

سؤال‌های نسبتاً دشوار



- ۱- اگر $n(A - B) = 9 - 2x$ و $n(B - A) = 6 - x$ و $n(A \cap B) = 3x + 1$ ؛ مقدار $n(A \cup B)$ کدام است؟
- (۱) ۱۴ (۲) ۱۶ (۳) ۴ (۴) مشخص نیست.
- ٪۴۹ (۱) ۱۴۰/۸۲۱ (۲) ۱۶ (۳) ۴ (۴) مشخص نیست.

- ۲- از میان ۱۰۰ دانش‌آموز، ۴۰ نفر در درس شیمی و ۳۵ نفر در درس فیزیک، نمره بالای ۱۵ کسب کرده‌اند و ۴۰ نفر در هیچ یک از این دو درس نمره بالای ۱۵ نگرفته‌اند. چند نفر از این دانش‌آموزان، فقط در درس فیزیک نمره بالای ۱۵ گرفته‌اند؟
- (۱) ۳۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۳۵
- ٪۴۹ (۱) ۹۸۰/۹۱۵ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۳۵

- ۳- اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته‌ایم. اگر به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون آوریم، با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟
- (۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{4}{9}$
- ٪۴۹ (۱) ۹۷۰/۹۰۲ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{4}{9}$

- ۴- چه تعداد از عبارات زیر، درست هستند؟
- (الف) $\left\{2, \frac{8}{4}, \frac{172}{86}, \frac{14}{7}\right\} = \{2, 2, 2\}$ (ب) $\{-1, 2, 3, 4\} = \{(-1)^2, \frac{8}{4}, \frac{9}{3}, (-2)^2\}$ (ج) مجموعه حروف کلمه «امیر» با مجموعه حروف کلمه «ماریا» برابر است. (د) $\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\}$
- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱
- ٪۴۹ (۱) ۹۹۰/۷۱۸ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

- ۵- در جدول زیر، تعداد لامپ‌های موجود ۶۰ وات و ۱۰۰ وات از دو کارخانه A و B آورده شده است. اگر یک لامپ به تصادف برداشته شود، با کدام احتمال این لامپ ۱۰۰ وات است؟
- | توان | ۶۰ وات | ۱۰۰ وات |
|-----------|--------|---------|
| کارخانه A | ۲۰ | ۱۴ |
| کارخانه B | ۲۲ | ۳۴ |
- (۱) $\frac{7}{15}$ (۲) $\frac{8}{15}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{9}$
- ٪۴۸ (۱) ۹۸۰/۸۱۷ (۲) $\frac{7}{15}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{9}$

- ۶- کدام گزینه یک مجموعه را توصیف نمی‌کند؟
- (۱) اعداد نه مثبت و نه منفی (۲) اعدادی که با تقریب ۰/۱ به ۱۰۰ گرد می‌شوند. (۳) همه استخوان‌های بدن انسان (۴) اعداد نزدیک به هزار
- ٪۴۸ (۱) ۹۹۰/۷۱۸ (۲) اعدادی که با تقریب ۰/۱ به ۱۰۰ گرد می‌شوند. (۳) همه استخوان‌های بدن انسان (۴) اعداد نزدیک به هزار

- ۷- عدد k عددی طبیعی است. اگر $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x = 3k, 1 \leq k \leq 7\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{N}, x = 2k + 1, 1 \leq k \leq 11\}$ باشد، حاصل $A \cap B$ کدام است؟
- (۱) $\{3, 9, 15\}$ (۲) $\{3, 9, 15, 21\}$ (۳) $\{3, 9, 21\}$ (۴) $\{6, 12, 18\}$
- ٪۴۸ (۱) ۹۹۰/۸۰۲ (۲) $\{3, 9, 15, 21\}$ (۳) $\{3, 9, 21\}$ (۴) $\{6, 12, 18\}$

- ۸- اگر A_1 مجموعه اعداد ۱ تا n ، A_2 مجموعه اعداد ۲ تا n و $A_n = \{n\}$ باشد، حاصل $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ الزاماً با کدام گزینه برابر است؟ (فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ده باشد.)
- (۱) \emptyset (۲) $A_n \cup A_{n-1}$ (۳) $A_1 \cup A_2$ (۴) $A_1 \cap A_2$
- ٪۴۸ (۱) ۹۶۰/۸۱۹ (۲) \emptyset (۳) $A_1 \cup A_2$ (۴) $A_1 \cap A_2$

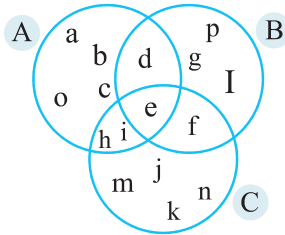
۹- دو مجموعه دو عضوی $A = \{(2x-1), (x-y)\}$ و $B = \{(2-3x), (4x+1)\}$ با هم برابرند. از بین حالات ممکن برای x و y ، با کدام احتمال $x+y = -7$ خواهد بود؟

👤 %۴۸
✅ %۲۹
📝 ۹۶/۱۰/۰۱

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{1}{3}$
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) صفر

۱۰- با توجه به نمودار زیر، یک عضو از مجموعه $S = (A \cup (B \cap C))$ به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال عضو انتخابی، از مجموعه $[(A \cap C) - B] \cup [(B - C) \cup (B \cap A)]$ است؟

👤 %۴۸
✅ %۲۷
📝 ۹۶/۰۸/۱۹



- (۱) $\frac{3}{8}$
(۲) $\frac{7}{16}$
(۳) $\frac{1}{2}$
(۴) $\frac{5}{8}$

۱۱- در پرتاب دو تاس، اگر A پیشامد آن باشد که مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۱ باشد، کدام پیشامد، زیرمجموعه پیشامد A است؟

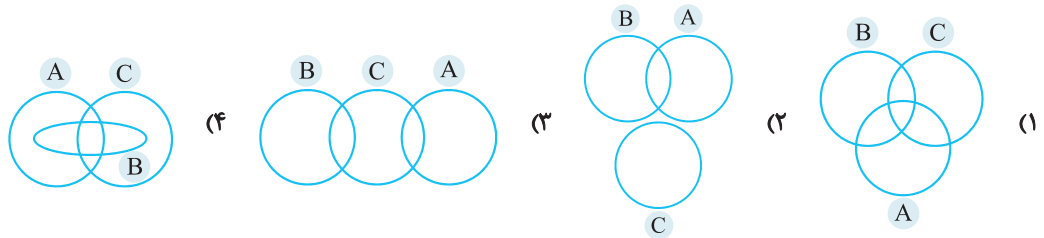
👤 %۴۸
✅ %۲۶
📝 ۹۷/۰۸/۱۷

- (۱) عددهای رو شده، زوج باشند.
(۲) عددهای رو شده، مضرب ۳ باشند.
(۳) عددهای رو شده، فرد باشند.
(۴) مجموع عددهای رو شده، مضرب ۳ باشد.

۱۲- کدام نمودار ون، مجموعه‌های زیر را بهتر نشان می‌دهد؟

$A = \{12, 15, 17, 19\}$, $B = \{11, 12, 15\}$, $C = \{11, 15, 13, 19\}$

👤 %۴۸
✅ %۲۴
📝 ۹۹/۰۷/۱۸



👤 %۴۸
✅ %۲۳
📝 ۹۷/۰۸/۰۴

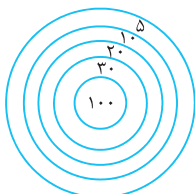
$A = \{-1, 2, x\}$
 $B = \{1+y, 3, 2x-4, -1\}$

۱۳- دو مجموعه A و B با هم برابرند. $x+y$ کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۵
(۲) ۴
(۳) ۱
(۴) ۲

۱۴- تیری را کاملاً اتفاقی به سمت هدف زیر پرتاب می‌کنیم و مطمئنیم به هدف برخورد می‌کند. احتمال آن که این پرتاب بیشتر از ۱۰ امتیاز برای پرتاب‌کننده داشته باشد، کدام است؟ (در هدف زیر، شعاع کوچک‌ترین دایره ۱۰cm و شعاع سایر دایره‌ها که دور این دایره مرکزی قرار گرفته‌اند، به ترتیب ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ سانتی‌متر است. دایره‌ها هم‌مرکز هستند و امتیاز هر ناحیه روی آن نوشته شده‌است.)

👤 %۴۸
✅ %۲۳
📝 ۹۶/۰۸/۰۵



- (۱) $\frac{16}{25}$
(۲) $\frac{9}{25}$
(۳) $\frac{4}{5}$
(۴) $\frac{3}{5}$

۱۵- از بین اعداد دو رقمی فرد، عددی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخاب شده مضرب ۵ باشد ولی مضرب ۳ نباشد، کدام است؟

👤 %۴۸
✅ %۱۱
📝 ۹۶/۰۸/۰۵

- (۱) $\frac{2}{15}$
(۲) $\frac{11}{45}$
(۳) $\frac{7}{9}$
(۴) $\frac{1}{9}$



۱۶- اگر $\{x, y, 17\} \cup \{12, 17, z\} = \{7, 12, 17, 5\}$ باشد، به طوری که $x \neq z$ باشد، برای حاصل عبارت $2x - y + z$ کدام

گزینه ممکن نیست؟ (X، y و Z، اعدادی یک‌رقمی هستند.)

- %۴۷
- %۳۱
- ۹۶/۰۷۲۱

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۴
- (۴) ۱۵

۱۷- سه مجموعه $n-3$ عضوی، $n+2$ عضوی و $n-1$ عضوی، روی هم ۲۹۶ زیرمجموعه دارند. مقدار n کدام است؟ (تعداد زیرمجموعه‌های یک

مجموعه n عضوی برابر 2^n است.)

- %۴۷
- %۳۰
- ۱۴۰/۰۷۲۳

- (۱) ۷
- (۲) ۶
- (۳) ۸
- (۴) ۵

۱۸- A مجموعه اعداد طبیعی زوج و B مجموعه مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۹ است. در این صورت:

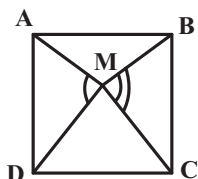
- %۴۷
- %۲۸
- ۹۹/۰۸/۰۲

- (۱) $B \subset A$
- (۲) $A \cup B = \emptyset$
- (۳) $A - B = A$
- (۴) $A \cap B = B$

۱۹- درون مربع زیر یک نقطه دلخواه به نام M به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن به چهار رأس وصل می‌کنیم چه قدر احتمال دارد که هر دو زاویه

\widehat{AMC} و \widehat{BMC} حاده باشند؟

- %۴۷
- %۲۳
- ۱۴۰/۰۸/۰۷



- (۱) $1 - \frac{\pi}{4}$
- (۲) $\frac{\pi}{2} - 1$
- (۳) $\frac{\pi}{6}$
- (۴) $\frac{\pi}{4}$

۲۰- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k-2$ عضوی، چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $k-4$ عضوی است؟ ($k \geq 4$)

- %۴۷
- %۱۹
- ۱۴۰/۱۰۷۲۳

- (۱) ۲ برابر
- (۲) 2^k برابر
- (۳) $k-2$ برابر
- (۴) ۴ برابر

۲۱- تعداد دانش آموزان یک مدرسه ۱۸۰ نفر است. تعداد دانش آموزان پایه نهم دو برابر تعداد دانش آموزان پایه هشتم می‌باشد و تعداد دانش آموزان

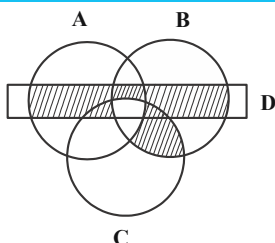
پایه هشتم، دو سوم تعداد دانش آموزان هفتم می‌باشد. اگر بخواهیم برای مسابقات استانی ریاضی، یک نفر از این مدرسه را انتخاب کنیم؛ احتمال

آن که دانش آموز مقطع هفتم یا نهم باشد، چقدر است؟

- %۴۶
- %۳۱
- ۹۹/۰۸/۰۲

- (۱) $\frac{2}{9}$
- (۲) $\frac{7}{9}$
- (۳) $\frac{11}{18}$
- (۴) $\frac{13}{18}$

۲۲- کدام یک از گزینه‌های زیر، قسمت سایه‌زده نمودار ون زیر را به درستی مشخص می‌کند؟



- %۴۶
- %۲۷
- ۹۸/۰۸/۰۳

- (۱) $[(A \cup B) \cap D] - (A \cap B \cap C)$
- (۲) $[[(B \cap C) - A] \cup [D \cap (A \cup B)]] - (A \cap B \cap C)$
- (۳) $[D \cap (A \cup B)] \cup [(B \cup C) - A]$
- (۴) $[(A \cap B) - C] \cup [(A \cup B) \cap D] \cup [(B \cap C) - A]$

پاسخ‌نامه تشریحی



■ انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۴۷۵۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۱ سوال پاسخ دهند.

■ انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ (یا ۳) سوال پاسخ دهند.

■ انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۴ سوال پاسخ دهند.



■ انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۴۷۵۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ سوال پاسخ دهند.

■ انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ (یا ۴) سوال پاسخ دهند.

■ انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۵ سوال پاسخ دهند.



■ انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۴۷۵۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۵ سوال پاسخ دهند.

■ انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۶ (یا ۷) سوال پاسخ دهند.

■ انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۸ سوال پاسخ دهند.

دشواری



دشواری



نسبتاً دشواری





در ناحیه‌ای که مربوط به فقط شیمی (A - B) است، عدد $40 - x$ را می‌گذاریم. ادامه راه به عهده شما.

۳. گزینه «۲»

فضای نمونه برابر است با:

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$$

تمامی حالت‌هایی که جمع دو عدد رو شده زوج باشد به صورت زیر است:

$$A = \{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (4, 6)\}$$

$$n(S) = 15, n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

(صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

۴. گزینه «۳»

بررسی عبارات

الف) $\{2\} = \{2\} \Rightarrow$ عضو تکراری در مجموعه حذف می‌شود. ✓

ب) $\{-1, 2, 3, 4\} \neq \{-1, 4, 3, 4\} \Rightarrow$ مجموعه سمت راست ۲ ندارد. ✗

ج) $\{r, y, m, a\} = \{a, m, r, y\} \Rightarrow$ ماریا = امیر / $\{y, r, a, m\} = \{m, r, a, y\} \Rightarrow$ دو مجموعه با هم برابرند. توجه کنید ترتیب اعضا مهم نیست و عضو تکراری نیز در دو مجموعه حذف می‌شود. ✓

د) عضوهای این دو مجموعه با هم برابر نیستند: ✗

$$\{a, \{b, c\}\} \neq \{\{a, b\}, c\}$$

(صفحه‌های ۶ و ۷ کتاب درسی)

۵. گزینه «۲»

در مجموع تعداد لامپ‌ها برابر است با:

$$n(S) = 20 + 14 + 22 + 34 = 90$$

و تعداد لامپ‌های ۱۰۰ وات برابر است با:

$$n(A) = 14 + 34 = 48$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

بنابراین:

(صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

۶. گزینه «۴»

اعضای یک مجموعه باید کاملاً مشخص باشند.

مجموعه اعداد نزدیک به هزار توصیف‌کننده یک مجموعه مشخص نیست، زیرا دقیقاً مشخص نیست که اعداد تا چه محدوده‌ای نزدیک به هزار محسوب می‌شوند. ولی اعضای بقیه گزینه‌ها کاملاً مشخص است.

* توجه کنید که مشخص بودن اعضای یک مجموعه به این معنی نیست که متناهی یا نامتناهی است بلکه باید قابل تعریف باشند.

(صفحه‌های ۵ تا ۵ کتاب درسی)

۷. گزینه «۲»

مجموعه A و B عبارت‌اند از:

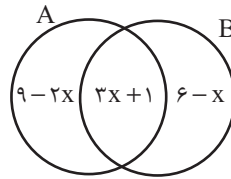
$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$$

$$B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$$

$$A \cap B = \{3, 9, 15, 21\}$$

(صفحه‌های ۶ تا ۱۴ کتاب درسی)

۱. گزینه «۲»



$$n(A \cup B) = (9 - 2x) + (3x + 1) + (6 - x) = 16$$

(صفحه ۱۳ کتاب درسی)

نکته پیشرفته:

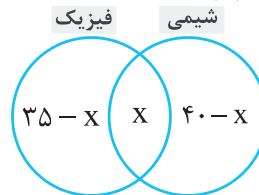
اگر تعداد عناصر مجموعه X را به صورت $n(X)$ نشان دهیم:

$$\begin{cases} n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \end{cases}$$

$$n(A - B) \cup n(B - A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

۲. گزینه «۳»

نمودار مربوط به این سؤال به شکل زیر است، پس:



تعداد افرادی که نمره بالای ۱۵ کسب کرده‌اند برابر است با:

$$\text{نفر } 100 - 40 = 60$$

با توجه به نمودار بالا، افرادی که در هر دو درس نمره بالای ۱۵ کسب کرده‌اند را x در نظر می‌گیریم. داریم:

$$(35 - x) + (x) + (40 - x) = 60$$

$$\Rightarrow 75 - x = 60 \Rightarrow x = 15 \text{ نفر}$$

بنابراین $20 = 35 - 15$ نفر هستند که فقط در درس فیزیک نمره بالای ۱۵ کسب کرده‌اند.

(صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی)

درسنامه پیشرفته:

برای حل سؤالات مشابه:

(۱) ابتدا هر گروه (مثلاً هر درس، یا هر ورزش یا ...) را یک مجموعه در نظر می‌گیریم و نمودار ون آن‌ها را رسم می‌کنیم.

(۲) افرادی که در هیچ‌کدام از مجموعه‌ها قرار نمی‌گیرند را کنار می‌گذاریم.

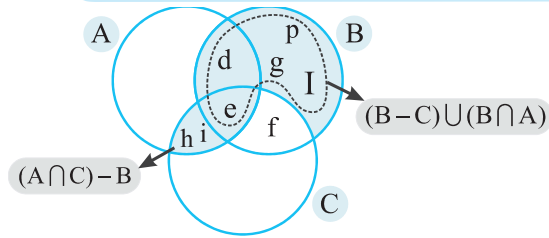
(۳) سراغ افرادی می‌رویم که در بیش‌تر از یک مجموعه قرار دارند. به عبارت دیگر به ناحیه اشتراک بین مجموعه‌ها توجه می‌کنیم. در هر ناحیه اشتراک، یک مجهول مثل x, y, \dots می‌گذاریم.

(۴) سپس در نواحی دیگر مانند $A - B$ ، تعداد اعضای آن مجموعه منهای اشتراک را می‌گذاریم.

(۵) به مطلوب سؤال توجه می‌کنیم و آن را پیدا می‌کنیم.

در این سؤال ابتدا مجموعه‌ها را مشخص می‌کنیم و نمودار ون آن‌ها را رسم می‌کنیم. تعداد افراد ناکارآمد (۴۰ نفر) را کنار می‌گذاریم. پس اکنون با ۶۰ نفر کار داریم. ما دو مجموعه داریم و در نتیجه یک ناحیه اشتراک وجود دارد.

اگر سه مجموعه داشتیم، چهار ناحیه اشتراک داشتیم. (چرا؟) در ناحیه اشتراک یک متغیر مجهول مثل x را می‌گذاریم. سپس در مجموعه شیمی،



در این گونه سؤال‌ها یافتن جواب از روی نمودار ون، خیلی راحت‌تر از ساده کردن مجموعه داده شده و رسیدن به جواب است.

(صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی)

۱۱. گزینه «۳»

در پیشامد A تنها عضوهای (۵,۶)، (۶,۵) و (۶,۶) قرار ندارند.

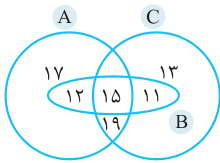
بنابراین پیشامدی زیرمجموعه پیشامد A خواهد بود که هیچ یک از این اعضا را نداشته باشد.

در پیشامد A تمامی حالت‌های پرتاب دو تاس به جز (۵,۶) و (۶,۵) و (۶,۶) قرار دارد

برای زیر مجموعه بودن، باید تمامی عضوهای گزینه مورد نظر در پیشامد A باشد در حالی که در گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ عضو (۶,۶) وجود دارد که در A نیست پس گزینه ۳ جواب است.

(صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

۱۲. گزینه «۴»



با توجه به عضوهای ۳ مجموعه، هر سه با هم اشتراکاتی دارند. پس گزینه ۲ و ۳ غلط است و چون $A \cup C$ ؛ B را شامل می‌شود یعنی $B \subseteq A \cup C$ پس گزینه ۴ درست است.

(صفحه ۳ کتاب درسی)

۱۳. گزینه «۴»

در مجموعه B عدد ۳ وجود دارد که باید در مجموعه A نیز وجود داشته باشد. پس:

$$x = 3 \Rightarrow 2x - 4 = 2(3) - 4 = 2$$

پس مجموعه A برابر است با:

مجموعه A، سه عضوی است پس مجموعه B نیز باید سه عضوی باشد. بنابراین عضو $x + y$ با یکی از اعضای دیگر برابر است. پس:

$$B = \{-1, 2, 3, 1 + y\}$$

$$1 + y = 3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x + y = 5$$

$$1 + y = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x + y = 4$$

$$1 + y = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x + y = 1$$

(صفحه‌های ۶ تا ۱۰ کتاب درسی)

۱۴. گزینه «۲»

ابتدا مساحت کل را به دست می‌آوریم:

$$(\Delta)^2 \pi = 2500\pi$$

$$(\Delta)^2 \pi = 900\pi$$

$$\text{احتمال} = \frac{\text{حالت مطلوب}}{\text{کل حالت‌ها}} = \frac{900\pi}{2500\pi} = \frac{9}{25}$$

(صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

درسنامه پیشرفته:

می‌خواهیم بدون نوشتن همه اعضای هر دو مجموعه، این سؤال را حل کنیم.

مجموعه A	شامل اعداد مضرب ۳	اولین آن‌ها ۳ و آخرین آن‌ها ۲۱
مجموعه B	شامل اعداد فرد	اولین آن‌ها ۳ و آخرین آن‌ها ۲۳

اعداد عضو اشتراک این دو مجموعه، باید هر دو شرط را داشته باشند. پس مضارب فرد ۳ هستند. اکنون باید بازه آن‌ها را مشخص کنیم. اشتراک دو بازه می‌شود ۳ تا ۲۱.

پس مطلوب ما مضارب فرد ۳ از ۳ تا ۲۱ هستند. (۳، ۹، ۱۵ و ۲۱)

این راه‌حل به ما کمک می‌کند بدون نوشتن تمام اعضای هر مجموعه و سپس بررسی تک‌تک اعضا برای پیدا کردن عضوهای مشترک، خود آن مجموعه را بسازیم.

۸. گزینه «۳»

طبق تعریف مجموعه‌ها داریم:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{2, 3, \dots, n\} \cup \dots \cup \{n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\} = A_1$$

بررسی همه گزینه‌ها:

- گزینه ۱: $\{1, 2, 3, 4, \dots, n-1, n\} \neq \emptyset$ ❌
- گزینه ۲: $A_n \cup A_{n-1} = \{n\} \cup \{n-1, n\} = \{n-1, n\}$ ❌
- گزینه ۳: $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{2, 3, \dots, n\} = \{1, 2, \dots, n\} = A_1$ ✅
- گزینه ۴: $A_1 \cap A_2 = \{1, 2, \dots, n\} \cap \{2, 3, \dots, n\} = \{2, 3, 4, \dots, n\} = A_2$ ❌

۹. گزینه «۱»

برای برابر بودن دو مجموعه باید اعضای آن‌ها با هم برابر باشند، یعنی یا باید

$$\begin{cases} 2 - 3x = 2x - 1 \\ 4x + 1 = x - y \end{cases} \text{ باشد یا } \begin{cases} 2 - 3x = x - y \\ 4x + 1 = 2x - 1 \end{cases} \text{ پس داریم:}$$

حالت اول:

$$\begin{cases} 2 - 3x = 2x - 1 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \\ 4x + 1 = x - y \Rightarrow 3x + 1 = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5} + 1 = -y \Rightarrow y = -\frac{14}{5} \Rightarrow x + y = -\frac{11}{5}$$

حالت دوم:

$$\begin{cases} 2 - 3x = x - y \\ 4x + 1 = 2x - 1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 + 3 = -1 - y \Rightarrow y = -6 \Rightarrow x + y = -7$$

در مجموع دو جواب برای $x + y$ وجود دارد که یک حالت آن مطلوب است. پس احتمال مطلوب، برابر $\frac{1}{2}$ است.

* دانش‌آموزان عزیز توجه کنید که در مجموعه‌ها ترتیب مهم نمی‌باشد بنابراین در صورت عدم توجه به این نکته به یک جواب رسیده که آن حالت اول است و گزینه «۴» را انتخاب می‌کنید و به دام می‌افتید.

(صفحه‌های ۶ تا ۱۰ و ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

۱۰. گزینه «۲»

مجموعه مطلوب، قسمت سایه‌خورده نمودار است که هفت عضو دارد. مجموعه S دارای ۱۶ عضو است که در نتیجه، احتمال مطلوب، برابر خواهد

بود با:

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{\text{مطلوب}}{\text{کل}} = \frac{7}{16}$$


درسنامه پیشرفته:
امتثال غیرهم‌شانس

هرگاه احتمال وقوع حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای با هم برابر نباشد، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌نامیم. در مسائل آشنا، وقتی یک تاس را می‌انداختیم احتمال رو شدن همه اعداد باهم برابر بود $(\frac{1}{6})$. اما ممکن است یک تاس خاص به گونه‌ای ساخته شود که یک طرف آن سنگینی کند و احتمال رو شدن وجه مقابل آن بیشتر از سایر وجه‌ها باشد. در این صورت احتمال وقوع پیشامدها غیرهم‌شانس است. مثال واقعی‌تر آن مسابقات ورزشی است: وقتی احتمال قهرمانی یک تیم از تیم‌های دیگر بیشتر است.

یکی از رابطه‌های کلیدی برای حل سوالات غیرهم‌شانس:

$$P(s_1) + P(s_2) + P(s_3) + \dots + P(s_k) = 1$$

مثال: اگر در پرتاب یک تاس خاص، احتمال رو شدن هر عدد متناسب با

همان عدد باشد، احتمال رو شدن عدد زوج چند است؟

طبق فرض سؤال احتمال رو شدن عدد ۱ را x ، عدد ۲ را $2x$ و عدد ۳ را $3x$ و .. در نظر می‌گیریم.

طبق رابطه کلیدی مطرح شده، مجموع احتمالات ۱ می‌شود:

$$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

احتمال رو شدن عدد زوج، یعنی مجموع احتمال رو شدن اعداد ۲، ۴ و ۶:

$$\frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

۱۵. گزینه «۱»

اعداد فرد دو رقمی به صورت زیر هستند:

$$S = \{11, 13, \dots, 97, 99\} \Rightarrow n(S) = \frac{99-11}{2} + 1 = 45$$

اعداد دورقمی فرد مضرب ۵ که مضرب ۳ نیستند، عبارتند از:

$$A = \{25, 35, 55, 65, 85, 95\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

توجه: اعدادی مضرب ۳ هستند که مجموع ارقام آن‌ها به ۳ بخش‌پذیر باشد.

(صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

نکته پیشرفته:

احتمال این که A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد به صورت $P(A-B)$ نمایش داده می‌شود.

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

۱۶. گزینه «۴»

با توجه به فرض سؤال، داریم:

$$\{12, 17, z\} \cup \{x, y, 17\} = \{12, 17, x, y, z\} = \{7, 12, 17, 5\}$$

می‌دانیم $x \neq z$ است؛ پس $x = y$ یا $x = z$ است.

هم‌چنین به دلیل یکرقمی بودن x و y و z و $\{5, 7\} = \{x, y, z\}$ است، که در این صورت یا $z = 7$ و $x = 5$ است یا $z = 5$ و $x = 7$ با این وصف چهار حالت داریم:

$$\Rightarrow \{x, y, z\} = \{7, 5\}$$

$$1) x = 5, y = 5, z = 7 \Rightarrow 2x - y + z = 10 - 5 + 7 = 12$$

$$2) x = 7, y = 7, z = 5 \Rightarrow 2x - y + z = 14 - 7 + 5 = 12$$

$$3) x = 5, y = 7, z = 7 \Rightarrow 2x - y + z = 10 - 7 + 7 = 10$$

$$4) x = 7, y = 5, z = 5 \Rightarrow 2x - y + z = 14 - 5 + 5 = 14$$

(صفحه‌های ۶ تا ۱۰ کتاب درسی)

۱۷. گزینه «۲»

$$2^{n-3} + 2^{n+2} + 2^{n-1} = 296$$

$$2^{n-3}(1 + 2^5 + 2^2) = 296 \Rightarrow 2^{n-3} \times (1 + 32 + 4) = 296$$

$$2^{n-3} = \frac{296}{37} = 8 = 2^3 \Rightarrow n-3 = 3 \Rightarrow n = 6$$

(مجموعه‌ها، صفحه‌های ۷ و ۸ کتاب درسی)

۱۸. گزینه «۳»

مجموعه‌های A و B به صورت زیر هستند:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$$

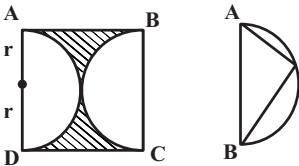
$$B = \{1, 3, 9\}$$

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A - (A \cap B) = A$$

(صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی)

۱۹. گزینه «۱»

می‌دانیم که اگر M نقطه‌ای روی دایره باشد و روبه‌رو به قطر، آن وقت $\hat{M} = 90^\circ$ از طرفی اگر رأس M را از دایره خارج کنیم، زاویه کوچک‌تر و اگر M را به داخل دایره بیاوریم، زاویه بزرگ‌تر می‌شود. پس برای این که زاویه حاده داشته باشیم رأس M باید خارج از دو نیم دایره به قطرهای AD و BC باشد.



مساحت رنگی = احتمال این که هر دو زاویه حاده باشند
مساحت مربع

$$= \frac{(2r)^2 - 2 \times \left(\frac{\pi r^2}{2}\right)}{(2r)^2} = \frac{4r^2 - \pi r^2}{4r^2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

۲۰. گزینه «۴»

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر 2^n است. بنابراین:

$$\frac{2^{k-2}}{2^{k-4}} = \frac{2^k \times 2^{-2}}{2^k \times 2^{-4}} = \frac{2^{-2}}{2^{-4}} = \frac{2^2}{1} = 4$$

(صفحه‌های ۶ تا ۱۰ کتاب درسی)

۲۱. گزینه «۲»

A = دانش آموزان نهم

B = دانش آموزان هشتم

C = دانش آموزان هفتم

ابتدا تعداد دانش‌آموزان هر مقطع را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\text{نهم}}{\text{هشتم}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{\text{هشتم}}{\text{هفتم}} = \frac{2}{3}$$

نهم	۴	۸۰	$n(A)$
هشتم	۲	۴۰ <th>$n(B)$</th>	$n(B)$
هفتم	۳	۶۰ <th>$n(C)$</th>	$n(C)$
جمع	۹	۱۸۰	

اکنون باید تعداد اعضای مجموعه دانش‌آموزان هفتم یا نهم، یعنی $A \cup C$ را به دست آوریم که برابر است با:

$$n(A \cup C) = 80 + 60 = 140$$

از طرفی تعداد کل دانش‌آموزان ۱۸۰ نفر است یعنی $n(S) = 180$

$$P(A \cup C) = \frac{n(A \cup C)}{n(S)} = \frac{140}{180} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

(صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی)

شدن ضربه بازیکن دوم به گل شدن ضربه بازیکن اول بستگی دارد. چنین پیشامدهایی که مستقل نیستند را وابسته می‌نامیم. به عنوان یک مثال دیگر، احتمال گردش رفتن یک خانواده x است. اما اگر باران بیاید احتمال گردش رفتن آن‌ها کم‌تر می‌شود. در نتیجه این دو پیشامد وابسته هستند.

رابطه کلیدی در مورد پیشامدهای مستقل:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

گزینه ۲۴ «۳»

مجموعه‌های A ، B و C عبارت‌اند از:

$$A = \{3\}, B = \{5\}, C = \{2\}$$

$$A \cup B \cup C = \{2, 3, 5\}$$

در واقع صورت سؤال به دنبال عددی می‌گردد که ۲، ۳ و ۵ شمارنده‌های آن باشند که کوچک‌ترین عدد ممکن برابر حاصل ضرب این اعداد است:

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

(صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی)

گزینه ۲۵ «۳»

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی 2^n است؛ یعنی این مجموعه 2^{2n+1} زیرمجموعه دارد.

$$2^{2n+1} = 8^{2n-1} \Rightarrow 2^{4n+1} = (2^3)^{2n-1}$$

$$\Rightarrow 2^{4n+1} = 2^{6n-3} \Rightarrow 4n+1 = 6n-3$$

$$n = 2 \Rightarrow 4 \times 2 + 1 = 9$$

تعداد اعضای مجموعه ۹

(صفحه‌های ۷ و ۸ کتاب درسی)

گزینه ۲۶ «۱»

در بین گزینه‌ها باید دنبال مجموعه‌ای باشیم که شامل ۳ عضو نامساوی که مربعات متفاوتی دارند، باشد.

$$\left\{ 3, 12, \frac{-15}{\sqrt{25}}, 6 \right\} = \{3, 12, (-3), 6\}$$

$$\text{مجموعه مربعات} = \{9, 144, 9, 36\} = \{9, 36, 144\}$$

که مجموعه‌ای سه عضوی است و دارای ۸ زیرمجموعه زیر است:

$$\emptyset, \{9\}, \{36\}, \{144\}, \{9, 36\}, \{9, 144\}, \{36, 144\}, \{9, 36, 144\}$$

گزینه «۳»، ۳ عضو متفاوت $\{23, -6, 6\}$ دارد ولی مربعات اعضای آن به صورت $\{(23)^2, 36\}$ است که دو عضو دارد و ۴ زیرمجموعه.

(صفحه‌های ۶ تا ۱۰ کتاب درسی)

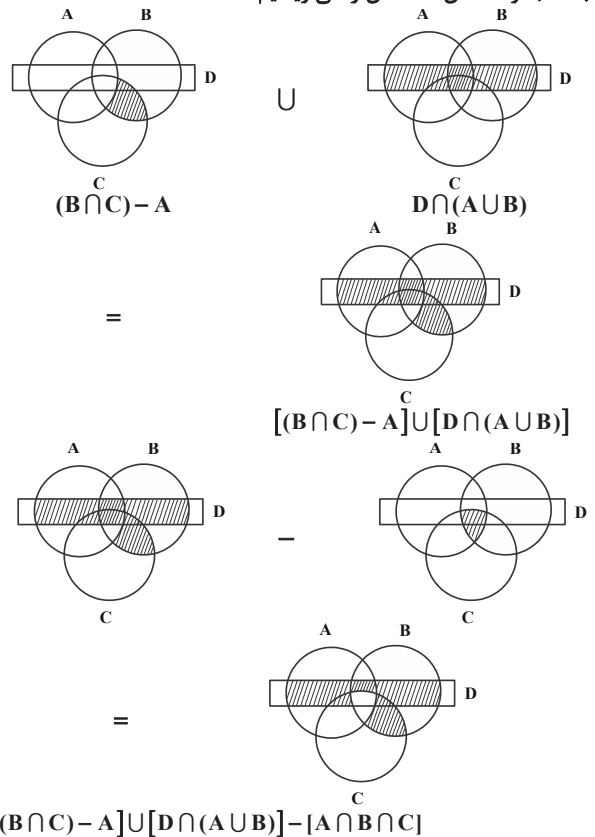
گزینه ۲۷ «۳»

منظور سؤال، مجموعه‌ای است از اعداد صحیح که حاصل تقسیم ۱۸ بر آن‌ها عدد صحیح باشد. لذا گزینه «۳» پاسخ درست است.

گزینه‌های «۲» و «۴» گزینه‌های دام هستند. توجه کنید در مورد گزینه «۲»، حاصل می‌تواند عدد اعشاری باشد.

(صفحه‌های ۶ تا ۱۰ کتاب درسی)

۲۲. گزینه «۲»
برای رسیدن به نمودار ون داده شده، نمودار را در چند مرحله رسم کرده و بعد مجموعه نشان‌دهنده آن را می‌نویسیم:



(صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی)

گزینه ۲۳ «۱»

با توجه به این که سه پرسش نخست را دانش‌آموز درست پاسخ داده است و پاسخ او به این سؤال‌ها تأثیری در پاسخ او به باقی سؤال‌ها ندارد، باید احتمال درست پاسخ دادن را در دو سؤال بعدی حساب کرد. چون دو سؤال مانده است، مجموعه حالات ممکن هم ۴ عضو دارد. در این بین، تنها یک حالت، حالت مطلوب ماست. بنابراین احتمال این که به دو سؤال باقی مانده پاسخ صحیح بدهد؛ $\frac{1}{4}$ است.

$$A = \{\text{درست و درست}\}$$

$$S = \{\{\text{غلط و درست}\}, \{\text{درست و غلط}\}, \{\text{غلط و غلط}\}, \{\text{درست و درست}\}\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

(صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

درسنامه پیشرفته:

پیشامدهای مستقل

گاهی احتمال وقوع یک نوع پیشامد، به وقوع پیشامد دیگر بستگی ندارد. به عنوان مثال اگر یک سکه و یک تاس را هم‌زمان پرتاب کنیم، عدد تاس هیچ ارتباط و وابستگی به رو یا پشت شدن سکه ندارد. چنین پیشامدهایی را مستقل می‌نامیم.

اما فرض کنید یک تیم در ضربات پنالتی فوتبال پنج تا از بازیکن‌هایش را انتخاب می‌کند. اگر بازیکن اول، گل بزند، روحیه بازیکن دوم تقویت می‌شود و احتمال گل شدن آن هم افزایش پیدا خواهد کرد. در نتیجه احتمال گل



ابتدا باید تعداد افرادی که به هر سه ورزش علاقه دارند، بیابیم. اگر تعداد دانش‌آموزانی که به هر سه رشته ورزشی علاقه دارند X باشد، با توجه به نمودار ون و این که تعداد کل دانش‌آموزان ۳۰ نفر است، داریم:

$$5 + 3 + 2 + 4 + 2 + 3 + 10 + X = 30 \Rightarrow 29 + X = 30 \Rightarrow X = 1$$

بنابراین تعداد نفراتی که هم به شنا، هم به فوتبال و هم به والیبال علاقه دارند، برابر ۱ است.

$$\left. \begin{aligned} n(\text{فوتبال}) &= 4 + 3 + 2 + 1 = 10 \\ n(\text{والیبال}) &= 3 + 2 + 2 + 1 = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{n(\text{فوتبال})}{n(\text{والیبال})} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

(صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی)

نکته پیشرفته:

تعداد عضوهایی که حداقل به یکی از مجموعه‌ها (دوتا، سه‌تا و ...) تعلق دارند.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

۳۱. گزینه «۳»

مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۹۰ به شرح زیر است:

$$\{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}$$

بنابراین عدد ۹۰، ۱۰ شمارنده طبیعی کوچک‌تر از ۴۵ دارد و در نتیجه مجموعه شامل شش شمارنده کوچک‌تر از ۴۵ عدد ۹۰، مجموعه‌ای یکتا نیست.

سایر گزینه‌ها، مجموعه‌های یکتای زیر را مشخص می‌کنند:

گزینه ۱: $\{2, 6, 10, 18, 30, 90\}$

گزینه ۲: $\{2, 3, 5\}$

گزینه ۴: $\{5, 10, 15, 30, 45, 90\}$

(صفحه‌های ۵ تا ۷ کتاب درسی)

۳۲. گزینه «۴»

با توجه به گزینه‌ها، نیازی به یافتن مجموعه C نیست!

$$A = \{28, 35, 42, 49, \dots, 77\} \rightarrow n(A) = 8$$

$$B = \{3, 6, 9, \dots, 24\} \rightarrow n(B) = 8$$

$$D = \{1, 2, 3, \dots, 7\} \rightarrow n(D) = 7$$

$$E = \left\{ \frac{-5}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5} \right\} \rightarrow n(E) = 4$$

$$F = \left\{ \frac{3}{2}, 3, \dots, 12 \right\} \rightarrow n(F) = 8$$

(صفحه‌های ۱۰ تا ۱۱ کتاب درسی)

۲۸. گزینه «۱»

اعضای داخل فضای نمونه را می‌نویسیم:

$$A = \{x \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 14\}$$

$$= \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41\}$$

$$\rightarrow n(A) = 14$$

B مجموعه اعداد اول و فرد از مجموعه A :

$$B = \{5, 11, 17, 23, 29, 41\} \rightarrow n(B) = 6$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

(صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

۲۹. گزینه «۲»

روی هر تاس، سه عدد زوج و سه عدد فرد وجود دارد. از آنجایی که تعداد اعداد زوج و فرد روی هر تاس برابر است، می‌توان برای هر تاس دو حالت «زوج» و «فرد» در نظر گرفت. زوج را با «ز» و فرد را با «ف» نمایش می‌دهیم.

$$n(S) = \{(f, f), (f, z), (z, f), (z, z)\}$$

$$n(A) = \{(z, z), (z, f), (f, z), (f, f)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)

درسنامه پیشرفته:

اصل متمم

همیشه می‌توانیم برای محاسبه تعداد حالات انجام کار، یا محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد، تعداد حالات یا احتمال وقوع نقطه مقابل آن را حساب کنیم و از تعداد کل حالات کم کنیم. اما گاهی این کار مناسب‌تر از محاسبه تعداد حالات یا احتمال وقوع خود آن است و گاهی کار را سخت‌تر می‌کند. اگر در همین سؤال گفته می‌شد حداقل یک عدد زوج وجود داشته باشد، می‌توانستیم این روش را به‌خاطر تعداد حالات کم‌تر انتخاب کنیم.

* مطلوب: رو شدن حداقل یک عدد زوج

* نقطه مقابل: عدم رو شدن عدد زوج (هیچ عدد زوجی نیاید = همه اعداد فرد باشند)

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نقطه مقابل آن، فقط یک حالت دارد (هر سه عدد فرد باشند)

در نتیجه Y حالت دیگر مطلوب ما حساب می‌شوند و احتمال وقوع حداقل

$$\text{یک عدد زوج می‌شود } \frac{7}{8}$$

۳۰. گزینه «۳»

از نمودار ون کمک می‌گیریم و مقادیر داده شده را روی نمودار می‌نویسیم:

