

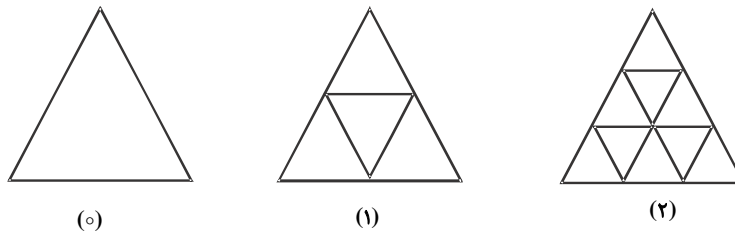
روش‌های استدلال

استدلال در هندسه

قضیه‌های مربوط به چندضلعی‌های محدب

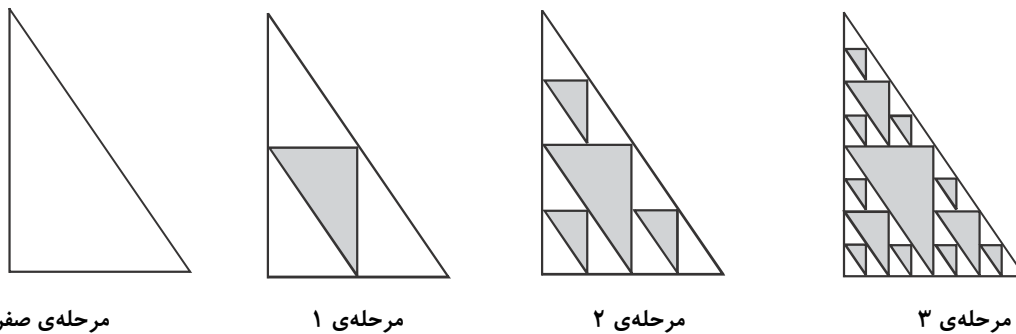
۱ استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری بر پایه‌ی مشاهده‌ی تجربی پدیده در حالت‌های مختلف آن. به دلیل محدود بودن مشاهده‌ها در این روش، نتیجه‌ی حاصل از آن قابل استناد نیست، مهم‌ترین کاربرد این استدلال، پیدا کردن حدس‌های دقیق، قبل از به کار بردن روش‌هایی نظیر استدلال استنتاجی برای نتیجه‌گیری کلی است.

مثال: مطابق الگوی زیر هر یک از اضلاع یک مثلث را در مرحله‌ی k ، توسط k نقطه به $(k + 1)$ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و از نقاط تقسیم پاره خط‌هایی موازی اضلاع مثلث رسم می‌کنیم، با استفاده از استدلال استقرایی می‌توان گفت که در مرحله‌ی k ، $(k + 1)^2$ مثلث کوچک، متشابه با مثلث مرحله‌ی صفر ایجاد می‌شود.



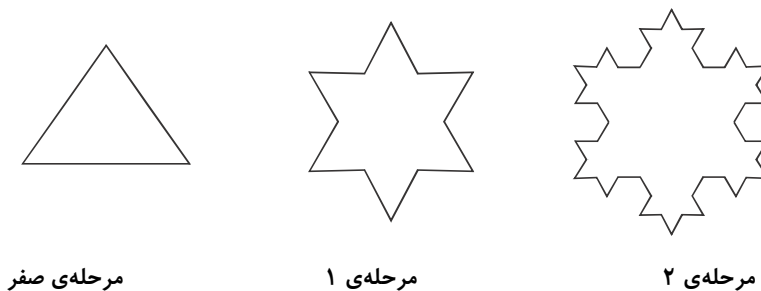
شکل‌های خود-متشابه: اگر قسمتی از یک شکل با کل آن شکل متشابه باشد، آن شکل خود-متشابه نامیده می‌شود؛ در زیر به بررسی ویژگی‌های دو نمونه از شکل‌های خود-متشابه پرداخته‌ایم:

مثلث سرپینسکی: وسط‌های اضلاع یک مثلث به هم وصل کرده، سپس مثلث وسطی را حذف می‌کنیم (مثلث حذف شده سایه‌خورده است) با سه مثلث باقی‌مانده‌ی همین کار را انجام می‌دهیم و این فرآیند را ادامه می‌دهیم. جدول زیر تعداد مثلث‌های باقی‌مانده و نیز مساحت قسمت باقی‌مانده را نشان می‌دهد.



مرحله	۰	۱	۲	۳	N
تعداد مثلث‌های باقی‌مانده	3^0	3^1	3^2	3^3	3^n
مساحت باقی‌مانده	S	$\frac{3}{4}S$	$(\frac{3}{4})^2 S$	$(\frac{3}{4})^3 S$	$(\frac{3}{4})^n S$

برف دانگی کُخ: هر یک از ضلع‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و روی پاره خط وسطی، یک مثلث متساوی‌الاضلاعی بنا می‌کنیم و پاره خط وسطی را حذف می‌کنیم، این روند را ادامه می‌دهیم.



مرحله	۰	۱	۲	۳	N
تعداد پاره‌خطها	۳	۴×۳	$۴^۲ \times ۳$	$۴^۳ \times ۳$	$۴^n \times ۳$
محیط شکل حاصل	$۳a$	$\frac{۴}{۳}(۳a)$	$(\frac{۴}{۳})^۲(۳a)$	$(\frac{۴}{۳})^۳(۳a)$	$(\frac{۴}{۳})^n(۳a)$

۲ استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای حقایق که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم. استدلال استنتاجی بر بنیانهایی استوار است که به معرفی آن‌ها می‌پردازیم:

- (الف) مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.
- (ب) قضایای کلی: به نتیجه‌گیری‌های کلی که همیشه درست هستند، قضیه گفته می‌شود.
- (ج) قضایای شرطی: هر قضیه را می‌توان به صورت یک عبارت شرطی بیان کرد و آن را به حالت کلی اگر p آن‌گاه q . (به زبان ریاضی می‌نویسیم $p \Rightarrow q$) تبدیل نمود. این‌گونه جملات شرطی، قضایای شرطی نامیده می‌شوند.
- (د) عکس قضیه شرطی: اگر جای فرض و حکم یک قضیه‌ی شرطی را عوض کنیم، آنگاه به عبارت شرطی حاصل، عکس قضیه‌ی شرطی گفته می‌شود. باید توجه داشت که عکس یک قضیه‌ی شرطی لزوماً درست نیست.
- (ه) قضیه‌ی دو شرطی: اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی خود یک قضیه‌ی شرطی باشد، آن‌گاه به آن یک قضیه‌ی دو شرطی می‌گوییم. قضیه‌ی دوشرطی را به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت « p اگر و فقط اگر q » می‌خوانیم.

۳ اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

برهان خلف: معمولاً برای اثبات قضایایی که اثبات درستی آن‌ها از روش‌های مستقیم امکان‌پذیر نیست یا بسیار دشوار است، از روش اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف استفاده می‌شود. برای استفاده از برهان خلف، می‌بایست مراحل زیر را طی کنیم:

۱. فرض کنیم نقیض حکم درست باشد.
۲. نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق پذیرفته شده یا فرض اولیه در تناقض است.
۳. با اثبات نادرست بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم درست است.

n ضلعی محدب دلخواه	
مجموع زاویه‌های داخلی	$۱۸۰^\circ(n-۲)$
مجموع زاویه‌های خارجی	۳۶۰°
تعداد قطرهای گذرنده از هر رأس	$n-۳$
تعداد قطرها	$\frac{n(n-۳)}{۲}$

در مورد n ضلعی‌های محدب دلخواه، جدول روبه‌رو را به خاطر داشته باشد.

نکته: از آن‌جا که مجموع زاویه‌های خارجی هر n ضلعی محدب همواره ۳۶۰° است، پس هر n ضلعی محدب، حداکثر می‌تواند سه زاویه‌ی منفرجه‌ی خارجی (یا به بیان دیگر: زاویه‌ی حاده‌ی داخلی) داشته باشد.

n ضلعی منتظم	
هر زاویه‌ی داخلی	$\frac{۱۸۰^\circ(n-۲)}{n}$
هر زاویه‌ی خارجی	$\frac{۳۶۰^\circ}{n}$

چند ضلعی منتظم: چند ضلعی‌ای که همه‌ی ضلع‌های آن با هم و همه‌ی زاویه‌های آن نیز با هم برابرند.

مثلاً مثلث متساوی الاضلاع و مربع به ترتیب سه ضلعی منتظم و چهار ضلعی منتظم هستند.

با توجه به جدول بالا و تعریف چند ضلعی منتظم می‌توان جدول مقابل را در نظر گرفت:

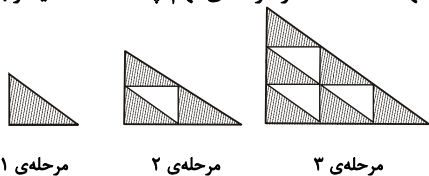
۲- مثلث ABC مفروض است. با کنار هم قرار دادن کدام تعداد مثلث‌هایی برابر مثلث مفروض، می‌توان مثلثی متشابه با مثلث مفروض ساخت؟

(سراسری ریاضی - ۸۸)

- (۱) ۲۰ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) ۲۷

۳- در شکل‌های زیر مثلث‌های بزرگ با هم متشابه و تمام مثلث‌های کوچک با هم هم‌نهشت هستند. در مرحله‌ی نهم چند مثلث سفید وجود دارد؟

(آزمون کانون - ۹۲)



- (۱) ۱۵
(۲) ۲۸
(۳) ۳۶
(۴) ۴۵

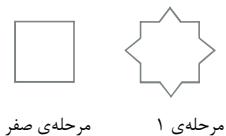
۴- چهارضلعی محدب ABCD مفروض است (مرحله‌ی ۱). وسط ضلع‌های ABCD را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم تا چهارضلعی جدیدی حاصل شود (مرحله‌ی ۲). برای چهارضلعی جدید روند وصل کردن متوالی وسط‌های اضلاع را تکرار می‌کنیم (مرحله‌ی ۳) و ... در کدام مرحله، تعداد مثلث‌های موجود در شکل ۱۲۰۰ خواهد شد؟

(آزمون کانون - ۹۲)

- (۱) ۲۹۹ (۲) ۳۰۰ (۳) ۳۰۱ (۴) ۳۰۲

۵- مربعی به ضلع واحد را در نظر می‌گیریم. هر ضلع آن را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. روی پاره خط وسطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم، سپس آن پاره‌خط را حذف می‌کنیم و این فرایند را روی اضلاع شکل حاصل ادامه می‌دهیم. اگر محیط شکل حاصل در مرحله‌ی هفدهم به صورت $\frac{3^m}{3^k}$ باشد، $m+k$ کدام است؟

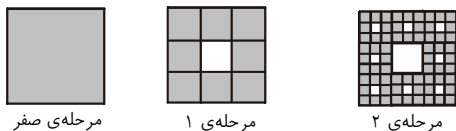
(آزمون کانون - ۹۲)



- (۱) ۳۵ (۲) ۵۱ (۳) ۳۶ (۴) ۵۳

۶- برای رسم «فرش سرپینسکی»، ابتدا هر ضلع مربعی به طول ضلع ۱ واحد را به سه قسمت برابر تقسیم کرده و نقاط روبه‌رو را مطابق شکل با پاره‌خطی به هم وصل می‌کنیم، ۹ مربع برابر ایجاد می‌شود که مربع وسطی را برش داده و حذف می‌کنیم (مرحله‌ی ۱)، سپس فرایند مرحله‌ی ۱ را برای هر مربع باقی‌مانده‌ی مرحله‌ی ۱ تکرار می‌کنیم (مرحله‌ی ۲). با توجه به شکل زیر، نسبت مجموع مساحت مربع‌های باقی‌مانده در مرحله‌ی ۴ به مرحله‌ی ۲ کدام است؟

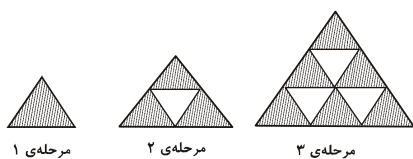
(آزمون کانون - ۹۲)



- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{64}{81}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۴) $\frac{8}{27}$

۷- مطابق الگوی زیر، در مرحله‌ی n ام هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به n قسمت مساوی تقسیم شده و نقاط تقسیم به یکدیگر وصل شده‌اند. در کدام مرحله تعداد مثلث‌های هاشورزده، ۲۰ واحد بیش‌تر از مثلث‌های هاشور نزده است؟

(آزمون کانون - ۹۲)



- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۱۵

۸- مطابق شکل در مرحله‌ی ۱ سه نقطه را با پاره‌خط‌هایی به هم وصل می‌کنیم. سپس در هر مرحله یک نقطه اضافه و کلیدی نقاط را با پاره‌خط‌هایی به هم وصل می‌کنیم. تعداد پاره‌خط‌ها در مرحله‌ی هفتم کدام است؟

(آزمون کانون - ۹۱)



- (۱) ۳۶ (۲) ۴۵ (۳) ۲۸ (۴) ۳۵

استدلال استنتاجی

زیرموضوع (۲)

(سراسری ریاضی - ۷۸)

۹- کدام قضیه به صورت دو شرطی بیان نمی‌شود؟

- (۱) در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه یک ضلع بر هم منطبق‌اند.
(۲) در مثلث قائم‌الزاویه عمودمنصف اضلاع بر روی وتر متقاطع‌اند.
(۳) در مثلث قائم‌الزاویه یکی از میانه‌ها نصف وتر است.
(۴) در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه 90° بزرگ‌ترین ضلع است.

- ۱۰- عکس کدام یک از قضایای شرطی زیر، یک قضیه‌ی شرطی نیست؟
 (۱) مساحت‌های هر دو مثلث همنهشت با هم برابرند.
 (۲) اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند، آنگاه هر زاویه‌ی آن 60° است.
 (۳) مثلثی که دو زاویه‌ی برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است.
 (۴) در یک مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است.

زیرموضوع (۳)

زاویه‌ها در n ضلعی محدب

- ۱۱- در کدام چند ضلعی محدب، مجموع زوایای داخلی چهار برابر مجموع زوایای خارجی است؟
 (۱) هشت ضلعی
 (۲) دوازده ضلعی
 (۳) چهارده ضلعی
 (۴) ده ضلعی
- ۱۲- اندازه‌ی زاویه‌ی درونی یک n ضلعی منتظم کدام است؟
 (۱) 120°
 (۲) 135°
 (۳) 150°
 (۴) 210°
- ۱۳- هر زاویه‌ی یک 18 ضلعی منتظم چند درجه است؟
 (۱) 150°
 (۲) 155°
 (۳) 160°
 (۴) 165°
- ۱۴- هر زاویه‌ی یک n ضلعی منتظم 160° است، n کدام است؟
 (۱) 14
 (۲) 16
 (۳) 18
 (۴) 20
- ۱۵- در یک چند ضلعی منتظم، هر زاویه‌ی داخلی یازده برابر زاویه‌ی خارجی است، تعداد قطرهای این چندضلعی چندتا است؟
 (۱) 54
 (۲) 252
 (۳) 170
 (۴) 165
- ۱۶- یک n ضلعی محدب، حداکثر چند زاویه‌ی حاده‌ی داخلی می‌تواند داشته باشد؟
 (۱) 1
 (۲) 2
 (۳) 3
 (۴) 4

زیرموضوع (۴)

تعداد قطرهای n ضلعی محدب

- ۱۷- اگر تعداد قطرهای یک n ضلعی 9 باشد، آنگاه n برابر است با:
 (۱) 5
 (۲) 6
 (۳) 7
 (۴) 8
- ۱۸- تعداد قطرهای یک n ضلعی، دو برابر تعداد اضلاع آن است. n کدام است؟
 (۱) 6
 (۲) 7
 (۳) 8
 (۴) 9
- ۱۹- تعداد قطرهای یک چند ضلعی محدب از تعداد اضلاع آن 42 واحد بیش‌تر است، تعداد قطرهای این چند ضلعی کدام است؟
 (۱) 45
 (۲) 48
 (۳) 52
 (۴) 54
- ۲۰- مجموع تعداد قطرهای و ضلع‌های چند ضلعی محدب برابر 120 است. تعداد اضلاع چند است؟
 (۱) 14
 (۲) 15
 (۳) 16
 (۴) 17
- ۲۱- اگر مجموع زوایای خارجی n ضلعی منتظم را با A_n و تعداد اقطار آن را با D_n نمایش دهیم، کدام درست است؟
 (۱) $D_{200} > D_{199}, A_{200} > A_{199}$
 (۲) $D_{200} < D_{199}, A_{200} = A_{199}$
 (۳) $D_{200} < D_{199}, A_{200} < A_{199}$
 (۴) $D_{200} > D_{199}, A_{200} = A_{199}$
- ۲۲- مجموع تعداد اضلاع و اقطار یک $(n+1)$ ضلعی، نصف تعداد اقطار یک $2n$ ضلعی است. n کدام است؟
 (۱) 6
 (۲) 2
 (۳) 8
 (۴) 4
- ۲۳- تعداد قطرهای یک 100 ضلعی چند تا بیش‌تر از تعداد قطرهای 97 ضلعی است؟
 (۱) 293
 (۲) 295
 (۳) 291
 (۴) 297
- ۲۴- در 100 ضلعی محدب، تعداد قطرهایی که از دو رأس غیرمجاور می‌گذرد، چند تا است؟
 (۱) 195
 (۲) 196
 (۳) 193
 (۴) 194
- ۲۵- در یک n ضلعی محدب، مجموع تعداد قطرهایی که از سه رأس دوه‌ دو غیر مجاور رسم می‌شوند، برابر 24 است. تعداد همه‌ی قطرهای آن، کدام است؟
 (۱) 54
 (۲) 77
 (۳) 44
 (۴) 65

قضیه‌های مربوط به مثلث متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع

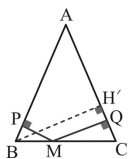
قضیه‌های مربوط به متوازی‌الاضلاع

قضیه‌های مربوط به مثلث‌های متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع

۱ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر با ارتفاع وارد بر

$$MP + MQ = BH'$$

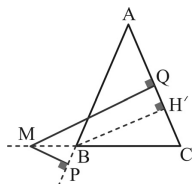
ساق است. پس در شکل مقابل، داریم:



۲ قدر مطلق تفاضل هر نقطه روی امتداد قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق آن، برابر با ارتفاع

$$|MQ - MP| = BH'$$

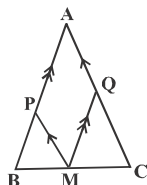
وارد بر ساق است. پس در شکل مقابل، داریم:



۳ اگر از هر نقطه‌ی دلخواه واقع بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین، خطوطی به موازات ساق‌ها رسم کنیم،

مجموع طول پاره‌خط‌های حاصل برابر با طول ساق مثلث است. پس در شکل مقابل داریم:

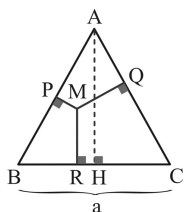
$$MP + MQ = AB = AC$$



۴ مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع مثلث، برابر با ارتفاع مثلث

$$MP + MQ + MR = AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

است. پس در شکل مقابل داریم:



قضیه‌های مربوط به متوازی‌الاضلاع

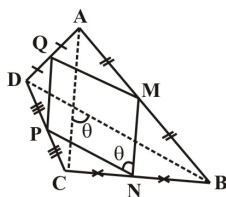
۱ اگر وسط‌های ضلع‌های یک چهار ضلعی محدب دلخواه را متوالیاً به هم وصل کنیم، یک

متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید که طول اضلاع آن، نصف طول قطرهای چهار ضلعی اولیه هستند،

زاویه‌های این متوازی‌الاضلاع، با زاویه‌های بین قطرهای چهار ضلعی اولیه برابرند و مساحت آن نیز،

نصف مساحت چهار ضلعی اولیه است. پس در شکل مقابل، داریم:

$$S(MNPQ) = \frac{1}{4}S(ABCD) \text{ و } NP = MQ = \frac{BD}{2}, MN = PQ = \frac{AC}{2}$$



۲ شکل حاصل از برخورد نیمسازهای متوازی‌الاضلاع

(الف) از برخورد نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع به طول اضلاع a و b، یک مستطیل به طول

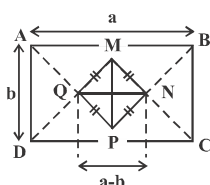
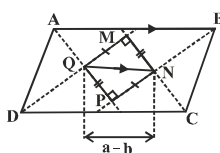
قطر $|a - b|$ ایجاد می‌شود، قطرهای این مستطیل با ضلع‌های متوازی‌الاضلاع موازی هستند. اگر

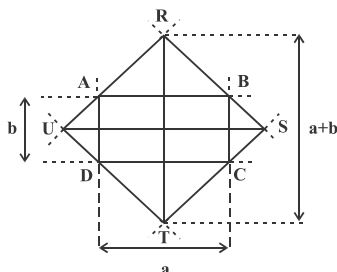
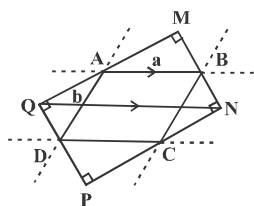
متوازی‌الاضلاع دارای زاویه‌ی θ باشد، مساحت مستطیل ایجاد شده $\frac{(a-b)^2 \sin \theta}{2}$ است. در

حالت خاص از برخورد نیمسازهای داخلی زاویه‌های یک مستطیل به ابعاد a و b، مربعی به طول

قطر $|a - b|$ ایجاد می‌شود. قطرهای این مربع موازی ضلع‌های مستطیل هستند، مساحت این

$$\text{مربع } \frac{(a-b)^2}{2} \text{ است.}$$





ب) از برخورد نیمسازهای خارجی یک متوازی‌الاضلاع به طول اضلاع a و b یک مستطیل به طول قطر $a+b$ ایجاد می‌شود، قطرهای این مستطیل با ضلع‌های متوازی‌الاضلاع موازی هستند. اگر متوازی‌الاضلاع دارای زاویه θ باشد، مساحت مستطیل ایجاد شده $\frac{(a+b)^2 \sin \theta}{2}$ است. در حالت خاص از برخورد نیمسازهای خارجی یک مستطیل به ابعاد a و b مربعی به طول قطر $a+b$ ایجاد می‌شود. قطرهای این مربع موازی ضلع‌های مستطیل هستند مساحت این مربع $\frac{(a+b)^2}{2}$ است.

به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع چهارضلعی محدب

زیرموضوع (۱)

- ۲۶- اوساط اضلاع یک چهارضلعی را به هم وصل کرده‌ایم، حاصل یک مستطیل است، این چهارضلعی کدام می‌تواند باشد؟ (سراسری ریاضی-۶۹)
- (۱) دوزنقه‌ی متساوی الساقین
(۲) لوزی
(۳) مستطیل
(۴) متوازی‌الاضلاع
- ۲۷- اگر اوساط اضلاع یک چهارضلعی را متوالیاً به هم وصل نموده‌ایم، شکل حاصل مربع می‌گردد، نوع چهارضلعی کدام است؟ (آزاد ریاضی-۷۱)
- (۱) لوزی
(۲) مستطیل
(۳) مربع
(۴) متوازی‌الاضلاع
- ۲۸- در کدام چهارضلعی، وسط‌های اضلاع، رأس‌های یک لوزی هستند؟ (آزاد ریاضی-۶۹)
- (۱) دو ضلع مجاور متساوی باشند.
(۲) دو ضلع مجاور بر هم عمود باشند.
(۳) دو قطر بر هم عمود باشند.
(۴) دو قطر مساوی باشند.
- ۲۹- اندازه‌ی دو ضلع مقابل از چهارضلعی محدبی برابرند. اوساط دو قطر و اوساط دو ضلع دیگر آن همواره رئوس کدام چهارضلعی است؟ (سراسری تجربی-۷۲)
- (۱) دوزنقه‌ی متساوی الساقین
(۲) چهارضلعی محاطی
(۳) لوزی
(۴) متوازی‌الاضلاع
- ۳۰- اوساط اضلاع یک مستطیل را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم. یکی از زوایای چهارضلعی حاصل 60° است، نسبت قطر مستطیل به ضلع بزرگ مستطیل چه قدر است؟ (آزاد ریاضی-۸۱)
- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) $2\sqrt{3}$
(۳) ۲
(۴) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- ۳۱- در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین به طول قاعده‌های ۱۲ و ۴، طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است، وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم، محیط چهارضلعی حاصل چه قدر است؟ (آزاد ریاضی-۸۲)
- (۱) $4\sqrt{5}$
(۲) $8\sqrt{5}$
(۳) $4\sqrt{10}$
(۴) $8\sqrt{10}$
- ۳۲- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، اوساط اضلاع را متوالیاً به هم وصل کرده‌ایم در چهارضلعی حاصل، طول یک ضلع برابر ۴ و یک زاویه 120° است. مساحت دوزنقه چقدر است؟ (آزاد ریاضی-۸۶)
- (۱) $2\sqrt{3}$
(۲) $4\sqrt{3}$
(۳) $8\sqrt{3}$
(۴) $16\sqrt{3}$

۳۳- طول قاعده‌های دوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی ۲ و ۶ و طول ارتفاع وارد بر قاعده‌ی آن برابر ۲ است. اوساط اضلاع این دوزنقه را متوالیاً به هم وصل می‌کنیم، محیط چهارضلعی حاصل کدام است؟ (آزمون کانون - ۸۶)

- (۱) $4\sqrt{10}$
- (۲) $2\sqrt{10}$
- (۳) $4\sqrt{5}$
- (۴) $2\sqrt{5}$

زیرموضوع (۲) قضایای مربوط به مثلث متساوی‌الساقین

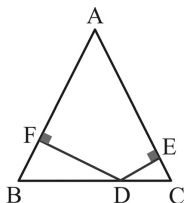
۳۴- از نقطه‌ی M روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین $ABC (\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ)$ ، دو خط به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا آن‌ها را به ترتیب در P و Q قطع کنند. اگر محیط چهارضلعی APMQ برابر $4\sqrt{3}$ باشد، طول BC کدام است؟ (آزمون کانون - ۸۵)

- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) $2\sqrt{3}$
- (۳) ۳
- (۴) ۶

۳۵- مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین $ABC (\hat{A} = 90^\circ)$ با طول ساق ۳ مفروض است از نقطه‌ی M روی وتر BC عمودهایی بر دو ساق مثلث رسم می‌کنیم. اگر قدرمطلق تفاضل طول دو عمود رسم شده برابر یک باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی M از رأس A کدام است؟ (آزمون کانون - ۸۶)

- (۱) $\sqrt{6}$
- (۲) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) $\sqrt{5}$

۳۶- مثلث ABC متساوی‌الساقین است. اگر مساحت مثلث ۶ و طول ضلع AB برابر ۴ باشد، آن‌گاه: (آزاد ریاضی - ۸۰)

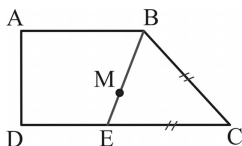


- (۱) $DE + DF = 3$
- (۲) $DE + DF = \frac{3}{2}$
- (۳) $DE + DF = 2$
- (۴) $DE + DF = 1$

۳۷- در مثلثی به اضلاع ۵، ۶ و ۶ واحد، نقطه‌ی M روی ضلع بزرگ‌تر قرار دارد. مجموع فاصله‌های M از دو ضلع دیگر این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۴ با تغییر)

- (۱) $3/6$
- (۲) $4/5$
- (۳) $4/8$
- (۴) $5/4$

۳۸- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه است و $CB = CE$. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو خط CB و CE برابر با کدام است؟ (سراسری خارج از کشور تجربی - ۸۹)



- (۱) DE
- (۲) BC
- (۳) BE
- (۴) AD

زیرموضوع (۳) مجموع فواصل نقطه از سه ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع

۳۹- مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع، چند برابر ضلع مثلث است؟ (آزاد - ۷۵)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $\sqrt{2}$

۴۰- در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{3}$ ، نقطه‌ی M روی ضلع BC است. مجموع فواصل نقطه‌ی M از دو ضلع دیگر کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی - ۷۷)

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\sqrt{3}$
- (۳) $\frac{3}{2}$
- (۴) ۱

۴۱- نقطه‌ی M ، درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $۶\sqrt{3}$ قرار دارد. مجموع فاصله‌های این نقطه از سه ضلع مثلث چقدر است؟ (سراسری تجربی - ۸۱)

- (۱) ۶
(۲) $۴\sqrt{3}$
(۳) $۶ + \sqrt{3}$
(۴) ۹

۴۲- مجموع فاصله‌های نقطه‌ی M درون مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $۲\sqrt{3}$ از سه ضلع آن، چقدر است؟ (آزاد غیر بزشکی - ۹۱)

- (۱) $\frac{۳}{۲}$
(۲) ۴
(۳) ۳
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{۲}$

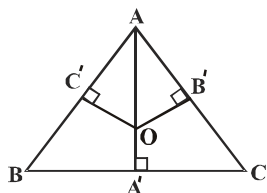
۴۳- در داخل یک مربع به ضلع $\sqrt{3}$ ، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $\sqrt{3}$ رسم می‌کنیم. مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این مثلث کدام است؟

(سراسری خارج کشور ریاضی - ۸۷)

- (۱) $\frac{۴}{۳}$
(۲) $\frac{۳}{۲}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) ۲

۴۴- مطابق شکل، در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، اندازه‌ی ارتفاع AA' برابر ۸ واحد است از نقطه‌ی O واقع بر پاره‌خط AA' ، عمودهای OB' و OC' را به

ترتیب بر اضلاع AC و AB رسم کرده‌ایم. اگر $OB' + OC' = 3OA'$ ، آنگاه طول پاره‌خط OA چند واحد است؟ (آزمون کانون - ۸۵)



- (۱) ۶
(۲) ۵
(۳) $\frac{۴}{۵}$
(۴) $\frac{۶}{۲۵}$

۴۵- نقطه‌ی دلخواه O را درون شش‌ضلعی منتظمی به طول ضلع واحد در نظر بگیرید. مجموع فواصل نقطه‌ی O از اضلاع شش‌ضلعی چند واحد است؟

(آزمون کانون - ۸۷)

- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) $۳\sqrt{3}$
(۳) ۳
(۴) ۶

شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی مستطیل

زیرموضوع (۴)

۴۶- چهارضلعی حاصل از تقاطع نیمسازهای زوایای داخلی هر مستطیل کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۷۵)

- (۱) لوزی
(۲) مربع
(۳) مستطیل
(۴) متوازی‌الاضلاع

۴۷- نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل مربعی می‌سازند که یک رأس آن روی محیط مستطیل است، آنگاه نسبت اضلاع مستطیل چه قدر است؟

(آزاد ریاضی - ۸۲)

- (۱) $\frac{۴}{۳}$
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) $۲\sqrt{2}$
(۴) ۲

۴۸- طول یک مستطیل دو برابر عرض آن است. نیمساز زاویه‌های مستطیل را رسم کرده‌ایم. محیط مستطیل چند برابر محیط مربع ایجاد شده در درون آن

(سراسری خارج کشور ریاضی - ۸۴)

- (۱) $\frac{۳\sqrt{2}}{۲}$
(۲) $\frac{۲\sqrt{3}}{۳}$
(۳) $\frac{۴\sqrt{2}}{۳}$
(۴) $\frac{۴\sqrt{3}}{۳}$

۴۹- در مستطیلی به ابعاد ۱۵ و ۸ واحد، از تقاطع نیمسازهای داخلی آن یک چهارضلعی حاصل می‌شود، مساحت این چهارضلعی چند واحد مربع است؟

(سراسری ریاضی - ۸۷)

- (۱) ۱۶
(۲) $\frac{۲۴}{۵}$
(۳) ۲۸
(۴) $\frac{۳۲}{۵}$

۵۰- در مستطیلی به اندازه‌ی اضلاع ۴ و ۹ واحد، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، رأس‌های یک چهارضلعی هستند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

(سراسری خارج کشور ریاضی - ۹۰)

- (۱) $12/5$ (۲) $13/5$
(۳) 14 (۴) 15

۵۱- در یک مستطیل اندازه‌ی اضلاع ۵ و ۱۱ واحد است. مساحت چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این مستطیل، کدام است؟

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۳)

- (۱) 12 (۲) 15
(۳) 16 (۴) 18

۵۲- در مستطیلی به اضلاع ۴ و ۱، از تقاطع نیمسازهای زوایای داخل مستطیل، چهارضلعی ABCD و از وصل کردن اوساط اضلاع مستطیل، چهارضلعی

(آزاد ریاضی - ۸۹)

MNOP حاصل می‌شود. مساحت ABCD چند برابر MNOP است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) $\frac{9}{8}$
(۳) $\frac{9}{4}$ (۴) 9

شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی متوازی‌الاضلاع

زیرموضوع (۵)

۵۳- نیمسازهای داخلی زوایای متوازی‌الاضلاع همواره از تقاطع با یک‌دیگر، کدام‌یک از اشکال زیر را می‌سازند؟

(آزاد ریاضی - ۶۳)

- (۱) مربع (۲) لوزی
(۳) مستطیل (۴) دوزنقه

۵۴- از برخورد نیمسازهای داخلی کدام نوع چهارضلعی یک مستطیل ایجاد می‌شود؟

(سراسری ریاضی - ۸۰)

- (۱) محیطی (۲) متوازی‌الاضلاع
(۳) دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین (۴) محاطی

۵۵- در یک متوازی‌الاضلاع، طول اضلاع ۵ و ۹ واحد و یک زاویه 60° درجه است. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این متوازی‌الاضلاع

(سراسری خارج کشور ریاضی - ۸۸)

کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{3}$
(۳) $5\sqrt{2}$ (۴) $6\sqrt{2}$

۵۶- در یک متوازی‌الاضلاع با زاویه‌ی 60° درجه و اندازه‌ی اضلاع a و $2a$ ، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، رأس‌های یک چهارضلعی است. مساحت این

(سراسری ریاضی - ۹۰)

چهارضلعی حاصل چند برابر $a^2\sqrt{3}$ است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۷- در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، یکی از زاویه‌ها 60° درجه و اندازه‌ی قاعده‌ها ۶ و ۱۰ واحد است. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی

(سراسری ریاضی - ۹۳)

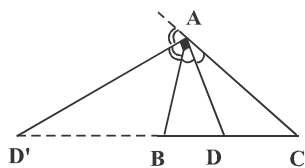
این دوزنقه، چند برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است؟

- (۱) 8 (۲) 10
(۳) 14 (۴) 16

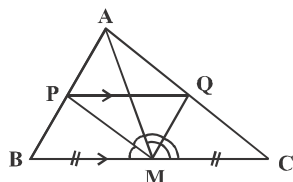
قضیه‌ی نیمسازها

استدلال در هندسه

اگر در شکل زیر، AD و AD' به ترتیب نیمساز داخلی و نیمساز خارجی زاویه‌ی A در مثلث ABC باشند، داریم:



$$\frac{BD}{CD} = \frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \\ \frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{ac}{b+c}, CD = \frac{ab}{b+c} \\ BD' = \frac{ac}{|b-c|}, CD' = \frac{ab}{|b-c|} \end{cases}$$



نکته: در مثلث ABC ، میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم. اگر این دو نیمساز، اضلاع AB و AC را در نقاط P و Q قطع کنند، آن‌گاه PQ و BC با هم موازیند.

قضیه نیمساز داخلی

زیرموضوع (۱)

۵۸- اضلاع مثلثی با اعداد ۲، ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز داخلی زاویه‌ی متوسط آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

(سراسری خارج کشور ریاضی - ۸۵)

$$\begin{array}{ll} (۱) & \frac{۲}{۹} \\ (۲) & \frac{۱}{۴} \\ (۳) & \frac{۱}{۳} \\ (۴) & \frac{۲}{۵} \end{array}$$

۵۹- در مثلثی به اضلاع ۱۲، ۸ و ۷، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از وسط ضلع بزرگ‌تر چه قدر است؟

(سراسری خارج کشور ریاضی - ۸۶)

$$\begin{array}{ll} (۱) & ۰/۳ \\ (۲) & ۰/۴ \\ (۳) & ۰/۵ \\ (۴) & ۰/۶ \end{array}$$

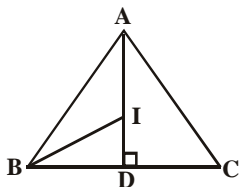
۶۰- در مثلث ABC : ($\hat{A} = 90^\circ, AB = 3, AC = 4$) ارتفاع AH و نیمساز داخلی AD رسم شده است. اندازه‌ی DH کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۰)

$$\begin{array}{ll} (۱) & \frac{۱۲}{۳۵} \\ (۲) & \frac{۵}{۱۴} \\ (۳) & \frac{۷}{۱۵} \\ (۴) & \frac{۱۵}{۲۸} \end{array}$$

۶۱- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC = 5, BC = 6$) نیمساز داخلی زاویه‌ی B ، ارتفاع AD را در نقطه‌ی I قطع کرده است، اندازه‌ی پاره‌خط IA ، چه قدر است؟

(آزمون کانون - ۸۴)



$$\begin{array}{ll} (۱) & ۲/۲ \\ (۲) & ۲/۳ \\ (۳) & ۲/۴ \\ (۴) & ۲/۵ \end{array}$$

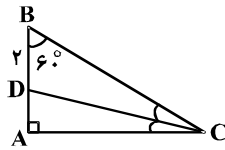
۶۲- در مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کنند. اندازه‌ی MN چه قدر است؟

(سراسری خارج کشور ریاضی - ۸۷)

$$\begin{array}{ll} (۱) & \frac{۲}{۳} \\ (۲) & \frac{۵}{۷} \\ (۳) & \frac{۵}{۶} \\ (۴) & \frac{۵}{۳} \end{array}$$

۶۳- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $\hat{B} = 60^\circ$ است. اگر CD نیمساز داخلی \hat{C} و $BD = 2$ ، آنگاه اندازه‌ی AD کدام است؟

(آزمون کانون - ۸۶)



- (۱) $\sqrt{3}$
- (۲) ۲
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) $\sqrt{2}$

۶۴- در مثلث ABC ، میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم. تا دو ضلع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کنند. نسبت

(سراسری ریاضی - ۸۹)

$\frac{DE}{BC}$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{AD}{AB}$
- (۲) $\frac{ME}{MC}$
- (۳) $\frac{ME}{CE}$
- (۴) $\frac{AM}{BC}$

۶۵- در مثلث ABC ، ضلع $AC = 6$ و میانه $BM = 5$ ، نیمسازهای دو زاویه AMB و CMB دو ضلع دیگر این مثلث را در P و Q قطع می‌کند.

(سراسری ریاضی - ۹۳)

اندازه‌ی PQ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{25}$
- (۲) $\frac{3}{5}$
- (۳) $\frac{3}{75}$
- (۴) ۴

قضیه نیمساز خارجی

زیرموضوع (۲)

۶۶- در مثلثی به اضلاع ۶، ۵ و ۳ واحد، نیمساز کوچک‌ترین زاویه خارجی آن، بزرگ‌ترین ضلع مثلث را قطع می‌کند. مساحت مثلثی که در خارج مثلث اصلی

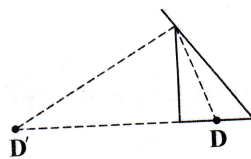
(سراسری ریاضی - ۹۱)

تشکیل می‌شود، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) $\frac{9}{4}$

۶۷- در مثلثی به اضلاع ۸، ۶ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچک‌ترین زاویه‌ی آن ضلع مقابل را در D و D' قطع می‌کنند. اندازه‌ی DD' چه قدر است؟

(سراسری خارج کشور ریاضی - ۹۰)



- (۱) $\frac{195}{14}$
- (۲) $\frac{102}{7}$
- (۳) $\frac{120}{7}$
- (۴) $\frac{124}{7}$

۶۸- در مثلث ABC داریم $AB = 3AC$ و $BC = 12$ ، نقاط D و D' پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A است. مقدار $AD'^2 + AD^2$ ، کدام

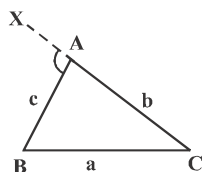
(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۳)

است؟

- (۱) ۶۴
- (۲) ۷۲
- (۳) ۸۱
- (۴) ۱۰۰

۱ در هر مثلث دلخواه مانند ABC داریم:

الف) هر زاویه‌ی خارجی از زاویه‌ی داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است.



$$\widehat{BAX} = \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{BAX} > \widehat{B} \\ \widehat{BAX} > \widehat{C} \end{cases}$$

ب) زاویه‌ی روبروی ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبروی ضلع کوچک‌تر و برعکس، یعنی $a > b > c \Leftrightarrow A > B > C$.

ج) نامساوی مثلث: مجموع طول هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بیش‌تر است یعنی اگر a ، b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، آنگاه $a < b + c$ ، $b < c + a$ و $c < a + b$ و برعکس یعنی اگر سه عدد حقیقی و مثبت a ، b و c به گونه‌ای باشند که مجموع هر دو تای آن‌ها از سومی بیش‌تر باشد، آنگاه مثلثی به طول اضلاع a ، b و c وجود دارد.

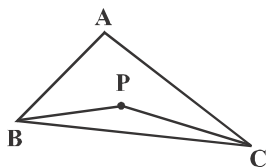
نکته: اگر بزرگ‌ترین ضلع مثلث از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که دو نامساوی دیگر مثلث حتماً برقرار هستند.

د) می‌توان سه نامساوی قسمت «ج» را با هم تلفیق و در قالب قضیه‌ی زیر بیان کرد:

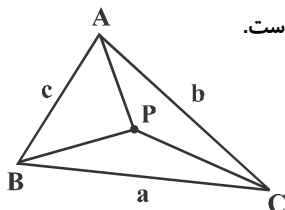
اگر a ، b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، آنگاه $|b - c| < a < b + c$. به بیان دیگر: «در هر مثلث، طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کم‌تر و از قدر مطلق تفاضل دو ضلع دیگر بیش‌تر است».

ه) اگر از نقطه‌ی دلخواه P درون مثلث به دو رأس B و C وصل کنیم، آنگاه:

$$BC < PB + PC < AB + AC$$



نتیجه: مجموع فواصل هر نقطه‌ی دلخواه داخل هر مثلث از محیط آن مثلث کم‌تر و از نصف محیط آن بیش‌تر است.

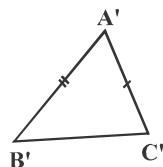
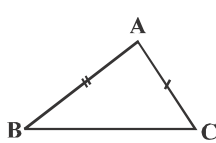


$$\frac{a+b+c}{2} < PA + PB + PC < a+b+c$$

۲ قضیه‌ی لولا (قیچی) و عکس آن

الف) اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند و زاویه‌ی بین این دو ضلع در مثلث اول بزرگ‌تر از زاویه‌ی بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشند، آنگاه ضلع سوم از مثلث اول، بزرگ‌تر از ضلع سوم از مثلث دوم است.

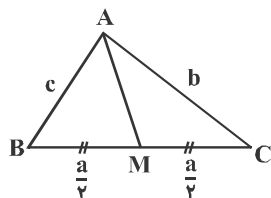
ب) عکس قضیه‌ی لولا نیز درست است، یعنی دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند و ضلع سوم مثلث اول بزرگ‌تر از ضلع سوم مثلث دوم باشد، آنگاه زاویه‌ی بین دو ضلع از مثلث اول، بزرگ‌تر از زاویه‌ی بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم است.



$$\widehat{A} > \widehat{A'} \Leftrightarrow BC > B'C'$$

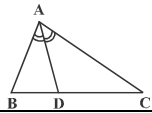
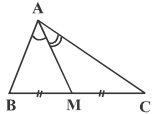
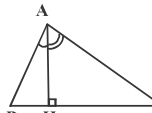
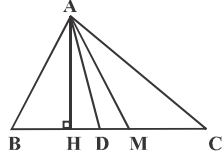
۳ نامساوی‌های مربوط به اجزای فرعی مثلث

الف) طول میانه‌ی وارد بر هر ضلع، از نصف مجموع دو ضلع دیگر بزرگ‌تر و از نصف قدر مطلق تفاضل آن دو ضلع بیش‌تر است.



$$\frac{|b-c|}{2} < AM < \frac{b+c}{2}$$

ب) فرض کنید در مثلث ABC نیمساز، میانه و ارتفاع وارد بر ضلع a را به ترتیب با نماد d_a ، m_a و h_a نشان دهیم؛ اگر در این مثلث $a > b > c$ ، آنگاه $d_a < d_b < d_c$ ، $m_a < m_b < m_c$ و $h_a < h_b < h_c$ ، یعنی کوچک‌ترین جزء فرعی آن است که بر بزرگ‌ترین ضلع وارد می‌شود.

$AC > AB \Leftrightarrow CD > BD$		نیمساز	(ج) فرض کنید که در مثلث ABC که $AC > AB$ اجزای فرعی متناظر رأس A را رسم کرده‌ایم. جدول مقابل را می‌توان در نظر گرفت:
$AC > AB \Leftrightarrow \widehat{BAM} > \widehat{CAM}$ $AC > AB \Leftrightarrow \widehat{AMC} > \widehat{AMB}$		میانه	(د) در مثلث ABC که $AB \neq AC$ اگر میانه، نیمساز و ارتفاع وارد بر هر ضلع BC را رسم کنیم، طول ارتفاع کم‌تر از طول نیمساز و طول نیمساز کم‌تر از طول میانه است، یعنی در شکل زیر $AH < AD < AM$.
$AC > AB \Leftrightarrow CH > BH$ $AC > AB \Leftrightarrow \widehat{CAH} > \widehat{BAH}$		ارتفاع	

۴ چند نامساوی مهم دیگر: از هندسه‌ی «۱» می‌دانیم که در مثلث ABC اگر $\widehat{A} = 90^\circ$ ، آن‌گاه $a^2 = b^2 + c^2$ و $m_a = \frac{a}{2}$. در حالت کلی، جدول زیر را داریم:

$\widehat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$	$\widehat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow m_a > \frac{a}{2}$	حاده \widehat{A}
$\widehat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$	$\widehat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow m_a = \frac{a}{2}$	قائمه \widehat{A}
$\widehat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$	$\widehat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow m_a < \frac{a}{2}$	منفرجه \widehat{A}

نامساوی‌های پایه

زیرموضوع (۱)

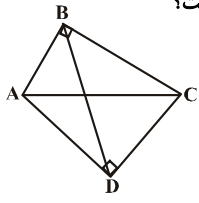
- ۶۹- در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند، کدام نامساوی همواره صحیح است؟ (سراسری ریاضی - ۸۰)
- (۱) $BA > BD$ (۲) $DA > DB$ (۳) $AB > AD$ (۴) $DB > DA$

نامساوی مثلثی و قضیه‌ی وجود مثلث

زیرموضوع (۲)

- ۷۰- با کدام سه طول داده شده می‌توان مثلث ساخت؟ (آزاد ریاضی - ۷۳)
- (۱) $a, b, a+b+1$ (۲) $a+1, b+1, a+b$
 (۳) $a^2, (a+1)^2, 2a^2+3a+1$ (۴) $2a, 2a, 3a$
- ۷۱- فرض کنیم $0 < a < b < c$ باشد، برای آن‌که a و b و c اضلاع مثلثی باشند، لازم و کافی است داشته باشیم: (سراسری ریاضی - ۴۹)
- (۱) $c < a+b$ (۲) $a < b+c$ (۳) $b < a+c$ (۴) $c^2 < a^2 + b^2$
- ۷۲- کدام دسته از اعداد زیر می‌تواند سه ضلع یک مثلث باشد؟ (آزاد ریاضی - ۷۵)
- (۱) ۳ و ۵ و ۷ (۲) ۲ و ۳ و ۶ (۳) ۱ و ۲ و ۳ (۴) ۱ و ۳ و ۴
- ۷۳- اگر a، b و c طول اضلاع یک مثلث باشند، کدام گزینه لزوماً درست نیست؟ (آزاد - ۷۷)
- (۱) $2a, 2b, 2c$ طول سه ضلع مثلثی هستند. (۲) a^2, ab, ac طول سه ضلع مثلثی هستند.
 (۳) $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ طول سه ضلع مثلثی هستند. (۴) $a+2, b+4, c+7$ طول سه ضلع مثلثی هستند.
- ۷۴- سه پاره‌خط به طول‌های $4-x$ و $x+7$ و $6x$ اضلاع مثلثی هستند، مقادیر x به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی - ۸۲)
- (۱) $\frac{11}{9} < x < 3$ (۲) $\frac{5}{3} < x < 3$ (۳) $2 < x < 3$ (۴) $\frac{11}{9} < x < 4$

- ۷۵- در چهار ضلعی ABCD، $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$ و $AB < CD$ است. کدام یک از نامساوی‌های زیر همواره درست است؟ (آزمون کانون - ۸۵)



- (۱) $BC < AD$ (۲) $BD < AC$
 (۳) $AB < AD$ (۴) $CD < BC$