

## درک شهودی، قیاس و استدلال استقرایی

- ۱- درک شهودی، یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال است.
- ۲- قیاس (تمثیل)، یافتن نوعی تشابه بین مفاهیم گوناگون می‌باشد. در واقع انواع تمثیل می‌توانند در ایجاد یک زمینه‌ی شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی به کار روند.
- ۳- استدلال استقرایی، روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات است.
- ۴- با توجه به تعریف، مشخص است که استدلال استقرایی نوعی محدودیت دارد. چون بر پایه‌ی تعداد محدودی مشاهدات، نتیجه‌گیری می‌شود.
- مثال:** گزاره‌های مقابل را در نظر بگیرید: الف)  $۱+۳=۴$  ب)  $۱+۳+۵=۹$  ج)  $۱+۳+۵+۷=۱۶$
- با توجه به مشاهدات بالا می‌توان بر پایه‌ی استدلال استقرایی نتیجه‌گرفت که مجموع اعداد فرد متوالی، مربع کامل است.

## الگوی ۱

- ۱- برای درک این حقیقت که «حاصلضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی مثبت است» فرض می‌کنیم که خروج آب از یک مخزن عملی منفی بوده و از این صحنه فیلمبرداری کرده و هنگام نمایش این عمل فیلم را به عقب برمی‌گردانیم که باز هم عملی منفی بوده است و بازگشت آب به مخزن عملی مثبت تلقی می‌شود، کدام استدلال در این جا بکار رفته است؟
- (۱) شهودی (۲) تمثیلی (۳) استنتاجی (۴) اثبات بازگشتی  
(مثال کتاب درسی صفحه ۵)
- ۲- ضرب المثل «مار گزیده، از ریسمان سیاه و سفید می‌ترسد» اشاره دارد به:
- (۱) استدلال قیاسی (۲) استدلال استقرایی (۳) استدلال استنتاجی (۴) درک شهودی  
(آزمون کانون - ۸۶)
- ۳- از حرارت دادن میله‌های فلزی مختلف در آزمایشگاه، نتیجه گرفته شده است که میله‌های فلزی در اثر حرارت طولشان زیاد می‌شود. نوع استدلال برای این نتیجه‌گیری کدام است؟
- (۱) استنتاجی (۲) استقرایی (۳) تمثیلی (۴) درک شهودی  
(سراسری انسانی - ۷۵)
- ۴- کدام یک از احکام زیر با روش استدلال شهودی قابل درک است؟
- (۱) مجموع زوایای داخلی هر  $n$  ضلعی محدب برابر است با:  $(n-2) \times 180^\circ$   
(۲) طول هر ضلع مثلث از مجموع طول دو ضلع دیگر کوچکتر است.  
(۳) اگر دو قطر یک چهارضلعی یکدیگر را نصف کنند، آن‌گاه چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.  
(۴) در هر مثلث ارتفاع‌ها، همرسند.

## الگوی ۲

- ۵- استدلال استقرایی یعنی ..... ؟
- (۱) روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات.  
(۲) روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم.  
(۳) استدلالی است که از حکم کلی، حکم جزئی را نتیجه می‌گیریم.  
(۴) هیچکدام.
- ۶- روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات، کدام نوع استدلال است؟
- (۱) قیاسی (۲) شهودی (۳) استنتاجی (۴) استقرایی  
(سراسری ریاضی - ۸۸)
- ۷- ضرب المثل «مشت نمونه خروار است» از لحاظ استدلال با کدام یک از ضرب‌المثل‌های زیر مشابه است؟
- (۱) سالی که نکوست از بهارش پیداست.  
(۲) قطره قطره جمع گردد، وانگهی دریا شود.  
(۳) با یک گل بهار نمی‌شود.  
(۴) شاهنامه آخرش خوش است.
- (آزمون کانون - ۹۱)

## اصل استقرای ریاضی و اصل استقرای تعمیم یافته

اصل استقرا: فرض کنید  $P(n)$  حکمی درباره‌ی عدد طبیعی  $n$  باشد، اگر  $P(1)$  درست باشد و از درستی  $P(k)$ ، درستی  $P(k+1)$  نتیجه شود، در این صورت  $P(n)$  برای هر عدد طبیعی نیز درست است.

**مثال:** به کمک اصل استقرای ریاضی، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$  رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(1): n=1 \Rightarrow \frac{1(1+1)}{2} = 1 \text{ درست}$$

$$P(k): n=k \Rightarrow 1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \text{ فرض استقرا}$$

$$P(k+1): n=k+1 \Rightarrow 1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \text{ حکم استقرا}$$

اگر به طرفین فرض استقرا،  $(k+1)$  اضافه کنیم داریم:

$$1+2+\dots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = (k+1) \times \frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

بدین ترتیب حکم استقرا ثابت شد.

**مثال:** اگر  $a \geq -1$  عددی حقیقی و  $n \in \mathbb{N}$ ، آن گاه  $(1+a)^n \geq 1+na$ .

$$P(1): n=1 \Rightarrow 1+a \geq 1+a \text{ درست}$$

$$P(k): n=k \Rightarrow (1+a)^k \geq 1+ka \text{ فرض استقرا}$$

$$P(k+1): n=k+1 \Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a \text{ حکم استقرا}$$

کافی است طرفین فرض استقرا را در  $(1+a)$  که با توجه به  $a \geq -1$  عددی مثبت است و جهت نامساوی را تغییر نمی‌دهد، ضرب کنیم. داریم:

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} (1+a)(1+ka) &= 1 + \underbrace{ka+a}_{(k+1)a} + ka^2 \\ k \in \mathbb{N} &\Rightarrow ka^2 \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (1+a)(1+ka) \geq 1+(k+1)a \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$$

حکم استقرا ثابت شد.

اصل استقرای تعمیم‌یافته: فرض کنید  $P(n)$  حکمی درباره‌ی عدد طبیعی  $n$  باشد. اگر  $P(m)$  برای  $m > 1$  درست باشد و از درستی  $P(k)$  برای هر عدد طبیعی  $k \geq m$  درستی  $P(k+1)$  نتیجه شود، آن گاه  $P(n)$  برای هر عدد طبیعی  $n \geq m$  درست است ( $m$  را شروع استقرا می‌گویند).

## الگوی ۳

۸- اگر مجموع مکعب‌های اعداد طبیعی متوالی شروع از ۱، برابر با مربع مجموع آن اعداد باشد، حاصل  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$  کدام است؟

(۱) ۱۱۴۱۰۰ (۲) ۱۱۴۲۰۰ (۳) ۱۱۴۳۰۰ (۴) ۱۱۴۴۰۰ (سراسری - ۹۱)

۹- حاصل  $(1-\frac{1}{2}) \times (1-\frac{1}{3}) \times \dots \times (1-\frac{1}{n})$  کدام است؟

(آزمون کانون - ۸۹)

(۱)  $\frac{(n+1)!}{n!}$  (۲)  $1-\frac{1}{n}$  (۳)  $\frac{1}{n}$  (۴)  $\frac{n!}{(n+1)!}$

۱۰- حاصل  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$  کدام است؟

(سراسری - ۷۴)

(۱)  $\frac{n}{n+1}$  (۲)  $\frac{1}{n(n+1)}$  (۳)  $\frac{1}{n}$  (۴)  $\frac{1}{n^2+1}$

(آزاد ریاضی - ۷۷)

۱۱- حاصل عبارت  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$  کدام است؟ ( $n \in \mathbb{N}$ )

(۱)  $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$  (۲)  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  (۳)  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$  (۴)  $n^3 - n$

(آزمون کانون - ۷۹)

۱۲- کدام گزینه به ازای  $n$  های طبیعی، همواره صحیح است؟

(۱)  $n! \leq 2^n$  (۲)  $n! \leq 3^n$  (۳)  $n! \leq (\frac{n}{2} + \frac{1}{n})^n$  (۴)  $n! \leq (\frac{n}{2} - \frac{3}{2})^n$

الگوی ۴

۱۳- در اثبات نامساوی  $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}$  ( $n \geq 3$ ) با کمک استقرای تعمیم یافته از کدام نامساوی بدیهی استفاده شده است؟

(سراسری قارج از کشور ریاضی - ۹۱)

(۱)  $2^k > k$  (۲)  $2^{k+1} > 2$  (۳)  $2^{k+1} > 3$  (۴)  $2^k > k^2 - 1$

(تمرین کتاب درسی صفحه ۱۵)

۱۴- حکم « $2^n < n!$ » برای هر عدد طبیعی  $n$  ( $n \geq m$ ) صحیح است. کوچک ترین مقدار طبیعی  $m$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(سراسری ریاضی - ۸۱)

۱۵- در اصل استقرای تعمیم یافته برای حکم « $4^n < (n+1)! : n \geq m$ »، عدد طبیعی مناسب  $m$  کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۶- برای اثبات حکم « $3^n < (n+1)!$ » به ازای  $n \geq m$  با استفاده از استقرای تعمیم یافته، کوچک ترین عدد طبیعی مناسب  $m$  کدام است؟

(مسئله امتحان نهایی - ۸۶)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

(سنجش - ۸۰)

۱۷- برای اثبات نامعادلهی « $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}$ » با استفاده از استقرای تعمیم یافته به ازای اعداد طبیعی  $n \geq m$ ، کمترین مقدار طبیعی  $m$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۸- اصل استقرای ریاضی در مورد حکم « $\frac{5n}{12} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < P(n) : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{5n}{12}$ » برای اعداد طبیعی  $n \geq m$  برقرار است. کوچک ترین مقدار طبیعی  $m$  کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۷۸)

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

الگوی ۵

۱۹- در اثبات نامساوی  $2^{n+1} > n!$ ، به روش اصل استقرای تعمیم یافته، عدد  $m$  مناسب، و رابطه‌ی بدیهی در گام بعدی حکم، برای  $k \geq m$  کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۴)

(۱)  $m = 5$  و  $k+1 > 2$  (۲)  $m = 6$  و  $k+1 > 2$  (۳)  $m = 5$  و  $(2k+1) > 4$  (۴)  $m = 6$  و  $(2k+1) > 4$

(سراسری قارج از کشور ریاضی - ۹۲)

۲۰- در اثبات حکم  $(\sqrt{6})^n > n!$ ، با اصل استقرای تعمیم یافته، از کدام نامساوی بدیهی استفاده می‌شود؟

(۱)  $k \geq 5$  و  $(k+1) > \sqrt{6}$  (۲)  $k \geq 3$  و  $(k+1) > \sqrt{6}$  (۳)  $k \geq 3$  و  $k^2 > 6$  (۴)  $k \geq 5$  و  $k^2 > 6$

(سراسری قارج از کشور ریاضی - ۸۶)

۲۱- در اثبات  $2^n > n^2 ; n \geq 5$  با روش استقراء ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کار می‌رود؟

(۱)  $k^2 > k$  (۲)  $2k - 1 > 5$  (۳)  $(k-1)^2 > 2$  (۴)  $(k+1)^2 > 2$

۲۲- در اثبات نامساوی  $n \geq 1 ; n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$ ؛ با کمک استقرای ریاضی، کدام رابطه‌ی بدیهی به کار می‌رود؟

(سراسری ریاضی - ۹۰)

(۱)  $k+1 < 2k$  (۲)  $k+1 < 2k+3$

(۳)  $4(k^2 + 3k + 2) < (2k+3)^2$  (۴)  $4k^2 + 12k + 9 = (2k+3)^2$

۲۳- در اثبات نامساوی  $2 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$ ، با روش استقرای ریاضی، کدام نامساوی بدیهی به کار می‌رود؟

(سراسری قارج از کشور ریاضی - ۹۰)

(۱)  $K+2 > K+1$  (۲)  $2K-1 > K+1$  (۳)  $K^2 + K > K^2 - 1$  (۴)  $K^2 + K + 1 > K^2 + K$

## استدلال ریاضی

## استدلال استنتاجی، قضایای شرطی و دو شرطی و برهان خلف

۱- استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایق است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

۲- با استفاده از استدلال استنتاجی، مطمئن هستیم که نتیجه همواره درست است.

۳- قضایای کلی، احکامی هستند که همواره برقرار می‌باشند.

**مثال:** همه‌ی انسان‌ها، روزی می‌میرند. علی یک انسان است در نتیجه علی، روزی می‌میرد.

۴- برای اثبات قضایای ریاضی، از استدلال استنتاجی استفاده می‌شود.

**مثال:** برای اثبات حکم «در هر مثلث، اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی یک رأس برابر مجموع اندازه‌های دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور آن است» از استدلال استنتاجی استفاده می‌شود.

۵- مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است، **مثال نقض** نامیده می‌شود.

۶- با ارائه‌ی مثال‌های فراوان نمی‌توان درستی یک نتیجه‌گیری کلی را اثبات کرد، اما با ارائه‌ی تنها یک مثال، می‌توان آن را رد کرد. به این مثال، **مثال نقض** گوئیم.

**مثال:** «همه‌ی اعداد اول، فرد هستند» مثال نقض: ۲ عددی اول و زوج است.

۷- به عبارت «اگر  $p$  آن‌گاه  $q$ » یک قضیه‌ی شرطی گفته می‌شود، گزاره‌ی  $p$  را **فرض قضیه** و گزاره‌ی  $q$  را، **حکم قضیه** می‌نامیم و آن را به صورت  $(p \Rightarrow q)$  نمایش می‌دهیم.

**مثال:** «اگر  $|x| < 2$  آن‌گاه  $-2 < x < 2$ » یک گزاره‌ی شرطی است.

« $|x| < 2$ » فرض قضیه و « $-2 < x < 2$ » حکم قضیه هستند.

۸- عکس قضیه‌ی شرطی، همواره برقرار نیست.

**مثال:** اگر « $x < y$ » آن‌گاه « $x^2 < y^2$ » یک قضیه‌ی شرطی است.

اما برعکس آن برقرار نیست. زیرا برای آن مثال نقض وجود دارد.  $x = -3, y = 4 \Rightarrow x^2 < y^2, x < y$

یعنی اگر « $x^2 < y^2$ » آن‌گاه نمی‌توان همواره رابطه‌ی « $x < y$ » را نتیجه گرفت.

۹- عکس نقیض یک قضیه‌ی شرطی، معادل با آن قضیه است، یعنی: «اگر  $p$  آن‌گاه  $q$ » معادل «اگر  $q$  آن‌گاه  $\sim p$ » می‌باشد.

$\sim p$  را **نقیض گزاره‌ی  $p$**  می‌نامیم.

۱۰- قضیه‌ی دو شرطی به قضیه‌ای گفته می‌شود که عکس آن نیز یک قضیه‌ی درست باشد.

**مثال:** «اگر یکی از زوایای مثلثی  $90^\circ$  باشد، بین اضلاع آن رابطه‌ی  $a^2 = b^2 + c^2$  برقرار است» یک قضیه‌ی دو شرطی می‌باشد زیرا عکس آن

نیز برقرار است. یعنی اگر در مثلثی با اضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$ ، رابطه‌ی  $a^2 = b^2 + c^2$  برقرار باشد، زاویه‌ی روبرو به ضلع  $a$ ،  $90^\circ$  می‌باشد.

۱۱- اگر برای اثبات یک حکم، از درستی حکم به یک رابطه‌ی بدیهی یا فرض قضیه برسیم، اثبات بازگشتی انجام شده است.

۱۲- اثبات بازگشتی شیوه‌ی مناسبی برای اثبات نیست. مگر آنکه تمامی مراحل انجام شده، بازگشت پذیر باشند.

۱۳- برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم مراحل زیر را دارد.

الف) فرض می‌کنیم حکم قضیه نادرست است.

ب) نشان می‌دهیم که این فرض غلط نتیجه‌ای دارد که با اصول یا فرض قضیه، متناقض است.

ج) با توجه به تناقض ایجاد شده، فرضی که نادرست در نظر گرفته بودیم، درست خواهد بود و حکم اثبات می‌شود.

**مثال:** نشان دهید  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  گنگ است.

برهان خلف: فرض می‌کنیم حکم غلط است یعنی  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  عددی گویا است.

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} = x, x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{5-x^2}{2} \Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = x^2 \Rightarrow 2+3-2\sqrt{6} = x^2$$

چون  $x \in \mathbb{Q}$  بنابراین  $\frac{5-x^2}{2} \in \mathbb{Q}$  در نتیجه  $\sqrt{6}$  نیز گویا است، که این تناقض است، یعنی حکمی که غلط در نظر گرفته بودیم، درست بوده است. بنابراین  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  عددی گنگ است.

### الگوی ۶

۲۴- برای اثبات یک حکم ریاضی، کدام روش معتبرتر است؟

(۱) استدلال قیاسی (۲) استدلال استنتاجی (۳) استدلال استقرایی (۴) درک شهودی

۲۵- برای اثبات حکم «در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، میانه و نیم‌ساز وارد بر قاعده، بر هم منطبق‌اند» از چه روشی استفاده می‌شود؟

(۱) استدلال قیاسی (۲) استدلال استقرایی (۳) استدلال استنتاجی (۴) درک شهودی (آزمون کانون - ۸۹)

### الگوی ۷

۲۶- کدام عدد کلیت حکم «هرچه باشد  $n$ ، عدد طبیعی زوج،  $2^n + 1$  عددی اول است» را نقض می‌کند؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸ (سراسری انسانی - ۷۷)

۲۷- کدام گزینه‌ی زیر مثال نقض دارد؟

(۱) هر مربع یک لوزی است. (۲) هر عدد اول و بزرگ‌تر از ۲ فرد است.

(۳) هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین است. (۴) توان سوم هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از توان دوم آن است.

۲۸- برای کدام گزینه مثال نقض وجود ندارد؟

(۱) مجموع دو عدد گنگ عددی گنگ است.

(۲) دو زاویه که اضلاع متناظرشان موازی است، با هم برابرند.

(۳) مربع هر عدد مثبت، بزرگ‌تر از خود عدد است.

(۴) در متوازی‌الاضلاع دو زاویه‌ی مجاور مکملند.

۲۹- کدام عبارت مثال نقض دارد؟

(۱) حاصل ضرب هر دو عدد فرد متوالی، عددی فرد است.

(۲) حاصل تفاضل هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

(۳) حاصل جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

(۴) حاصل جمع هر عدد اول با یک عدد فرد، عددی فرد است.

۳۰- اعداد کدام گزینه حکم «حاصل ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟

(۱)  $\sqrt{6}$  و  $\sqrt{216}$  (۲)  $\sqrt{6}$  و  $\sqrt{12}$  (۳)  $\sqrt{18}$  و  $\sqrt{216}$  (۴)  $\sqrt{12}$  و  $\sqrt{18}$  (سراسری انسانی - ۷۶)

۳۱- کلیت حکم «حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است» با چه عدد گویایی، نقض می‌شود؟

(۱) صفر (۲) اعشاری (۳) منفی (۴) اعشاری متناوب مرکب (آزاد ریاضی - ۸۱)

۳۲- کدام عدد حکمیت «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟ (سراسری قارج از کشور ریاضی - ۸۸)

(۱) ۴۰ (۲) ۴۶ (۳) ۵۶ (۴) ۶۴

۳۳- کدام یک از احکام زیر نادرست است؟

(۱) اگر  $n$  عددی صحیح و  $n^3$  فرد باشد، آن‌گاه  $n$  نیز عددی فرد است.

(۲) اگر  $n^2$  عددی صحیح باشد، آن‌گاه  $n$  نیز عددی صحیح است.

(۳) اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، آن‌گاه همواره  $n^2 \geq n$ .

(۴) اگر  $n$  عددی صحیح و  $n^2$  زوج باشد، آن‌گاه  $n$  نیز عددی زوج است.

(آزمون کانون - ۸۱)

(آزمون کانون - ۹۰)

۳۴- کدام یک از احکام زیر همواره درست است؟

(۱) حاصل ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۲) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

(۳) حاصل ضرب یک عدد گنگ در یک عدد گویا، عددی گنگ است.

(۴) مجموع یک عدد گنگ با یک گویا، عددی گنگ است.

(آزمون کانون - ۹۰)

۳۵- کدام یک از قضایای شرطی زیر نادرست می‌باشند؟

(۱) اگر  $x^2 - 3x + 2 = 0$  آن گاه  $x = 1$  ,  $x = 2$ (۲) اگر  $x$  و  $y$  دو عدد طبیعی باشند، آن گاه  $\sqrt{xy} > \frac{x+y}{2}$ (۳) اگر  $x > 0$  آن گاه  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (۴) اگر  $x \in \mathbb{R}$  آن گاه عبارت  $x^2 - x + 3$  همواره مثبت است.

## الگوی ۸

(سراسری ریاضی - ۷۸)

۳۶- کدام قضیه به صورت قضیه‌ی دو شرطی بیان نمی‌شود؟

(۱) در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانه یک ضلع برهم منطبق هستند.

(۲) در مثلث قائم الزاویه عمود منصف اضلاع، بر روی وتر، متقاطع هستند.

(۳) در مثلث قائم الزاویه یکی از میانه‌ها نصف وتر است.

(۴) در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه‌ی  $90^\circ$ ، بزرگ‌ترین ضلع است.

(سنجش - ۷۹)

۳۷- کدام یک قضیه‌ی دو شرطی است؟ ( $x, y \in \mathbb{R}$ )(۱)  $\frac{x}{y} \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$  (۲)  $\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow xy > 0$  (۳)  $x^2 < y^2 \Rightarrow x < y$  (۴)  $x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ 

(سراسری تئوری - ۷۳)

۳۸- گزاره‌ی «اگر  $x > 2$  باشد، آن گاه  $x^2 > 4$  است» معادل کدام گزاره است؟(۱) اگر  $x^2 < 4$  آن گاه  $x < 2$ (۲) اگر  $x^2 \geq 4$  آن گاه  $x \geq 2$ (۳) اگر  $x^2 \leq 4$  آن گاه  $x \leq 2$ (۴) اگر  $x^2 > 4$  آن گاه  $x > 2$ 

## الگوی ۹

(سراسری ریاضی - ۹۲)

۳۹- کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می‌کند؟

(۱) ۵۶ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴) ۷۴

۴۰- می‌خواهیم ثابت کنیم «اگر مربع یک عدد صحیح مضرب ۵ باشد، خود آن عدد نیز حتماً مضرب ۵ است» کدام روش را برای اثبات به کار

(سراسری ریاضی - ۷۴)

بربریم؟

(۱) استدلال تمثیلی (۲) روش استقرا (۳) برهان خلف (۴) مثال نقض

(سراسری ریاضی - ۸۶)

۴۱- اثبات کدام قضیه‌ی زیر احتیاج به استدلال به روش برهان خلف ندارد؟

(۱) عدد  $\sqrt{5}$  گنگ است.

(۲) از یک نقطه فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

(۳) در یک صفحه از نقطه مفروض فقط یک خط می‌توان بر خط مفروض عمود کرد.

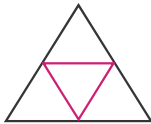
(۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیش‌تر است.

## اصل لانه کبوتری

۱- اصل لانه کبوتری: اگر  $m$  کبوتر،  $n$  لانه‌ی کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه‌های کبوتر باشد ( $m > n$ )، آن‌گاه طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک لانه‌ی کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو و یا بیشتر از دو کبوتر در آن قرار داشته باشند.

**مثال:** از ۱۳ نفر حاضرین در یک میهمانی، ثابت می‌شود که حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند. زیرا، ۱۲ ماه را مطابق ۱۲ لانه‌ی کبوتر و ۱۳ میهمان را مطابق ۱۳ کبوتر فرض می‌کنیم. چون تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است، بر طبق اصل لانه کبوتر، حداقل یک لانه وجود دارد که دست کم دو کبوتر در آن قرار داشته باشند. یعنی حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند.

**مثال:** مثلث متساوی الاضلاع  $ABC$  به ضلع ۱ مفروض است. ۵ نقطه را در داخل مثلث در نظر می‌گیریم، نشان دهید حداقل ۲ نقطه وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از  $\frac{1}{3}$  است.

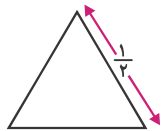


مطابق شکل، هر ضلع مثلث را نصف کرده و نقاط حاصل را به هم وصل می‌کنیم.

ملاحظه کنید که ۴ مکان برای حضور ۵ نقطه وجود دارد. مطابق اصل لانه کبوتر حداقل یک مثلث کوچک وجود دارد که دست کم دو نقطه در آن قرار گیرند.

می‌دانیم که در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، حداکثر فاصله‌ی بین دو نقطه، زمانی است که در دو رأس آن قرار گیرند که در این صورت فاصله‌ی آن‌ها برابر طول ضلع مثلث کوچک یعنی  $\frac{1}{3}$  می‌شود.

بنابر این حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آن‌ها کمتر از  $\frac{1}{3}$  است.



۲- از بین  $m$  کبوتر که بخواهند در  $n$  لانه قرار گیرند ( $m > n$ ) حداقل یک لانه وجود دارد که دست کم  $1 + \left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$  کبوتر در آن قرار گیرند. ( [ ] علامت جزء صحیح است.)

**مثال:** در بین ۱۷ نفر، دست کم چند نفر در یک روز هفته متولد شده‌اند؟

تعداد روزهای هفته، ۷ است. بنابراین  $3 = 2 + 1 = 1 + \left\lfloor \frac{17-1}{7} \right\rfloor$  و حداقل ۳ نفر، در یک روز هفته متولد شده‌اند.

۳- حداقل تعداد کبوترها برای آنکه در یک لانه از  $n$  لانه، حداقل  $m$  کبوتر باشند برابر است با:  $n(m-1) + 1$

۴- در بعضی از مسائل، لانه‌ها را به صورت ترکیبی می‌دهند، در این صورت باید تعداد لانه‌ها را طبق اصل ضرب در هم ضرب کرد تا تعداد موقعیت‌های ممکن به دست آید.

**مثال:** کم‌ترین تعداد افرادی که حداقل سه نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز هفته متولد شده‌اند، کدام است؟

۱۲ ماه در سال و ۷ روز در هفته داریم. یعنی  $84 = 12 \times 7$  موقعیت (لانه‌ی کبوتر) داریم. چون در صورت سؤال حداقل ۳ نفر ذکر شده است، اگر ابتدا در هر موقعیت (لانه‌ی کبوتر) ۲ نفر قرار گیرند. یعنی  $168 = 84 \times 2$  نفر، حال اگر یک نفر به آن‌ها اضافه کنیم، کم‌ترین تعداد افرادی که حداقل سه نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز هفته متولد شده‌اند، به دست آمده است. با توجه به نکته‌ی ۳ نیز می‌توان گفت حداقل افراد برابر است با:  $169 = 84 \times 2 + 1 = 84(2-1) + 1$

**مثال:** ۷۱ کبوتر، حداکثر در چند لانه کبوتر قرار بگیرند، تا حداقل در یک لانه بیش از ۳ کبوتر قرار داشته باشد؟

با توجه به صورت سؤال، حداقل یک لانه وجود دارد که دست کم ۴ کبوتر در آن قرار دارند یعنی مطابق نکته‌ی ۲ داریم:

بنابراین، حداکثر تعداد لانه‌ها، ۲۳ می‌باشد.  $\max(n) = \left\lfloor \frac{70}{3} \right\rfloor = 23 \Rightarrow n \leq \frac{70}{3} < 4 \Rightarrow 3 \leq \frac{70}{n} < 4 \Rightarrow \left\lfloor \frac{70-1}{n} \right\rfloor + 1 = 4 \Rightarrow \left\lfloor \frac{69}{n} \right\rfloor = 3$

## الگوی ۱۰

۴۲- اگر  $S$  یک زیرمجموعه ۱۱۵ عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم عضوهای  $S$  بر ۲۷، به‌طور یقین، حداقل چند عضو دارای یک باقیمانده هستند؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷ (سراسری ریاضی-۹۴)

۴۳- هریک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یکسان نوشته در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم، تا به‌طور یقین دست کم دو

عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ داشته باشیم؟ (سراسری ریاضی-۹۳)

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

- ۴۴- سیزده عدد طبیعی متمایز را بر عدد ۱۲ تقسیم کرده‌ایم، مطابق اصل لانه کیبوتری کدام گزینه همواره صحیح است؟  
 (۱) باقی‌مانده‌ها همگی برابرند.  
 (۲) حداقل ۳ عدد دارای یک باقی‌مانده هستند.  
 (۳) حداقل یکی از اعداد مضرب ۱۲ است.  
 (۴) حداقل ۲ عدد دارای یک باقی‌مانده هستند.  
 (سراسری ریاضی - ۷۵)
- ۴۵- در یک کلاس ۵۴ نفری، دست کم چند نفر دارای ماه تولد یکسان هستند؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶  
 (سراسری ریاضی - ۸۳)
- ۴۶- مجموعه‌ی S دارای ۵۰ عضو از اعداد طبیعی است. در تقسیم عضوهای S بر ۱۲، حداقل چند عضو، باقی‌مانده یکسان دارند؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶  
 (سراسری ریاضی - ۹۰)
- ۴۷- اگر S یک زیرمجموعه‌ی ۵۰ عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم هر یک از اعضای S بر عدد ۱۶، تعداد عضوهای هم باقی‌مانده چگونه است؟  
 (۱) درست ۳ عضو (۲) دست کم ۳ عضو (۳) کم‌تر از ۴ عضو (۴) دست کم ۴ عضو  
 (سراسری - ۸۸)
- ۴۸- در یک کلاس ۴۰ نفری ۷ نفر نامزد انتخاب مشاوره با امور مدرسه‌اند. انتخاب شونده باید رأی بیش‌تر از سایرین داشته باشد. حداقل رأی انتخاب شونده کدام است؟  
 (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸  
 (سراسری ریاضی - ۸۸)
- ۴۹- در یک مدرسه‌ی ۲۰۰ نفری، حداقل چند نفر وجود دارند که ماه تولد آن‌ها، ماه خاصی باشد؟  
 (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) ۱۵ (۴) صفر  
 (آزاد ریاضی - ۷۵)
- ۵۰- ۶۵ کیبوتر حداکثر در چند لانه‌ی کیبوتر قرار بگیرند، تا حداقل در یک لانه بیش از ۲ کیبوتر قرار داشته باشد؟  
 (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴) ۳۴  
 (سراسری ریاضی - ۸۱)

## الگوی ۱۱

- ۵۱- هر زیرمجموعه‌ی n عضوی  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 23\}$ ، به طور یقین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو ۲۴ می‌باشد. حداقل n کدام است؟  
 (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳  
 (سراسری قارج از کشور - ۹۲)
- ۵۲- حداقل چند زوج مرتب به صورت  $(a, b)$ ، با مختص‌های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم، تا مطمئن باشیم در دو زوج انتخابی، جمع مختص‌های اول و جمع مختص‌های دوم، اعداد زوج هستند؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶  
 (سراسری ریاضی - ۹۲)
- ۵۳- یک زیرمجموعه‌ی دلخواه از اعداد طبیعی با حداقل چند عضو را در نظر بگیریم، تا حداقل ۲ عدد در این مجموعه وجود داشته باشند که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۷، با هم برابر باشد؟  
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹  
 (مسئله امتحان پایان ترم - ۸۲)
- ۵۴- حداقل چند عدد از مجموعه‌ی  $\{2, 3, 4, \dots, 30\}$ ، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم، لاقل دو عدد آنها مقسوم علیه مشترک غیر ۱ دارند؟  
 (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲  
 (سراسری ریاضی - ۸۹)
- ۵۵- کم‌ترین تعداد افرادی که حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک ماه از سال و یک روز هفته متولد شده‌اند، کدام است؟  
 (۱) ۷۵ (۲) ۷۸ (۳) ۸۵ (۴) ۸۸  
 (سراسری ریاضی - ۸۲)
- ۵۶- حداقل چند دوتایی مرتب از اعداد صحیح انتخاب کنیم، تا به‌طور قطع، لاقل در دو جفت انتخاب شده‌ی  $(a, b)$  و  $(c, d)$ ، حاصل هر دو عدد  $a + c$  و  $b + d$  زوج باشند؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶  
 (سراسری قارج از کشور - ۸۹)
- ۵۷- در یک سمینار افراد مختلفی از سه کشور مختلف با ۴ تخصص مختلف در زمینه‌ی پزشکی شرکت کرده‌اند. حداقل چند نفر در این سمینار سخنرانی کنند تا مطمئن باشیم، حداقل ۳ مرد یا ۳ زن از یک کشور در مورد یک شاخه‌ی تخصصی صحبت کرده‌اند؟  
 (۱) ۴۸ (۲) ۴۹ (۳) ۷۳ (۴) ۷۲  
 (آزمون کانون - ۸۸)
- ۵۸- درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱، حداقل چند نقطه اختیار کنیم تا بتوان از طریق اصل لانه کیبوتری اثبات کرد که حداقل ۲ نقطه از این نقاط، فاصله‌ی کم‌تر از  $\frac{1}{3}$  دارند؟  
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱  
 (آزمون کانون - ۸۹)
- ۵۹- در جعبه‌ای ۳ گوی قرمز، ۵ گوی سفید، ۷ گوی آبی و ۹ گوی زرد موجود است. حداقل چند گوی خارج کنیم تا مطمئن باشیم دست کم ۶ گوی خارج شده هم‌رنگ باشند؟  
 (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴) ۲۰  
 (سراسری قارج از کشور - ۹۰)





# فصل دوم: مجموعه، ضرب دکارتی و روابط

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

- الف) مجموعه، زیرمجموعه، مجموعه‌ی توانی
- ب) جبر مجموعه‌ها: اجتماع و اشتراک
- ج) جبر مجموعه‌ها: تفاضل و تفاضل متقارن
- د) مجموعه‌ی متناهی، عدد اصلی و روابط

آبی سبز

۱- مجموعه‌ها

**گام اول:** میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.  
**آبی:** خیلی خوب  
**سبز:** متوسط  
**قرمز:** به این قسمت مسلط نیستیم.  
**گام‌های بعدی:** اگر در گام اول، به آن مبحث مسلط نبودید و دانش خود را در حد رنگ قرمز ارزیابی کردید، در نوبت‌های بعدی مطالعه و تمرین، در صورتی که پیشرفت کردید می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید.

- زوج مرتب، حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه

آبی سبز

۲- ضرب دکارتی

**مجموعه، ضرب دکارتی و رابطه**

- افراز یک مجموعه، تعداد افراهای یک مجموعه‌ی متناهی

آبی سبز

۳- افراز

تعداد سؤالات فصل

۲۱۳

تعداد سؤالات سراسری

۹۴

تعداد سؤالات سایر آزمون‌ها

۱۱۹

- الف) رابطه، رابطه‌ی عاد کردن، نمودار نامساوی‌ها در دستگاه مختصات

آبی سبز

۴- رابطه

از فصل دوم (مجموعه‌ها) به‌طور متوسط در هر سال ۳ تست در کنکورهای ۵ سال اخیر طرح شده است.  
 در این فصل ۲۱۳ تست از ضرب دکارتی آورده‌ایم. یعنی به ازای هر تست کنکور، در حدود ۷۱ تست را تمرین خواهید کرد.

- ب) رابطه‌های بازتابی، تقارنی، تعدی و پادتقارنی

- ج) رابطه‌ی هم‌ارزی، کلاس‌های هم‌ارزی

## مسائل مربوط به تعاریف مجموعه، زیرمجموعه و مجموعه‌ی توانی

**مجموعه:** یک مفهوم اولیه است و به عنوان دسته‌ای از اشیاء کاملاً معین در نظر گرفته می‌شود که با نام بردن اعضای آن یا خاصیت اعضای آن، مشخص می‌شود.

**تعلق:** اگر  $x$  در مجموعه‌ی  $A$  باشد، می‌نویسیم  $x \in A$  و در غیر این صورت  $x \notin A$ .

**مجموعه‌ی جهانی:** مجموعه‌ای است که تمام مجموعه‌های مورد بحث در آن هستند و معمولاً با حرف  $U$  (گاهی با حرف  $M$  و گاهی نیز با حرف  $S$ ) نشان داده می‌شود.

**گزاره‌نما:** عبارتی است شامل نمادی مانند  $x$  که هر گاه هر عضو مانند  $a \in U$  را به جای  $x$  قرار دهیم، جمله‌ی حاصل یا به وضوح درست باشد و یا به وضوح نادرست.

**زیرمجموعه:**  $B$  یک زیرمجموعه از  $A$  است اگر هر عضو  $B$ ، عضوی از  $A$  نیز باشد و می‌نویسیم  $B \subseteq A$  (توجه: هر مجموعه، زیرمجموعه‌ای از خودش است).

**مجموعه‌ی تهی:** مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه‌ی تهی نامیده می‌شود و با نماد  $\emptyset$  یا  $\{ \}$  نشان داده می‌شود. (تهی زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌هاست).

**مجموعه‌ی متناهی:** مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد، مجموعه‌ی متناهی می‌نامیم و مجموعه‌ای که متناهی نباشد را، نامتناهی می‌نامیم.

**عدد اصلی یک مجموعه:** تعداد عضوهای یک مجموعه‌ی متناهی را عدد اصلی آن می‌نامیم، عدد اصلی مجموعه‌ی  $A$  را با  $|A|$  یا  $n(A)$  نمایش می‌دهیم.

**برابری دو مجموعه:** دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  برابرند اگر و فقط اگر اعضایشان یکی باشد و می‌نویسیم  $A = B$ .

(توجه:  $A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$ )

**تعداد زیرمجموعه‌ها:** فرض کنیم مجموعه‌ی  $A$  دارای  $n$  عضو باشد:

$$1 - \text{تعداد زیرمجموعه‌های } r \text{ عضوی } A \text{ برابر است با: } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$2 - \text{تعداد زیرمجموعه‌های } r \text{ عضوی } A \text{ با تعداد زیرمجموعه‌های } n-r \text{ عضوی } A \text{ برابر است. } \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

3 - تعداد کل زیرمجموعه‌های  $A$  برابر است با:  $2^n$

$$4 - \text{تعداد زیرمجموعه‌های } r \text{ عضوی } A \text{ که فاقد } p \text{ عضو مشخص باشند، برابر است با: } \binom{n-p}{r}$$

$$5 - \text{تعداد زیرمجموعه‌های } r \text{ عضوی } A \text{ که شامل } q \text{ عضو مشخص باشند، برابر است با: } \binom{n-q}{r-q}$$

$$6 - \text{تعداد زیرمجموعه‌های } r \text{ عضوی } A \text{ که فاقد } p \text{ عضو مشخص و شامل } q \text{ عضو مشخص دیگر باشند، برابر است با: } \binom{n-p-q}{r-q}$$

7 - تعداد مجموعه‌هایی مانند  $x$  که در رابطه‌ی  $B \subseteq x \subseteq A$  صدق می‌کنند، برابر است با:  $2^{|A|-|B|}$

8 - تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی  $n$  عضوی که شامل و یا فاقد  $r$  عضو مشخص باشند برابر است با:  $2^{n-r}$

**زیرمجموعه‌ی سره:** اگر  $B \subseteq A$  ولی  $B \neq A$ ، آن‌گاه  $B$ ، زیرمجموعه‌ی سره‌ی  $A$  نامیده می‌شود. (توجه: اگر  $A$  دارای  $n$  عضو باشد تعداد

زیرمجموعه‌های سره‌ی  $A$  برابر است با:  $(2^n - 1)$ )

**مجموعه‌ی توانی:** مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های  $X$  مجموعه‌ی توانی  $X$  نامیده می‌شود و با  $P(X)$  نشان داده می‌شود.

بنابراین اگر  $X$  دارای  $n$  عضو باشد، آن‌گاه  $P(X)$  دارای  $2^n$  عضو است.

**متمم یک مجموعه:** متمم مجموعه‌ی  $A$  را که با  $A'$  نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است شامل تمام عضوهایی از مجموعه‌ی جهانی که به  $A$  تعلق ندارند. توجه شود که بنا بر این تعریف داریم:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A' \quad (د)$$

$$(A')' = A \quad (ج)$$

$$U' = \Phi \quad (ب)$$

$$\Phi' = U \quad (الف)$$

## الگوی ۱۲

- ۶۰- چند زیرمجموعه از مجموعه  $\{a, b, \{b, a\}, \{a, b\}\}$  عضو  $\{a, b\}$  را ندارد؟  
 (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲  
 (سراسری - ۹۱)
- ۶۱- اگر  $A \subset B$  و  $A \subset B'$  باشد، کدام گزینه صحیح است؟  
 (۱)  $A = M$  (۲)  $A = B$  (۳)  $A = \emptyset$  (۴)  $B = \emptyset$   
 (آزار عصر - ۹۱)
- ۶۲- اگر  $A = \{2\}$ ،  $B = \{2, \{2\}\}$  و  $C = \{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ، کدام رابطه نادرست است؟  
 (۱)  $B \subset C$  (۲)  $A \subset B$  (۳)  $A \in B$  (۴)  $B \in C$   
 (سراسری قارج از کشور ریاضی - ۸۶)
- ۶۳- اگر  $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$  باشد، مجموعه  $A - \{A\}$  چند زیرمجموعه‌ی سره‌ی غیر تهی دارد؟  
 (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۱۴  
 (سراسری قارج از کشور ریاضی - ۸۹)
- ۶۴- مجموعه‌ی  $A$  دارای ۶۲ زیرمجموعه‌ی سره‌ی ناتهی است، تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی  $A$  چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴  
 (آزار انسانی - ۷۷)
- ۶۵- در مجموعه‌ی  $A = \{\{1\}, \{\{1\}\}\}$  کدام گزینه نادرست است؟  
 (۱)  $\{1\} \subseteq A$  (۲)  $\{1\} \in A$  (۳)  $\{\{1\}\} \in A$  (۴)  $\{\{1\}\} \subseteq A$   
 (آزمون کانون - ۸۸)
- ۶۶- اگر مجموعه‌ای ۴۵ زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی داشته باشد، چند زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی خواهد داشت؟  
 (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۹۰ (۴) ۶۰  
 (آزمون کانون - ۸۸)
- ۶۷- مجموعه‌ی  $A$  دارای  $n$  عضو است، اگر دو عضو متمایز به  $A$  اضافه کنیم، تعداد ۹۶ زیرمجموعه‌ی  $A$  اضافه می‌شود،  $n$  کدام است؟  
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷  
 (آزمون کانون - ۸۸)
- ۶۸- اگر  $n$  عدد طبیعی باشد، کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟  
 (۱)  $\{n | n^3 > n^2\}$  (۲)  $\{n | n^2 \geq 2^n\}$  (۳)  $\{n | 2^n > n^3\}$  (۴)  $\{n | 2^n > n^2\}$   
 (آزمون کانون - ۸۸)
- ۶۹- دو مجموعه‌ی  $A$  و  $B$  با هم برابرند، هر گاه:  
 (۱) تمام عضوهای  $A$  در  $B$  وجود داشته باشد.  
 (۲) هر عضو دلخواه از  $A$  در  $B$  وجود داشته باشد.  
 (۳) هر یک زیر مجموعه‌ی دیگری باشند.  
 (۴) تعداد عضوهای  $A$  و  $B$  برابر باشند.  
 (آزمون کانون - ۸۹)
- ۷۰- در مجموعه‌ها گزاره‌ی  $\forall x \in B \Rightarrow x \notin A$  نشان دهنده‌ی کدام است؟ ( $\forall$ : به معنای هر چه باشد)  
 (۱)  $A \subseteq B'$  (۲)  $A \subseteq B$  (۳)  $B \subseteq A$  (۴)  $A' \subseteq B$   
 (آزمون کانون - ۹۱)
- ۷۱- اگر مجموعه‌ی  $A$  مجموعه‌ی اعداد دو رقمی باشد، آن‌گاه زیر مجموعه‌ای از  $A$  که عضوهای آن به صورت  $5k$  و  $k \in A$  است، چند عضو دارد؟  
 (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲  
 (سراسری انسانی - ۷۷)
- ۷۲- اگر ۲ عضو از اعضاء مجموعه‌ی  $A$  را حذف کنیم، تعداد زیر مجموعه‌های آن، ۳۸۴ واحد کم می‌شود.  $A$  چند عضو دارد؟  
 (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲  
 (آزمون کانون - ۹۱)
- ۷۳- مجموعه‌ی  $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$  دارای چند زیر مجموعه شامل عضو  $a$  می‌باشد؟  
 (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲  
 (سراسری ریاضی - ۸۲)
- ۷۴- اگر  $A_p$  مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه‌ی  $A = \{a, b, c, d, e\}$  بوده و  $B_p$  مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های دو عضوی  $B = \{a, b, c, d, e, f\}$  باشد، آن‌گاه  $A_p$  و  $B_p$  دارای چند عضو مشترک هستند؟  
 (۱) ۱۰ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶  
 (آزمون سنپش - ۸۸)
- ۷۵- اگر  $A = \{a, b, c, d, e\}$  باشد تعداد زیر مجموعه‌های  $A$  که حاوی  $a$  باشند و حاوی  $b$  نباشند، برابر است با:  
 (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲  
 (آزمون کانون - ۸۹)
- ۷۶- اگر  $A$  مجموعه‌ی اعداد دو رقمی و  $B = \{\gamma k; k \in A\}$  باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی توانی  $A \cap B$  چند عضو دارد؟  
 (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲  
 (سراسری ریاضی ۸۱)
- ۷۷- مجموعه‌ی  $A$ ، ۵ عضو بیش‌تر از مجموعه‌ی  $A'$  دارد، خارج قسمت یا تفاضل تعداد زیر مجموعه‌های این دو مجموعه کدام است؟  
 (۱) خارج قسمت ۲۵ (۲) خارج قسمت ۳۲ (۳) تفاضل ۲۵ (۴) تفاضل ۳۲  
 (سراسری ریاضی - ۸۶)