2+4+6+\dots+100=2(1+2+3+\dots+50)$$

می‌دانیم مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر با $\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس داریم:

$$2(1+2+\dots+50)=2\times\frac{50\times 51}{2}=2550$$

---

۲. جملهٔ اول دنباله $a_1=4$ و قدر نسبت دنباله $d=10-4=6$ است. با استفاده از فرمول مجموع $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنباله برابر است با:

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2\times 4+19\times 6)=10(8+114)$$
$$=10\times 122=1220$$

---

۳. از آنجا که a_n را داریم، مجموع n جملهٔ اول را با استفاده از فرمول $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ می‌یابیم. ابتدا جملهٔ a_1 و a_{20} را به دست می‌آوریم:

$$a_n=1+4n\Rightarrow\begin{cases}a_1=1+4=5\\ a_{20}=1+4\times 20=1+80=81\end{cases}$$

بنابراین مجموع ۲۰ جملهٔ اول برابر است با:

$$S_{20}=\frac{20}{2}(5+81)=10\times 86=860$$

---

۴. باید کمترین مقدار n ی را بیابیم که به ازای آن نامساوی $S_n>450$ برقرار شود. جملهٔ اول دنباله $a_1=2$ و قدر نسبت دنباله $d=6-2=4$ است. با استفاده از فرمول مجموع $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، داریم:

$$S_n>450\Rightarrow\frac{n}{2}(2\times 2+(n-1)\times 4)>450 \quad (0/5)$$
$$\Rightarrow\frac{n}{2}(4+4n-4)>450\Rightarrow\frac{n}{2}\times 4n>450$$
$$\Rightarrow \underbrace{2n^2>450\xrightarrow{\div 2}n^2>225\Rightarrow n^2>15^2\Rightarrow n>15}_{(0/25)}$$

بنابراین کمترین مقدار n برابر با ۱۶ است، پس حداقل باید ۱۶ جملهٔ اول را با هم جمع کنیم (۰/۲۵).

---

۵. اعداد دو رقمی مضرب ۵ به صورت $95,\dots,15,10$ هستند که یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1=10$، قدرنسبت $d=15-10=5$ و جملهٔ آخر $a_n=95$ تشکیل می‌دهند. با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی که به صورت $a_n=a_1+(n-1)d$ است، تعداد جملات دنباله را می‌یابیم:

$$\xrightarrow[a_1=10\,,\,d=5]{a_n=95} 95=10+(n-1)\times 5\Rightarrow 85=5(n-1)$$
$$\Rightarrow n-1=\frac{85}{5}=17\Rightarrow n=18$$

مجموع جملات دنباله با استفاده از فرمول $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ برابر است با:

$$S_{18}=\frac{18}{2}(10+95)=9\times 105=945$$

۶. جملهٔ اول $a_1=3$ و مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله $S_{10}=165$ است. با استفاده از فرمول $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، داریم:

$$S_{10}=165\Rightarrow \frac{10}{2}(2\times 3+9\times d)=165\Rightarrow 5(6+9d)=165$$

$$\Rightarrow 6+9d=\frac{165}{5}\Rightarrow 6+9d=33\Rightarrow 9d=27\Rightarrow d=3$$

---

۷. جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $a_n=a_1+(n-1)d$ است، بنابراین:

$$\begin{cases}a_8=23\\ a_{16}=47\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+7d=23 & (*)\\ a_1+15d=47 & (**)\end{cases}$$

طرفین تساوی $(*)$ را از $(**)$ کم می‌کنیم:

$$(a_1+15d)-(a_1+7d)=47-23\Rightarrow 8d=24\Rightarrow d=3$$

$$\xrightarrow{a_1+7d=23} a_1+7\times 3=23\Rightarrow a_1+21=23\Rightarrow a_1=2$$

با جملهٔ اول $a_1=2$ و قدر نسبت $d=3$، مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله با استفاده از فرمول $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، برابر است با:

$$S_{10}=\frac{10}{2}(2\times 2+9\times 3)=5(4+27)=5\times 31=155$$

---

۸. الف) جملهٔ اول و دوم دنباله و سپس قدر نسبت دنباله را می‌یابیم:

$$S_n=n^2+2n$$

$$\xrightarrow{n=1} S_1=a_1=1+2=3$$

$$\xrightarrow{n=2} S_2=a_1+a_2=2^2+2\times 2=8$$

$$\xrightarrow{a_1=3} 3+a_2=8\Rightarrow a_2=5$$

قدر نسبت: $d=a_2-a_1=5-3=2$

ب) حاصل $a_6+a_7+a_8$، با توجه به این که مجموع n جملهٔ اول دنباله را داریم، برابر است با:

$$a_6+a_7+a_8=(a_1+a_2+\dots+a_8)-(a_1+a_2+\dots+a_5)$$

$$=S_8-S_5=(8^2+2\times 8)-(5^2+2\times 5)$$

$$=(64+16)-(25+10)=80-35=45$$

---

۹. جملهٔ اول دنباله $a_1=-71$ و جملهٔ سوم دنباله $a_3=-65$ است. قدر نسبت دنباله را می‌یابیم:

$$a_3=-65\xrightarrow{a_n=a_1+(n-1)d} a_1+2d=-65$$

$$\xrightarrow{a_1=-71} -71+2d=-65\Rightarrow 2d=71-65=6$$

$$\Rightarrow d=3$$

برای آن که تعداد جملات منفی دنباله را بیابیم، باید نامعادلهٔ $a_n<0$ را حل کنیم:

$$a_n=a_1+(n-1)d=-71+(n-1)\times 3$$

$$a_n<0\Rightarrow -71+3(n-1)<0\Rightarrow 3(n-1)<71$$

$$\Rightarrow n-1<\frac{71}{3}\Rightarrow n<\frac{74}{3}\Rightarrow n<24/\dots$$

بنابراین جملات ۱ تا ۲۴ منفی هستند، مجموع ۲۴ جملهٔ اول را با استفاده از فرمول $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$ به دست می‌آوریم.

$$S_{24}=\frac{24}{2}(2\times(-71)+23\times 3)=12(-142+69)$$

$$=12(-73)=-876$$

---

۱۰. عبارت $1+3+5+\dots+2n-1$، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1=1$ و قدر نسبت $d=3-1=2$ و جملهٔ آخر $a_n=2n-1$ است. پس با استفاده از فرمول مجموع $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ خواهیم داشت:

$$1+3+5+\dots+2n-1=\frac{n}{2}(1+2n-1)=\frac{n}{2}\times 2n=n^2$$

---

۱۱. ۱۰ جملهٔ ردیف فرد $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{19}$ و ۱۰ جملهٔ ردیف زوج $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}$ هستند. بنابراین طبق فرض مسئله، داریم:

$$\begin{cases}a_1+a_3+a_5+\dots+a_{19}=135\\ a_2+a_4+a_6+\dots+a_{20}=150\end{cases}$$

جملات ردیف فرد، یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و جملهٔ آخر a_{19} تشکیل می‌دهند. همچنین جملات ردیف زوج، یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_2 و جملهٔ آخر a_{20} تشکیل می‌دهند.

بنابراین با استفاده از فرمول مجموع $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{10}{2}(a_1+a_{19})=135\Rightarrow a_1+a_{19}=\frac{135}{5}=27\\ \frac{10}{2}(a_2+a_{20})=150\Rightarrow a_2+a_{20}=\frac{150}{5}=30\end{cases}$$

با توجه به این که جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی $a_n=a_1+(n-1)d$ است، داریم:

$$\begin{cases}a_1+(a_1+18d)=27\\ (a_1+d)+(a_1+19d)=30\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a_1+18d=27 & (*)\\ 2a_1+20d=30 & (**)\end{cases}$$

طرفین تساوی $(*)$ را از $(**)$ کم می‌کنیم:

$$(2a_1+20d)-(2a_1+18d)=30-27\Rightarrow 2d=3$$

$$\Rightarrow d=\frac{3}{2}\xrightarrow{2a_1+18d=27} 2a_1+18\times\frac{3}{2}=27$$

$$\Rightarrow 2a_1+27=27\Rightarrow a_1=0$$

---

۱۲. دونده برای برداشتن توپ اول و انداختن آن در سبد $3+3=6$ متر را طی می‌کند. برای توپ دوم $6+6=12$ متر و برای توپ سوم $9+9=18$ متر را طی می‌کند، بنابراین مسافت‌های طی شده به صورت $6, 12, 18, \dots$ است که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_1=6$ و قدر نسبت $d=12-6=6$ می‌دهند. اگر مجموع کل مسافت‌های طی شده را S_n در نظر بگیریم، باید مقدار n ی را بیابیم که به ازای آن $S_n=918$ می‌شود. با استفاده از فرمول $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$، داریم:

$$S_n=918\Rightarrow \frac{n}{2}(2\times 6+(n-1)\times 6)=918$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}\times 6(2+n-1)=918\Rightarrow 3n(n+1)=918$$

$$\Rightarrow n(n+1)=\frac{918}{3}=306\Rightarrow n^2+n-306=0$$

$$\Rightarrow (n-17)(n+18)=0\xrightarrow{\text{عدد طبیعی } n} n=17$$

۱۳. دنبالهٔ $\dots,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1=\frac{1}{8}$ و قدر نسبت $q=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=2$ است. با استفاده از فرمول مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$، مجموع ۱۰ جملهٔ اول برابر است با:

$$S_{10}=\frac{\frac{1}{8}(1-2^{10})}{1-2}=\frac{\frac{1}{8}(1-1024)}{-1}=\frac{1023}{8}$$

---

۱۴. مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی از فرمول $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می‌آید. باید مقدار n ی را بیابیم که به ازای آن $S_n=1026$ می‌شود. جملهٔ اول دنباله $a_1=6$ و قدر نسبت $q=-\frac{12}{6}=-2$ است. بنابراین داریم:

$$S_n=1026\Rightarrow\frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)}=1026$$

$$\Rightarrow\frac{6(1-(-2)^n)}{3}=1026\Rightarrow 2(1-(-2)^n)=1026$$

$$\Rightarrow 1-(-2)^n=\frac{1026}{2}=513\Rightarrow-(-2)^n=512$$

$$\Rightarrow(-2)^n=-512=(-2)^9\Rightarrow n=9$$

---

۱۵. سه جملهٔ اول دنباله برابر است با:

$$a_n=2^{n-1}\Rightarrow\begin{cases}a_1=2^{1-1}=2^0=1\\ a_2=2^{2-1}=2^1=2\\ a_3=2^{3-1}=2^2=4\end{cases}\qquad(0/25)$$

مجموع n جملهٔ اول دنباله از فرمول $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می‌آید. باید مقدار n ی را بیابیم که به ازای آن $S_n=255$ شود. قدر نسبت دنباله برابر با $q=\frac{a_2}{a_1}=2$ است، بنابراین داریم:

$$S_n=255\Rightarrow\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=255\Rightarrow\frac{1-2^n}{-1}=255\quad(0/25)$$

$$\Rightarrow 2^n-1=255\Rightarrow 2^n=256=2^8\quad(0/25)$$

$$\Rightarrow n=8\quad(0/25)$$

---

۱۶. جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به صورت $a_n=a_1q^{n-1}$ است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}a_2=6\\ a_7=192\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1q=6 & (*)\\ a_1q^6=192 & (**)\end{cases}$$

با تقسیم طرفین تساوی (**) بر (*) داریم:

$$\frac{a_1q^6}{a_1q}=\frac{192}{6}\Rightarrow q^5=32\Rightarrow q=2$$

$$\xrightarrow{a_1q=6}a_1\times 2=6\Rightarrow a_1=3$$

مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با استفاده از فرمول مجموع $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ برابر است با:

$$S_{10}=\frac{3(1-2^{10})}{1-2}=\frac{3(1-1024)}{-1}=3\times1023=3069$$

---

۱۷. مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی از فرمول $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می‌آید، طبق فرض مسئله، داریم:

$$S_6=9S_3\Rightarrow\frac{S_6}{S_3}=9\Rightarrow\frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}}=9\Rightarrow\frac{1-q^6}{1-q^3}=9$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}\frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3}=9\Rightarrow 1+q^3=9\quad(0/5)$$

$$\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2\quad(0/25)$$

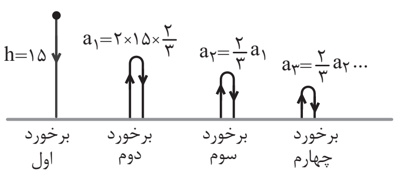
حال مقدار $\frac{S_{10}}{S_5}$ را می‌یابیم:

$$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=\frac{1-q^{10}}{1-q^5}=\frac{(1-q^5)(1+q^5)}{1-q^5}$$

$$=1+q^5=1+2^5=1+32=33\quad(0/5)$$

---

۱۸. توپ پس از هر بار برخورد با زمین $\frac{1}{3}$ ارتفاع خود را از دست می‌دهد و $\frac{2}{3}$ ارتفاع خود بالا می‌آید، بنابراین مسافت‌های طی شده به صورت زیر است:



بنابراین مسافت‌های $a_1, a_2, \dots$ یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{2}{3}$ تشکیل می‌دهند که مجموع آن‌ها از فرمول $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می‌آید. بنابراین تا لحظهٔ برخورد پنجم توپ به زمین، مسافت زیر طی شده است:

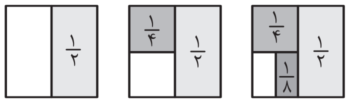
$$S=h+a_1+a_2+a_3+a_4$$

$$=15+\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=15+\frac{2\times15\times\frac{2}{3}(1-(\frac{2}{3})^4)}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=15+\frac{2\times15\times\frac{2}{3}(1-\frac{16}{81})}{\frac{1}{3}}=15+60\times\frac{65}{81}=15+\frac{1300}{27}$$

$$\simeq 15+48/1=63/1$$

۱۹. مساحت مربع به طول ضلع ۱ برابر با $1 \times 1 = 1$ است. در مرحلهٔ اول نیمی از مساحت مربع یعنی $\frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2}$ آن را رنگ می‌کنیم و نیمی از آن یعنی $\frac{1}{2}$ باقی می‌ماند. در مرحلهٔ بعد نصف مساحت باقی‌مانده یعنی $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ را رنگ می‌کنیم و نیمی از آن یعنی $\frac{1}{4}$ باقی می‌ماند. بنابراین دنبالهٔ زیر را خواهیم داشت:



...

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

بنابراین یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1 = \frac{1}{2}$ و قدر نسبت $q = \frac{1}{2}$ داریم که مجموع جملات آن از فرمول $S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ به دست می‌آید. باید کمترین مقدار nای را بیابیم که به ازای آن $S_n \geq \frac{99}{100} \times 1$ شود، بنابراین داریم:

$$S_n \geq \frac{99}{100} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{99}{100} \geq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{100} \geq \frac{1}{2^n} \Rightarrow 2^n \geq 100 \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow{2^6=64,\ 2^7=128} n \geq 7 \quad (0/25)$$

---

۲۰. الف) $a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1$

عبارت $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$ مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1 = 1$ و قدر نسبت $q = a$ است، پس داریم:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 \times (1-a^n)}{1-a}$$

$$\Rightarrow (1-a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) = 1 - a^n$$

$$\xrightarrow{\times(-1)} (a-1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) = a^n - 1$$

ب) عبارت $1 + x + x^2 + \dots + x^8$ مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1 = 1$ و قدر نسبت $q = x$ است. همچنین عبارت $1 - x + x^2 - \dots + x^8$ مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a'_1 = 1$ و قدر نسبت $q' = -x$ است. بنابراین با استفاده از فرمول $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$، داریم:

$$A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$$

$$= \frac{1 \times (1-x^9)}{1-x} \times \frac{1 \times (1-(-x)^9)}{1-(-x)} = \frac{1-x^9}{1-x} \times \frac{1+x^9}{1+x}$$

$$\xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

حاصل عبارت به ازای $x = \sqrt{3}$ برابر می‌شود با:

$$A = \frac{1-(\sqrt{3})^{18}}{1-(\sqrt{3})^2} = \frac{1-\sqrt{3^{18}}}{1-3} = \frac{1-3^9}{-2} = \frac{3^9-1}{2}$$

---

۲۱. الف) -2 $(0/25)$

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$، حاصلضرب ریشه‌ها برابر $\frac{c}{a}$ است، بنابراین برای معادلهٔ $4x^2 + 3x - 8 = 0$، داریم:

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها} : P = \frac{c}{a} = \frac{-8}{4} = -2$$

ب) $x^2 + 3x - 10 = 0$ $(0/25)$

اگر S مجموع ریشه‌ها و P حاصلضرب ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، آن‌گاه می‌توان معادله را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت، بنابراین اگر -5 و 2 ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، داریم:

$$\begin{cases} S = -5 + 2 = -3 \\ P = -5 \times 2 = -10 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 - (-3)x - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

پ) $x = \frac{1}{3}$, $m = 1$

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$$3x^2 - 4mx + 1 = 0 \xrightarrow{x=1} 3 - 4m + 1 = 0 \Rightarrow 4 = 4m$$

$$\Rightarrow m = 1$$

در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$، حاصلضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ است، پس برای معادلهٔ $3x^2 - 4x + 1 = 0$ داریم:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \xrightarrow{x_1=1} 1 \times x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}$$

ت) $m = 2$

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $3x^2 + (m-2)x - m = 0$ باشند، طبق فرض $\alpha = -\beta$ است، پس $\alpha + \beta = 0$ است، بنابراین داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow 0 = -\frac{m-2}{3} \Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

---

۲۲. اگر S مجموع ریشه‌ها و P حاصلضرب ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باشند، آن‌گاه می‌توان معادله را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} S = (3 + 2\sqrt{3}) + (3 - 2\sqrt{3}) = 6 \\ P = (3 + 2\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3}) = 3^2 - (2\sqrt{3})^2 = 9 - 12 = -3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x^2 - Sx + P = 0} x^2 - 6x - 3 = 0$$

---

۲۳. الف) در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$، مجموع ریشه‌ها $-\frac{b}{a}$ و حاصلضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ است. بنابراین برای معادلهٔ $-3x^2 + x + 2 = 0$، داریم:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها} : S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها} : P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

ب) با فاکتورگیری، خواهیم داشت:

$$۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲=۳\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\xrightarrow{\alpha+\beta=\frac{۱}{۳}\ ,\ \alpha\beta=-\frac{۲}{۳}}=۳\times(-\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})=-\frac{۲}{۳}$$

۲۴. از تساوی $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{۳}{۴}$، داریم:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{۳}{۴}\alpha\beta$$

α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+(k-۱)x+۸=۰$ هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{k-۱}{۱}=۱-k\\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}\Rightarrow\alpha\beta=\frac{۸}{۱}=۸\end{cases}$$

با جایگزینی مقادیر به دست آمده در تساوی $\alpha+\beta=\frac{۳}{۴}\alpha\beta$، خواهیم داشت:

$$۱-k=\frac{۳}{۴}\times۸\Rightarrow۱-k=۶\Rightarrow-k=۵\Rightarrow k=-۵$$

۲۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x+k=۰$ باشند، داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{-۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

در رابطهٔ $\alpha+۲\beta=۳$، داریم:

$$\underbrace{\alpha+\beta}+\beta=۳\Rightarrow\frac{۱}{۲}+\beta=۳\Rightarrow\beta=۳-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}$$

می‌دانیم ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$$۲x^۲-x+k=۰\xrightarrow{\beta=\frac{۵}{۲}}۲\times(\frac{۵}{۲})^۲-\frac{۵}{۲}+k=۰$$

$$\Rightarrow\frac{۲۵}{۲}-\frac{۵}{۲}+k=۰\Rightarrow۱۰+k=۰\Rightarrow k=-۱۰$$

۲۶. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-۶x+۲m+۲=۰$ باشند، طبق فرض، یک ریشه، دو برابر ریشهٔ دیگر است، پس: $\beta=۲\alpha$، از طرفی داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{-۶}{۱}=۶$$

$$\xrightarrow{\beta=۲\alpha}\alpha+۲\alpha=۶\Rightarrow۳\alpha=۶\Rightarrow\alpha=۲$$

$$\Rightarrow\beta=۲\alpha=۴$$

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین داریم:

$$x^۲-۶x+۲m+۲=۰\xrightarrow{x=۲}۲^۲-۶\times۲+۲m+۲=۰$$

$$\Rightarrow۴-۱۲+۲m+۲=۰\Rightarrow۲m=۶\Rightarrow m=۳$$

۲۷. الف) α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-x-۴=۰$ هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{-۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}\Rightarrow\alpha\beta=\frac{-۴}{۲}=-۲\end{cases}$$

ابتدا عبارت $\frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha}$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\alpha^۲}{\beta}+\frac{\beta^۲}{\alpha}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha\beta}$$

با استفاده از اتحاد $a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$، داریم:

$$\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{(\frac{۱}{۲})^۳-۳(-۲)(\frac{۱}{۲})}{-۲}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۸}+۳}{-۲}=\frac{\frac{۲۵}{۸}}{-۲}=-\frac{۲۵}{۱۶}$$

ب) α ریشهٔ معادله است و در خود معادله صدق می‌کند، بنابراین:

$$۲x^۲-x-۴=۰\xrightarrow{x=\alpha}۲\alpha^۲-\alpha-۴=۰$$

$$\Rightarrow۲\alpha^۲=\alpha+۴\quad(*)$$

با جایگذاری $(*)$ در عبارت $-۴\alpha^۲+۲\alpha-۱$، خواهیم داشت:

$$-۲(۲\alpha^۲)+۲\alpha-۱=-۲(\alpha+۴)+۲\alpha-۱$$

$$=-۲\alpha-۸+۲\alpha-۱=-۹$$

پ) β ریشهٔ معادله است، پس در خود معادله صدق می‌کند:

$$۲x^۲-x-۴=۰\xrightarrow{x=\beta}۲\beta^۲-\beta-۴=۰\Rightarrow۲\beta^۲=\beta+۴$$

با جایگذاری $(*)$ در عبارت $۲\beta^۲+\alpha+۱$ خواهیم داشت:

$$۲\beta^۲+\alpha+۱=(\beta+۴)+\alpha+۱=\underbrace{\alpha+\beta}_{\text{مجموع ریشه‌ها}}+۵=\frac{۱}{۲}+۵=\frac{۱۱}{۲}$$

۲۸. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۷x-۳=۰$ باشند، آنگاه:

$$\begin{cases}\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{-۷}{۱}=۷\\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}\Rightarrow\alpha\beta=-\frac{۳}{۱}=-۳\end{cases}$$

طبق فرض $۳\alpha-۱$ و $۳\beta-۱$ ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم‌اند، مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}:\ S=(۳\alpha-۱)+(۳\beta-۱)=۳(\alpha+\beta)-۲$$

$$=۳\times۷-۲=۲۱-۲=۱۹$$

$$\text{حاصلضرب ریشه‌ها}:\ P=(۳\alpha-۱)(۳\beta-۱)$$

$$\Rightarrow P=۹\alpha\beta-۳\alpha-۳\beta+۱=۹\alpha\beta-۳(\alpha+\beta)+۱$$

$$=۹(-۳)-۳(۷)+۱=-۲۷-۲۱+۱=-۴۷$$

معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ نوشت:

$$\xrightarrow{S=۱۹\ ,\ P=-۴۷}x^۲-۱۹x-۴۷=۰$$

۲۹. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۱=۰$ باشند، آن‌گاه:

$$\begin{cases}\text{مجموع ریشه‌ها}=-\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha+\beta=-\frac{-۳}{۲}=\frac{۳}{۲}\\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها}=\frac{c}{a}\Rightarrow\alpha\beta=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

می‌خواهیم معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش از معکوس ریشه‌های معادلهٔ بالا یعنی $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ یک واحد کمترند، پس ریشه‌ها به صورت $\frac{۱}{\alpha}-۱$ و $\frac{۱}{\beta}-۱$ هستند، مجموع و حاصلضرب این ریشه‌ها را می‌یابیم.

مجموع ریشه‌ها: $S=(\frac{۱}{\alpha}-۱)+(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}-۲$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-۲=\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}-۲=-۳-۲=-۵$$

حاصلضرب ریشه‌ها: $P=(\frac{۱}{\alpha}-۱)(\frac{۱}{\beta}-۱)=\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{۱}{\alpha}-\frac{۱}{\beta}+۱$

$$=\frac{۱}{\alpha\beta}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱=\frac{۱}{-\frac{۱}{۲}}-\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}+۱=-۲+۳+۱=۲$$

معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ نوشت:

$$\xrightarrow{S=-۵\,,\,P=۲} x^۲-(-۵)x+۲=۰\Rightarrow x^۲+۵x+۲=۰$$

---

۳۰. عرض کاشی را x در نظر می‌گیریم. طول کاشی از دو برابر عرض یعنی $۲x$، یک سانتی‌متر بیشتر است، یعنی $۲x+۱$. دو هزار کاشی برای پوشاندن ۱۱ متر مربع مصرف شده است. ۱۱ متر مربع معادل $۱۱\times۱۰۰\times۱۰۰=۱۱۰۰۰۰$ سانتی‌متر مربع است، پس داریم:

$$۲۰۰۰\times \text{مساحت کاشی}=۱۱۰۰۰۰\Rightarrow ۲\times x(۲x+۱)=۱۱۰$$

$$\Rightarrow ۴x^۲+۲x-۱۱۰=۰\Rightarrow (۲x)^۲+۱\times(۲x)-۱۱۰=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}(۲x-۱۰)(۲x+۱۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x-۱۰=۰\Rightarrow ۲x=۱۰\Rightarrow x=۵\\ ۲x+۱۱=۰\Rightarrow ۲x=-۱۱\Rightarrow x=-\frac{۱۱}{۲}\quad \text{غ.ق.}\end{cases}$$

---

۳۱. الف) درست است $(۰/۲۵)$. صفرهای تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ است که همان طول نقاط تلاقی با محور xهاست.

ب) $\frac{۱۷}{۴}$

در تابع درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$، مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ به دست می‌آید، بنابراین برای تابع $f(x)=-x^۲+۳x+۲$، داریم:

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۳}{۲(-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

$$f_{max}=f(\frac{۳}{۲})=-(\frac{۳}{۲})^۲+۳\times\frac{۳}{۲}+۲=-\frac{۹}{۴}+\frac{۹}{۲}+۲=\frac{۱۷}{۴}$$

پ) $x=-\frac{۵}{۶}$

کمترین مقدار تابع $f(x)=۳x^۲+۵x-۲$ در نقطه‌ای به طول $x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۵}{۲\times۳}=-\frac{۵}{۶}$ رخ می‌دهد.

ت) منفی

دهانهٔ نمودار سهمی $y=ax^۲+bx+c$ رو به پایین است، پس ضریب $x^۲$ یعنی a منفی است. طول نقطهٔ ماکزیمم (یا همان طول رأس سهمی) منفی است، بنابراین داریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}<۰\Rightarrow\frac{b}{۲a}>۰\xrightarrow[\text{a منفی است}]{\text{a و b هم‌علامت‌اند}}b<۰$$

ث) علامت a مثبت، علامت b منفی، علامت c مثبت، یک ریشه

دهانهٔ نمودار سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ رو به بالاست، پس ضریب $x^۲$ یعنی a مثبت است. از طرفی طول رأس سهمی، مثبت است، بنابراین داریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow\frac{b}{۲a}<۰\xrightarrow[\text{a مثبت است}]{\text{a و b مختلف‌العلامت‌اند}}b<۰$$

از آنجا که نمودار محور yها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع کرده است، بنابراین $f(۰)=c$ مثبت است. همچنین نمودار تابع محور xها را در یک نقطه قطع کرده است، بنابراین $f(x)=۰$ فقط یک ریشه دارد.

---

۳۲. سهمی محور xها را در دو نقطه به طول‌های $x_۱=۲$ و $x_۲=۴$ قطع می‌کند، پس صفرهای تابع‌اند و می‌توان معادلهٔ سهمی را به صورت زیر نوشت:

$$y=a(x-x_۱)(x-x_۲)=a(x-۲)(x-۴)\quad(۰/۲۵)$$

از طرفی نمودار سهمی از نقطهٔ $(۰,۲)$ عبور می‌کند، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ آن صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{(۰,۲)}۲=a(۰-۲)(۰-۴)\quad(۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow ۲=۸a\Rightarrow a=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\quad(۰/۲۵)$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت زیر است:

$$y=\frac{۱}{۴}(x-۲)(x-۴)=\frac{۱}{۴}(x^۲-۶x+۸)$$

$$\Rightarrow y=\frac{۱}{۴}x^۲-\frac{۳}{۲}x+۲\quad(۰/۲۵)$$

---

۳۳. نمودار تابع، محور xها را قطع نمی‌کند، پس تابع، صفر ندارد $(۰/۲۵)$. با توجه به نمودار، رأس سهمی نقطهٔ $(۲,۱)$ است، پس می‌توان ضابطهٔ سهمی را به صورت زیر نوشت:

$$P(x)=a(x-h)^۲+k=a(x-۲)^۲+۱\quad(۰/۲۵)$$

از طرفی نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند، بنابراین نقطهٔ $(۰,۳)$ روی تابع قرار دارد و در معادلهٔ آن صدق می‌کند:

$$P(۰)=۳\Rightarrow a(۰-۲)^۲+۱=۳\quad(۰/۲۵)\Rightarrow ۴a+۱=۳$$

$$\Rightarrow ۴a=۲\Rightarrow a=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow P(x)=\frac{۱}{۲}(x-۲)^۲+۱\quad(۰/۲۵)$$

---

۳۴. با توجه به نمودار، مختصات رأس سهمی $(-۲,۰)$ است، پس می‌توان معادلهٔ آن را به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=a(x-h)^۲+k=a(x-(-۲))^۲+۰$$

$$\Rightarrow f(x)=a(x+۲)^۲$$

از طرفی نقطهٔ $(۰,۲)$ روی نمودار قرار دارد، پس در ضابطهٔ آن صدق می‌کند:

$$f(۰)=۲\Rightarrow a(۰+۲)^۲=۲\Rightarrow ۴a=۲\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}(x+۲)^۲=\frac{۱}{۲}(x^۲+۴x+۴)=\frac{۱}{۲}x^۲+۲x+۲$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه با } f(x)=ax^۲+bx+c}a=\frac{۱}{۲}\,,\,b=۲\,,\,c=۲$$

۳۵. با توجه به نمودار، نقطهٔ $(-۱,-۲)$ رأس سهمی است، پس می‌توان معادلهٔ سهمی را به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=a(x-h)^۲+k=a(x-(-۱))^۲-۲$$
$$\Rightarrow f(x)=a(x+۱)^۲-۲$$

طبق فرض $|a|=۱$ است، از آنجا که دهانهٔ سهمی رو به بالاست، پس ضریب $x^۲$ یعنی a باید مثبت باشد، بنابراین $a=۱$ است و ضابطهٔ سهمی به صورت $f(x)=(x+۱)^۲-۲$ در می‌آید.
صفرهای تابع از حل معادلهٔ $f(x)=۰$ به دست می‌آید:

$$f(x)=۰\Rightarrow (x+۱)^۲-۲=۰\Rightarrow (x+۱)^۲=۲$$
$$\Rightarrow x+۱=\pm\sqrt{۲}\Rightarrow \begin{cases} x+۱=\sqrt{۲}\Rightarrow x=\sqrt{۲}-۱ \\ x+۱=-\sqrt{۲}\Rightarrow x=-\sqrt{۲}-۱ \end{cases}$$

۳۶. صفرهای تابع $x_۱=۵$ و $x_۲=-۸$ هستند، پس می‌توان ضابطهٔ تابع را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x)=a(x-x_۱)(x-x_۲)=a(x-۵)(x-(-۸))$$
$$\Rightarrow f(x)=a(x-۵)(x+۸)$$

تابع از نقطهٔ $(-۲,-۲)$ می‌گذرد، پس در ضابطهٔ آن صدق می‌کند:

$$f(-۲)=-۲\Rightarrow a(-۲-۵)(-۲+۸)=-۲$$
$$\Rightarrow a(-۷)(۶)=-۲\Rightarrow a=\frac{-۲}{-۷\times۶}=\frac{۱}{۲۱}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{۱}{۲۱}(x-۵)(x+۸)=\frac{۱}{۲۱}(x^۲+۳x-۴۰)$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲۱}x^۲+\frac{۱}{۷}x-\frac{۴۰}{۲۱}$$

۳۷. الف) حداکثر مقدار سهمی $y=-\frac{۱}{۲۰}x^۲+۳x$ از رابطهٔ $y_{max}=-\frac{\Delta}{۴a}$ به دست می‌آید:

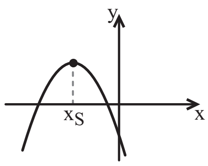
$$y_S=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{۳^۲-۴(-\frac{۱}{۲۰})(۰)}{۴(-\frac{۱}{۲۰})}=-\frac{۹}{-\frac{۱}{۵}}=۴۵$$

ب) هنگامی که توپ به زمین می‌خورد، $y=۰$ می‌شود، در زمان شوت نیز $y=۰$ است، پس باید فاصلهٔ بین صفرهای تابع را به دست آوریم:

$$y=۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲۰}x^۲+۳x=۰\Rightarrow x(-\frac{۱}{۲۰}x+۳)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ -\frac{۱}{۲۰}x+۳=۰\Rightarrow -\frac{۱}{۲۰}x=-۳\Rightarrow x=۶۰ \end{cases}$$

بنابراین توپ در فاصلهٔ ۶۰ متری از نقطهٔ شوت به زمین می‌خورد.

۳۸. دهانهٔ سهمی $y=ax^۲+bx+c$ رو به پایین است، پس ضریب $x^۲$ یعنی a منفی است. از طرفی طول رأس سهمی، منفی است، بنابراین:



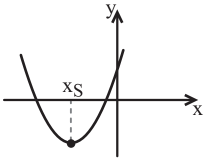
$$x_S=-\frac{b}{۲a}<۰\Rightarrow \frac{b}{۲a}>۰\xrightarrow[a<۰]{\text{a و b هم‌علامت‌اند}} b<۰$$

نمودار تابع، محور y ها را در نقطه‌ای با عرض منفی قطع می‌کند، بنابراین داریم:

تقاطع با محور y ها : $x=۰\Rightarrow y=c<۰$

بنابراین a منفی (۰/۲۵)، b منفی (۰/۲۵) و c منفی (۰/۲۵) است.

۳۹. دهانهٔ سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ رو به بالاست، پس ضریب $x^۲$ یعنی a مثبت است. از طرفی طول رأس سهمی، منفی است، بنابراین داریم:



$$x_S=-\frac{b}{۲a}<۰\Rightarrow \frac{b}{۲a}>۰\xrightarrow[a>۰]{\text{a و b هم‌علامت‌اند}} b>۰$$

نمودار تابع f، محور y ها را در نقطه‌ای با عرض مثبت قطع می‌کند، بنابراین داریم:

تقاطع با محور y ها : $x=۰\Rightarrow f(۰)=c>۰$

تابع f محور x ها را در دو نقطه قطع کرده است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ دو جواب دارد، بنابراین $\Delta>۰$ است.

۴۰. در نمودار (۱)، دهانهٔ سهمی رو به بالاست، پس ضریب $x^۲$ یعنی a مثبت است. از طرفی طول نقطهٔ مینیمم تابع (یا همان رأس سهمی) منفی است، بنابراین داریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}<۰\Rightarrow \frac{b}{۲a}>۰\xrightarrow[\text{a مثبت است}]{\text{a و b هم‌علامت‌اند}} b>۰$$

در نمودار (۲)، دهانهٔ سهمی رو به پایین است، پس ضریب $x^۲$ یعنی a منفی است. از طرفی طول نقطهٔ ماکزیمم تابع (یا همان رأس سهمی) مثبت است، بنابراین داریم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow \frac{b}{۲a}<۰\xrightarrow[\text{a منفی است}]{\text{a و b مختلف‌العلامت‌اند}} b>۰$$

در نمودار (۳)، دهانهٔ سهمی رو به بالاست، پس ضریب $x^۲$ یعنی a مثبت است. از طرفی طول نقطهٔ مینیمم (یا همان رأس سهمی) مثبت است، بنابراین داریم:

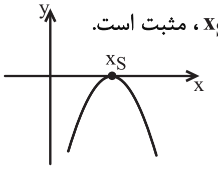
$$x_S=-\frac{b}{۲a}>۰\Rightarrow \frac{b}{۲a}<۰\xrightarrow[\text{a مثبت است}]{\text{a و b مختلف‌العلامت‌اند}} b<۰$$

نمودار (۴) نیز شرایط مشابه نمودار (۱) را دارد: دهانه رو به بالا و طول رأس منفی، پس a و b مثبت‌اند. بنابراین فقط در نمودار (۳) علامت b منفی است.
نمودارهای (۱)، (۳) و (۴) دارای مینیمم هستند. نمودارهای (۱) و (۳) در دو نقطه محور x ها را قطع می‌کنند، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ آن‌ها، دو ریشه دارد (تابع دارای دو صفر است.) ولی نمودار (۴) محور x ها را قطع نمی‌کند، بنابراین معادلهٔ $f(x)=۰$ آن، ریشه ندارد. نمودارهای (۱) و (۲)، محور y ها را در نقطه‌ای با عرض منفی، قطع می‌کنند، پس $f(۰)=c$ منفی است، بنابراین در نمودارهای (۱) و (۲) علامت c منفی است.
بنابراین جدول به صورت زیر خواهد بود:

ویژگی	شمارهٔ نمودار (نمودارها)
علامت b منفی است.	نمودار (۳) (۰/۲۵)
دارای مینیمم است و ریشه ندارد.	نمودار (۴) (۰/۲۵)
علامت c منفی است.	نمودارهای (۱) و (۲) (۰/۵)

۴۱. با توجه به این که $\Delta = ۰$ است، پس نمودار سهمی بر محور x ها مماس است. از آنجا که ضریب $x^۲$ یعنی a منفی است، پس دهانهٔ نمودار رو به پایین است. از آنجا که a منفی و b مثبت است، علامت رأس سهمی $x_S = -\frac{b}{۲a}$، مثبت است.

بنابراین سهمی در طرف راست محور y ها بر محور x ها مماس است.



۴۲. تابع درجهٔ دوم $y = ۲x^۲ - ۴x + m - ۳$ محور x ها را در دو نقطه به طول مثبت قطع کرده است، پس معادلهٔ $y = ۰$ دو ریشهٔ مثبت دارد. بنابراین اولاً دلتای معادله، مثبت است، ثانیاً حاصلضرب ریشه‌های معادله، مثبت است، بنابراین داریم:

$$۲x^۲ - ۴x + m - ۳ = ۰$$

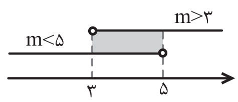
$$(۱)\quad \Delta > ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = (-۴)^۲ - ۴(۲)(m-۳) > ۰$$

$$\Rightarrow ۱۶ - ۸m + ۲۴ > ۰ \Rightarrow ۴۰ > ۸m \Rightarrow ۵ > m \quad (I)$$

$$(۲)\quad \text{حاصلضرب ریشه‌ها}: P = \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{m-۳}{۲} > ۰$$

$$\Rightarrow m - ۳ > ۰ \Rightarrow m > ۳ \quad (II)$$

اشتراک شرط‌های (I) و (II)، با توجه به محور مقابل $۳ < m < ۵$ است.



۴۳. صفرهای تابع f، ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ است، بنابراین $x = -۱$ ریشهٔ معادلهٔ $x^۳ + mx^۲ - x - ۲ = ۰$ است و می‌دانیم ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند:

$$x^۳ + mx^۲ - x - ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{x=-۱} (-۱)^۳ + m(-۱)^۲ - (-۱) - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow -۱ + m + ۱ - ۲ = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۲ \quad (۰/۲۵)$$

با جایگذاری $m = ۲$ معادله به صورت $x^۳ + ۲x^۲ - x - ۲ = ۰$ خواهد بود. با فاکتورگیری و تجزیه، ریشه‌های دیگر معادله را می‌یابیم:

$$\underbrace{x^۳ + ۲x^۲}\underbrace{-x-۲} = ۰ \xrightarrow{\text{دسته‌بندی}} x^۲(x+۲) - (x+۲) = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} (x+۲)(x^۲ - ۱) = ۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \\ x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & (۰/۲۵) \\ x = -۱ & (۰/۲۵) \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین $x = ۱$ و $x = -۱$، صفرهای دیگر تابع‌اند.

۴۴. اگر $x = ۱$ صفر تابع $p(x)$ باشد، باید $x = ۱$ ریشهٔ معادلهٔ $p(x) = ۰$ باشد، پس باید در خود معادله صدق کند:

$$p(x) = x^۳ - ۲x^۲ - ۸x + ۹ = ۰$$

$$\xrightarrow{x=۱} ۱ - ۲ - ۸ + ۹ = ۱۰ - ۱۰ = ۰$$

از آنجاکه $x = ۱$ ریشهٔ معادله است، پس $x - ۱$ یکی از عامل‌های $p(x)$ است، با تقسیم $p(x)$ بر $x - ۱$، عامل‌های دیگر $p(x)$ را می‌یابیم.

$$\begin{array}{rl|l} & x^۳ - ۲x^۲ - ۸x + ۹ & x - ۱ \\ & -(x^۳ - x^۲) & x^۲ - x - ۹ \\ \hline & -x^۲ - ۸x + ۹ & \\ & -(-x^۲ + x) & \\ \hline & -۹x + ۹ & \\ & -(-۹x + ۹) & \\ \hline & ۰ & \end{array}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$p(x) = (x-۱)(x^۲ - x - ۹) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - x - ۹ = ۰ \rightarrow \Delta = (-۱)^۲ - ۴(۱)(-۹) = ۳۷$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-۱) \pm \sqrt{۳۷}}{۲ \times ۱} = \frac{۱ \pm \sqrt{۳۷}}{۲}$$

۴۵. صفرهای تابع f، ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ است، بنابراین داریم:

الف) $f(x) = x^۳ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۴) = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$

ب) $g(x) = x^۴ + ۶x^۲ - ۴۰ = ۰$

با تغییر متغیر $x^۲ = t$، داریم:

$$t^۲ + ۶t - ۴۰ = ۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (t+۱۰)(t-۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t + ۱۰ = ۰ \Rightarrow t = -۱۰ \Rightarrow x^۲ = -۱۰ \rightarrow \text{جواب ندارد} \\ t - ۴ = ۰ \Rightarrow t = ۴ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$

۴۶. صفرهای تابع f، ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ است، بنابراین:

$$f(x) = ۰ \Rightarrow (۴ - x^۲)^۲ + ۲(۴ - x^۲) - ۱۵ = ۰$$

با تغییر متغیر $۴ - x^۲ = t$، داریم:

$$t^۲ + ۲t - ۱۵ = ۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (t+۵)(t-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t + ۵ = ۰ \\ t - ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -۵ \\ t = ۳ \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴ - x^۲ = -۵ \ (۰/۲۵) \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳ \ (۰/۲۵) \\ ۴ - x^۲ = ۳ \ (۰/۲۵) \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \ (۰/۲۵) \end{cases}$$

۴۷.

الف) $x^۴ - ۳x^۲ + ۲ = ۰$

با تغییر متغیر $x^۲ = t$، داریم:

$$t^۲ - ۳t + ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (t-۱)(t-۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \\ t - ۲ = ۰ \Rightarrow t = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۲ \Rightarrow x = \pm \sqrt{۲} \end{cases}$$

ب) $(\frac{x^۲}{۲} - ۱)^۲ + (\frac{x^۲}{۲} - ۱) - ۲ = ۰$

با تغییر متغیر $\frac{x^۲}{۲} - ۱ = t$، داریم:

$$t^۲ + t - ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (t-۱)(t+۲) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-۱=۰ \Rightarrow t=۱ \\ t+۲=۰\Rightarrow t=-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^۲}{۲}-۱=۱ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=۲\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm۲ \\ \frac{x^۲}{۲}-۱=-۲\Rightarrow \frac{x^۲}{۲}=-۱ \rightarrow \text{جواب ندارد.}\end{cases}$$

پ) $(x^۲+۴x)^۲ \underbrace{-۲x^۲-۸x}_{-۲(x^۲+۴x)}-۱۵=۰$

با تغییر متغیر $x^۲+۴x=t$، داریم:

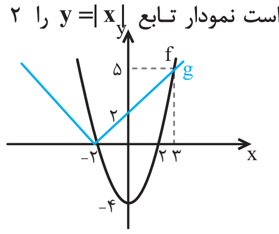
$$t^۲-۲t-۱۵=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (t-۵)(t+۳)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases} t-۵=۰\Rightarrow t=۵\Rightarrow x^۲+۴x=۵\\ t+۳=۰\Rightarrow t=-۳\Rightarrow x^۲+۴x=-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^۲+۴x-۵=۰\Rightarrow (x-۱)(x+۵)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۱\\x=-۵\end{cases} \\ x^۲+۴x+۳=۰\Rightarrow(x+۱)(x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\x=-۳\end{cases}\end{cases}$$

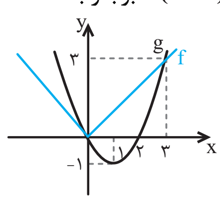
۴۸. برای حل معادلهٔ $x^۲-۴=|x+۲|$، نمودار دو تابع $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=|x+۲|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقاط تلاقی این دو نمودار، ریشه‌های معادلهٔ مورد نظرند.

نمودار تابع $f(x)=x^۲-۴$، یک سهمی با دهانهٔ رو به بالا و رأس $(۰,-۴)$ است که محل تقاطع آن با محور طول‌ها از حل معادلهٔ $x^۲-۴=۰$ برابر با $x=۲$ و $x=-۲$ است. برای رسم نمودار $g(x)=|x+۲|$ کافی است نمودار تابع $y=|x|$ را ۲ واحد به چپ انتقال دهیم.



همان‌طور که مشاهده می‌شود، دو نمودار در دو نقطه به طول $x=-۲$ و $x=۳$ متقاطع‌اند که جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۴=|x+۲|$ می‌باشند.

۴۹. برای حل معادلهٔ $x^۲-۲x=|x|$ به روش هندسی، نمودار دو تابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^۲-۲x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقاط تلاقی دو نمودار، ریشه‌های معادلهٔ مورد نظرند. نمودار تابع $g(x)=x^۲-۲x=x(x-۲)$، یک سهمی با دهانهٔ رو به بالاست که طول نقاط تلاقی آن با محور xها از حل معادلهٔ $x(x-۲)=۰$ برابر با $x=۰$ و $x=۲$ است.



همان‌طور که مشاهده می‌شود، دو نمودار در دو نقطه به طول $x=۰$ و $x=۳$ متقاطع‌اند، که جواب‌های معادلهٔ $|x|=x^۲-۲x$ می‌باشند.

۵۰. ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

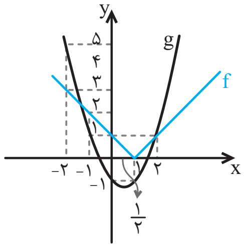
$$x+|x-۱|=x^۲-۱\Rightarrow |x-۱|=x^۲-x-۱$$

برای یافتن ریشه‌های معادله، نمودار دو تابع $f(x)=|x-۱|$ و $g(x)=x^۲-x-۱$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. طول نقاط تلاقی این دو نمودار، ریشه‌های معادلهٔ مورد نظرند.

نمودار تابع $g(x)=x^۲-x-۱$ یک سهمی است که دهانهٔ آن رو به بالاست و طول رأس سهمی $x_S=-\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲}$ است. با نقطه‌یابی، نمودار آن را رسم می‌کنیم:

x	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
f(x)	۵	۱	-۱	$-\frac{۵}{۴}$	-۱	۱

برای رسم نمودار $f(x)=|x-۱|$ کافی است نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به راست انتقال دهیم. برای رسم دقیق‌تر، مقادیر تابع را در نقاط به طول صحیح نیز تعیین می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌شود، دو تابع در یک نقطه به طول $x=۲$ و در یک نقطه‌ای که طول آن بین ۱- و ۲- قرار دارد، متقاطعند. پس معادلهٔ $x+|x-۱|=x^۲-۱$ دو ریشه دارد که یکی $x=۲$ و دیگری عددی بین ۱- و ۲- است.

۵۱.

الف) $\frac{۴}{x-۱}=۲+\frac{x-۶}{x+۱}$

کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها $(x-۱)(x+۱)$ است. با ضرب آن در طرفین معادله خواهیم داشت:

$$(x-۱)(x+۱)\times\frac{۴}{x-۱}=(۲+\frac{x-۶}{x+۱})\times(x-۱)(x+۱)$$

$$\Rightarrow ۴(x+۱)=۲\underbrace{(x-۱)(x+۱)}_{x^۲-۱}+(x-۶)(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۴x+۴=۲x^۲-۲+x^۲-۷x+۶$$

$$\Rightarrow ۴x+۴=۳x^۲-۷x+۴\Rightarrow ۳x^۲-۱۱x=۰$$

$$\Rightarrow x(۳x-۱۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ ۳x-۱۱=۰\Rightarrow ۳x=۱۱\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۳}\end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول‌اند، زیرا مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نمی‌کنند.

ب) $\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^۲-۲x}=\frac{۳}{x}$

$$\xrightarrow{\text{مرتب می‌کنیم.}}\frac{۵}{x}-\frac{۳}{x}=\frac{۴}{x^۲-۲x}\Rightarrow\frac{۲}{x}=\frac{۴}{x^۲-۲x}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۲(x^۲-۲x)=۴x\xrightarrow{\div۲}x^۲-۲x=۲x$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x=۰\Rightarrow x(x-۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x-۴=۰\Rightarrow x=۴\end{cases}$$

جواب $x=۰$ قابل قبول نیست، زیرا مخرج دو تا از کسرها را صفر می‌کند.

پ) $\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{۱+x}{x}=\frac{x-۱}{x-۲}$

با توجه به این که $x^۲-۲x=x(x-۲)$ است، کوچکترین مخرج