هندسه (۲)

«پرسش‌های چهارگزینه‌ای سراسری»

« ۸۷–۹۳»

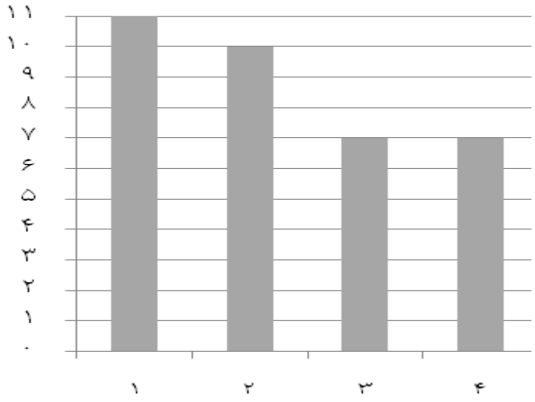
تعداد پرسش‌های چهارگزینه‌ای	
۱- استدلال در هندسه	۱۱
۲- دایره	۱۰
۳- تبدیل‌ها	۷
٤- هندسه در فضا	۷
کل کتاب: (۳۵ پرسش چهارگزینه‌ای)	

✓ در ۷ سال گذشته‌ی کنکور (سراسری) در بین زیر موضوعات **هندسه ۲**، **استدلال در هندسه** بیش‌ترین پرسش چهارگزینه‌ای را به خود اختصاص داده است.

هندسه (۲)

«پرسش‌های چهارگزینه‌ای سراسری ۹۳–۸۷»

تعداد پرسش‌های چهارگزینه‌ای



✓ نمودار اهمیت درس‌ها براساس پرسش‌های چهارگزینه‌ای مطرح شده در **کنکورهای سراسری** ۷سال گذشته

استدلال در هندسه (۱۱ پرسش چهارگزینه‌ای)

۱) در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، یکی از زاویه‌ها ۶۰ درجه و اندازه قاعده‌ها ۶ و ۱۰ واحد است. مساحت چهار ضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این ذوزنقه، چند برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است؟

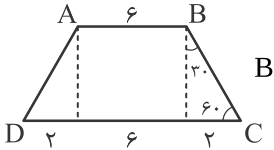
(سراسری – ۹۳)

۱) ۸   ۲) ۱۰

۳) ۱۴   ۴) ۱۶

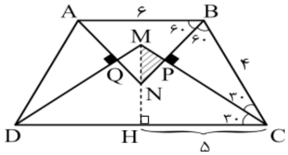
۱) گزینه‌ی «۴»

با توجه به شکل زیر و با توجه به اینکه ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر و ضلع مقابل به زاویه ۶۰° برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است، داریم:



$$BC = ۴$$

مثلث ABN متساوی‌الاضلاع است بنابراین:



$$\left.\begin{array}{l} BN = ۶ \\ BP = \frac{۱}{۲}BC = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{PN = ۴}$$

$$CH = ۵ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}CM \Rightarrow CM = \frac{۱۰}{\sqrt{۳}} = \frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$$

$$CP = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow PM = CM - CP = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

$$S_{\overset{\square}{MPNQ}} = ۲S_{\overset{\Delta}{MNP}} = MP \times NP = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$$

۲) در مثلث ABC **، ضلع** $AC = ۶$ **و میانه** $BM = ۵$ **، نیمسازهای دو زاویه** AMB **و** CMB **دو ضلع دیگر این مثلث را در** P **و** Q **قطع می‌کند. اندازه** PQ **کدام است؟** **(سراسری – ۹۳)**

۱) ۳/۲۵ ۲) ۳/۵

۳) ۳/۷۵ ۴) ۴

۳) در چهارضلعی $ABCD$ **، عمودمنصف‌های دو ضلع مقابل** AB **و** CD **در نقطه** M **متقاطع‌اند. اگر** $BC > AD$ **باشد، کدام نابرابری همواره صحیح است؟**

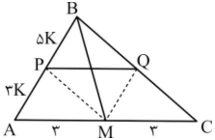
(سراسری–۹۲)

۱) $A\hat{M}B > B\hat{M}C$ ۲) $C\hat{A}B > C\hat{A}D$

۳) $B\hat{M}C > A\hat{M}D$ ۴) $C\hat{M}D > A\hat{M}B$

۲) گزینه‌ی«۳»

طبق قضیه صفحه‌ی۱۳ کتاب هندسه ۲، نیمساز هر زاویه ضلع مقابلش را به نسبت دو ضلع مجاور تقسیم می‌کند.



$$\left.\begin{array}{l}\frac{BP}{AP}=\frac{BM}{AM}=\frac{۵}{۳}\\ \frac{BQ}{CQ}=\frac{BM}{CM}=\frac{۵}{۳}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{BP}{AP}=\frac{BQ}{CQ}$$

بنابراین PQ و AC موازیند (تمرین۱۵ صفحه ۲۲ کتاب هندسه ۲)

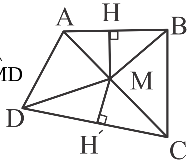
طبق قضیه تالس $\frac{PQ}{AC}=\frac{BP}{AB}=\frac{۵k}{۸k}$

$$\Rightarrow PQ=\frac{۵}{۸}\times AC=\frac{۵}{۸}\times ۶=\frac{۳۰}{۸}=۳/۷۵$$

۳) گزینه‌ی«۳»

چون نقطه‌ی M روی عمودمنصف AB است، پس $MA=MB$ می‌باشد، همچنین نقطه‌ی M روی عمودمنصف CD است، پس $MC=MD$.

$$\left.\begin{array}{l}MB=MA\\ MC=MD\\ BC>AD\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{عکس قضیه‌ی لولا}} B\hat{M}C>A\hat{M}D$$



۴) در مثلثی به اضلاع ۶ و ۵ و ۳ واحد نیمساز کوچک‌ترین زاویه خارجی آن بزرگ‌ترین ضلع مثلث را قطع می‌کند، مساحت مثلثی که در خارج مثلث اصلی تشکیل می‌شود چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

(سراسری-۹۱)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) ۲ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۵) در مثلث $ABC:(\hat{A}=۹۰^\circ, AB=۳, AC=۴)$ **ارتفاع** AH **و نیمساز داخلی** AD **رسم شده است. اندازه‌ی** DH **کدام است؟**

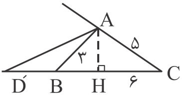
(سراسری- ۹۰)

۱) $\frac{۱۲}{۳۵}$ ۲) $\frac{۵}{۱۴}$

۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۸}$

۴) گزینه‌ی «۲»

نیمساز خارجی زاویه‌ی A پاره‌خط‌هایی متناسب، روی امتداد ضلع BC ایجاد می‌کند:



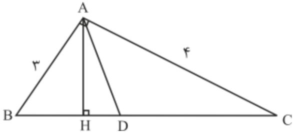
$$\frac{BD'}{CD'}=\frac{AB}{AC}=\frac{۳}{۵}$$

کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی هر مثلث، مجاور به بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی آن مثلث است. پس نیم‌ساز خارجی زاویه روبه‌روی ضلع ۶ مورد نظر است. بنابراین در این مثلث اندازه AB و AC به ترتیب ۳ و ۵ خواهد بود.

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AD'B}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BD'\times AH}{\frac{۱}{۲}BC\times AH}=\frac{BD'}{BC},$$

$$\frac{BD'}{CD'-BD'}=\frac{۳}{۵-۳}=\frac{۳}{۲}$$

۵) گزینه‌ی «۱»



$$BC=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$$

$$\begin{cases} \text{نیم‌ساز } AD \Rightarrow \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{۳}{۴}\Rightarrow \dfrac{BD}{BD+DC}=\dfrac{۳}{۳+۴}\Rightarrow BD=\dfrac{۳}{۷}BC=\dfrac{۱۵}{۷} \\ AB^۲=BH.BC\Rightarrow BH=\dfrac{۹}{۵} \end{cases}$$

$$\Rightarrow DH=BD-BH=\frac{۱۵}{۷}-\frac{۹}{۵}=\frac{۷۵-۶۳}{۳۵}=\frac{۱۲}{۳۵}$$

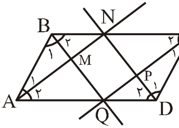
۶) در یک متوازی الاضلاع با زاویه‌ی ۶۰ درجه و اندازه‌ی اضلاع a و $۲a$، محل تلاقی نیمسازهای داخلی، رأس‌های یک چهارضلعی است. مساحت این چهارضلعی حاصل چند برابر $a^۲\sqrt{۳}$ است؟

(سراسری– ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶) گزینه‌ی «۲»



با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 30^\circ \\ \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 60^\circ \end{cases}$$

چهارضلعی MNPQ مستطیل است.

قائم‌الزاویه : $\overset{\Delta}{AND} : \hat{A}_2 = 30^\circ \Rightarrow ND = \frac{1}{2}AD = a, AN = \frac{\sqrt{3}}{2}AD = \sqrt{3}a$

قائم‌الزاویه: $\overset{\Delta}{ABM} : \hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow BM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}, AM = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

واضح است که $PD = BM = \frac{a}{2}$. پس:

$$\begin{cases} MN = AN - AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ NP = ND - PD = \frac{a}{2} \end{cases}$$

مساحت مستطیل : $S = MN \times NP = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

نکته: مساحت مستطیلی که از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع به اضلاع a و b به‌دست می‌آید برابر است با $S = \frac{1}{2}(a-b)^2 \cos A$

۷) در مثلث ABC **، میانه** AM **و نیم‌سازهای دو زاویه** AMB **و** AMC **را رسم می‌کنیم، تا دو ضلع** AB **و** AC **را به ترتیب در** D **و** E **قطع کند. نسبت** $\frac{DE}{BC}$ **برابر کدام است؟** **(سراسری ـ ۸۹)**

۱) $\frac{AM}{BC}$

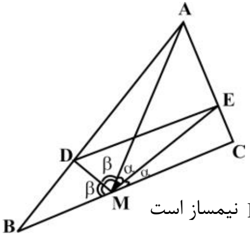
۲) $\frac{ME}{MC}$

۳) $\frac{ME}{CE}$

۴) $\frac{AD}{AB}$

۷) گزینه‌ی «۴»

نیمساز داخلی هر زاویه‌ی یک مثلث ضلع مقابلش را به نسبت دو ضلع مجاورش تقسیم می‌کند.



میانه $\mathbf{AM \Rightarrow MC = MB}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{نیمساز است } ME: \dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AM}{MC} \\ \text{نیمساز است } MD: \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AM}{MB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD}$$

$$\Rightarrow DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه‌ی تالس}} \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$$

۸) از بین مثلث‌هایی که در ضلع ثابت $AB = ۱۶$ مشترک و مساحت هر یک از آنان، ۴۸ واحد مربع باشد، کمترین مقدار محیط کدام است؟

(سراسری ـ ۸۹)

۱) ۳۸ ۲) ۳۴

۳) ۳۶ ۴) ۳۲

۹) مثلث ABC مفروض است. با کنار هم قرار دادن کدام تعداد مثلث‌هایی برابر مثلث مفروض، می‌توان مثلثی متشابه با مثلث مفروض ساخت؟

(سراسری ـ ۸۸)

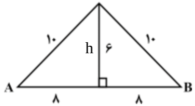
۱) ۲۰ ۲) ۲۴

۳) ۲۵ ۴) ۲۷

۸) گزینه‌ی «۳»

مکان هندسی نقطه‌ی C خطی به موازات AB است. و به فاصله‌ی ۶ واحد از آن است.

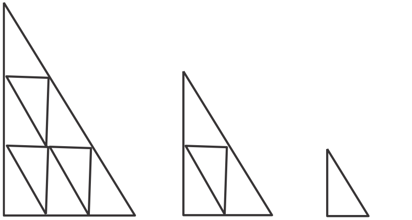
$$S = ۴۸ = \frac{\overset{۱۶}{\cancel{AB}} \times h}{۲} \Rightarrow h = ۶$$



اگر $AC = BC$، آن‌گاه $AC + BC$ کم‌ترین مقدار خود را دارد.

محیط مثلث ABC $= ۱۰ + ۱۰ + ۱۶ = ۳۶$

۹) گزینه‌ی «۳»



تعداد مثلث‌ها در مرحله‌ی n ام برابر است با $n^۲$، پس حتماً تعداد مثلث‌ها باید یک عدد مربع کامل باشد.

۱۰) در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟ **(سراسری ـ ۸۸)**

۱) مستطیل ۲) لوزی

۳) متوازی‌الاضلاع ۴) محاطی

۱۱) در مستطیلی به ابعاد ۱۵ و ۸ واحد، از تقاطع نیمسازهای داخلی آن یک چهارضلعی حاصل می‌شود، مساحت این چهارضلعی چند واحد مربع است؟ **(سراسری–۸۷)**

۱) ۱۶ ۲) ۲۴/۵

۳) ۲۸ ۴) ۳۲/۵

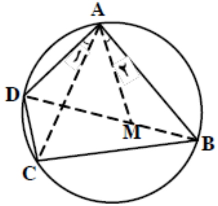
دایره (۱۰ پرسش چهارگزینه‌ای)

۱۲) در شکل مقابل $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ ، حاصل $AD.BC$ برابر کدام است؟

(سراسری – ۹۳)

۱) $DM.AC$ ۲) $BM.AC$

۳) $AB.CD$ ۴) $BD.BM$

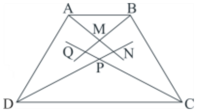


۱۰) گزینه‌ی «۴»

$$\hat{A}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{D}}{۲}=۹۰^\circ \Rightarrow \hat{N}=۹۰^\circ$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد $\hat{Q}=۹۰^\circ$ است، از طرفی چون MNPQ چهارضلعی است، پس مجموع زوایای آن ۳۶۰° است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$\hat{Q}+\hat{N}=\hat{M}+\hat{P}=۱۸۰^\circ \Rightarrow$ محاطی

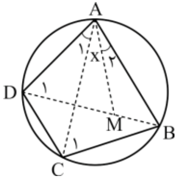


۱۱) گزینه‌ی «۲»

از برخورد نیمسازهای داخلی یک مستطیل به اضلاع a و b مربعی به ضلع $\frac{a-b}{\sqrt{۲}}$ به وجود می‌آید. پس داریم:

$$S=\left(\frac{۱۵-۸}{\sqrt{۲}}\right)^۲=۲۴/۵$$

۱۲) گزینه‌ی«۱»

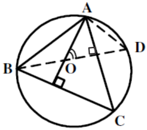


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱+x=\hat{A}_۲+x\\ \hat{D}_۱=\hat{C}_۱=\frac{AB}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ADM}\sim\overset{\Delta}{ACB}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{DM}{BC} \Rightarrow AD.BC=DM.AC$$

۱۳) در شکل زیر، O محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC است.

زاویه‌ی $\hat{AOD}$ برابر کدام است؟ **(سراسری – ۹۲)**



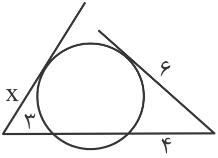
۱) $O\hat{B}C$
۲) $C\hat{A}D$
۳) $O\hat{A}C$
۴) $A\hat{D}O$

۱۴) دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰/۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایره کوچک تر، مماس بر دایره بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعه مماس چقدر است؟ **(سراسری – ۹۲)**

۱) ۸
۲) ۴$\sqrt{۵}$
۳) ۴$\sqrt{۶}$
۴) ۱۰

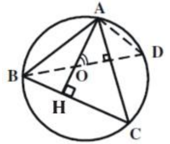
۱۵) در شکل زیر اندازه‌ی x چند واحد است؟ **(سراسری – ۹۱)**

۱) ۳$\sqrt{۲}$
۲) ۲$\sqrt{۵}$
۳) ۲$\sqrt{۶}$
۴) ۵



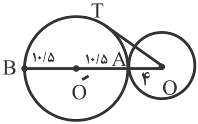
۱۳) گزینه‌ی«۴»

اضلاع زوایای O و C بر هم عمودند. پس زوایای حاده بین آن‌ها مساویند.



$$O = C = \frac{AB}{۲} = ADO$$

۱۴) گزینه‌ی«۴»

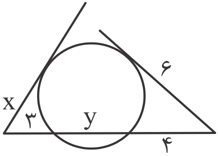


طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$OT^{۲} = OA \times OB \Rightarrow OT^{۲} = ۴ \times (۴ + ۱۰/۵ + ۱۰/۵) = ۴ \times ۲۵ = ۱۰۰ \Rightarrow OT = ۱۰$$

۱۵) گزینه‌ی«۳»

طبق روابط طولی در دایره، داریم:



$$۶^{۲} = ۴(۴ + y) \Rightarrow y = ۵$$

$$x^{۲} = ۳(۳ + ۵) = ۲۴ \to x = ۲\sqrt{۶}$$

۱۶) اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

(سراسری –۹۱)

۱) $۱۲\sqrt{۲}$
۲) $۷\sqrt{۶}$
۳) ۱۷
۴) ۱۸

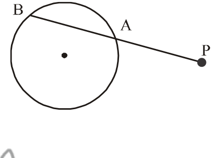
۱۷) در دو دایره‌ی متقاطع به مراکز O و O' و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو دایره از وسط OO' برابر $\frac{۱}{۲}OO'$ می‌باشد. اندازه‌ی مماس مشترک محدود به دو نقطه‌ی تماس با این دو دایره چند واحد است؟

(سراسری– ۹۰)

۱) ۴
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $۲\sqrt{۶}$
۴) ۵

۱۸) نزدیک‌ترین نقطه از دایره به شعاع ۵ واحد تا نقطه‌ی مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = ۲$ اندازه‌ی AB چقدر است؟

(سراسری– ۹۰)



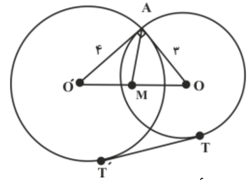
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۹

۱۶) گزینه‌ی«۳»

$$\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}=$$ طول مماس مشترک خارجی دو دایره

$$۱۵=\sqrt{d^{۲}-(۱۴-۶)^{۲}}\Rightarrow ۲۲۵=d^{۲}-۶۴\Rightarrow d^{۲}=۲۲۵+۶۴=۲۸۹\Rightarrow d=۱۷$$

۱۷) گزینه‌ی «۳»



نکته: اگر در مثلثی، میانه‌ی وارد بر ضلعی نصف طول آن ضلع باشد، این مثلث در رأسی که این میانه از آن خارج شده، قائمه است.

مثلث AOO' با توجه به نکته‌ی مذکور، در رأس A قائمه‌الزاویه است.

پس:

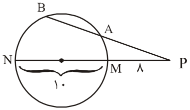
$$OO'=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵$$

طول مماس مشترک TT' برابر است با:

$$\sqrt{OO'^{۲}-(R-R')^{۲}}=\sqrt{۵^{۲}-(۴-۳)^{۲}}=\sqrt{۲۴}=۲\sqrt{۶}$$

۱۸) گزینه‌ی «۳»

$$AB=x\xrightarrow{\text{طبق فرض}}PA=x+۲$$



$$PA.PB=PM.PN\Rightarrow (x+۲)(۲x+۲)=۸\times ۱۸$$

$$(x+۲)(x+۱)=۸\times ۹\Rightarrow x=۷$$

۱۹) ذوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۸ و ۱۲ و اندازه‌ی یک ساق برابر ۵ واحد مفروض است. اگر این ذوزنقه قابل محاط در دایره باشد، طول قطعه‌ی مماس که از نقطه‌ی تلاقی دو ساق بر دایره محیطی آن رسم شود، کدام است؟ **(سراسری-۸۹)**

۱) $۸\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۶}$

۳) $۶\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

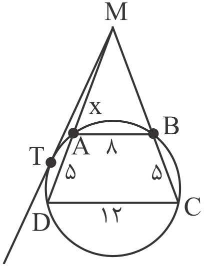
۲۰) از نقطه‌ی M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $۴(\sqrt{۲}-۱)$ باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB کدام است؟ **(سراسری - ۸۸)**

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲

۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۱۹) گزینه‌ی «۲»

چون ذوزنقه محاطی است، پس متساوی الساقین است.

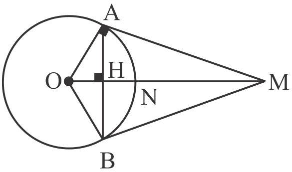


$$AB \| CD \Rightarrow \frac{x}{x+۵} = \frac{۸}{۱۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{x}{۵} = \frac{۲}{۳-۲} \Rightarrow x = ۱۰$$

$$MT^۲ = MA \times MD = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰$$

$$\Rightarrow MT = ۵\sqrt{۶}$$

۲۰) گزینه‌ی «۳»



$$OA = R = ۴, OM = ۴ + ۴(\sqrt{۲} - ۱) = ۴\sqrt{۲}$$

$$OA^۲ = OH.OM \Rightarrow ۱۶ = OH \times ۴\sqrt{۲} \Rightarrow OH = ۲\sqrt{۲}$$

۲۱) ذوزنقه متساوی‌الساقین به طول قاعده‌های ۶ و $\frac{۳۲}{۳}$ واحد بر دایره‌ای محیط است، کوتاه‌ترین فاصله راس ذوزنقه تا نقاط دایره چند واحد است؟ **(سراسری–۸۷)**

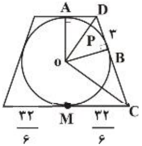
۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) ۱
۴) $\sqrt{۳}$

تبدیل‌ها (۷ پرسش چهارگزینه‌ای)

۲۲) تصویر خط به معادله $۲x+۳y=۶$، تحت تبدیل $T(x,y)=(۲y-۱,x+۳)$، از نقطه‌ای با کدام مختصات، می‌گذرد؟
(سراسری – ۹۳)

۱) $(-۳,۲)$
۲) $(۱,-۱)$
۳) $(۵,۰)$
۴) $(۷,۰)$

۲۱) گزینه‌ی «۳»



$$\begin{cases} BC = MC = \frac{۳۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳۲}{۶} \\ AD = DB = \frac{۱}{۲} \times ۶ = ۳ \end{cases}$$:مماس بر دایره

$$\hat{C} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \rightarrow \frac{\hat{C}}{۲} + \frac{\hat{D}}{۲} = ۹۰^\circ$$

در مثلث ODC که قائم الزاویه است، داریم:

$$OB^۲ = DB \times BC \rightarrow R^۲ = ۳ \times \frac{۳۲}{۶} = ۱۶$$

$$\rightarrow R = ۴ \xrightarrow{\text{در مثلث } OAD} OD = \sqrt{۹+۱۶} = ۵$$

در مثلث OAD داریم:

$$DP = OD - OP = ۵ - R = ۵ - ۴ = ۱$$

۲۲) گزینه‌ی «۴»

$$T(x, y) = (\underbrace{۲y - ۱}_{x'}, \underbrace{x + ۳}_{y'})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y' - ۳ \\ y = \frac{x' + ۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{۲x+۳y=۶} ۲y' - ۶ + \frac{۳x' + ۳}{۲} = ۶$$

$\Rightarrow ۳x' + ۴y' = ۲۱$ فقط گزینه‌ی ۴ در این معادله صدق می‌کند.

۲۳) تصویر دو نقطه $A(۲,۴)$ و $B(-۶,۲)$ را تحت تبدیل $D(x,y)=(-\frac{۱}{۲}y,\frac{۱}{۲}x+۱)$ نقاط A' و B' می‌نامیم. زاویه‌ی بین دو خط AB و $A'B'$، چند درجه است؟ **(سراسری – ۹۲)**

۱) ۳۰   ۲) ۶۰   ۳) ۹۰   ۴) ۱۸۰

۲۴) معادله‌ی تصویر خط $y+۲x=۳$ تحت تجانس به مرکز $(۱,۴)$ و نسبت ۲، به صورت $y+ax=b$ است. b کدام است؟

(سراسری– ۹۰)

۱) ۵   ۲) صفر

۳) ۱   ۴) ۱-

۲۳) گزینه‌ی «۳»

تبدیل $D(x,y)=(-\frac{۱}{۲}y,\frac{۱}{۲}x+۱)$ ترکیبی از ۳ تبدیل

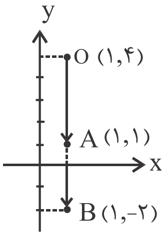
$T_۱(x,y)=(-y,x)$، $T_۲(x,y)=(\frac{۱}{۲}x,\frac{۱}{۲}y)$ و $T_۳(x,y)=(x,y+۱)$

است. در بین این ۳ تبدیل، $T_۱$ دوران ۹۰°، $T_۲$ تجانس با نسبت $\frac{۱}{۲}$ و $T_۳$ انتقال با بردار $(۰,۱)$ است. می‌دانیم تحت تجانس و انتقال، شیب خط ثابت می‌ماند و تنها دوران ۹۰°، شیب پاره‌خط AB را ۹۰° تغییر می‌کند. پس پاره‌خط $A'B'$ (حاصل این ۳ تبدیل) با پاره‌خط AB، زاویه‌ی ۹۰° می‌سازد.

۲۴) گزینه‌ی «۲»

در تجانس شیب خط حفظ می‌شود پس $a=۲$ است.

نقطه‌ی دلخواه $A(۱,۱)$ روی خط $y+۲x=۳$ انتخاب کرده و تصویر آن را تحت این تجانس حساب می‌کنیم.



برای تعیین b مختصات نقطه‌ی $(۱,-۲)$ را در خط تصویر جای‌گذاری می‌کنیم.

$$y+۲x=b$$
$$-۲+۲(۱)=b$$
$$b=۰$$

۲۵) در صفحه‌ای خط d و دو نقطه‌ی A و B در یک طرف خط مفروض‌اند. برای یافتن نقطه‌ای بر روی خط d که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه A و B کم‌ترین مقدار را داشته باشند، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

(سراسری ـ ۸۹)

۱) بازتاب   ۲) انتقال

۳) دوران   ۴) تجانس

۲۶) دوران یافته‌ی خط $y-۲x=۳$ تحت زاویه‌ی ۹۰° به مرکز دوران $(۰,۰)$ خط $l_۱$ است. معادله‌ی خط تصویر $l_۱$ تحت انتقال $T(x,y)=(x+۱,y-۲)$ کدام است؟ **(سراسری ـ ۸۸)**

۱) $۲y-x+۴=۰$

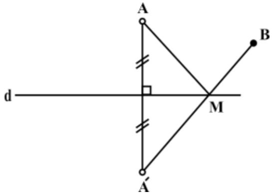
۲) $۲y+x+۶=۰$

۳) $y-۲x+۵=۰$

۴) $y+۲x+۱=۰$

۲۵) گزینه‌ی «۱»

ابتدا بازتاب A را نسبت به d بدست آوریم تا A' به‌دست آید. سپس A' را به B وصل می‌کنیم تا d را در M قطع کند. در این صورت $MA + MB$ مینیمم است.



۲۶) گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} T_1(x, y) = (-y, x) \\ \\ T_2(x, y) = (x + 1, y - 2) \end{cases} \Rightarrow T_2 O T_1(x, y)$$

$$= T_2(-y, x) = (-y + 1, x - 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = -y + 1 \\ Y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -X + 1 \\ x = Y + 2 \end{cases}$$

$$y - 2x = 3 \Rightarrow -X + 1 - 2(Y + 2) = 3$$

$$\Rightarrow 2Y + X + 6 = 0$$