مفهوم نموداری حد

	مرجع	بارم
۶۹. نمودار تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را رسم کرده و حدهای زیر را مشخص کنید. الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ (صفحه‌ی ۶۷، مثال ۱ و صفحه‌ی ۶۸، مثال ۵)	شوشتر- شرافت- ۹۲ (۶ بار تکرار)	
۷۰. نمودار تابع $f(x)=[x]-x$ را در بازه‌ی $(۰,۲)$ رسم کنید و حدود زیر را در صورت وجود مشخص کنید. ۱) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ (صفحه‌ی ۶۸، مشابه تمرین ۴)	میاندوآب- شهید فروغی- ۹۲ (۶ بار تکرار)	
۷۱. با رسم نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{[x]}$ در بازه‌ی $[-۱,۱]$ مقدار هر یک از عبارت‌های زیر را در صورت وجود مشخص کنید. ۱) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x}{[x]}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x}{[x]}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x}{[x]}$ (صفحه‌ی ۶۸، مشابه تمرین ۵)	مشهد- آرمینه مصلی‌نژاد- ۹۲ (۶ بار تکرار)	
۷۲. ابتدا نمودار $f(x)=\operatorname{sgn}(x^۲+۲x-۳)$ را رسم کرده و سپس با استفاده از آن نقاطی که تابع در آنها حد ندارد را با ذکر دلیل مشخص کنید. (صفحه‌ی ۶۸، مشابه تمرین ۳)	کاشان- دخترانه‌ی شاهد- ۹۲ (۶ بار تکرار)	

مفهوم ریاضی حد(حد و دنباله)

۷۳. با استفاده از دنباله‌ها، ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$ در نقطه‌ی صفر حد ندارد. (صفحه‌ی ۵۷، فعالیت)	**امتحان نهایی، تیر ۹۰** (۷ بار تکرار)	۱/۲۵
۷۴. با استفاده از قضیه‌ی حد و دنباله نشان دهید $f(x)=x[x]$ در ۵ حد ندارد. (صفحه‌ی ۵۷ و ۵۸)	تهران- شهید نیکبخت (۲ بار تکرار)	
۷۵. به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در نقطه‌ی $x=۰$ حد ندارد. (صفحه‌ی ۵۸، طرح یک مسأله)	**امتحان نهایی، خرداد ۹۳** **دی ۸۶** **دی ۸۸** **دی ۹۰** **دی ۹۲**	۱
۷۶. با استفاده از دنباله‌ها ثابت کنید $f(x)=\sin\left(\frac{۱}{x-۲}\right)$ در $x=۲$ حد ندارد. (صفحه‌ی ۵۸، طرح یک مسأله و صفحه‌ی ۷۲، تمرین ۱، تمرین در کلاس)	**امتحان نهایی، دی ۸۸** (۶ بار تکرار)	۱
۷۷. با استفاده از دنباله‌ها، ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} x & , \; x\geq ۰ \\ ۱ & , \; x<۰ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ حد ندارد. (صفحه‌ی ۷۲، مشابه تمرین ۲، تمرین در کلاس)	**امتحان نهایی شهریور ۹۰** (۴ بار تکرار)	۱/۵

	مرجع	بارم
۷۸. به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید تابع زیر در $x = 0$ حد ندارد. $f(x)=\begin{cases} -x & , \quad x>0 \\ x+1 & , \quad x<0 \end{cases}$ (صفحه‌ی ۷۲، مشابه تمرین در کلاس)	**امتحان نهایی، خرداد ۹۴** (۵ بار تکرار)	۲
۷۹. با استفاده از دنباله‌ها، ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & x\in Q \\ 5 & x\notin Q \end{cases}$ در $x=2$ حد نـدارد. (Q: مجموعـه اعداد گویا) (صفحه‌ی ۸۷، تمرین ۱۶)	**امتحان نهایی، دی ۸۹** (۶ بار تکرار)	۱/۲۵
۸۰. اگر $f(x)=\frac{x+[-x]}{x-2}$، $a_n=\frac{n+1}{n+2}$، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگراست؟ (صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین ۱۴)	تهران- شهید نیکبخت (۴ بار تکرار)	
۸۱. با فرض اینکه $[-2x]+\left[x-\frac{1}{2}\right]=f(x)$، دنباله‌ی $\left\{f\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\right\}$ به چه عددی همگراست؟	صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین ۱۶	
۸۲. اگر $f(x)=(2x+a)[-3x]$ و $a_n=\frac{2n+7}{n+2}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=42$، آنگاه a را بیابید. (صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین ۱۴)	کاشان- دکتر علی خیاط‌زاده- ۹۲ (۵ بار تکرار)	

قضایای حد (قضیه‌ی فشردگی، رفع ابهام $\frac{0}{0}$ و $0\times\infty$)

۸۳. مقدار حد زیر را بیابید. $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^3+\sin\frac{x-2}{x^2+4}\right)$ (صفحه‌ی ۷۷، مشابه مثال)	مشهد- آرمینه مصلی‌نژاد- ۹۲ (۴ بار تکرار)	
۸۴. با استفاده از قضیه‌ی فشردگی ثابت کنید. $\lim\limits_{x\to 0^-} 2x\left[\frac{3}{x}\right]=6$ (صفحه‌ی ۸۱، مثال)	فارس- شکیبا (۶ بار تکرار)	
۸۵. حاصل $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\sin\frac{1}{x-1}$ را بیابید. (صفحه‌ی ۷۷، مثال)	**خارج کشور، دی ۸۶** (۴ بار تکرار)	
۸۶. حاصل $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)\left[\frac{4}{x-3}\right]$ را بیابید. (صفحه‌ی ۸۱، مشابه مثال)	کاشان- امام خمینی (ره)- ۹۲ (۶ بار تکرار)	
۸۷. تابع $D(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\in Q \\ 1 & , \quad x\notin Q \end{cases}$ را در نظر بگیرید. حاصل $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)D(x)$ را تعیین کنید. (صفحه‌ی ۷۷، مشابه تمرین ۳)	میاندوآب- شهید فروغی- ۹۲ (۵ بار تکرار)	
۸۸. نشان دهید تابع $f(x)=\left[\frac{5x^4+9}{x^4+2}\right]$ به ازای هر $a\in R$ دارای حد است.	صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین ۱۱	
۸۹. حاصل $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$ را بدون استفاده از هم‌ارزی و هوپیتال محاسبه کنید. (صفحه‌ی ۸۴، مشابه تمرین در کلاس)	**امتحان نهایی، دی ۹۳** (۱۹ بار تکرار)	۱

	مرجع	بارم
۹۰. بدون استفاده از قاعده‌ی هوپیتال، حدهای زیر را بیابید. ۱) $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{۲x}$ ۲) $\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}$ ۳) $\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۴}{[-x]-۳}$ (صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین‌های ۳- ت، ۵ و ۱۲- الف)	**امتحان نهایی، شهریور ۹۰** (۸ بار تکرار)	۲/۲۵
۹۱. حدهای زیر را به دست آورید. ۱) $\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x+۱}\sin\frac{۱}{x}$ ۲) $\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-\cos x}}{۲x}$ (صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین‌های ۸ و ۱۲- الف و ۱۳)	**امتحان نهایی، دی ۸۸** (۸ بار تکرار)	۱/۵
۹۲. حدهای زیر را به دست آورید. ۱) $\lim_{x\to ۰^+}x\left[\frac{۱}{x}\right]$ ۲) $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^۲-۳x+۲}$ (صفحه‌ی ۸۱، مثال، صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین ۳- ب)	**امتحان نهایی، دی ۸۸** (۸ بار تکرار)	۱/۷۵
۹۳. بدون استفاده از قاعده‌ی هوپیتال، حدهای زیر را بیابید. ۱) $\lim_{x\to ۳}(x^۲-۹)\times\cos\frac{۱}{x-۳}$ ۲) $\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۲}{x-۳}$ (صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین ۱۳)	**امتحان نهایی، دی ۹۰** (۸ بار تکرار)	۱/۲۵
۹۴. بدون استفاده از قاعده‌ی هوپیتال، حدهای زیر را بیابید. ۱) $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲}}{x-۱}$ ۲) $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x-\sin ۳x}{\sin x}$ (صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین ۳ و ۱۲)	**امتحان نهایی، تیر ۹۱** (۸ بار تکرار)	۱/۵
۹۵. حد زیر را بیابید. $\lim_{x\to \left(\frac{۱}{۲}\right)^+}\frac{\lvert\cos \pi x\rvert}{۱-\sqrt{۲x}}$ (صفحه ۸۶- تمرین ۱۰)	فارس- شکیبا- ۹۲ (۶ بار تکرار)	
۹۶. حدهای زیر را به دست آورید. الف) $\lim_{x\to ۰}\frac{\lvert ۳x-۱\rvert-\lvert ۳x+۱\rvert}{x}$ (صفحه‌ی ۸۶، تمرین ۶) ب) $\lim_{x\to ۴}(۲-\sqrt{x})\tan\frac{\pi x}{۸}$ (صفحه‌ی ۸۶، تمرین ۱۲- ت) پ) $\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ۳x-\cos x}{x^۲}$ (صفحه‌ی ۸۶، تمرین ۱۲- پ)	تهران- خوارزمی- ۹۲ (۳ بار تکرار)	

	مرجع	بارم
۹۷. تعیین کنید تابع $f(x)=۳x+sgn(x^۲-۴)$ در چه نقاطی حد ندارد؟ (صفحه‌ی ۶۸، مشابه تمرین ۳)	همدان- شهدای جاویدالاثر- ۹۲ (۵ بار تکرار)	
۹۸. عددهای a و b را چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+b}-۳}{x}=۱$. (صفحه‌ی ۸۶، تمرین ۵)	دهدشت- مائده- ۹۱ (۷ بار تکرار)	
۹۹. اگر $a_n=\frac{۲n+۳}{n+۴}$ و $f(x)=\frac{x^۲+۲[-x]}{۳x-۶}$ مفروض باشند، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگراست؟ (صفحه‌ی ۸۶، مشابه تمرین ۱۴)	تهران- نمونه دولتی دانشمند- ۹۲ (۴ بار تکرار)	

پیوستگی (پیوستگی در نقطه)

۱۰۰. نشان دهید تابع $f(x)=[-x]$ در هر عدد صحیح n، از چپ پیوسته است.	صفحه‌ی ۹۱، مشابه مثال	
۱۰۱. مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در $x=۱$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases} ۲+x^۲ & , \quad x>۱ \\ a & , \quad x=۱ \\ b+۲[x] & , \quad x<۱ \end{cases}$ (صفحه‌ی ۹۹، مشابه سؤال ۴)	**امتحان نهایی، شهریور ۹۲** **دی ۹۱**	۱
۱۰۲. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه‌ی زیر در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases} [\cot x]+a & , \quad x>\frac{\pi}{۴} \\ [\sqrt{۲}\cos x] & , \quad x<\frac{\pi}{۴} \\ [۲x]+b & , \quad x=\frac{\pi}{۴} \end{cases}$ (صفحه‌ی ۹۹، مشابه تمرین‌های ۲ تا ۴)	شیراز- استعداد درخشان ملاصدرا- ۹۲ (۴ بار تکرار)	
۱۰۳. مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع در $x=۳$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases} ۲[x]+۳a & , \quad x>۳ \\ \cos(x-۳) & , \quad x=۳ \\ \frac{\lvert x-۳\rvert}{x^۲-۹}+b & , \quad x<۳ \end{cases}$ (صفحه‌ی ۹۹، مشابه سؤال ۴)	**امتحان نهایی، دی ۸۹** (۹ بار تکرار)	۱/۵
۱۰۴. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{a}{\pi}\tan^{-۱}\frac{۱}{x} & , \quad x<۰ \\ -۱ & , \quad x=۰ \\ \frac{b\sqrt{۲}\,x}{\sqrt{۱-\cos x}} & , \quad x>۰ \end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد، a و b را بیابید. (صفحه‌ی ۹۹، مشابه تمرین ۴)	تهران- اندیشه و خرد- ۹۲ (۶ بار تکرار)	

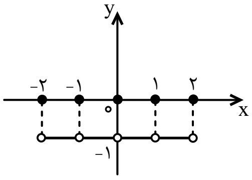
پاسخنامه‌ی فصل دوم

پاسخ تشریحی:
فرهاد حامی- میثم حمزه‌لویی

۶۹- ابتدا دقت کنید که:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & , \quad x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & , \quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

حال با توجه به این نکته، نمودار تابع را رسم و حدود را محاسبه می‌کنیم:

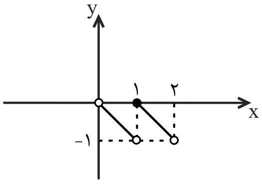


$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=-۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱\end{cases}$$

۷۰-

$$f(x)=\begin{cases}۰-x & , \quad ۰<x<۱\\ ۱-x & , \quad ۱\le x<۲\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-x & , \quad ۰<x<۱\\ ۱-x & , \quad ۱\le x<۲\end{cases}$$



با توجه به نمودار:

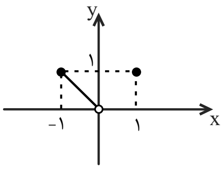
۱) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۰$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$

۳) از آنجایی که $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$، پس تابع در $x=۱$ حد ندارد و $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ وجود ندارد.

۷۱-

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{-۱}=-x & , \quad -۱\le x<۰\\ \text{تعریف نشده} & , \quad ۰\le x<۱\\ ۱ & , \quad x=۱\end{cases}$$



با توجه به نمودار:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x}{[x]}=۰$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x}{[x]}$ تعریف نشده:

۳) اما $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{[x]}$ معادل است با $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x}{[x]}=۰$، پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{[x]}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{[x]}=۰ \text{ (وجود دارد.)}$$

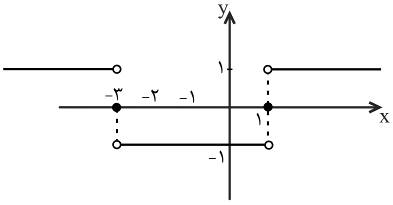
۷۲- از آنجایی که $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}۱ & , \quad x>۰\\ ۰ & , \quad x=۰\\ -۱ & , \quad x<۰\end{cases}$، پس:

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x^۲+۲x-۳)=\begin{cases}۱ & , \quad x^۲+۲x-۳>۰\\ ۰ & , \quad x^۲+۲x-۳=۰\\ -۱ & , \quad x^۲+۲x-۳<۰\end{cases}$$

که معادل است با:

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x^۲+۲x-۳)=\begin{cases}۱ & , \quad x<-۳ \quad x>۱\\ ۰ & , \quad x=۱\,,\,x=-۳\\ -۱ & , \quad -۳<x<۱\end{cases}$$

بنابراین نمودار تابع به صورت زیر خواهد بود:



در $x=۱$ داریم:

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$

پس در $x=۱$ حد وجود ندارد. به طریق مشابه تابع در $x=-۳$ حد ندارد و در نتیجه تابع در دو نقطه‌ی $x=۱$ و $x=-۳$ حد ندارد.

۷۳- با کمک دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n=(-۰/۱)^n$ ثابت می‌کنیم که تابع f در $x=۰$ حد ندارد. فقط دقت کنید که دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صفر همگراست.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{|(-۰/۱)^n|}{(-۰/۱)^n}$$

حال برای محاسبه‌ی حد فوق، دو حالت زیر را داریم:

$$\begin{cases} \text{فرد } n: \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|(-۰/۱)^n|}{(-۰/۱)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|-(۰/۱)^n|}{-(۰/۱)^n} \\ \quad =\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(۰/۱)^n}{-(۰/۱)^n}=-۱ \\ \text{زوج } n: \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|(-۰/۱)^n|}{(-۰/۱)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(۰/۱)^n}{(۰/۱)^n}=۱ \end{cases}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۰$، اما $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ وجود ندارد، بنابراین تابع f در $x=۰$ حد ندارد.

۷۴- چون براکت داریم، دو دنباله‌ی غیر ثابت و همگرا به ۵ باید طوری مثال بزنیم که یکی با مقادیر بیش‌تر از ۵ و دیگری با مقادیر کم‌تر از ۵ به ۵ همگرا باشند:

$$\begin{cases} a_n=۵+\dfrac{۱}{n}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(۵+\dfrac{۱}{n}\right)\left[۵+\dfrac{۱}{n}\right] \\ b_n=۵-\dfrac{۱}{n}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(۵-\dfrac{۱}{n}\right)\left[۵-\dfrac{۱}{n}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(۵+\dfrac{۱}{n}\right)(۵)=۲۵ \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(۵-\dfrac{۱}{n}\right)(۴)=۲۰ \end{cases}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$، بنابراین تابع f در $x=۵$ حد ندارد.

۷۵- دو دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n=\dfrac{۱}{۲n}$ و $b_n=\dfrac{۱}{۲n+\dfrac{۱}{۲}}$ را که هر دو همگرا به صفراند را در نظر می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(۲n\pi)=۰$$

$$\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(۲n\pi+\dfrac{\pi}{۲}\right)=۱$$

از آنجایی که $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$، بنابراین طبق تعریف حد، $\lim\limits_{x\to۰}\sin\dfrac{\pi}{x}$ وجود ندارد.

۷۶- دو دنباله‌ی همگرا به ۲ و غیرثابت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ طوری مثال می‌زنیم که $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$.

$$\begin{cases} a_n=۲+\dfrac{۱}{۲n\pi}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(۲n\pi)=۰ \\ b_n=۲+\dfrac{۱}{۲n\pi+\dfrac{\pi}{۶}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(۲n\pi+\dfrac{\pi}{۶}\right)=\dfrac{۱}{۲} \end{cases}$$

از آن‌جا که $۰=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=\dfrac{۱}{۲}$، بنابراین تابع f در $x=۲$ حد ندارد.

۷۷- دنباله‌های غیرثابت و همگرا به صفر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را طوری مثال می‌کنیم که یکی با مقادیر بیش‌تر از صفر و دیگری با مقادیر کم‌تر از صفر به صفر همگرا باشد:

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{۱}{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{۱}{n}\right)=۰ \\ b_n=\dfrac{-۱}{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(۱)=۱ \end{cases}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ بنابراین تابع f در $x=۰$ حد ندارد.

دقت کنید که دنباله‌ی $a_n=\dfrac{۱}{n}$ با مقادیر بیش‌تر از صفر به صفر همگراست. پس برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ از ضابطه‌ی بالای f استفاده می‌کنیم و برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ از ضابطه‌ی پایین f کمک می‌گیریم.

۷۸- دنباله‌های غیر ثابت و همگرا به صفر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را طوری در مثال می‌گیریم که یکی با مقادیر بیشتر از صفر و دیگری با مقادیر کمتر از صفر، به صفر همگرا باشند.

$$a_n=\dfrac{۱}{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-۱}{n}=۰$$

$$b_n=\dfrac{-۱}{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-۱}{n}+۱\right)=۱$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$، بنابراین تابع f در $x=۰$ حد ندارد.

۷۹- باید دو دنباله‌ی غیرثابت و همگرا به ۲ طوری مثال بزنیم که یکی مقادیر گویا و دیگری مقادیر گنگ داشته باشد:

$$\begin{cases} a_n = ۲+\frac{۱}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = ۱ \\ b_n = ۲+\frac{\sqrt{۲}}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = ۵ \end{cases}$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$، بنابراین تابع f در $x = ۲$ حد ندارد.

دقت کنید چون مقادیر دنباله‌ی $a_n = ۲+\frac{۱}{n}$ گویاست. برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ از ضابطه‌ی بالای f استفاده می‌کنیم. در طرف دیگر چون مقادیر دنباله‌ی $b_n = ۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ گنگ است و برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ از ضابطه‌ی پایینی f استفاده می‌کنیم.

۸۰- برای بررسی همگرایی دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ باید حد دنباله را در بی‌نهایت محاسبه کنیم. اول حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+۱}{n+۲} = ۱$$

حال باید تعیین کنیم که a_n با مقادیر بیشتر از ۱ به ۱ همگراست یا کمتر از آن. برای این منظور $(a_n - L)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$a_n - L = \frac{n+۱}{n+۲} - ۱ = \frac{n+۱-n-۲}{n+۲} = \frac{-۱}{n+۲} < ۰$$

پس a_n با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ همگراست. در نتیجه:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{x+[-x]}{x-۲}$$

از آنجا که وقتی $x \to ۱^-$ مقدار عبارت $[-x]$ برابر -۱ می‌شود، بنابراین حد داده شده، به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\text{حد} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{x-۱}{x-۲} = \frac{۱-۱}{۱-۲} = ۰$$

۸۱-

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\left[\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{n}-\frac{۱}{۲}\right]+\left[-۲\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{n}\right)\right]\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\left[\frac{-۱}{n}\right]+\left[-۱+\frac{۲}{n}\right]\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{-۱}{n}\right] + \lim_{n\to+\infty}\left[-۱+\frac{۲}{n}\right]$$

$$= -۱-۱ = -۲$$

۸۲-

$$a_n = \frac{۲n+۷}{n+۲} = \frac{۲(n+۲)+۳}{n+۲} = ۲+\frac{۳}{n+۲}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f\left(۲+\frac{۳}{n+۲}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(۲\left(۲+\frac{۳}{n+۲}\right)+a\right)\left[-۳\left(۲+\frac{۳}{n+۲}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(۴+\frac{۶}{n+۲}+a\right)\left[-۶-\frac{۹}{n+۲}\right]$$

$$= (۴+a)(-۷)$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = -۷(۴+a) = ۴۲$$

$$\Rightarrow ۴+a = \frac{-۴۲}{۷} \Rightarrow a = -۶-۴ = -۱۰$$

۸۳-

$$\lim_{x\to ۲^-}\left(x^۳ + \sin\frac{x-۲}{x^۲+۴}\right) = ۲^۳ + \sin\frac{۲-۲}{۴+۴} = ۸+۰ = ۸$$

۸۴- با استفاده از روابط براکت خواهیم داشت:

$$\frac{۳}{x} - ۱ < \left[\frac{۳}{x}\right] \leq \frac{۳}{x}$$

حال باید طرفین نامساوی را در ۲x ضرب کنیم تا عبارت $۲x\left[\frac{۳}{x}\right]$ را تشکیل دهیم. دقت کنید چون $x \to ۰^-$، پس $x < ۰$ است و با ضرب ۲x، جهت نامساوی‌ها عوض می‌شود:

$$\Rightarrow \left(\frac{۳}{x}-۱\right)(۲x) > ۲x\left[\frac{۳}{x}\right] \geq \left(\frac{۳}{x}\right)(۲x)$$

از آن‌جا که:

$$\lim_{x\to ۰^-}\left(\frac{۳}{x}-۱\right)(۲x) = \lim_{x\to ۰^-}(۶-۲x) = ۶$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\left(\frac{۳}{x}\right)(۲x)=۶$$

پس طبق قضیه‌ی فشردگی:

$$\lim_{x\to ۰^-}۲x\left[\frac{۳}{x}\right]=۶$$

۸۵- از آنجا که $-۱\le \sin u\le ۱$ است، بنابراین $-۱\le \sin\frac{۱}{x-۱}\le ۱\quad(*)$. حال با ضرب $x^۲-۱$ در طرفین نامعادله‌ی $(*)$، عبارت حدی را می‌سازیم. فقط دقت کنید که باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x>۱\Rightarrow x^۲-۱>۰ \\ \Rightarrow -(x^۲-۱)\le (x^۲-۱)\sin\dfrac{۱}{x-۱}\le x^۲-۱ \\ -۱<x<۱\Rightarrow x^۲-۱<۰ \\ \Rightarrow -(x^۲-۱)\ge (x^۲-۱)\sin\dfrac{۱}{x-۱}\ge x^۲-۱ \end{cases}$$

(در حالت دوم چون $x^۲-۱<۰$ است پس با ضرب آن در طرفین نامعادله، جهت نامعادله عوض می‌شود.)

چون $\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲-۱)=\lim\limits_{x\to ۱}(-(x^۲-۱))=۰$، پس با توجه به قضیه‌ی فشردگی، $\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲-۱)\sin\dfrac{۱}{x-۱}=۰$ است.

۸۶- می‌دانیم $\lim\limits_{x\to ۰}x\left[\dfrac{۱}{x}\right]=۱$ (اثبات صفحه‌ی ۸۱ کتاب درسی).

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳}(x+۳)\times(x-۳)\left[\frac{۴}{x-۳}\right]$$

$$=\lim_{x\to ۳}۴(x+۳)\times\frac{x-۳}{۴}\left[\frac{۴}{x-۳}\right]$$

با فرض $\dfrac{x-۳}{۴}=t$، خواهیم داشت:

$x\to ۳$ و $t\to ۰$ و $x+۳=۴t+۶$

$$=\lim_{t\to ۰}۴(۴t+۶)\times t\left[\frac{۱}{t}\right]=\lim_{t\to ۰}۴(۴t+۶)\times\lim_{t\to ۰}t\left[\frac{۱}{t}\right]$$

$$=۲۴\times ۱=۲۴$$

۸۷- تابع دیریکله $D(x)=\begin{cases}۰ & , \quad x\in Q\\ ۱ & , \quad x\notin Q\end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد ولی تابعی کراندار است و به ازای هر $x\in R$ داریم: $|D(x)|\le ۱$. از طرفی:

$$\lim_{x\to ۲}(x-۲)=۰$$

پس طبق قضیه‌ی ۳ صفحه‌ی ۷۷ (قضیه‌ی کرانداری)، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۲}(x-۲)D(x)=۰$$

۸۸-

$$\left[\frac{۵x^۴+۹}{x^۴+۲}\right]=\left[\frac{۵(x^۴+۲)-۱}{x^۴+۲}\right]=\left[۵-\frac{۱}{x^۴+۲}\right]$$

$$=۵+\left[\frac{-۱}{x^۴+۲}\right]$$

در هر نقطه‌ی $x\in R$، $x^۴+۲\ge ۲$ و در نتیجه $۰<\dfrac{۱}{x^۴+۲}\le\dfrac{۱}{۲}$، بنابراین:

$$\frac{-۱}{۲}\le\frac{-۱}{x^۴+۲}<۰$$

پس به ازای هر $x\in R$ داریم:

$$\left[\frac{-۱}{x^۴+۲}\right]=-۱$$

و به ازای هر $a\in R$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{۵x^۴+۹}{x^۴+۲}\right]=\lim_{x\to a}\left(۵+\left[\frac{-۱}{x^۴+۲}\right]\right)$$

$$=\lim_{x\to a}۵+\lim_{x\to a}\left[\frac{-۱}{x^۴+۲}\right]=۵-۱=۴$$

۸۹-

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{\sqrt{x+۵}-۳}$$ (ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد.)

برای رفع ابهام، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{\sqrt{x+۵}-۳}\times\frac{\sqrt{x+۵}+۳}{\sqrt{x+۵}+۳}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(\sqrt{x+۵}+۳)}{x-۴}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\sqrt{x+۵}+۳)=۳+۳=۶$$

-۹۰ ۱) با استفاده از اتحاد $۱-\cos ۲a=۲\sin^{۲} a$ داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲}\frac{x}{۲}}{x}$$

$$=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}\times\lim_{x\to ۰}\sin\frac{x}{۲}=\frac{۱}{۲}\times ۱\times ۰=۰$$

۲) صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\left(\frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+۲}{\sqrt{x+۲}+۲}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{(x-۲)(\sqrt{x+۲}+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{\sqrt{x+۲}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

۳) وقتی $۲<x<۳$، آنگاه $-۳<-x<-۲$ و در نتیجه $[-x]=-۳$، پس:

$$\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{x+۴}{-۳-۳}=\frac{۶}{-۶}=-۱$$

-۹۱ ۱) تابع $y=\sin\frac{۱}{x}$ در همسایگی محذوف صفر کران‌دار است و $\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x}{x+۱}=۰$، پس طبق قضیه‌ی کرانداری داریم:

$$\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x}{x+۱}\sin\frac{۱}{x}=۰\times\text{تابع کران‌دار}=۰$$

۲) صورت و مخرج را در مزدوج صورت، ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{\sqrt{۱-\cos^{۲} x}}{۲x\sqrt{۱+\cos x}}=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{|\sin x|}{۲x\sqrt{۱+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-\sin x}{۲x\sqrt{۱+\cos x}}=\lim_{x\to ۰^{-}}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{۱+\cos x}}\right)\right)$$

$$=۱\times\left(-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\right)=-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

-۹۲ ۱) می‌دانیم $x-۱<[x]\le x$، پس $\frac{۱}{x}-۱<\left[\frac{۱}{x}\right]\le\frac{۱}{x}$

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی فشردگی داریم:

اگر $x>۰$: $\begin{cases}۱-x<x\left[\frac{۱}{x}\right]\le ۱\\ \lim\limits_{x\to ۰^{+}}(۱-x)=\lim\limits_{x\to ۰^{+}}۱=۱\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۰^{+}}x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$

اگر $x<۰$: $\begin{cases}۱\le x\left[\frac{۱}{x}\right]<۱-x\\ \lim\limits_{x\to ۰^{-}}۱=\lim\limits_{x\to ۰^{-}}(۱-x)=۱\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to ۰^{-}}x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$

۲) با استفاده از اتحادها داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^{۲}-۳x+۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱}\right)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(x-۲)(\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}+۱)}=\frac{۱}{-۱\times ۳}=\frac{-۱}{۳}$$

-۹۳ ۱) از آنجایی که $\lim_{x\to ۳}(x^{۲}-۹)=۰$ و تابع $g(x)=\cos\frac{۱}{x-۳}$ در همسایگی محذوف ۳ تعریف شده و کران‌دار است، اما در این نقطه حد ندارد، پس:

$$\lim_{x\to ۳}(x^{۲}-۹)\cos\frac{۱}{x-۳}=\text{صفر}\times\text{تابع کران‌دار}=۰$$

۲) وقتی $۲<x<۳$، $[x]=۲$، پس:

$$\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{[x]-۲}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{۲-۲}{x-۳}=۰$$

-۹۴

۱) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲}}{x-۱}$ (ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد)

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲}}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲}}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲})}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

۲) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x-\sin ۳x}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin\frac{۵x-۳x}{۲}\cos\frac{۵x+۳x}{۲}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin x\times\cos ۴x}{\sin x}=\lim_{x\to ۰}۲\cos ۴x=۲$$

۹۵- الف) ابهام حد $\frac{۰}{۰}$ است. وقتی $x \to \frac{۱}{۲}^+$، کمان کسینوس یعنی πx در ناحیه‌ی دوم قرار دارد. در نتیجه علامت عبارت داخل قدر مطلق، منفی است:

$$\lim_{x\to\left(\frac{۱}{۲}\right)^+}\frac{|\cos \pi x|}{۱-\sqrt{۲x}}=\lim_{x\to\left(\frac{۱}{۲}\right)^+}\frac{-\cos\pi x}{۱-\sqrt{۲x}}$$

حال با تغییر متغیر، رفع ابهام را شروع می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-\frac{۱}{۲}=t\Rightarrow x=t+\frac{۱}{۲}\\ x\to\frac{۱}{۲}^+\Rightarrow t\to ۰^+\end{cases}\Rightarrow \lim_{t\to۰^+}\frac{-\cos\pi\left(t+\frac{۱}{۲}\right)}{۱-\sqrt{۲\left(t+\frac{۱}{۲}\right)}}$$

$$=\lim_{t\to۰^+}\frac{-\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{۲}\right)}{۱-\sqrt{۲t+۱}}=\lim_{t\to۰^+}\frac{\sin\pi t}{۱-\sqrt{۲t+۱}}$$

گویا می‌کنیم:

$$\lim_{t\to۰^+}\frac{(\sin\pi t)(۱+\sqrt{۲t+۱})}{۱-(۲t+۱)}=\lim_{t\to۰^+}\frac{(\sin\pi t)(۱+\sqrt{۲t+۱})}{-۲t}$$

$$=\lim_{t\to۰^+}\left(\left(\frac{\sin\pi t}{-۲t}\right)(۱+\sqrt{۲t+۱})\right)=\left(-\frac{\pi}{۲}\right)(۱+\sqrt{۱})=-\pi$$

۹۶- الف) ابهام حد $\frac{۰}{۰}$ است، بنابراین:

$$\lim_{x\to۰}\frac{\overbrace{|۳x-۱|}^{(-)}-\overbrace{|۳x+۱|}^{(+)}}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{(-۳x+۱)-(۳x+۱)}{x}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{-۳x+۱-۳x-۱}{x}=\lim_{x\to۰}\frac{-۶x}{x}=-۶$$

ب)

$$\lim_{x\to۴}(۲-\sqrt{x})\tan\frac{\pi x}{۸}=۰\times\infty$$

برای رفع ابهام، عامل ∞ را به مخرج منتقل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{\frac{۱}{\tan\frac{\pi x}{۸}}}=\lim_{x\to۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{\cot\frac{\pi x}{۸}}$$

حال از تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x-۴=t\Rightarrow x=t+۴\\ x\to۴\Rightarrow t\to۰\end{cases}\Rightarrow\lim_{t\to۰}\frac{۲-\sqrt{t+۴}}{\cot\frac{\pi(t+۴)}{۸}}$$

$$=\lim_{t\to۰}\frac{۲-\sqrt{t+۴}}{\cot\left(\frac{\pi t}{۸}+\frac{\pi}{۲}\right)}=\lim_{t\to۰}\frac{۲-\sqrt{t+۴}}{-\tan\frac{\pi t}{۸}}$$

گویا می‌کنیم:

$$=\lim_{t\to۰}\frac{۴-(t+۴)}{-\tan\frac{\pi t}{۸}(۲+\sqrt{t+۴})}$$

$$=\lim_{t\to۰}\left(\frac{-t}{-\tan\frac{\pi t}{۸}}\right)\times\left(\frac{۱}{۲+\sqrt{t+۴}}\right)=\frac{۸}{\pi}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{\pi}$$

پ) ابهام حد از نوع $\frac{۰}{۰}$ است. برای رفع ابهام از روابط تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۰}\frac{\cos۳x-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to۰}\frac{-۲\sin۲x\sin x}{x^۲}$$

$$=\lim_{x\to۰}\left((-۲)\left(\frac{\sin۲x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)=(-۲)(۲)(۱)=-۴$$

۹۷- از آنجا که $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}۱ & , \quad x>۰\\ ۰ & , \quad x=۰\\ -۱ & , \quad x<۰\end{cases}$، تابع f را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=۳x+\operatorname{sgn}(x^۲-۴)=\begin{cases}۳x+۱ & , \quad x^۲-۴>۰\\ ۳x+۰ & , \quad x^۲-۴=۰\\ ۳x-۱ & , \quad x^۲-۴<۰\end{cases}$$

$$=\begin{cases}۳x+۱ & , \quad x>۲ \text{ یا } x<-۲\\ ۳x & , \quad x=۲ \text{ یا } x=-۲\\ ۳x-۱ & , \quad -۲<x<۲\end{cases}$$

هر یک از ضابطه‌ها در دامنه‌ی خود حد دارند. پس باید تنها در نقاط مرزی $x=۲$ و $x=-۲$ حد را بررسی کنیم.

$$x=۲ \text{ در}: \begin{cases}\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}۳x+۱=۷\\ \lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}۳x-۱=۵\end{cases}$$

$\Rightarrow$ در $x=۲$ حد ندارد.

در $x=-۲$:

$$\begin{cases} \lim_{x\to(-۲)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^-} ۳x+۱ = -۵ \\ \lim_{x\to(-۲)^+} f(x) = \lim_{x\to(-۲)^+} ۳x-۱ = -۷ \end{cases}$$

⇒ در $x=-۲$ حد ندارد.

پس f در دو نقطه‌ی $x=۲$ و $x=-۲$ حد ندارد.

۹۸- حد مخرج وقتی $x\to ۰$ برابر صفر است، پس برای اینکه حاصل حد، عددی حقیقی باشد باید حد صورت هم صفر باشد:

$$\lim_{x\to ۰}(\sqrt{ax+b}-۳)=\sqrt{b}-۳=۰\Rightarrow b=۹$$

با ایجاد ابهام $\frac{۰}{۰}$، با کمک گویا کردن رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۹}-۳}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(ax+۹)-۹}{x(\sqrt{ax+۹}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{ax}{x(\sqrt{ax+۹}+۳)}=\lim_{x\to ۰}\frac{a}{(\sqrt{ax+۹}+۳)}=\frac{a}{۶}$$

چون حاصل حد برابر ۱ است، بنابراین:

$$\frac{a}{۶}=۱\Rightarrow a=۶$$

۹۹-

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=۲$$

اما:

$$a_n=\frac{۲n+۳}{n+۴}=\frac{۲(n+۴)-۵}{n+۴}=۲-\frac{۵}{n+۴}$$

بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کمتر از ۲، به ۲ نزدیک می‌شود. پس:

$$\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=\lim_{a_n\to ۲^-}f(a_n)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)$$

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲+۲[-x]}{۳(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۴}{۳(x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۳(x-۲)}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۲}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

۱۰۰-

$$\lim_{x\to n^+}f(x)=\lim_{x\to n^+}[-x]=-n-۱$$

$$\lim_{x\to n^-}f(x)=\lim_{x\to n^-}[-x]=-n$$

از آنجایی که $\lim_{x\to n^-}f(x)=f(n)$، پس تابع f به ازای هر عدد صحیح n از چپ پیوسته است.

۱۰۱- باید:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)=f(۱)$$

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(۲+x^۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(b+۲[x])=b$$

$$f(۱)=a$$

$$\Rightarrow a=b=۳$$

۱۰۲- برای آنکه تابع در $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، باید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}f(x)=f\left(\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$۱)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}([\cot x]+a)=([۱^-]+a)$$

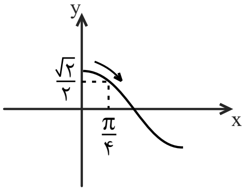
$$=۰+a=a$$

$$۲)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}[\sqrt{۲}\cos x]=\left[\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^+\right]$$

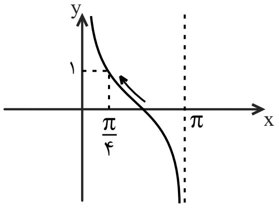
$$=[۱^+]=۱$$

$$۳)\ f\left(\frac{\pi}{۴}\right)=\left[\frac{\pi}{۲}\right]+b=۱+b$$

توجه: برای محاسبه‌ی $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}f(x)$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}f(x)$ به نمودار توابع $y=\cot x$ و $y=\cos x$ در همسایگی $\frac{\pi}{۴}$ توجه کنید.



$y=\cos x$



$y=\cot x$

۱۰۳- باید:

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^-} f(x)=f(۳)$$

پس:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}\left(\frac{-(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}+b\right)=\frac{-۱}{۶}+b$$

$$f(۳)=\cos(۳-۳)=\cos ۰=۱$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+} ۲[x]+۳a=۶+۳a$$

بنابراین:

$$۶+۳a=۱\Rightarrow a=\frac{-۵}{۳}$$

$$\frac{-۱}{۶}+b=۱\Rightarrow b=\frac{۷}{۶}$$

۱۰۴- برای آنکه تابع در $x=۰$ پیوسته باشد،باید:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=f(۰)$$

لذا:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{a}{\pi}\tan^{-۱}\frac{۱}{x}=\frac{a}{\pi}\left(\frac{-\pi}{۲}\right)=\frac{-a}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{b\sqrt{۲x}}{\sqrt{۱-\cos x}}\times\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{۱+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{b\sqrt{۲x}\times\overbrace{\sqrt{۱+\cos x}}^{۲}}{\sqrt{\underbrace{۱-\cos^۲ x}_{\sin^۲ x}}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲b\sqrt{۲x}}{|\sin x|}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲b\sqrt{۲x}}{\sin x}=۲b\sqrt{۲}$$

$$f(۰)=-۱$$

پس:

$$\frac{-a}{۲}=-۱\Rightarrow a=۲$$

$$۲b\sqrt{۲}=-۱\Rightarrow b=\frac{-۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۴}$$

۱۰۵-

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}([۱+x^۲]+[۱-x^۲])$$

$$=\lim_{x\to ۱}(۱+[x^۲]+۱+[-x^۲])$$

$$=\lim_{x\to ۱}(۲+[x^۲]+[-x^۲])$$

$$=۲-۱=۱$$

$$f(۱)=\left|\frac{۱}{۱-۲}\right|=|-۱|=۱$$

پس تابع f در $x=۱$ پیوسته است.

توجه کنید اگر عبارت u در $x=a$ حد داشته باشد آنگاه:

$$\lim_{u\to a}([u]+[-u])=-۱$$

۱۰۶- تابع $y=\sin\frac{۱}{x}$ در همسایگی محذوف نقطه‌ی صفر، کران‌دار است. بنابراین از آنجایی که $\lim_{x\to ۰} x^۲=۰$، پس طبق قضیه‌ی کران‌داری داریم:

$$\lim_{x\to ۰} x^۲\sin\frac{۱}{x}=۰$$

لذا برای اینکه تابع در $x=۰$ پیوسته باشد، باید:

$$f(۰)=\lim_{x\to ۰} f(x)=۰$$

۱۰۷- برای اینکه f در $x=۰$ پیوسته باشد باید:

$$f(۰)=\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin x}{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{\sin\frac{x}{۲}}\right)\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{۲}}\right)\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\right)\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\right)=\frac{۱}{۲}(۲)(۲)=۲\Rightarrow f(۰)=۲$$

۱۰۸- در $x=۲$:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x-۲)\left[\frac{x}{۲}\right]=۰$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x-۲)\left[\frac{x}{۲}\right]=۰ \text{ و } f(۲)=۰$$

پس تابع در $x=۲$ پیوسته است.