مؤلف این فصل: فرهاد حامی

فصل اول

تابع

(۲۳ پیمانه)

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

تابع

۲۳۰ سؤال شناسنامه‌دار
- ۱۳۱ سؤال تألیفی و طراحی‌شده از کتاب درسی
- ۵۱ سؤال از آزمون‌های کانون
- ۴۸ سؤال از کنکورهای سراسری

در درسنامه می‌بینید ۶۴ سوال
- ۳۱ تست طراحی شده با نگاه به رویکرد کنکورهای جدید
- ۳۳ مثال برای ادراک و تثبیت

۱ تبدیل نمودار توابع
۱۰ پیمانه — ۱۰۰ تست
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
1. انتقال‌های عمودی و افقی
2. انعکاس نمودارها (قرینه‌یابی و تقارن)
3. انبساط و انقباض عمودی و افقی

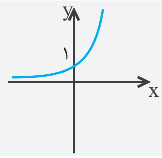
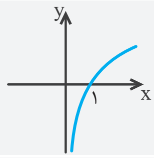
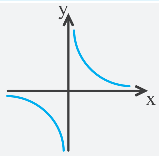
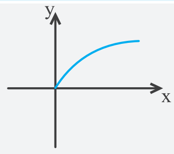
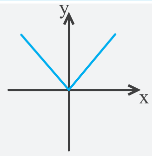
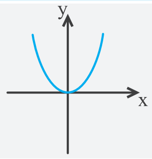
۲ تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم
۱۲ پیمانه — ۱۲۰ تست
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐
1. تابع درجه سوم
2. توابع صعودی و توابع نزولی
3. تقسیم و بخش‌پذیری

آزمون جمع‌بندی پایان فصل
۱ پیمانه — ۱۰ تست
آبی ☐ سبز ☐ زرد ☐

حسابان ۲	فصل اول
دوازدهم	صفحه‌های: ۲ تا ۱۲

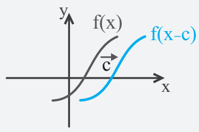
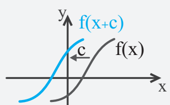
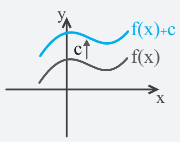
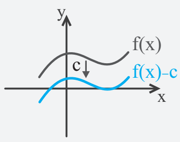
۱ تبدیل نمودار توابع

با به‌کارگیری تبدیلات معینی روی نمودار تابعی مفروض، می‌توانیم نمودار تابع‌های وابسته به آن را به‌دست آوریم و به این ترتیب، میزان کار در رسم نمودارها را کاهش دهیم. این تبدیلات عبارتند از: انتقال‌های افقی و عمودی، انبساط و انقباض‌های عمودی، انبساط و انقباض‌های افقی و انعکاس‌ها (قرینه‌یابی). در این بخش انتقال‌های افقی و عمودی را بررسی می‌کنیم. قبل از بررسی، نمودار توابع مرجع رسم را یادآوری می‌کنیم.

$y=a^x\ ,\ a>۱$	$y=\log_a x\ ,\ a>۱$	$y=\frac{۱}{x}$	$y=\sqrt{x}$	$y=\|x\|$	$y=x^۲$
					
دامنه : R	دامنه : $(۰,+\infty)$	دامنه : $R-\{۰\}$	دامنه : $[۰,+\infty)$	دامنه : R	دامنه : R
برد : $(۰,+\infty)$	برد : R	برد : $R-\{۰\}$	برد : $[۰,+\infty)$	برد : $[۰,+\infty)$	برد : $[۰,+\infty)$

۱ انتقال‌های عمودی و افقی

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد، با فرض $c>۰$ جدول زیر انتقال‌های افقی و عمودی تابع f را نمایش می‌دهد.

نوع انتقال	تابع	روش ترسیم	نمودار	ویژگی
افقی	$f(x-c)$	نمودار تابع f را c واحد به راست انتقال می‌دهیم.		۱ نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_۰+c,y_۰)$ روی تابع $y=f(x-c)$ تبدیل می‌شود. ۲ برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
	$f(x+c)$	نمودار تابع f را c واحد به چپ انتقال می‌دهیم.		۱ نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_۰-c,y_۰)$ روی تابع $y=f(x+c)$ تبدیل می‌شود. ۲ برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند.
عمودی	$f(x)+c$	نمودار تابع f را c واحد به بالا انتقال می‌دهیم.		۱ نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_۰,y_۰+c)$ روی تابع $y=f(x)+c$ تبدیل می‌شود. ۲ دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.
	$f(x)-c$	نمودار تابع f را c واحد به پایین انتقال می‌دهیم.		۱ نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_۰,y_۰-c)$ روی تابع $y=f(x)-c$ تبدیل می‌شود. ۲ دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند.

● **مثال:** مختصات تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی $A(۳,۱)$ روی تابع $y=f(x)$ را در توابع زیر بیابید.

$(۳)\ y=۲+f(x+۱)$ $\qquad (۲)\ y=f(x-۲)$ $\qquad (۱)\ y=f(x)+۲$

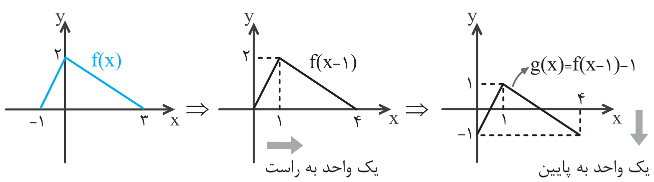
○ **حل:** (۱) به عرض هر نقطه ۲ واحد اضافه می‌شود، پس $A'(۳,۱+۲)=(۳,۳)$.

(۲) به طول هر نقطه ۲ واحد اضافه می‌شود، پس $A'(۳+۲,۱)=(۵,۱)$.

(۳) به طول هر نقطه ۱- واحد و به عرض آن ۲ واحد اضافه می‌شود، پس $A'(۳-۱,۱+۲)=(۲,۳)$.

● **مثال:** اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=f(x-۱)-۱$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

○ **حل:** برای رسم نمودار تابع g، کافی است نمودار تابع f را یک واحد به راست و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم. دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $[۰,۴]$ و برد آن $[-۱,۱]$ است.



تذکر ۱ ◄ در انتقال افقی، برد تابع و در انتقال عمودی، دامنه‌ی تابع تغییری نخواهد کرد.

تست اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-2, 5]$ و برد آن بازه‌ی $[-3, 2]$ باشد، آنگاه دامنه و برد تابع $g(x)=2+f(x+2)$ چند عدد صحیح مشترک دارند؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴

پاسخ گزینه‌ی «۳» نمودار تابع g از انتقال نمودار تابع f به اندازه‌ی ۲ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به بالا به دست می‌آید. در انتقال افقی دامنه و در انتقال عمودی برد تغییر می‌کند، لذا:

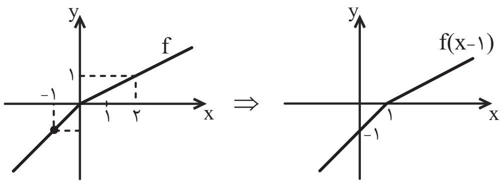
$$\begin{cases} \text{دامنه‌ی } f(x+2): [-2-2, 5-2]=[-4, 3] \\ \text{برد } f(x+2): [-3, 2] \ \text{بدون تغییر} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه‌ی } 2+f(x+2): [-4, 3] \ \text{بدون تغییر} \\ \text{برد } 2+f(x+2): [-3+2, 2+2]=[-1, 4] \end{cases}$$

بنابراین اشتراک دامنه و برد تابع g برابر است با:

$$D_g \cap R_g = [-4, 3] \cap [-1, 4] = [-1, 3]$$

که اعداد صحیح در این فاصله عبارتند از: ۱−، ۰، ۱، ۲ و ۳، پس پنج عدد صحیح مشترک در دامنه و برد تابع g وجود دارد.

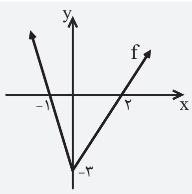
● **مثال:** اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{f(x-1)}$ را بیابید.



○ **حل:** برای تعیین دامنه‌ی g، باید نامعادله‌ی $f(x-1) \ge 0$ را حل کنیم.

برای رسم نمودار $f(x-1)$، کافی است نمودار f را یک واحد به راست انتقال دهیم. با توجه به نمودار دیده می‌شود که تابع $f(x-1)$، به ازای $x \ge 1$ نامنفی است، پس $D_g=[1, +\infty)$.

تست اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، معادله‌ی $f(f(x+1))=-3$ چند ریشه دارد؟



۱) یک ریشه

۲) دو ریشه

۳) سه ریشه

۴) ریشه ندارد.

پاسخ گزینه‌ی «۲» فرض می‌کنیم $f(x+1)=a$، بنابراین $f(a)=-3$، با توجه به نمودار باید $a=0$ باشد، در نتیجه $f(x+1)=0$. برای یافتن ریشه‌های این معادله کافی است نمودار تابع f را یک واحد به چپ انتقال دهیم. بنابراین صفرهای تابع $y=f(x+1)$، ۱ و ۲− هستند، پس ریشه‌های معادله‌ی $f(f(x+1))=-3$، برابر ۱ و ۲− هستند.

تذکر ۲ ◄ گاهی لازم است با استفاده از عملیات جبری (مربع کامل کردن، تفکیک کسر، ...) ابتدا تابع را به یکی از توابع مرجع هم‌خانواده تبدیل کرده و سپس با انتقال‌های افقی و عمودی تابع مرجع، نمودار خواسته شده را رسم کنیم.

به عنوان مثال:

$$y=x^2-6x \xrightarrow{x^2+ax=(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}} y=(x-3)^2-9$$

$$y=\frac{x}{x+1} \xrightarrow{\text{صورت را شبیه مخرج می‌سازیم}} y=\frac{(x+1)-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$$

$$y=\sqrt{x^2-4x+4} \xrightarrow[\sqrt{a^2}=|a|]{\text{زیر رادیکال مربع کامل}} y=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$$

تست در نظر بگیرید $f(x)=\frac{1}{x}$. در اینصورت نمودارهای توابع g و h به ترتیب با انتقال یک واحد به راست و ۲ واحد به چپ تابع f به‌دست می‌آیند. درصورتی‌که خط $y=\frac{5}{4}$، نمودار تابع $g+h$ را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند، اندازه‌ی پاره‌خط AB کدام است؟

۱) $\frac{17}{5}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{14}{5}$ ۴) $\frac{17}{3}$

پاسخ گزینه‌ی «۱» ابتدا ضابطه‌ی توابع g و h را به‌دست آورده و سپس تابع $g+h$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} g(x)=\frac{1}{x-1} \qquad f(x)=\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{دو واحد به چپ}} h(x)=\frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow g(x)+h(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

محل تلاقی نمودار تابع $g+h$ با خط $y=\frac{5}{4}$، از حل معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$g(x)+h(x)=\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{(x+2)+(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{5}{4} \Rightarrow 5(x^2+x-2)=4(2x+1) \Rightarrow 5x^2-3x-14=0$$

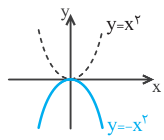
$$\Rightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(5)(-14)}}{2\times 5}=\frac{3\pm\sqrt{289}}{10} \Rightarrow x_A=\frac{3+17}{10}=2 \ , \quad x_B=\frac{3-17}{10}=\frac{-14}{10}=\frac{-7}{5}$$

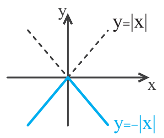
نقاط A و B روی یک خط افقی $(y=\frac{5}{4})$ قرار دارند، بنابراین طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$\overline{AB}=|x_A-x_B|=|2-(\frac{-7}{5})|=\frac{17}{5}$$

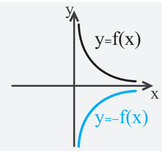
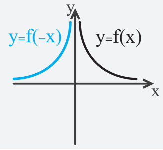
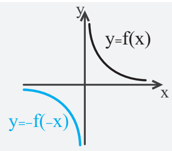
۲ انعکاس نمودارها (قرینه‌یابی و تقارن)

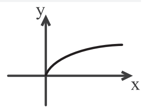
در ریاضی ۱ دیدیم که نمودار تابع $y=-x^۲$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=x^۲$ نسبت به محور x هاست، هم‌چنین نمودار تابع $y=-|x|$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=|x|$ نسبت به محور x هاست.





انعکاس (قرینه‌یابی) نمودارها ◄ در حالت کلی با در اختیار داشتن نمودار تابع $y=f(x)$ می‌توانیم نمودار تابع‌های $y=-f(x)$، $y=f(-x)$ و $y=-f(-x)$ را به روش قرینه‌یابی رسم کنیم. به جدول زیر توجه کنید.

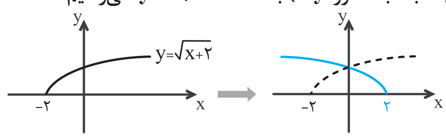
تابع خواسته شده	نمودار	روش ترسیم	ویژگی‌ها
$y=-f(x)$		کافی است قرینه‌ی تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور x ها رسم کنیم.	① نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(x_۰, -y_۰)$ روی تابع $y=-f(x)$ تبدیل می‌شود. ② دامنه ثابت است ولی برد تغییر می‌کند. مقادیر برد قرینه می‌شوند.
$y=f(-x)$		کافی است قرینه‌ی تابع $y=f(x)$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.	① نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(-x_۰, y_۰)$ روی تابع $y=f(-x)$ تبدیل می‌شود. ② برد ثابت است ولی دامنه تغییر می‌کند. مقادیر دامنه قرینه می‌شوند.
$y=-f(-x)$		کافی است قرینه‌ی تابع $y=f(x)$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.	① نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰)$ روی تابع f به نقطه‌ی $A'(-x_۰, -y_۰)$ روی تابع $y=-f(-x)$ تبدیل می‌شود. ② دامنه و برد هر دو تغییر می‌کنند. مقادیر دامنه و برد قرینه می‌شوند.

● **مثال:** با توجه به نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ که به شکل  است، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

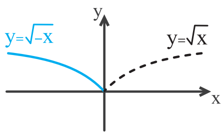
$(۱)\quad y=\sqrt{-x}$ $\qquad (۲)\quad y=\sqrt{-x+۲}$

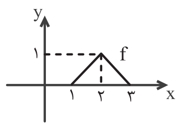
○ **حل:**

(۲) ابتدا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم تا تابع $y=\sqrt{x+۲}$ به دست آید؛ سپس با تبدیل x به $-x$ (یعنی تقارن نسبت به محور y ها) به $y=\sqrt{-x+۲}$ می‌رسیم.

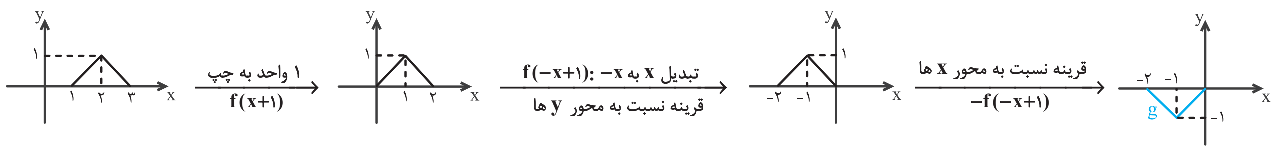


(۱) برای رسم $y=\sqrt{-x}$ کافی است قرینه‌ی نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها رسم کنیم.



● **مثال:** اگر نمودار تابع f به صورت  باشد، نمودار تابع $g(x)=-f(۱-x)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

○ **حل:** تابع g را با ساختن $-f(-x+۱)$ رسم می‌کنیم. برای این منظور از تابع $f(x)$ شروع می‌کنیم:

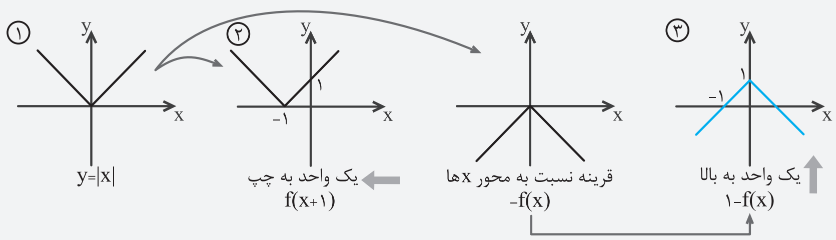


با توجه به نمودار، دامنه $D_g=[-۲, ۰]$ و برد $R_g=[-۱, ۰]$ است.

تست اگر $f(x)=|x|$ باشد، آنگاه نمودار دو تابع $f(x+۱)$ و $۱-f(x)$ در کدام بازه‌ی زیر بر هم منطبق‌اند؟

۱) $(-\infty, -۱]$ ۲) $[۰, ۱]$ ۳) $[-۱, ۰]$ ۴) $[۱, +\infty)$

پاسخ گزینه‌ی «۳» برای رسم $f(x+۱)$، نمودار تابع f را یک واحد به چپ انتقال می‌دهیم (شکل ②). برای رسم نمودار $۱-f(x)$، کافی است ابتدا نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه کرده و سپس نمودار حاصل را یک واحد به بالا انتقال دهیم (شکل ③).



بنابراین نمودار شکل‌های ② و ③ در بازه‌ی $[-۱, ۰]$ بر هم منطبق‌اند.

تذکر ۱ ◄ اگر ضابطه‌ی تابع $y=f(x)$ در اختیار باشد، آنگاه برای یافتن قرینه‌ی تابع $y=f(x)$:

① نسبت به محور x ها، کافی است در معادله y را به $-y$ تبدیل کنیم.

② نسبت به محور y ها، کافی است در معادله x را به $-x$ تبدیل کنیم.

③ نسبت به مبدأ مختصات، کافی است در معادله x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم.

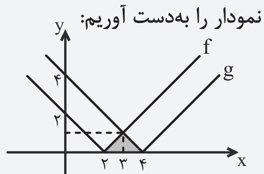
تست اگر نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را ۶ واحد به چپ انتقال داده و سپس قرینه‌ی نمودار حاصل را نسبت به محور y ها تعیین کنیم، تابع g به‌دست می‌آید. مساحت ناحیه‌ی محدود بین دو نمودار f و g و محور x ها، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ گزینه‌ی «۱» ابتدا ضابطه‌ی تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=|x-۲|\xrightarrow{\text{۶ واحد به چپ}}y=|x+۶-۲|=|x+۴|\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور y ها}}g(x)=|-x+۴|=|x-۴|$$

نمودار دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.برای محاسبه‌ی ناحیه‌ی سایه زده شده باید عرض نقطه‌ی تلاقی دو نمودار را به‌دست آوریم:



$$f(x)=g(x)\Rightarrow|x-۲|=|x-۴|\Rightarrow x-۲=\pm(x-۴)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۲=x-۴:\text{ جواب ندارد}\\ x-۲=-(x-۴)\Rightarrow x=۳\Rightarrow y=۱\end{cases}\Rightarrow S=\frac{۲\times۱}{۲}=۱$$

تست اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد، برای رسم تابع g باید قرینه‌ی f را نسبت به محور y ها تعیین کرده و سپس یک واحد به راست انتقال داده و در انتها نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل کنیم. فاصله‌ی نقطه‌ی وسط دو نقطه‌ی تلاقی تابع g و قرینه‌ی تابع f نسبت به محور x ها، از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ گزینه‌ی «۱» ضابطه‌ی تابع g را با توجه به مراحل گفته شده می‌یابیم:

$$y=\sqrt{x}\xrightarrow[x\to-x]{\text{قرینه نسبت به محور y ها}}y=\sqrt{-x}\xrightarrow[x\to x-۱]{\text{یک واحد به راست}}y=\sqrt{-(x-۱)}=\sqrt{۱-x}\xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}}g(x)=\sqrt{۱-x}-۱$$

قرینه‌ی تابع f نسبت به محور x ها، به‌صورت $h(x)=-f(x)=-\sqrt{x}$ است. برای یافتن محل‌های تلاقی دو تابع باید معادله‌ی $h(x)=g(x)$ را حل کنیم.

$$\sqrt{۱-x}-۱=-\sqrt{x}\Rightarrow\sqrt{۱-x}+\sqrt{x}=۱\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}۱-x+x+۲\sqrt{۱-x}\times\sqrt{x}=۱\Rightarrow۲\sqrt{۱-x}\times\sqrt{x}=۰\Rightarrow x=۱\,,\,x=۰$$

بنابراین با قرار دادن این دو طول در تابع g ، دو نقطه‌ی تلاقی $A(۰,۰)$ و $B(۱,-۱)$ خواهند بود، وسط این دو نقطه، $M(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$ است که فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OM=\sqrt{(\frac{۱}{۲})^۲+(-\frac{۱}{۲})^۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تذکر ۲ ◄ اگر در یک منحنی با ضابطه‌ی $y=f(x)$:

① با تبدیل x به $-x$ ، ضابطه‌ی منحنی تغییر نکند، منحنی نسبت به محور y ها متقارن است، یعنی $f(x)=f(-x)$.

② با تبدیل y به $-y$ ، ضابطه‌ی منحنی تغییر نکند، منحنی نسبت به محور x ها متقارن است، یعنی $f(x)=-f(x)$.

③ با تبدیل x به $-x$ و y به $-y$ ضابطه‌ی منحنی تغییر نکند، منحنی نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، یعنی $f(x)=-f(-x)$.

تست نمودار کدام تابع نسبت به محور y ها متقارن است؟

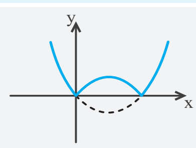
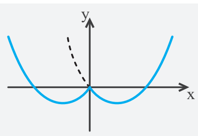
۱) $f(x)=\frac{۹^x-۳}{۳^x}$ ۲) $g(x)=\frac{۹^x-۱}{۳^x}$ ۳) $h(x)=\frac{۹^x+۱}{۳^x}$ ۴) $k(x)=\frac{۹^x+۳}{۳^x}$

پاسخ گزینه‌ی «۳» اگر $f(-x)=f(x)$ باشد، تابع f نسبت به محور y ها متقارن است. در تابع گزینه‌ی (۳) داریم:

$$h(x)=\frac{۹^x+۱}{۳^x}=\frac{۹^x}{۳^x}+\frac{۱}{۳^x}=(\frac{۹}{۳})^x+(\frac{۱}{۳})^x=۳^x+۳^{-x}\xrightarrow{\text{تبدیل x به -x}}h(-x)=۳^{-x}+۳^{-(-x)}=۳^{-x}+۳^x=h(x)$$

بنابراین تابع h نسبت به محور y ها متقارن است. با ساده کردن ضابطه‌ی سایر گزینه‌ها و تبدیل x به $-x$ ، می‌بینیم که این تساوی وجود ندارد.

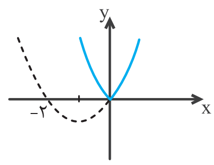
رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$ ◄ با استفاده از تعریف قدرمطلق می‌توانیم نمودار تابع $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$ را با در اختیار داشتن نمودار تابع $y=f(x)$ رسم کنیم. به جدول زیر توجه کنید.

روش رسم بدون ضابطه‌بندی	نمودار	تعریف ضابطه‌ی قدرمطلقی	تابع خواسته شده
کافی است قسمت‌هایی از نمودار را که پایین محور x هاست نسبت به محور x ها قرینه کرده و سپس قسمت پایین محور x ها را حذف کنیم.		$y=\begin{cases}f(x) & , & f(x)\geq۰\\ -f(x) & , & f(x)<۰\end{cases}$	$y=\|f(x)\|$
کافی است قسمت سمت چپ محور y ها را حذف کرده (در صورت وجود) و سپس قرینه‌ی قسمت سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها رسم کنیم.		$y=\begin{cases}f(x) & , & x\geq۰\\ f(-x) & , & x<۰\end{cases}$	$y=f(\|x\|)$

● **مثال:** به رسم نمودار توابع زیر توجه کنید.

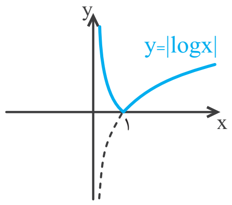
$(۲)\ y=x^۲+۲|x|$

○ حل: با توجه به اینکه $|x|^۲=x^۲$ و با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x$ و ویژگی رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ شکل روبه‌رو را داریم.



$(۱)\ y=|\log x|$

○ حل: با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\log x$ و ویژگی رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$ شکل روبه‌رو را داریم.



● **مثال:** نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x^۲+۴x|$ را رسم کنید و سپس تعیین کنید خط‌های $y=۱$، $y=۴$ و $y=۵$ آن را در چند نقطه قطع می‌کنند.

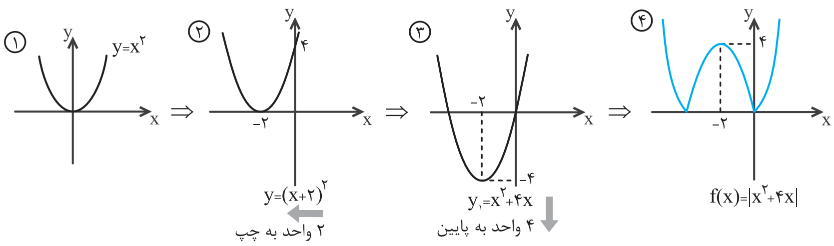
○ **حل:** برای رسم نمودار تابع، ابتدا تابع $y_۱=x^۲+۴x$ را رسم می‌کنیم، داریم:

$$y_۱=(x^۲+۴x+۴)-۴=(x+۲)^۲-۴$$

کافی است نمودار $y=x^۲$ را ۲ واحد به چپ و سپس ۴ واحد به پایین انتقال دهیم.

برای رسم تابع $y=|x^۲+۴x|$، قرینه‌ی قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها رسم می‌کنیم (شکل ۴).

با توجه به نمودار دیده می‌شود که خط $y=۱$، آن را در ۴ نقطه، خط $y=۴$ آن را در ۳ نقطه و خط $y=۵$ آن را در ۲ نقطه قطع می‌کند.



تست اگر $f(x)=|x|$، آنگاه مساحت محدود به نمودار تابع $g(x)=f(f(x)-۱)$ و خط $y=۱$ کدام است؟

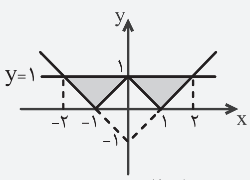
۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ گزینه‌ی «۱» تابع g را تشکیل داده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=|x|$$

$$g(x)=f(f(x)-۱)=f(|x|-۱)=||x|-۱|$$

برای رسم نمودار تابع g، نمودار تابع $y=|x|-۱$ را رسم کرده و قسمت پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



مساحت مورد نظر، مساحت قسمت سایه زده شده است که دو مثلث با قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۱ است:

$$S_{\text{سایه زده شده}}=۲\times\frac{۲\times۱}{۲}=۲$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

پیمانه‌های ۱ تا ۶ | **۶ پیمانه** | **۶۰ تست**

انتقال‌های افقی و عمودی | تیپ ۱ | صفحه‌های ۲ تا ۵ حسابان ۲

۱. اگر نقطه‌ی $A(x_۰,y_۰)$ روی تابع $y=f(x)$ باشد، نقطه‌ی A' متناظر آن روی تابع $g(x)=f(x+۱)-۳$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال)

۱) $(x_۰+۱,y_۰+۳)$ ۲) $(x_۰-۱,y_۰-۳)$ ۳) $(x_۰+۱,y_۰-۳)$ ۴) $(x_۰-۱,y_۰+۳)$

۲. نقطه‌ی $A(۱,-۸)$ روی تابع $y=f(x+۱)-۲$ است، تبدیل یافته‌ی این نقطه در تابع $y=f(x-۱)+۲$ در کدام فاصله از مبدأ مختصات است؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال)

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۵}$

۳. اگر دامنه و برد تابع $k(x)=f(x-۱)+۱$ به ترتیب $D_k=[-۱,۱]$ و $R_k=[۰,۴]$ باشند، آنگاه در تابع $g(x)=f(x+۱)-۱$، مجموعه‌ی $D_g\cap R_g$ شامل چند عدد صحیح است؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

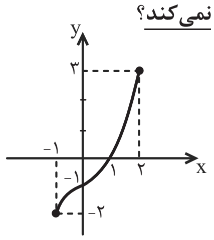
۴. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، نمودار کدام تابع از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال)

۱) $y=f(x-۲)$

۲) $y=f(x+۱)-۱$

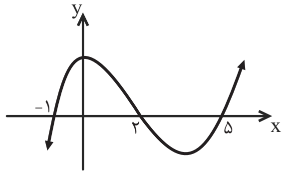
۳) $y=f(x-۱)+۱$

۴) $y=f(x+۲)$



۵. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر باشد، به ازای کدام مقدار a، مجموع ریشه‌های معادله‌ی $f(x-a)=0$ صفر است؟

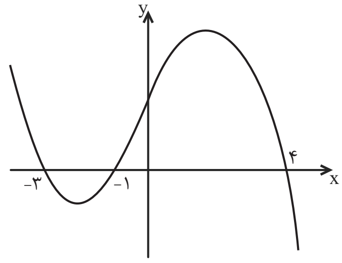
(صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۲)



۱) ۲
۲) ‎-۲
۳) ‎-۳
۴) ۳

۶. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x-2)$ است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟

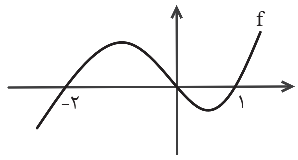
(صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۲) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۴)



۱) $[-1,1]\cup[0,6]$
۲) $[-3,1]\cup[0,2]$
۳) $[-5,-3]\cup[-1,2]$
۴) $[-5,-3]\cup[0,2]$

۷. نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{-\dfrac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

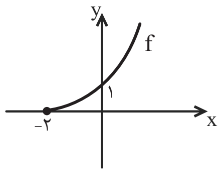
(صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مکمل ۲) **(سراسری تجربی- تیر ۱۴۰۲)**



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۵

۸. اگر نمودار تابع f به شکل زیر باشد، نمودار تابع $y=-2+f^{-1}(x-1)$ از کدام ناحیه (نواحی) دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟

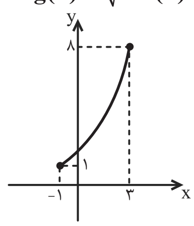
(صفحه‌ی ۵- مکمل مثال)



۱) دوم
۲) سوم
۳) سوم و چهارم
۴) دوم و سوم

۹. اگر نمودار تابع $y=f(x-2)$ به صورت زیر باشد و $f(0)=4$، آنگاه دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{f^{-1}(x)}$ کدام است؟

(صفحه‌ی ۵- کار در کلاس- مرتبط با ۲)



۱) $[-3,1]$
۲) $[0,8]$
۳) $[4,8]$
۴) $[1,8]$

۱۰. نمودار تابع $f(x)=|x|$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (صفحه‌ی ۲- مکمل مثال)

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) چهار نقطه

۱۱. نمودار تابع $f(x)=|x-1|-4$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی و سپس ۳ واحد به طرف yهای مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار تابع جدید در کدام بازه بالای نیمساز ربع چهارم است؟

(صفحه‌ی ۳- مکمل مثال) (آزمون کانون – ۱۹ مهر ۹۸)

۱) $(-\infty,0)$ ۲) $(-1,1)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $(0,+\infty)$

۱۲. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y=\sqrt{x^2-4x+4}$ و $y=\frac{1}{2}x+2$، کدام است؟ (صفحه‌ی ۲- مکمل مثال) **(سراسری ریاضی – ۹۹)**

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

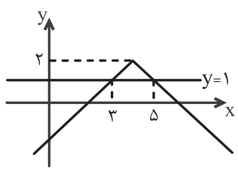
۱۳. نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به راست و سپس ۲ واحد به پایین انتقال داده و آن را $f(x)$ می‌نامیم. نمودار تابع f در بازه‌ی (x_1,x_2) پایین خط Δ به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}x+2$ است، بیشترین مقدار x_2-x_1 کدام است؟

(صفحه‌ی ۲- مکمل مثال)

۱) ۹ ۲) ۱۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۴. نمودار تابع f در شکل زیر، از انتقال k واحد به راست و سپس m واحد به بالای تابع $y=-|x|$ به دست آمده است. خط $y=1$ نمودار تابع f را در دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵ قطع می‌کند. مقدار $m+k$ کدام است؟

(صفحه‌ی ۲- مکمل مثال)



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۸
۴) ۶

۱۵. اگر $f(x)=x^2+x$، آنگاه نمودار کدام تابع زیر، محور xها را در دو نقطه به طول مثبت قطع می‌کند؟ (صفحه‌ی ۴- مکمل مثال)

۱) $f(x)-2$ ۲) $f(x)+2$ ۳) $f(x-2)$ ۴) $f(x+1)$

۱۶. نمودار تابع $f(x)=x^2-6x$ با دو انتقال بر نمودار تابع $g(x)=x^2+2x$ منطبق می‌شود. در این انتقال، نقطه‌ای به طول ۵ واقع بر تابع f به نقطه‌ای با کدام عرض در تابع g تبدیل می‌شود؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال)

۱) -13 ۲) -5 ۳) 3 ۴) -9

۱۷. نمودار تابع با ضابطه $f(x)=4x-x^2$ را در امتداد محور xها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات کدام است؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال) **(سراسری تجربی – تیر ۱۴۰۱)**

۱) 1 ۲) 2 ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{10}$

۱۸. نمودار تابع $y=x^2-x-3$ را ۲ واحد به‌طرف xهای منفی سپس ۹ واحد به‌طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟ (انتقال نمودار توابع و نامعادلات درجه دوم-سؤال ترکیبی) **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۸)**

۱) $(-5,2)$ ۲) $(-5,3)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(-2,5)$

۱۹. نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ (انتقال نمودار توابع و نامعادلات درجه دوم-سؤال ترکیبی) **(سراسری ریاضی – ۹۸)**

۱) $(3,4)$ ۲) $(2,5)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(2,6)$

۲۰. تابع درجه‌ی دوم $y=f(x)$ را یک واحد به طرف xهای منفی انتقال می‌دهیم. ضابطه‌ی نمودار حاصل $g(x)=x^2-x+k$ است. اگر نقطه‌ی $A(2,5)$ روی تابع f باشد، $g(2)$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۴- مکمل مثال)

۱) ۷ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۱. تابع f از انتقال ۲ واحد به چپ تابع $y=-x^2$ و تابع g از انتقال m واحد به چپ و سپس k واحد به پایین تابع $y=x^2$ به دست می‌آید. اگر طول‌های محل تلاقی توابع f و g برابر با -1 و -2 باشند، مقدار $g(5)$ کدام است؟ (صفحه‌ی ۴- مکمل مثال)

۱) ۱۹ ۲) ۲۷ ۳) ۳۵ ۴) ۱۲

۲۲. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x)=(x-1)^2$ حاصل می‌شود. در این صورت تابع fog محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟ (صفحه‌ی ۵- مرتبط با مثال) (آزمون کانون – ۵ آذر ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد، آنگاه نمودار دو تابع $y=f(x)+1$ و $y=f(x+2)$ در نقطه‌ای .... متقاطع‌اند. (صفحه‌ی ۴- کاردر کلاس- مکمل۱)

۱) روی محور yها
۲) بالای نیمساز ناحیه‌ی اول
۳) پایین نیمساز ناحیه‌ی اول
۴) در ناحیه‌ی دوم

۲۴. برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x-2}$ با استفاده از تابع $g(x)=-1+\sqrt{x+1}$ کافی است ابتدا نمودار تابع g را ..... و سپس...... انتقال دهیم. (صفحه‌ی ۴- کار در کلاس- مشابه ۱- ج)

۱) ۳ واحد به راست - یک واحد به بالا
۲) ۳ واحد به چپ - یک واحد به بالا
۳) ۳ واحد به راست - یک واحد به پایین
۴) یک واحد به راست - یک واحد به پایین

۲۵. قرینه‌ی نمودار تابع $y=2+\sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور xها و ۳ واحد در جهت منفی محور yها انتقال می‌دهیم و آن را $y=g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟
(تابع وارون و انتقال نمودار توابع- سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی– ۱۴۰۰)**

۱) 3 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -4

۲۶. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟
(انتقال نمودار توابع و معادلات رادیکالی-سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی – ۹۹)**

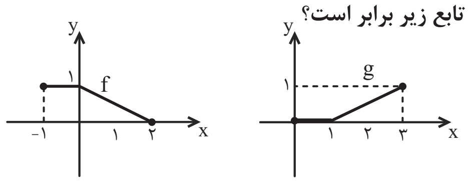
۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $6\sqrt{7}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $6\sqrt{10}$

۲۷. تابع $y=2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور xها در جهت منفی و سپس در امتداد محور yها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟ (انتقال نمودار توابع و معادلات قدرمطلقی-سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی خارج از کشور – ۱۴۰۰)**

۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

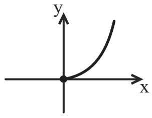
انعکاس نمودارها (قرینه‌یابی) | تیپ ۲ | صفحه‌های ۷ تا ۱۲ حسابان ۲

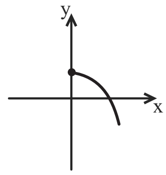
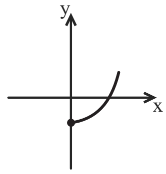
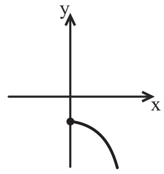
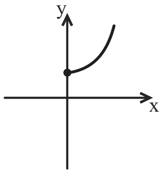
۲۸. نمودار دو تابع f و g در زیر رسم شده‌اند. $g(x)$ با کدام تابع زیر برابر است؟ (صفحه‌ی ۸- کار در کلاس- مکمل ۳)



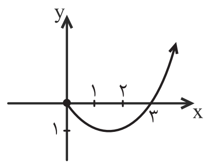
۱) $-1+f(x+1)$
۲) $2+f(x+1)$
۳) $2-f(x-1)$
۴) $1-f(x-1)$

حسابان ۲ (کد: ۳۱۱۴)

۲۹. اگر نمودار تابع $y=۱-f(x)$ به شکل  باشد، نمودار تابع $y=f(x)$ به کدام شکل زیر است؟ (صفحه‌ی ۸- کار در کلاس- مکمل ۳)

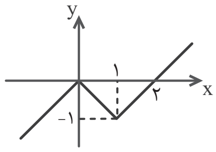
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۳۰. اگر نمودار تابع $y=f(x+۱)$ به صورت زیر باشد، آن‌گاه دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{-f(x+۲)}$ کدام است؟
(صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۲ شهریور ۹۷)



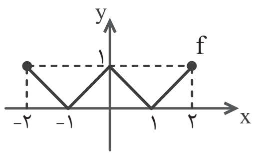
۱) $[-۱,۲]$
۲) $[۱,۳]$
۳) $[۲,+\infty)$
۴) $[-۳,۰]$

۳۱. نمودار تابع f به‌شکل زیر است. نمودار تابع f را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس $\frac{۱}{۳}$ واحد به پایین انتقال می‌دهیم و در انتها در جاهایی که نمودار زیر محور xهاست، تصویر آینه‌وار آن‌را نسبت به محور xها رسم کرده و تابع حاصل را g می‌نامیم. معادله‌ی $g(x)=k$ به ازای کدام مجموعه مقادیر k بیشترین ریشه را دارد؟ (صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۳)

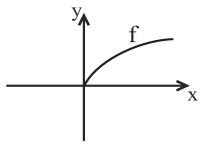


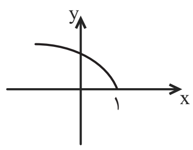
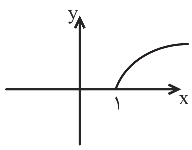
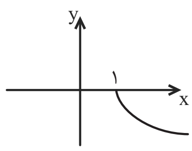
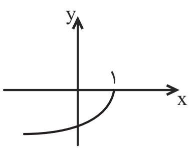
۱) $(۰,۱)$
۲) $(۰,\frac{۱}{۳})$
۳) $(۰,\frac{۲}{۳})$
۴) $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

۳۲. اگرنمودار تابع f به‌شکل زیر باشد، آنگاه خط $y=۱$ با نمودار تابع $g(x)=\begin{cases} f(x+۲) & , \ -۴\le x\le ۰ \\ f(۱-x) & , \ ۰<x\le ۳\end{cases}$، چند نقطه‌ی مشترک دارد؟
(صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۳)

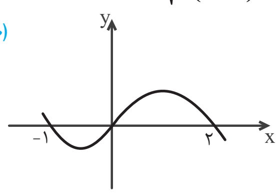


۱) ۵
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۴

۳۳. هرگاه نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل  باشد، نمودار تابع $y=-f(۱-x)$ به کدام شکل زیر است؟
(صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۳) (آزمون کانون - ۸۸)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۳۴. شکل زیر، نمودار $f(x-۲)$ را نشان می‌دهد. دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}}$، شامل چند عدد صحیح است؟
(صفحه‌ی ۱۲-مکمل تمرین ۳) **(سراسری تجربی خارج از کشور - تیر ۱۴۰۲)**



۱) ۴
۲) ۲
۳) صفر
۴) بیش از ۴

۳۵. نمودار تابع $f(x)=۴x-x^۲$ با انتقال‌هایی بر نمودار تابع $g(x)=x^۲+۲x$ منطبق می‌شود. در این انتقال‌ها، نقطه‌ای به‌طول ۱ واقع بر تابع f به نقطه‌ای با کدام مختصات بر روی g تبدیل می‌شود؟ (صفحه‌ی ۷- مکمل کار در کلاس)

۱) $(۰,۰)$ ۲) $(-۱,-۱)$ ۳) $(-۲,۰)$ ۴) $(۱,۳)$

۳۶. ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- مکمل کار در کلاس) **(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۹)**

۱) ۰ , ۲ ۲) ۱ , ۱- ۳) ۲ , ۱- ۴) ۱ , ۲-

۳۷. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}-۲x\,;\,(x>۱)$، مفروض است. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟
(صفحه‌ی ۷- مکمل کار در کلاس) **(سراسری تجربی خارج از کشور – ۹۹)**

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

۳۸. فرض کنید $f(x)=|x|$. تابع g از انتقال یک واحد f به راست و سپس انعکاس نمودار حاصل نسبت به محور x ها و در انتها انتقال یک واحد به بالای نمودار حاصل در راستای محور y ها به دست می‌آید. در چه بازه‌ای نمودار دو تابع f و g بر هم منطبق‌اند؟ (صفحه‌ی ۷- مکمل کار در کلاس)

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[۱,+\infty)$ ۳) $(-\infty,۰]$ ۴) R

۳۹. نمودار تابع g از انتقال یک واحد به راست تابع $f(x)=|x|$ و نمودار تابع h از تقارن تابع f نسبت به محور x ها و سپس انتقال ۳ واحد به بالا به‌دست می‌آید. مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار دو تابع g و h کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- مکمل کار در کلاس)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۰. فرض کنید $f(x)=|x|$ باشد. اگر نمودار f را ۱ واحد به راست و سپس انعکاس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها رسم کرده و در انتها ۵ واحد به بالا انتقال دهیم، تابع g به‌دست می‌آید. در بازه یا بازه‌هایی نمودار تابع $g(x)$ بالای نمودار تابع $۲f(x)$ است، طول بزرگترین این بازه‌ها کدام است؟
(نامعادلات و تبدیل نمودار توابع - سؤال ترکیبی)

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۴۱. نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه‌ی آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟
(معادلات و تبدیل نمودار توابع- سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی خارج از کشور–تیر ۱۴۰۱)**

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$

۴۲. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد، آنگاه نمودار دو تابع $y=f(x-۲)-۲$ و $y=۳-f(x)$، یکدیگر را در کدام بازه‌ی زیر قطع می‌کنند؟
(صفحه‌ی ۸- کار در کلاس- مکمل ۳)

۱) $(۰,۲)$ ۲) $(۲,۶)$ ۳) $(۶,۹)$ ۴) $(۹,+\infty)$

۴۳. قرینه‌ی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (صفحه‌ی ۱۱- مکمل تمرین ۱) (سراسری تجربی خارج از کشور- ۹۷)

۱) -۲ ۲) $۰/۵$ ۳) ۱ ۴) $۱/۵$

۴۴. قرینه‌ی نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت راست، انتقال می‌دهیم. منحنی اخیر و منحنی اصلی نسبت به کدام خط، متقارن هستند؟ (صفحه‌ی ۱۱- مکمل تمرین ۱) **(سراسری ریاضی– ۹۹)**

۱) $x=۱$ ۲) $x=۱/۵$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=۲/۵$

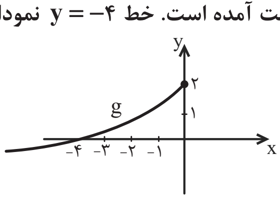
۴۵. نمودار منحنی $y=\sqrt{۴-x}$ را k واحد در راستای قائم و $k-۲$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه‌ی برخورد منحنی به‌دست آمده با محور x ها، کدام است؟
(نمودار تابع وارون و انتقال - سؤال ترکیبی) **(سراسری ریاضی– ۱۴۰۰)**

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۱ ۴) ۲

۴۶. نمودار منحنی $y=\sqrt{\sqrt{x}+۳}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام‌یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به دست آمده، قرار دارد؟
(نمودار تابع وارون و انتقال- سؤال ترکیبی) **(سراسری ریاضی خارج از کشور – ۱۴۰۰)**

۱) $(۱-\sqrt{۵},۰)$ ۲) $(-\sqrt{۵},۰)$ ۳) $(۰,۱-\sqrt{۵})$ ۴) $(۰,-\sqrt{۵})$

۴۷. نمودار تابع g در شکل زیر، فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به دست آمده است. خط $y=-۴$ نمودار تابع $y=g(x)$ را با چه طولی قطع می‌کند؟ (صفحه‌ی ۱۲- مکمل تمرین ۴)



۱) -۲۵ ۲) -۹ ۳) -۱۶ ۴) -۳۶

۴۸. اگر در بازه‌ی $(۰,a)$ نمودار تابع $y=|x+۲|$ بالای نمودار تابع $y=\sqrt{b-x}$ قرار گیرد، آنگاه: (صفحه‌ی ۱۱- مکمل تمرین ۱)

۱) $a=b$ ۲) $a+b=۰$ ۳) $۲a=b$ ۴) $۲b=a$

۴۹. نمودار تابع $f(x)=\sqrt{|x-۲|+|x+۴|}$ نسبت به کدام خط، متقارن است؟ (معادلات و تقارن – سؤال ترکیبی)

۱) محور x ها ۲) خط $x=-۱$ ۳) خط $x=۱$ ۴) محور y ها

۵۰. اگر f یک تابع چندجمله‌ای و $f(۲-x)=f(۲+x)$ باشد، آنگاه نمودار تابع f نسبت به کدام خط زیر، متقارن است؟ (معادلات و تقارن – سؤال ترکیبی)

۱) محور x ها ۲) خط $x=۰$ ۳) خط $x=۲$ ۴) خط $x=-۲$

۵۱. اگر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۴+۳x^۳+A(x+۱)^۳+Bx$ نسبت به محور y ها متقارن باشد، آنگاه $A+B$ کدام است؟ (معادلات و تقارن – سؤال ترکیبی)

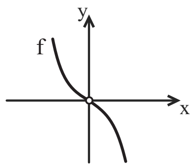
۱) -۶ ۲) -۳ ۳) صفر ۴) ۶

۵۲. اگر تابع f نسبت به محور y ها و تابع g نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد و داشته باشیم: $f(x)+g(x)=۲^x$، آنگاه $g(۲)$ کدام است؟ (معادلات و تقارن – سؤال ترکیبی)

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

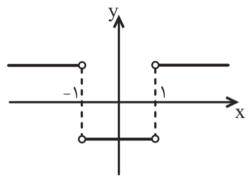
رسم نمودار تابع‌های $y=|f(x)|$ و $y=f(|x|)$ | تیپ ۳ | صفحه‌های ۷ تا ۱۲ حسابان ۲

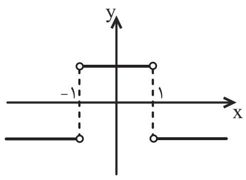
۵۳. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آنگاه تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ با کدام تابع زیر برابر است؟ (صفحه‌ی ۷- متن درس)

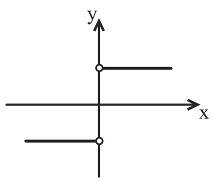


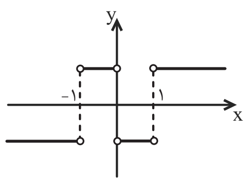
۱) $y=-|f(x)|$
۲) $y=|f(x)|$
۳) $y=f(x)$
۴) $y=-f(x)$

۵۴. اگر $f(x)=|x|-۱$ باشد، نمودار تابع $y=\frac{|f(x)|}{f(x)}$ به کدام صورت است؟ (صفحه‌ی ۷- متن درس) (آزمون کانون – ۸ بهمن ۹۵)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۵۵. خط $y=k$ نمودار تابع $f(x)=|x^۲-۴x|$ را دقیقاً در ۳ نقطه قطع می‌کند. مقدار k کدام است؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مرتبط با ۲) (آزمون کانون – ۷ فروردین ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱}{۲}$

۵۶. اگر $x_۱$ و $x_۲$ طول‌های محل تلاقی خط $y-x=۲$ و نمودار تابع $y=\frac{۱}{۵}|x^۲-۴|$ باشند، حاصل $x_۱x_۲$ کدام است؟ (معادلات و تبدیل نمودار توابع-سؤال ترکیبی)

۱) -۷ ۲) -۱۴ ۳) -۱۲ ۴) -۶

۵۷. معادله‌ی $||x|-۲|=\sqrt{x-k}$ به‌ازای مقادیر مختلف k، حداکثر چند ریشه دارد؟ (صفحه‌ی ۷- کار در کلاس- مرتبط با ۲) (آزمون کانون – ۵ آذر ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۸. نمودار دو تابع $y=۳^{-|x|}$ و $y=۲-x^۲$ در چند نقطه مشترکند؟ (صفحه‌ی ۱۲- مرتبط با تمرین ۳)

۱) یک ۲) دو ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

۵۹. نمودار تابع $y=۲^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{۳}{۲}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله‌ی $[۰,\pi]$، کدام است؟ (معادلات و تبدیل نمودار توابع-سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی – ۱۴۰۰)**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۶۰. نمودار $\frac{۱}{f}$ را در امتداد محور x ها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{۱}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a)=۳$ کدام است؟ (معادلات و تبدیل نمودار توابع- سؤال ترکیبی) **(سراسری تجربی – دی ۱۴۰۱)**

۱) $۲+\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ تشریحی تابع

پاسخ تشریحی: حسین حاجیلو، فرهاد حامی
فرزانه دانایی، حمیدرضا رحیم‌خانلو

راهبرد حل تیپ (۱)

الف) نمودار تابع $f(x+k)$ با انتقال نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید که اگر k مثبت باشد، k واحد به سمت چپ و اگر k منفی باشد، k واحد به سمت راست انتقال می‌یابد.

نمودار تابع $f(x)+k$ با انتقال نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور yها به دست می‌آید که اگر k مثبت باشد، k واحد به سمت بالا و اگر k منفی باشد، k واحد به سمت پایین انتقال می‌یابد.

ب) اگر نقطه‌ی $A(x_0, y_0)$ روی تابع $y=f(x)$ باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'(x_0+k, y_0+c)$ روی تابع $y=f(x-k)+c$ است.

● نکته‌ی ۱: اگر دامنه‌ی تابع $f(x)$ بازه‌ی $[a, b]$ و برد آن بازه‌ی $[m, n]$ باشد، تأثیر انتقال‌های افقی و عمودی تابع بر روی دامنه و برد به صورت زیر است:

برد	دامنه	انتقال تابع $f(x)$
تأثیری ندارد.	$[a-k, b-k]$	$f(x+k)$
$[m+k, n+k]$	تأثیری ندارد.	$f(x)+k$

● نکته‌ی ۲: اگر دو تابع از یک خانواده باشند، مثلاً هر دو تابع درجه‌ی دوم یا هر دو تابع گویا باشند، آنگاه می‌توان با انتقال‌های افقی و عمودی نمودار یکی از آنها به نمودار دیگری رسید. برای این منظور باید ضابطه‌ی هر دو تابع را به شکل استاندارد تبدیل کنیم. به شکل استاندارد تابع‌های زیر توجه کنید:

تابع درجه‌ی دوم : $y=(x-h)^2+k$

تابع گویا : $y=\frac{1}{x-h}+k$

۱. گزینه‌ی ۲

در تبدیل نقاط تابع $f(x)$ به نقاط تابع $f(x+1)-3$، به طول هر نقطه -1 واحد و به عرض هر نقطه -3 واحد اضافه می‌شود:

$$A(x_0, y_0) \xrightarrow{f(x+1)-3} A'(x_0-1, y_0-3)$$

۲. گزینه‌ی ۳

اگر تابع $y=f(x+1)-2$ را ابتدا دو واحد به راست و سپس ۴ واحد به بالا منتقل کنیم، تابع $y=f(x-1)+2$ حاصل می‌شود. پس به طول هر نقطه ۲ واحد و به عرض هر نقطه ۴ واحد اضافه می‌شود:

$$A(1, -8) \to A'(1+2, -8+4)=(3, -4)$$

فاصله‌ی نقطه‌ی A' از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA'=\sqrt{x_{A'}^2+y_{A'}^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$$

۳. گزینه‌ی ۱

با انتقال تابع $k(x)=f(x-1)+1$ ۲ واحد به چپ و دو واحد به پایین، تابع $g(x)=f(x+1)-1$ ساخته می‌شود.

$$g(x)=k(x+2)-2$$

$$\begin{cases} D_k=[-1, 1] \xrightarrow{-2} D_g=[-1-2, 1-2]=[-3, -1] \\ R_k=[0, 4] \xrightarrow{-2} R_g=[0-2, 4-2]=[-2, 2] \end{cases}$$

$$D_g \cap R_g=[-3, -1]\cap[-2, 2]=[-2, -1] \to$$

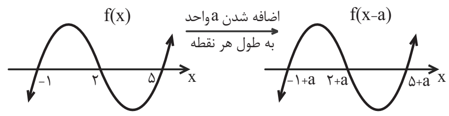
شامل دو عدد صحیح است.

۴. گزینه‌ی ۴

اگر نمودار تابع f بیشتر از یک واحد به چپ یا بیشتر از یک واحد به بالا منتقل شود، آنگاه از ناحیه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد. در گزینه‌ی (۴)، تابع f دو واحد به چپ منتقل می‌شود، پس نمودار تابع $f(x+2)$ از ناحیه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد.

۵. گزینه‌ی ۲

به طول هر نقطه‌ی تابع $f(x)$، a واحد اضافه می‌شود و تابع $f(x-a)$ تشکیل می‌شود، پس نمودار تابع $f(x-a)$ به صورت زیر خواهد بود:

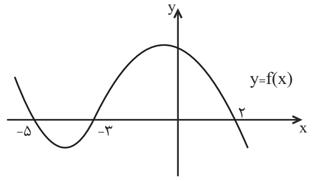


با توجه به نمودار تابع $f(x-a)$، ریشه‌های معادله‌ی $f(x-a)=0$ به‌صورت $x_1=-1+a$، $x_2=2+a$ و $x_3=5+a$ است، لذا:

$$x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow -1+a+2+a+5+a=0$$
$$\Rightarrow 3a+6=0 \Rightarrow a=-2$$

۶. گزینه‌ی ۴

ابتدا نمودار تابع $y=f(x-2)$ را دو واحد به چپ انتقال می‌دهیم $(x \to x+2)$ تا نمودار تابع $y=f(x)$ حاصل شود.



حال دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ را می‌یابیم. باید: $xf(x)\ge 0$

با تعیین علامت، جواب را می‌یابیم:

		-5		-3		0		2	
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$xf(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

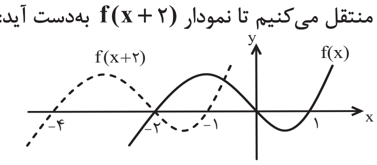
پس مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی بالا و در نتیجه دامنه‌ی تابع برابر است با: $x\in[-5, -3]\cup[0, 2]$

۷. گزینه‌ی ۱

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد:

$$g(x)=\sqrt{-\frac{f(x)}{f(x+2)}} \to -\frac{f(x)}{f(x+2)}\ge 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(x+2)}\le 0$$

برای تعیین علامت عبارت $P=\frac{f(x)}{f(x+2)}$، ابتدا نمودار $f(x)$ را دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x+2)$ به‌دست آید:



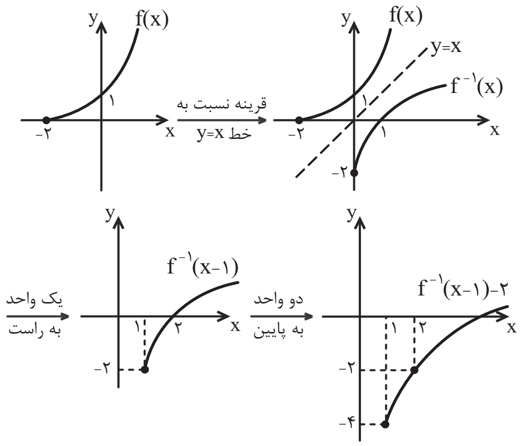
با توجه به نمودار، عبارت P را تعیین علامت می‌کنیم:

x		-4		-2		-1		0		1	
$f(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
P	$+$	ت.ن	$-$	ت.ن	$-$	ت.ن	$+$	0	$-$	0	$+$

بازه‌هایی که در آن‌ها P منفی یا صفر است، دامنه‌ی تابع g را تشکیل می‌دهند، یعنی: $D_g=(-4, -2)\cup(-2, -1)\cup[0, 1]$، که این مجموعه شامل اعداد صحیح -3، 0 و 1 است.

۸. گزینه ۴

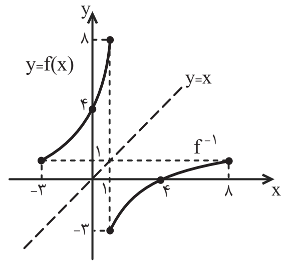
نمودار تابع $y=-۲+f^{-۱}(x-۱)$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم.



بنابراین نمودار از ناحیه‌ی دوم و سوم عبور نمی‌کند.

۹. گزینه ۳

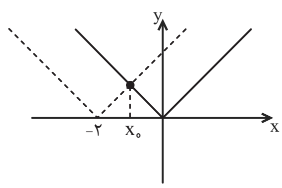
عبارت زیر رادیکال در تابع $g(x)=\sqrt{f^{-۱}(x)}$ باید نامنفی باشد، پس $f^{-۱}(x)\ge ۰$. برای یافتن نمودار تابع $f^{-۱}$، ابتدا نمودار تابع $y=f(x-۲)$ را دو واحد به چپ منتقل کرده و سپس نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم. (توجه کنید که $f(۰)=۴$ است.)



با توجه به نمودار، تابع $f^{-۱}(x)$ به ازای $x\in[۴,۸]$ نامنفی است، پس:

$D_g=[۴,۸]$

۱۰. گزینه ۱



با رسم نمودار تابع‌های $y_۱=|x|$ و $y_۲=|x+۲|$ در یک دستگاه دیده می‌شود که دو نمودار در یک نقطه متقاطع‌اند.

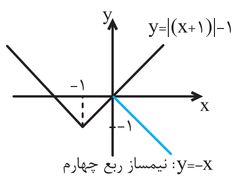
۱۱. گزینه ۴

$f(x)=|x-۱|-۴$

$\xrightarrow[\text{x های منفی}]{\text{۲ واحد به طرف}} y=|x+۲-۱|-۴=|x+۱|-۴$

$\xrightarrow[\text{y های مثبت}]{\text{۳ واحد به طرف}} y=|x+۱|-۴+۳=|x+۱|-۱$

نیمساز ربع چهارم و نمودار تابع $y=|x+۱|-۱$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار کافی است نمودار تابع $y=|x|$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم.

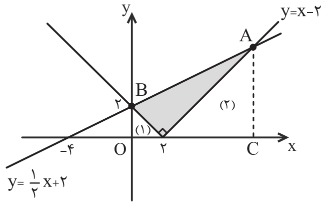


با توجه به نمودار، در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ نمودار تابع جدید بالای نیمساز ناحیه‌ی چهارم قرار دارد.

۱۲. گزینه ۴

نمودارهای دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، توجه کنید که:

$$y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}=\sqrt{(x-۲)^۲}=|x-۲|=\begin{cases}x-۲ & ;\ x\ge ۲\\ ۲-x & ;\ x<۲\end{cases}$$



حال باید مختصات نقطه‌ی A را پیدا کنیم:

$$\begin{cases}y=x-۲\\ y=\frac{۱}{۲}x+۲\end{cases}\xrightarrow{\text{حل دستگاه}}\begin{cases}x=۸\\ y=۶\end{cases}\Rightarrow A(۸,۶)$$

راه حل اول: مساحت ناحیه‌ی مورد نظر برابر است با مساحت ذوزنقه‌ی $ABOC$ منهای مجموع مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی (۱) و (۲).

$$\begin{cases}S(ABOC)=\frac{(۲+۶)\times۸}{۲}=۳۲\\ S_۱=\frac{۲\times۲}{۲}=۲\ ,\ S_۲=\frac{۶\times۶}{۲}=۱۸\end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\text{مطلوب}}=۳۲-(۲+۱۸)=۱۲$$

راه حل دوم: مساحت ناحیه‌ی مورد نظر، مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم $\sqrt{۶^۲+۶^۲}=۶\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۲}$ است، بنابراین:

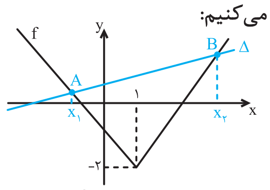
$$S_{\text{مطلوب}}=\frac{۲\sqrt{۲}\times۶\sqrt{۲}}{۲}=۱۲$$

۱۳. گزینه ۳

ابتدا ضابطه‌ی تابع f را می‌یابیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$y=|x|\xrightarrow[\text{به راست}]{\text{یک واحد}}y=|x-۱|$

$\xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{۲ واحد}}f(x)=|x-۱|-۲$



با توجه به نمودار، تابع f در بازه‌ی $(x_۱,x_۲)$ پایین خط Δ قرار دارد. $x_۱$ و $x_۲$ نقاط تقاطع خط با دو شاخه‌ی نمودار تابع f هستند:

$$\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+۲=x-۱-۲\Rightarrow\frac{x}{۲}=۵\Rightarrow x_۲=۱۰\\ \frac{۱}{۲}x+۲=-(x-۱)-۲\Rightarrow\frac{۳x}{۲}=-۳\Rightarrow x_۱=-۲\end{cases}$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله بازه‌ی $(-۲,۱۰)$ است، پس بیشترین مقدار $x_۲-x_۱=۱۰-(-۲)=۱۲$ است.

۱۴. گزینه ۴

$y=-|x|\xrightarrow{\text{k واحد به راست}}y=-|x-k|$

$\xrightarrow{\text{m واحد به بالا}}f(x)=-|x-k|+m$

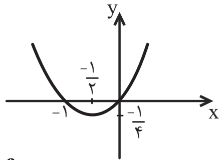
از آنجا که نقاط به طول ۳ و ۵ دارای عرض یکسانی هستند، پس نقطه‌ی وسط آنها روی خط تقارن نمودار قرار دارد، بنابراین:

$x=\frac{۳+۵}{۲}=۴$: محور تقارن

محور تقارن تابع $f(x)=-|x-k|+m$ به صورت $x=k$ است، بنابراین $k=۴$ است. از طرفی نمودار، ۲ واحد به بالا رفته است، پس $m=۲$ است، در نتیجه: $m+k=۴+۲=۶$

۱۵. گزینهٔ ۳

نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+x=x(x+۱)$ به صورت زیر است.



اگر نمودار این تابع بیشتر از یک واحد به راست منتقل شود، آنگاه در دو نقطه با طول مثبت محور x ها را قطع خواهد کرد.

تابع گزینهٔ (۳)، $f(x-۲)$ با انتقال ۲ واحد به راست تابع f به دست می‌آید، بنابراین نمودار $f(x-۲)$ محور x ها را در دو نقطه با طول مثبت قطع خواهد کرد.

۱۶. گزینهٔ ۳

ابتدا ضابطهٔ دو تابع را به فرم استاندارد $y=(x-h)^{۲}+k$ تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=x^{۲}-۶x=x^{۲}-۶x+۹-۹=(x-۳)^{۲}-۹$$

$$g(x)=x^{۲}+۲x=x^{۲}+۲x+۱-۱=(x+۱)^{۲}-۱$$

بنابراین با انتقال نمودار تابع $f(x)=(x-۳)^{۲}-۹$، ۴ واحد به چپ و ۸ واحد به بالا، نمودار تابع $g(x)=(x+۱)^{۲}-۱$ حاصل می‌شود. بنابراین به طول نقاط تابع f، -۴ واحد و به عرض نقاط تابع f، ۸ واحد اضافه می‌شود و نقاط تابع g حاصل می‌شود. بنابراین نقطه به طول ۵ روی تابع f که عرض آن برابر با $f(۵)=۵^{۲}-۶\times۵=-۵$ است، به نقطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$(۵,-۵)\to(۵-۴,-۵+۸)=(۱,۳)$$

۱۷. گزینهٔ ۴

اگر نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور x ها، k واحد در جهت منفی منتقل شود، نمودار $y=f(x+k)$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=۴x-x^{۲}\xrightarrow{\text{۲ واحد در جهت منفی محور } x \text{ ها}}$$

$$f(x+۲)=۴(x+۲)-(x+۲)^{۲}=۴-x^{۲}$$

حال نقطهٔ تقاطع نمودارهای $y=۴x-x^{۲}$ و $y=۴-x^{۲}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}y=۴x-x^{۲}\\y=۴-x^{۲}\end{cases}\Rightarrow ۴x-x^{۲}=۴-x^{۲}\Rightarrow ۴x=۴$$

$$\Rightarrow x=۱\Rightarrow y=۳$$

بنابراین $A(۱,۳)$ نقطهٔ تقاطع دو نمودار است که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $O(۰,۰)$ برابر است با:

$$OA=\sqrt{(۱-۰)^{۲}+(۳-۰)^{۲}}=\sqrt{۱۰}$$

۱۸. گزینهٔ ۱

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را دو واحد به سمت x های منفی انتقال دهیم، x تبدیل به $(x+۲)$ می‌شود و اگر نمودار f را ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال دهیم، از مقادیر y، ۹ واحد کم می‌شود. با این توضیح، معادلهٔ نمودار مورد نظر سؤال به صورت $y=f(x+۲)-۹$ است، داریم:

$$\begin{cases}f(x)=x^{۲}-x-۳\\y=f(x+۲)-۹\Rightarrow y=(x+۲)^{۲}-(x+۲)-۳-۹\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=(x^{۲}+۴x+۴)-(x+۲)-۱۲$$
$$=x^{۲}+۳x-۱۰$$

برای آنکه بدانیم نمودار $y=x^{۲}+۳x-۱۰$ در چه بازه‌ای زیر محور x ها قرار می‌گیرد باید نامعادلهٔ $y<۰$ را حل کنیم:

$$x^{۲}+۳x-۱۰<۰\Rightarrow(x+۵)(x-۲)<۰\Rightarrow -۵<x<۲$$

۱۹. گزینهٔ ۱

برای ساده شدن محاسبات، ابتدا عبارت درجه دوم را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$y=-x^{۲}+۲x+۵=-(x^{۲}-۲x)+۵$$
$$=-((x-۱)^{۲}-۱)+۵=-(x-۱)^{۲}+۶$$

حال تغییرات را اعمال می‌کنیم:

$$y=-(x-۱)^{۲}+۶\xrightarrow{\text{سه واحد به راست}}y=-((x-۳)-۱)^{۲}+۶$$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد به پایین}}y=-((x-۳)-۱)^{۲}+۶-۲$$

$$\Rightarrow \text{ضابطهٔ جدید}: y=-(x-۴)^{۲}+۴$$

برای آنکه بدانیم نمودار $y_{۱}=-(x-۴)^{۲}+۴$ در کدام بازه بالای نمودار $y_{۲}=x$ (نیمساز ربع اول، $x\geq۰$) قرار می‌گیرد باید نامعادلهٔ $y_{۱}>y_{۲}$ را حل کنیم.

$$y_{۱}>y_{۲}\Rightarrow-(x-۴)^{۲}+۴>x\Rightarrow(x-۴)^{۲}+x-۴<۰$$
$$\Rightarrow(x-۴)(x-۴+۱)<۰\Rightarrow(x-۴)(x-۳)<۰$$
$$\Rightarrow ۳<x<۴$$

۲۰. گزینهٔ ۱

نقطهٔ $A(۲,۵)$ روی تابع f است و انتقال یک واحد به چپ آن روی تابع g خواهد بود، پس $A'(۱,۵)$ روی تابع g است و در ضابطهٔ آن صدق می‌کند:

$$g(۱)=۵\Rightarrow ۵=۱-۱+k\Rightarrow k=۵$$

بنابراین $g(x)=x^{۲}-x+۵$، پس: $g(۲)=۲^{۲}-۲+۵=۷$

۲۱. گزینهٔ ۳

ابتدا ضابطهٔ توابع f و g را می‌یابیم:

$$y=-x^{۲}\xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}}f(x)=-(x+۲)^{۲}$$

$$y=x^{۲}\xrightarrow{m\text{ واحد به چپ}}y=(x+m)^{۲}$$

$$\xrightarrow{k\text{ واحد به پایین}}g(x)=(x+m)^{۲}-k$$

معادلهٔ تلاقی: $f(x)=g(x)\Rightarrow-(x+۲)^{۲}=(x+m)^{۲}-k$

طول نقاط تلاقی $x=-۱$ و $x=-۲$ است، پس در معادلهٔ تلاقی صدق می‌کنند:

$$\begin{cases}x=-۱\to-(-۱+۲)^{۲}=(-۱+m)^{۲}-k\\x=-۲\to-(-۲+۲)^{۲}=(-۲+m)^{۲}-k\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(m-۱)^{۲}-k=-۱\Rightarrow k=(m-۱)^{۲}+۱\\(m-۲)^{۲}-k=۰\Rightarrow k=(m-۲)^{۲}\quad(*)\end{cases}$$

$$\Rightarrow(m-۱)^{۲}+۱=(m-۲)^{۲}$$

$$\Rightarrow m^{۲}-۲m+۱+۱=m^{۲}-۴m+۴$$

$$\Rightarrow ۲m=۲\Rightarrow m=۱\xrightarrow{(*)}k=(۱-۲)^{۲}=۱$$

بنابراین: $g(x)=(x+۱)^{۲}-۱$، در نتیجه: $g(۵)=۶^{۲}-۱=۳۵$.

۲۲. گزینهٔ ۳

ابتدا باید ضابطهٔ $y=f(x)$ را بیابیم. برای این کار به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$g(x)=(x-۱)^{۲}\xrightarrow{\text{نمودار دو واحد بالا برود}}y=(x-۱)^{۲}+۲$$

$$\xrightarrow{\text{نمودار یک واحد به چپ برود}}f(x)=(x+۱-۱)^{۲}+۲$$

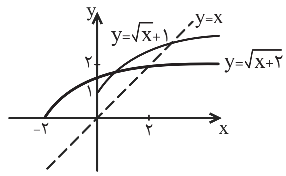
$$\Rightarrow f(x)=x^{۲}+۲$$

برای یافتن نقطه‌ی تلاقی تابع fog با محور yها، $x=۰$ را در تابع قرار می‌دهیم:

$$f(g(۰))=f((۰-۱)^۲)=f(۱)=۱^۲+۲=۳$$

۲۳. گزینهٔ ۲

نمودار دو تابع $f(x)+۱$ و $f(x+۲)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و محل تقاطع آنها را می‌یابیم. نمودار تابع $f(x)+۱$ را با انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک واحد به بالا و نمودار تابع $f(x+۲)$ را با انتقال نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دو واحد به چپ رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار بالای نیمساز ناحیه‌ی اول یکدیگر را قطع می‌کنند. با حل معادله‌ی $f(x+۲)=f(x)+۱$ نیز می‌توان محل تقاطع را یافت.

$$\sqrt{x+۲}=\sqrt{x}+۱\xrightarrow{\text{به توان ۲}}x+۲=x+۱+۲\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{x}=۱\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

$$y=\sqrt{x}+۱=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$$

بنابراین محل تقاطع نقطه‌ی $(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۲})$ است که بالای خط $y=x$ قرار دارد.

۲۴. گزینهٔ ۱

برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ کافی است ابتدا نمودار تابع $g(x)=-۱+\sqrt{x+۱}$ را ۳ واحد به راست انتقال دهیم تا نمودار تابع $y_۱=-۱+\sqrt{x-۲}$ حاصل شود، سپس نمودار تابع $y_۱$ را یک واحد به بالا انتقال دهیم تا نمودار تابع $y=\sqrt{x-۲}$ به دست آید.

۲۵. گزینهٔ ۳

با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y=x$، جای x و y عوض می‌شود و نمودار وارون آن به دست می‌آید:

$$y=۲+\sqrt{x-۱}\xrightarrow[\text{خط } y=x]{\text{قرینه نسبت به}}x=۲+\sqrt{y-۱}$$

$$\Rightarrow x-۲=\sqrt{y-۱}\xrightarrow{\text{طرفین به توان دو}}(x-۲)^۲=y-۱$$

$$\Rightarrow y=(x-۲)^۲+۱$$

حال تغییرات گفته شده را روی این تابع اعمال می‌کنیم:

$$y=(x-۲)^۲+۱\xrightarrow[\text{مثبت محور } x \text{ ها}]{\text{دو واحد در جهت}}y=((x-۲)-۲)^۲+۱$$

$$\xrightarrow[\text{منفی محور } y \text{ ها}]{\text{سه واحد در جهت}}y=(x-۴)^۲+۱-۳$$

$$\Rightarrow g(x)=(x-۴)^۲-۲\Rightarrow g(۴)=-۲$$

۲۶. گزینهٔ ۳

اگر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را ۱۲ واحد در امتداد محور xها در جهت مثبت انتقال دهیم، $y=\sqrt{x-۱۲}$ به‌دست می‌آید و اگر این نمودار را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت انتقال دهیم، $g(x)=۲+\sqrt{x-۱۲}$ به‌دست می‌آید. پس باید نقطه‌ی برخورد دو تابع f و g را به‌دست آوریم که طول آن از حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید.

$$\sqrt{x}=۲+\sqrt{x-۱۲}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به‌توان ۲}}x=۴+(x-۱۲)+۴\sqrt{x-۱۲}$$

$$\Rightarrow ۸=۴\sqrt{x-۱۲}\Rightarrow \sqrt{x-۱۲}=۲\Rightarrow x-۱۲=۴$$

$$\Rightarrow x=۱۶$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در } f}y=\sqrt{۱۶}=۴\Rightarrow \text{نقطه‌ی تقاطع}: A(۱۶,۴)$$

$$\Rightarrow OA=\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=\sqrt{۴^۲\times۴^۲+۴^۲}=\sqrt{۴^۲(۴^۲+۱)}=۴\sqrt{۱۷}$$

۲۷. گزینهٔ ۱

ابتدا تابع را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و سپس انتقال می‌دهیم:

$$y=۲^{x+|x|}=\begin{cases}۲^{x+x} & , \ x\ge ۰\\ ۲^{x-x} & , \ x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲^{۲x} & , \ x\ge ۰\\ ۱ & , \ x<۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{\text{۳ واحد در جهت منفی}}y=\begin{cases}۲^{۲(x+۳)} & , \ x+۳\ge ۰\\ ۱ & , \ x+۳<۰\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها}]{\text{۲ واحد در جهت منفی}}y=\begin{cases}۲^{۲(x+۳)}-۲ & , \ x\ge -۳\\ ۱-۲ & , \ x<-۳\end{cases}$$

تلاقی نمودار با محور xها از حل معادله‌ی $y=۰$ به دست می‌آید:

$$y=۰\xrightarrow{\text{ضابطه‌ی بالایی}}۲^{۲(x+۳)}-۲=۰\Rightarrow ۲^{۲(x+۳)}=۲$$

$$\Rightarrow ۲(x+۳)=۱\Rightarrow x+۳=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=-۳+\frac{۱}{۲}=-\frac{۵}{۲}$$

راهبرد حل تیپ (۲)

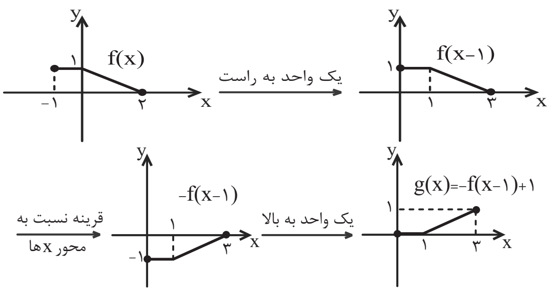
الف- نمودار تابع $-f(x)$ با قرینه کردن نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور xها به دست می‌آید.

ب- نمودار تابع $f(-x)$ با قرینه کردن نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور yها به دست می‌آید.

پ- نمودار تابع $-f(-x)$ با قرینه کردن نمودار تابع $f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات به دست می‌آید.

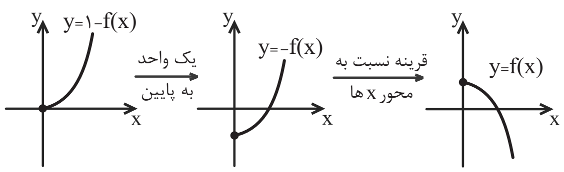
۲۸. گزینهٔ ۴

برای تشکیل تابع g به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



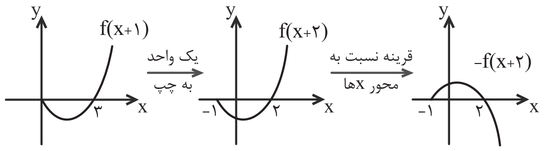
۲۹. گزینهٔ ۱

نمودار تابع $y=f(x)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:



۳۰. گزینهٔ ۱

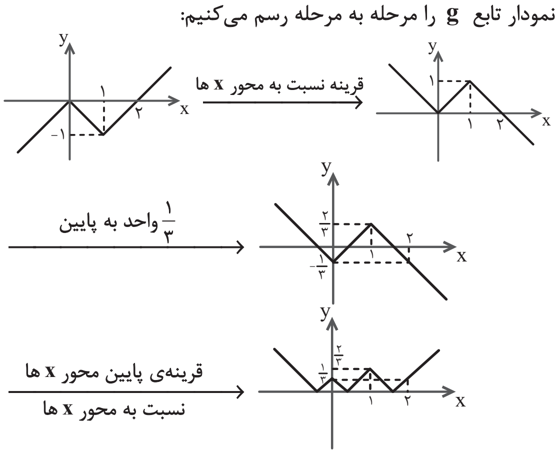
ابتدا با انتقال نمودار تابع $\mathbf{f(x+۱)}$، نمودار تابع $\mathbf{-f(x+۲)}$ را رسم می‌کنیم.



برای دامنه‌ی تابع $\mathbf{y=\sqrt{-f(x+۲)}}$ عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد، بنابراین باید $\mathbf{-f(x+۲)\geq ۰}$ باشد. با توجه به نمودار $\mathbf{-f(x+۲)}$، دامنه، بازه‌ی $\mathbf{[-۱,۲]}$ است.

۳۱. گزینهٔ ۲

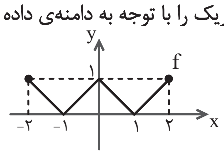
نمودار تابع $\mathbf{g}$ را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



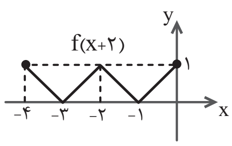
ریشه‌های معادله‌ی $\mathbf{g(x)=k}$، محل‌های تلاقی خط $\mathbf{y=k}$ با نمودار تابع $\mathbf{g}$ هستند، با توجه به نمودار، وقتی $\mathbf{۰<k<\frac{۱}{۳}}$ باشد، خط نمودار را در نقاط بیشتری قطع می‌کند.

۳۲. گزینهٔ ۱

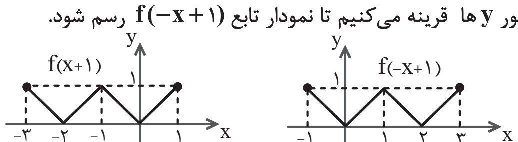
برای رسم نمودار تابع $\mathbf{g}$، نمودار دو تابع $\mathbf{f(x+۲)}$ و $\mathbf{f(۱-x)}$ را رسم کرده و سپس نمودار هریک را با توجه به دامنه‌ی داده شده محدود می‌کنیم.



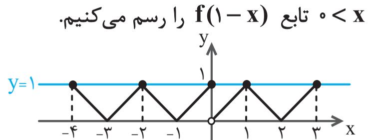
برای رسم $\mathbf{f(x+۲)}$، کافی است تابع $\mathbf{f(x)}$ را ۲ واحد به چپ انتقال دهیم.



برای رسم نمودار $\mathbf{f(۱-x)}$، ابتدا نمودار تابع $\mathbf{f(x)}$ را یک واحد به چپ انتقال داده تا نمودار تابع $\mathbf{f(x+۱)}$ به‌دست آید، سپس نسبت به محور $\mathbf{y}$ ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $\mathbf{f(-x+۱)}$ رسم شود.

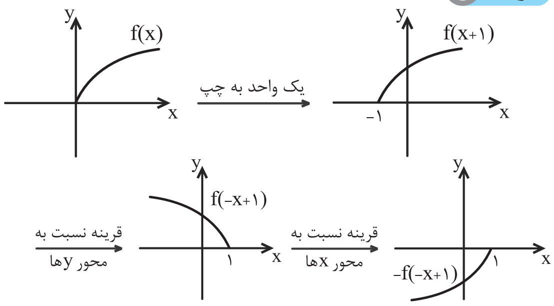


حال برای رسم تابع $\mathbf{g}$، در بازه‌ی $\mathbf{-۴\leq x\leq ۰}$ تابع $\mathbf{f(x+۲)}$ و در بازه‌ی $\mathbf{۰<x\leq ۳}$ تابع $\mathbf{f(۱-x)}$ را رسم می‌کنیم.



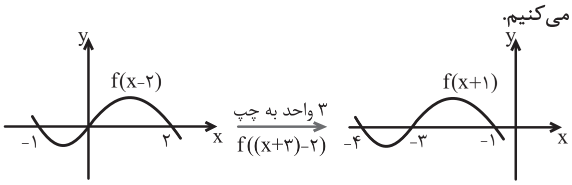
با توجه به نمودار دیده می‌شود که خط $\mathbf{y=۱}$ با نمودار تابع $\mathbf{g}$ در ۵ نقطه مشترک است.

۳۳. گزینهٔ ۴



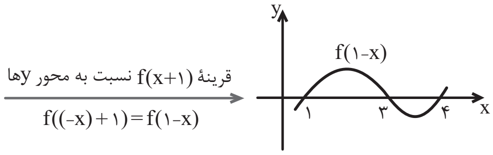
۳۴. گزینهٔ ۱

توجه به نمودار داده شده ابتدا نمودار $\mathbf{f(x+۱)}$ و $\mathbf{f(۱-x)}$ را رسم می‌کنیم.



(شکل ۱) (شکل ۲)

برای رسم $\mathbf{f(-x+۱)}$ کافی است نمودار $\mathbf{f(x+۱)}$ را نسبت به محور $\mathbf{y}$ ها قرینه کنیم.



برای تعیین علامت عبارت، ریشه‌های هریک از توابع زیر رادیکال را یافته و در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم. فقط دقت کنید که تابع $\mathbf{g}$ در ریشه‌های مخرج تعریف نمی‌شود.

$$\mathbf{f(x+۱)=۰\rightarrow x=-۴,-۳,-۱}$$

$$\mathbf{f(۱-x)=۰\Rightarrow x=۱,۳,۴}$$

x		−۴		−۳		−۱		۱		۳		۴	
f(x+۱)	+	۰	−	۰	+	۰	−		−		−		−
f(۱-x)	−		−		−		−	۰	+	۰	−	۰	+
$\frac{f(۱-x)}{f(x+۱)}$	−	ت.ن	+	ت.ن	−	ت.ن	+	۰	−	۰	+	۰	−

دامنه‌ی تابع، بازه‌هایی است که زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$\mathbf{D_g=(-۴,-۳)\cup(-۱,۱]\cup[۳,۴]}$$

بنابراین دامنه شامل اعداد صحیح ۰، ۱، ۳ و ۴ است.

۳۵. گزینهٔ ۳

ابتدا ضابطه‌ی هر دو تابع را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$\mathbf{f(x)=-(x^۲-۴x+۴-۴)=-(x-۲)^۲+۴}$$

$$\mathbf{g(x)=x^۲+۲x+۱-۱=(x+۱)^۲-۱}$$

برای تبدیل $\mathbf{f}$ به $\mathbf{g}$، ابتدا $\mathbf{f}$ را نسبت به محور $\mathbf{x}$ ها قرینه می‌کنیم که تابع $\mathbf{y=-f(x)=(x-۲)^۲-۴}$ حاصل می‌شود. سپس ۳ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار $\mathbf{g}$ به‌دست آید. بنابراین عرض نقاط تابع $\mathbf{f}$ ابتدا قرینه شده و سپس -۳ واحد به طول نقاط و ۳ واحد به عرض نقاط اضافه می‌شود. پس نقطه به طول ۱ بر روی تابع $\mathbf{f}$ که عرض آن $\mathbf{f(۱)=۴-۱=۳}$ است، به نقطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$(۱,۳)\xrightarrow{\text{عرض قرینه شود}}(۱,-۳)$$

$$\xrightarrow[\text{۳ واحد به عرض}]{\text{−۳ واحد به طول}}(۱-۳,-۳+۳)=(-۲,۰)$$

۳۶. گزینهٔ ۲

برای به‌دست آوردن معادله‌ی قرینه‌ی یک منحنی نسبت به مبدأ مختصات، در معادله‌ی آن x را به $(-x)$ و y را به $(-y)$ تبدیل می‌کنیم:

$f: y=(x-۱)^۲$

$\Rightarrow$ قرینه‌ی f نسبت به مبدأ: $-y=(-x-۱)^۲$

$\Rightarrow y=-(x+۱)^۲$

سپس منحنی فوق را چهار واحد به بالا منتقل می‌کنیم که معادله‌ی آن به‌صورت $g(x)=-(x+۱)^۲+۴$ خواهد شد که طول نقاط تلاقی آن با منحنی اصلی، از حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$f(x)=g(x)\Rightarrow (x-۱)^۲=-(x+۱)^۲+۴$

$\Rightarrow (x-۱)^۲+(x+۱)^۲=۴\Rightarrow ۲x^۲+۲=۴\Rightarrow x^۲=۱$

$\Rightarrow x=\pm ۱$

۳۷. گزینهٔ ۱

قرینه‌ی نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور x ها به‌صورت $-f(x)$ است، پس:

$f(x)=x^۲-۲x \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور xها}]{} y=-(x^۲-۲x)$

$\Rightarrow y=-x^۲+۲x$

اگر نمودار $y=-x^۲+۲x$ را ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال دهیم، نمودار $g(x)=-x^۲+۲x+۱۶$ به‌دست خواهد آمد. پس باید نقطه‌ی برخورد دو منحنی f و g را به‌دست آوریم که طول آن از حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$x^۲-۲x=-x^۲+۲x+۱۶\Rightarrow ۲x^۲-۴x-۱۶=۰$

$\Rightarrow x^۲-۲x-۸=۰\Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=-۲\end{cases}$

طبق فرض سؤال، دامنه‌ی تابع f به‌صورت $x>۱$ است، پس $x=-۲$ قابل قبول نیست.

$x=۴ \longrightarrow f(۴)=۴^۲-۲\times ۴=۸$

$\Rightarrow$ نقطه‌ی تقاطع: $A(۴,۸)$

فاصله‌ی A از مبدأ: $OA=\sqrt{۴^۲+۸^۲}=\sqrt{۴^۲+۲^۲\times ۴^۲}$

$=۴\sqrt{۱+۲^۲}=۴\sqrt{۵}$

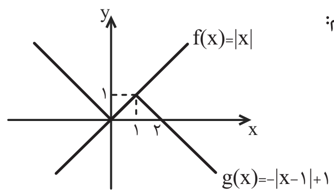
۳۸. گزینهٔ ۱

$f(x)=|x| \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y=|x-۱|$

$\xrightarrow{\text{انعکاس نسبت به محور x ها}} y=-|x-۱|$

$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y=-|x-۱|+۱ \Rightarrow g(x)=-|x-۱|+۱$

می‌خواهیم ببینیم در چه بازه‌ای f بر g منطبق است. نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، دو تابع f و g در بازه‌ی $[۰,۱]$ بر هم منطبق‌اند.

۳۹. گزینهٔ ۲

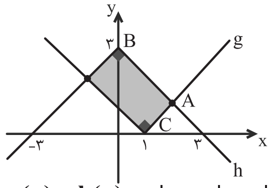
ابتدا ضابطه‌ی توابع g و h را به‌دست می‌آوریم:

$f(x)=|x| \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} g(x)=|x-۱|$

$f(x)=|x| \xrightarrow{\text{تقارن نسبت به محور x ها}} y=-|x|$

$\xrightarrow{\text{۳ واحد به بالا}} y=-|x|+۳ \Rightarrow h(x)=-|x|+۳$

نمودار دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، ناحیه‌ی سایه زده شده، یک مستطیل است. برای یافتن ابعاد این مستطیل، کافی است یکی از نقاط تلاقی دو نمودار را به‌دست آوریم:

$g(x)=h(x)\Rightarrow |x-۱|=-|x|+۳$

$\xrightarrow{۱<x_A<۳} (x-۱)=-(x)+۳\Rightarrow ۲x=۴$

$\Rightarrow x_A=۲, y_A=۱$

بنابراین: $A(۲,۱)$، $B(۰,۳)$ و $C(۱,۰)$، حال طول و عرض مستطیل را می‌یابیم:

$$\begin{cases} \overline{AB}=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۸} \\ \overline{AC}=\sqrt{(۲-۱)^۲+(۱-۰)^۲}=\sqrt{۲}\end{cases}$$

$\Rightarrow S_{\text{مستطیل}}=\sqrt{۸}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۱۶}=۴$

۴۰. گزینهٔ ۱

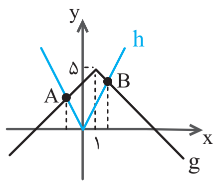
ابتدا تابع g را با توجه به اعمال گفته شده تشکیل می‌دهیم:

$f(x)=|x| \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y=|x-۱|$

$\xrightarrow{\text{انعکاس نسبت به محور x ها}} y=-|x-۱|$

$\xrightarrow{\text{۵ واحد به بالا}} g(x)=-|x-۱|+۵$

نمودار دو تابع $g(x)=-|x-۱|+۵$ و $h(x)=۲f(x)=۲|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل روبه‌رو، A و B نقاط تقاطع دو تابع هستند و در بازه‌ی (x_A, x_B) نمودار تابع g بالای نمودار تابع h قرار می‌گیرد.

برای یافتن x_A و x_B باید معادله‌ی زیر را حل کنیم:

$g(x)=h(x)\Rightarrow -|x-۱|+۵=۲|x|$

$A: x<۰ \xrightarrow[|x-۱|=-(x-۱)]{|x|=-x} x-۱+۵=-۲x$

$\Rightarrow ۳x=-۴\Rightarrow x_A=-\frac{۴}{۳}$

$B: x>۱ \xrightarrow[|x-۱|=(x-۱)]{|x|=x} -(x-۱)+۵=۲x$

$\Rightarrow ۳x=۶\Rightarrow x_B=۲$

بنابراین بازه‌ی مورد نظر $(x_A, x_B)=(-\frac{۴}{۳},۲)$ است و در نتیجه:

طول بازه $=۲-(-\frac{۴}{۳})=\frac{۱۰}{۳}$

۴۱. گزینهٔ ۴

تغییرات را مرحله به مرحله اعمال می‌کنیم:

$y=\frac{۱}{x}\xrightarrow[\text{به راست}]{\text{یک واحد}} y=\frac{۱}{x-۱}\xrightarrow[\text{به محور x ها}]{\text{قرینه نسبت}} y=-\frac{۱}{x-۱}$

$\xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{دو واحد}} y=-\frac{۱}{x-۱}-۲$

حالا باید نقطه‌ی برخورد دو منحنی زیر را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} y=\frac{۱}{x} \\ y=-\frac{۱}{x-۱}-۲\end{cases}\Rightarrow \frac{۱}{x}=-\frac{۱}{x-۱}-۲\Rightarrow \frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۱}=-۲$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)+x}{x(x-1)}=-2\Rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x}=-2\Rightarrow 2x-1=-2x^2+2x$$

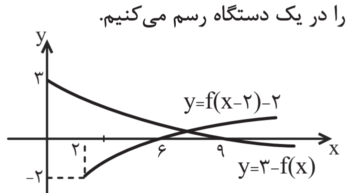
$$\Rightarrow 2x^2=1\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt2}\xrightarrow{y=\frac{1}{x}} y=\pm\sqrt2$$

یعنی مختصات نقاط برخورد به صورت $A(\frac{1}{\sqrt2},\sqrt2)$ و $B(-\frac{1}{\sqrt2},-\sqrt2)$ است که فاصله‌ی هر دوی آنها از نقطه‌ی $O(0,0)$ برابر است با:

$$\sqrt{(\frac{1}{\sqrt2})^2+(\sqrt2)^2}=\sqrt{\frac12+2}=\sqrt{\frac52}=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\times\frac{\sqrt2}{\sqrt2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۴۲. گزینهٔ ۳

برای رسم نمودار تابع $y=f(x-2)-2$ کافی است نمودار تابع $y=\sqrt x$ را دو واحد به راست و سپس دو واحد به پایین انتقال دهیم و برای رسم نمودار تابع $y=3-f(x)$، ابتدا قرینه‌ی تابع $y=\sqrt x$ را نسبت به محور xها رسم نموده و سپس ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم و هر دو نمودار را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود محل تقاطع دو نمودار در بازه‌ی $(6,9)$ قرار دارد. توجه کنید که محل تقاطع نمودارها با محور xها از حل معادله‌ی $y=0$ به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}3-\sqrt x=0 \Rightarrow x=9\\ \sqrt{x-2}-2=0\Rightarrow x-2=4\Rightarrow x=6\end{cases}$$

۴۳. گزینهٔ ۳

$$f(x)=\sqrt x \xrightarrow[\text{محور y ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=\sqrt{-(x-2)}=\sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y=\sqrt{-x+2}$ و $y=x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم)، آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

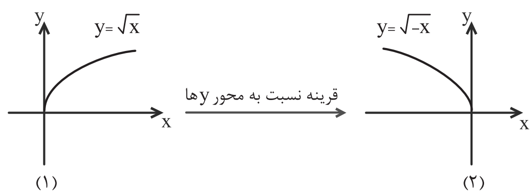
$$\sqrt{-x+2}=x\xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x+2=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0$$

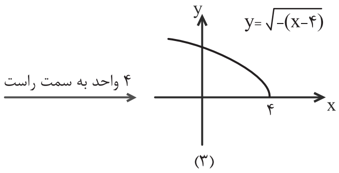
$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0\Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=-2 & \text{غ.ق}\end{cases}$$

$x=-2$ غیر قابل قبول است، زیرا در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کند.

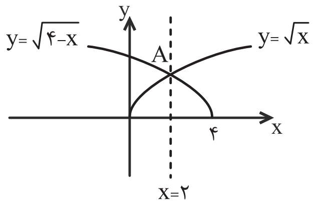
۴۴. گزینهٔ ۳

برای به‌دست آوردن قرینه‌ی نمودار یک تابع نسبت به محور yها، در معادله‌ی آن x را به $(-x)$ تبدیل می‌کنیم و برای انتقال آن به اندازه‌ی a واحد به سمت راست $(a>0)$ در معادله‌ی آن x را به $(x-a)$ تبدیل می‌کنیم.





حال به شکل زیر دقت کنید. اگر نمودار اولیه را نسبت به خط $x=2$ قرینه کنیم، نمودار مرحله‌ی (۳) به‌دست می‌آید.



توضیح بیشتر آنکه برای به‌دست آوردن معادله‌ی خط مورد نظر، باید مختصات نقطه‌ی A را به‌دست آوریم:

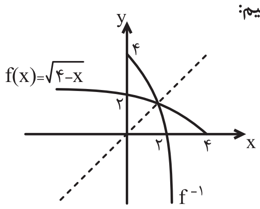
$$\begin{cases}y=\sqrt x\\ y=\sqrt{4-x}\end{cases}\Rightarrow \sqrt x=\sqrt{4-x}\Rightarrow x=4-x\Rightarrow x=2$$

توجه کنید که هیچ‌کدام از این دو نمودار متقارن نیستند، بلکه نسبت به یک خط قرینه‌ی یکدیگر و منظور طراح قرینه بوده، نه متقارن.

۴۵. گزینهٔ ۳

تابع $f(x)=\sqrt{4-x}$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به نمودار تابع $f(x)$، در صورت هرگونه انتقال افقی یا عمودی تابع f، نقطه‌ی تقاطع نمودار f و وارون آن روی خط $y=x$ قرار خواهد داشت.



با توجه به صورت سؤال، منحنی به دست آمده بعد از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار وارون خود را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده است، بنابراین نقطه‌ی $(1,1)$ روی این منحنی قرار دارد. حال اگر منحنی را ۱ واحد به پایین انتقال دهیم محل برخورد آن با محور xها نقطه‌ی $(1,0)$ خواهد شد.

۴۶. گزینهٔ ۳

اگر نمودار $y=\sqrt{\sqrt x+3}$ را k واحد در راستای قائم انتقال دهیم، معادله‌ی منحنی به صورت $y=\sqrt{\sqrt x+3}+k$ خواهد بود؛ با توجه به افزایشی بودن این تابع، نقطه‌ی برخورد آن با وارونش، روی خط $y=x$ واقع است، پس اگر عرض نقطه‌ی برخورد ۱ باشد، داریم:

$$y=1\xrightarrow{y=x}x=1\Rightarrow \text{نقطه‌ی برخورد}: (1,1)$$

پس مختصات نقطه‌ی $(1,1)$ در معادله‌ی تابع صدق می‌کند:

$$1=\sqrt{\sqrt1+3}+k\Rightarrow 1=2+k\Rightarrow k=-1$$

$$\Rightarrow \text{معادله‌ی منحنی}: y=\sqrt{\sqrt x+3}-1$$

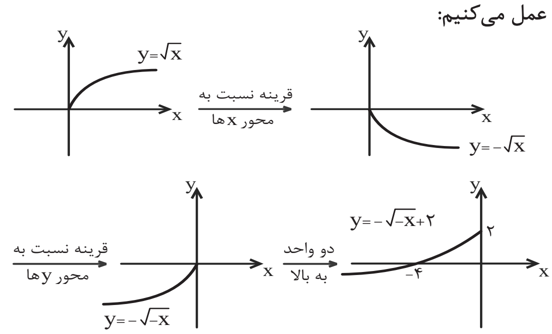
$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور x ها}} y=-(\sqrt{\sqrt x+3}-1)$$

$$\xrightarrow{\text{۴ واحد به چپ}} y=-\sqrt{\sqrt{x+4}+3}+1$$

در بین گزینه‌ها، مختصات نقطه‌ی $(0,1-\sqrt5)$ در معادله‌ی به دست آمده صدق می‌کند.

۴۷. گزینهٔ ۴

برای تشکیل تابع g از روی تابع $y=\sqrt{x}$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



$\Rightarrow g(x)=-\sqrt{-x}+۲$

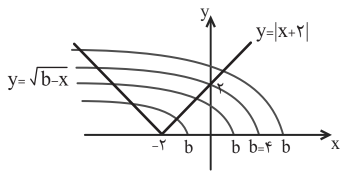
برای یافتن محل تلاقی خط $y=-۴$ با نمودار تابع g، معادلهٔ $g(x)=-۴$ را حل می‌کنیم:

$g(x)=-۴\Rightarrow -\sqrt{-x}+۲=-۴\Rightarrow \sqrt{-x}=۶$

$\Rightarrow -x=۶^۲\Rightarrow x=-۳۶$

۴۸. گزینهٔ ۱

نمودار دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



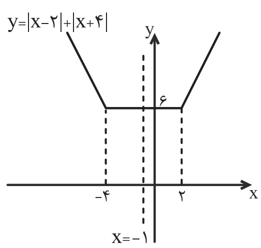
همانطور که مشاهده می‌شود برای آنکه نمودار تابع $y=|x+۲|$ به ازای xهای بزرگتر از صفر بالای نمودار تابع $y=\sqrt{b-x}$ قرار گیرد باید b مقداری مثبت و حداکثر برابر با ۴ باشد. در این صورت تابع $y=|x+۲|$ در بازهٔ $(۰,b)$ بالای نمودار تابع $y=\sqrt{b-x}$ قرار خواهد گرفت، پس $a=b$.

۴۹. گزینهٔ ۲

$f(x)=\sqrt{|x-۲|+|x+۴|}$ ، $D_f=R$

عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است و خط تقارن آن با توجه به نمودار آن، وسط ریشه‌های عبارت‌های داخل قدرمطلق است، یعنی خط:

$x=\dfrac{-۴+۲}{۲}=-۱$



با جذرگرفتن از این عبارت همواره مثبت، خط تقارن آن تغییری نمی‌کند، پس تابع f نسبت به خط $x=-۱$ متقارن است.

۵۰. گزینهٔ ۳

اگر $x=a$ خط تقارن یک تابع باشد، این خط در وسط هر دو نقطه‌ی هم‌عرض قرار می‌گیرد. با جایگذاری $x=۱$ و $x=۳$ در $f(۲-x)=f(۲+x)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x=۱\Rightarrow f(۱)=f(۳)\Rightarrow \text{نقطهٔ وسط}=\dfrac{۱+۳}{۲}=۲ \\ x=۳\Rightarrow f(-۱)=f(۵)\Rightarrow \text{نقطهٔ وسط}=\dfrac{-۱+۵}{۲}=۲ \end{cases}$$

بنابراین $x=۲$ محور تقارن تابع $f(x)$ است.

۵۱. گزینهٔ ۴

وقتی نمودار نسبت به محور yها تقارن دارد باید در آن $f(\alpha)=f(-\alpha)$، یعنی با تبدیل x به $-x$ نباید ضابطهٔ تابع تغییر کند.

راه حل اول: ابتدا تابع چند جمله‌ای را مرتب کرده، سپس ضرایب جملات با درجهٔ فرد آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. زیرا در آنها با تبدیل x به $-x$ ضابطهٔ تابع تغییر می‌کند.

$y=x^۴+۳x^۳+A(x+۱)^۳+Bx$

$=x^۴+۳x^۳+Ax^۳+۳Ax^۲+۳Ax+A+Bx$

$\Rightarrow y=x^۴+(A+۳)x^۳+۳Ax^۲+(۳A+B)x+A$

$$\Rightarrow\begin{cases} A+۳=۰\Rightarrow A=-۳ \\ ۳A+B=۰\xrightarrow{A=-۳}B=۹ \end{cases}$$

$\Rightarrow A+B=۶$

راه حل دوم: از آن‌جا که $f(\alpha)=f(-\alpha)$، پس:

$f(۱)=f(-۱)\Rightarrow ۴A+B=-۳\ \text{(I)}$

$f(۲)=f(-۲)\Rightarrow ۷A+B=-۱۲\ \text{(II)}$

از حل دستگاه بالا، $A=-۳$ و $B=۹$ و در نتیجه $A+B=۶$.

۵۲. گزینهٔ ۲

$f(x)+g(x)=۲^x\qquad (۱)$

تابع f نسبت به محور yها متقارن است، پس: $f(-x)=f(x)$ و تابع g نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، پس: $g(-x)=-g(x)$،

در رابطهٔ (۱) با تبدیل x به $-x$ داریم:

$f(-x)+g(-x)=۲^{-x}\ \xrightarrow[g(-x)=-g(x)]{f(-x)=f(x)}$

$f(x)-g(x)=۲^{-x}\qquad (۲)$

طرفین رابطهٔ (۲) را از طرفین رابطهٔ (۱) کم می‌کنیم:

$f(x)+g(x)-(f(x)-g(x))=۲^x-۲^{-x}$

$\Rightarrow ۲g(x)=۲^x-۲^{-x}\Rightarrow g(x)=\dfrac{۲^x-۲^{-x}}{۲}$

$\Rightarrow g(۲)=\dfrac{۲^۲-۲^{-۲}}{۲}=\dfrac{۴-\frac{۱}{۴}}{۲}=\dfrac{۱۵}{۸}$

راهبرد حل تیپ (۳)

الف- برای رسم نمودار تابع $y=|f(x)|$، ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، قسمت‌هایی را که نمودار تابع f زیر محور xهاست نسبت به محور xها قرینه کرده و قسمت پایین محور xها را حذف می‌کنیم.

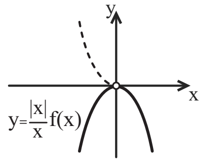
ب- برای رسم نمودار تابع $y=f(|x|)$ ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم، قسمت سمت چپ محور yها را حذف کرده (در صورت وجود) سپس قرینهٔ قسمت سمت راست محور yها را نسبت به محور yها رسم می‌کنیم.

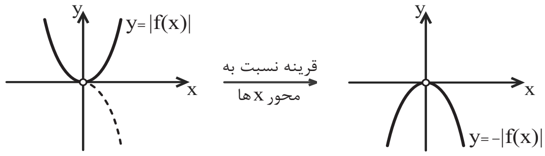
۵۳. گزینهٔ ۱

ابتدا تابع $y=\dfrac{|x|}{x}f(x)$ را به صورت دوضابطه‌ای نوشته و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$y=\frac{|x|}{x}f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x}f(x)=f(x) & ,\ x>۰ \\ \dfrac{-x}{x}f(x)=-f(x) & ,\ x<۰ \end{cases}$$

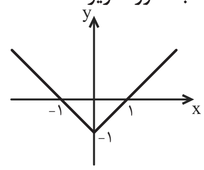
با توجه به نمودار، تابع $y=\frac{|x|}{x}f(x)$ با تابع $-|f(x)|$ برابر است که نمودار آن به صورت زیر رسم می‌شود:





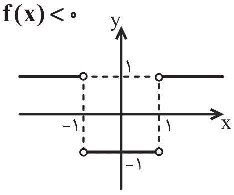
۵۴. گزینهٔ ۱

نمودار $f(x)=|x|-1$ به صورت زیر است.



تابع $y=\frac{|f(x)|}{f(x)}$ را به‌صورت دوضابطه‌ای نوشته و رسم می‌کنیم.

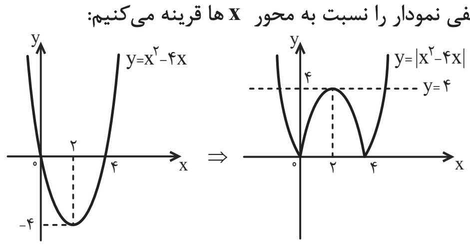
$$y=\frac{|f(x)|}{f(x)}=\begin{cases}\frac{f(x)}{f(x)}=1 & ;\ f(x)>0\\ \frac{-f(x)}{f(x)}=-1 & ;\ f(x)<0\end{cases}$$



$$\Rightarrow y=\begin{cases}1 & ;\ x>1 \text{ یا } x<-1\\ -1 & ;\ -1<x<1\end{cases}$$

۵۵. گزینهٔ ۲

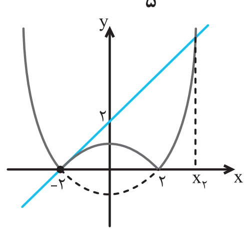
ابتدا نمودار تابع $y=x^2-4x$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های منفی نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



بنابراین $k=4$ می‌باشد.

۵۶. گزینهٔ ۲

نمودار دو تابع $y=x+2$ و $y=\frac{1}{5}|x^2-4|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $y=\frac{1}{5}|x^2-4|=\frac{1}{5}|(x+2)(x-2)|$، نمودار تابع $y=x^2-4$ را رسم کرده و سپس قسمتی از نمودار را که پایین محور x هاست نسبت به محور x ها قرینه کرده و سپس عرض نقاط را در $\frac{1}{5}$ ضرب می‌کنیم.



همانطور که دیده می‌شود دو نمودار در نقطهٔ $x_1=-2$ و در یک نقطهٔ دیگر با طول بزرگتر از ۲ تقاطع دارند، بنابراین قدرمطلق با علامت مثبت برداشته شده و معادلهٔ تقاطع دو نمودار را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}y=x+2\\ y=\frac{1}{5}(x^2-4)\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{5}(x^2-4)=x+2$$

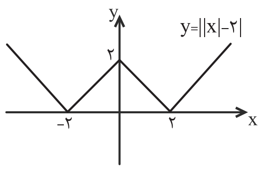
$$\Rightarrow \frac{1}{5}(x+2)(x-2)=x+2\Rightarrow \frac{1}{5}(x-2)=1$$

$$\Rightarrow x-2=5\Rightarrow x=7$$

بنابراین: $x_1=-2$ و $x_2=7$، در نتیجه: $x_1x_2=-14$.

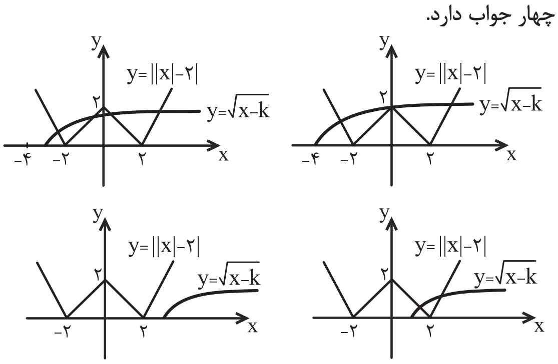
۵۷. گزینهٔ ۲

نمودار تابع $y=||x|-2|$ به شکل زیر است:



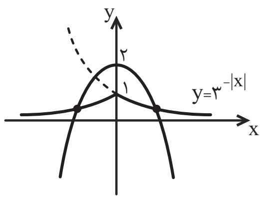
نمودار تابع $y=\sqrt{x-k}$ همان نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ است که $|k|$ واحد به چپ یا راست منتقل می‌شود.

مطابق شکل‌های زیر، با توجه به محدودهٔ k، نمودار تابع $y=\sqrt{x-k}$ ممکن است نمودار تابع $y=||x|-2|$ را حداکثر در چهار نقطه قطع کند. پس معادلهٔ $||x|-2|=\sqrt{x-k}$ حداکثر چهار جواب دارد.



۵۸. گزینهٔ ۲

نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. (می‌توان ضابطهٔ تابع $y=3^{-|x|}$ را به صورت $y=(\frac{1}{3})^{|x|}$ در نظر گرفت و سپس آن را رسم کرد.)



همانطور که مشاهده می‌شود دو نمودار در دو نقطه متقاطع‌اند.

۵۹. گزینهٔ ۳

$$y=2^{|\sin x|}\xrightarrow[\text{محور x ها}]{\frac{\pi}{2}\ \text{در جهت مثبت}} y=2^{\left|\sin(x-\frac{\pi}{2})\right|}$$

$$\xrightarrow{\sin(x-\frac{\pi}{2})=-\cos x} y=2^{|\cos x|}$$

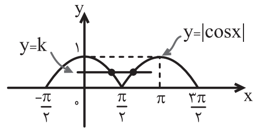
$$\xrightarrow[\text{محور y ها}]{\frac{3}{2}\ \text{در جهت منفی}} y=2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}$$

طول نقاط تقاطع منحنی با محور x ها، از حل معادلهٔ $y=0$ به دست می‌آید، پس:

$$2^{|\cos x|}-\frac{3}{2}=0\Rightarrow 2^{|\cos x|}=\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{لگاریتم در پایهٔ ۲ می‌گیریم}]{\text{از طرفین}} |\cos x|=\log_2\frac{3}{2}$$

از آنجاکه $2^1 > \frac{3}{2} > 2^0$، پس $0 < \log_2^{\frac{3}{2}} < 1$. با فرض $k = \log_2^{\frac{3}{2}}$، باید ببینیم معادله‌ی $|\cos x| = k$ با شرط $0 < k < 1$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ چند جواب دارد. نمودار زیر را ببینید:



خط $y = k; 0 < k < 1$، نمودار $y = |\cos x|$ را در بازه‌ی $[0, \pi]$ در دو نقطه قطع می‌کند، پس معادله‌ی مورد نظر، دو جواب دارد.

۶۰. گزینهٔ ۳

f تابع همانی است، پس: $f(x) = x$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{مثبت محور x ها}]{a\text{ واحد در جهت}} g(x) = \frac{1}{x-a}$$

$$|g(x)| = \frac{1}{|x-a|} \xrightarrow[\text{منفی محور y ها}]{2\text{ واحد در جهت}} h(x) = \frac{1}{|x-a|} - 2$$

طول نقطه‌ی برخورد تابع $h(x)$ با نمودار تابع $\frac{1}{|f(x)|}$ برابر با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، پس:

$$h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\left|f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|} \Rightarrow \frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right|} - 2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right|} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + 2 \Rightarrow \frac{1}{\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right|} = \sqrt{2} + 2$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \quad (*)$$

با ساده‌سازی $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ داریم:

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}} \times \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین در معادله‌ی $(*)$ خواهیم داشت:

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2} - a\right| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} - a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - a = -\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

برای حل معادله‌ی $f(x+a) = 3$ داریم:

$$x + a = 3 \Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{2} - 1 = 3 \Rightarrow x = 4 - \sqrt{2} \\ x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف مقادیر } x = 4 - \sqrt{2} - 2 = 2 - \sqrt{2}$$

راهبرد حل تیپ (۴)

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ در اختیار باشد و $k > 0$، آنگاه برای رسم نمودار تابع:

الف) $y = kf(x)$، عرض هر نقطه‌ی تابع f را k برابر می‌کنیم، یعنی اگر نقطه‌ی $(a, b) \in f$ آنگاه نقطه‌ی $(a, kb) \in kf$ است. در این حالت:

① اگر $k > 1$ باشد، نمودار در راستای محور y ها کشیده‌تر می‌شود.

② اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در راستای محور y ها فشرده‌تر می‌شود.

ب) $y = -f(x)$، قرینه‌ی نمودار تابع f را نسبت به محور x ها رسم می‌کنیم.

● نکته‌ی ۱: اگر برد تابع $f(x)$ برابر با $[a, b]$ باشد، آنگاه برد تابع $kf(x)$ برابر است با:

برد تابع $kf(x)$: k مثبت $\rightarrow [ka, kb]$ ؛ k منفی $\rightarrow [kb, ka]$

● نکته‌ی ۲: برای رسم نمودار تابع $y = kf(x+a) + b$ از روی نمودار تابع $f(x)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- انتقال افقی نمودار: $f(x+a)$

۲- k برابرکردن عرض نقاط: $kf(x+a)$

۳- انتقال عمودی نمودار: $kf(x+a) + b$

۶۱. گزینهٔ ۲

نقطه‌ی (x_0, y_0) روی تابع $f(x)$ به نقطه‌ی (x_0, ky_0) روی تابع $kf(x)$ تبدیل می‌شود، بنابراین:

$$A(-4, 2) \xrightarrow{af(x)} A'(-4, 2a) = (-4, -4)$$
$$\Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

۶۲. گزینهٔ ۴

برای تبدیل هر نقطه روی نمودار $f(x)$ به نقطه‌ی متناظر آن روی نمودار $-2f(x+1)+1$، به طول نقطه (-1) واحد اضافه می‌شود، عرض آن -2 برابر شده و سپس یک واحد به آن اضافه می‌شود.

$$A(x_0, y_0) \xrightarrow{-2f(x+1)+1} A'(x_0 - 1, -2y_0 + 1)$$

۶۳. گزینهٔ ۲

نمودار تابع $g(x) = -2f(x+1)$ با انتقال نمودار تابع f یک واحد به چپ و سپس -2 برابر کردن عرض نقاط به دست می‌آید. پس از طول هر نقطه یک واحد کم شده و عرض هر نقطه (-2) برابر می‌شود.

$$S(5, -2) \rightarrow S'(5-1, -2 \times (-2)) = (4, 4)$$

۶۴. گزینهٔ ۱

انتقال افقی روی برد تابع تأثیر ندارد ولی انتقال‌های عمودی و انبساط (یا انقباض) عمودی برد تابع را تغییر می‌دهد و دقیقاً همان تغییرات روی برد اعمال می‌شود.

$$R_f = [-\sqrt{5}, 1] \Rightarrow -\sqrt{5} \le f(x) \le 1$$

$$\xrightarrow[\text{برد تغییر نمی‌کند.}]{\text{در انتقال افقی}} -\sqrt{5} \le f(x+1) \le 1$$

$$\xrightarrow{\times(-\sqrt{2})} -\sqrt{2} \le -\sqrt{2}f(x+1) \le \sqrt{10}$$

$$\xrightarrow{-3} -\sqrt{2} - 3 \le -\sqrt{2}f(x+1) - 3 \le \sqrt{10} - 3$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} - 3 \le g(x) \le \sqrt{10} - 3$$

$$\Rightarrow R_g = [-\sqrt{2} - 3, \sqrt{10} - 3]$$

از آنجا که $-5 < -\sqrt{2} - 3 \le g(x) \le \sqrt{10} - 3 < 1$ برد تابع g شامل پنج عدد صحیح -4، -3، -2، -1 و صفر است.

۶۵. گزینهٔ ۲

ابتدا نمودار تابع $f(-x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع $f(x)$ حاصل شود.