

## سؤال‌های نسبتاً دشوار

## مبحث: بردار

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ سوال پاسخ دهند.  
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۴ (یا ۵) سوال پاسخ دهند.  
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۶ سوال پاسخ دهند.

۱- بردار  $a = (m, 2m, m-1)$  بردار یکه و غیرعمود بر صفحات مختصات است.  $m$  کدام است؟

(۴۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۹ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۱ مهر ۹۱-شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) ۱  
(۲)  $\frac{1}{3}$   
(۳) صفر  
(۴) صفر یا  $\frac{1}{3}$

۲- زاویه‌ی کدام بردار با جهت مثبت محور  $x$  ها بزرگ‌تر است؟ (۳۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۷ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۱۲ آبان ۹۱-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- (۱)  $(2, 3, -1)$   
(۲)  $(1, 4, 3)$   
(۳)  $(0, 3, 4)$   
(۴)  $(-2, 2, 1)$

۳- اگر  $e_a = (\frac{1}{3}, m, \frac{2}{3})$  بردار جهت  $a$  و  $|a| = 12$  باشد، مجموع مؤلفه‌های بردار  $a$  کدام است؟ ( $m < 0$ )

(۳۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۶ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۰ مرداد ۹۱-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- (۱) ۲۰  
(۲) ۴  
(۳) ۱۲  
(۴) -۴

۴- قرینه‌ی نقطه‌ی  $A = (3, 2, 1)$  نسبت به محورهای  $Ox$  و  $Oy$  به ترتیب نقاط  $B$  و  $C$  می‌باشند. اگر نقاط  $A, B, C, D$  چهار رأس یک متوازی‌الاضلاع به قطر  $AD$  باشند، مختصات رأس  $D$  کدام است؟

(۳۵ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۹ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۶ مهر ۹۲-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- (۱)  $(-3, -2, -3)$   
(۲)  $(-3, -2, 1)$   
(۳)  $(0, 0, -1)$   
(۴)  $(-6, -4, -1)$

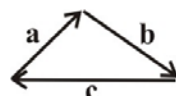
۵- چند نقطه در فضا وجود دارد که فاصله‌ی آن نقاط از  $A = (1, 4, 2)$  برابر ۱ و از  $B = (3, 2, 1)$  برابر  $\frac{1}{5}$  باشد؟

(۳۵ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۸ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۱۷ شهریور ۹۱-شرکت کنندگان ۳۹ هزار نفر)

- (۱) هیچ  
(۲) ۱  
(۳) ۲  
(۴) بی‌شمار

۶- در شکل زیر، اندازه‌ی بردارهای  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  به ترتیب برابر ۳، ۵ و ۶ است. حاصل ضرب داخلی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  کدام است؟

(۳۴ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۹ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۱۲ آبان ۹۱-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)



- (۱) -۲  
(۲) -۱  
(۳) ۱  
(۴) ۲

۷- اگر بردارهای  $a = (2, -1, 1)$  و  $b = (1, 2, -1)$  دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند، نگاه طول بزرگ‌ترین قطر این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

(۳۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۵ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ مهر ۹۰-شرکت کنندگان ۳۵ هزار نفر)

- (۱)  $\sqrt{10}$   
(۲) ۴  
(۳)  $\sqrt{14}$   
(۴) ۳

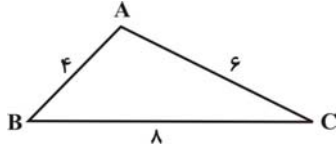
۸- اگر بردارهای  $a = (-1, 2, 2)$  و  $b = (2, -1, -2)$  مفروض باشند، نگاه مجموع مؤلفه‌های بردار جهت نیمساز زاویه‌ی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟

(۳۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۹ آبان ۹۳-شرکت کنندگان ۴۴ هزار نفر)

- (۱)  $\sqrt{2}$   
(۲) ۲  
(۳)  $\frac{1}{2}$   
(۴)  $\frac{2}{3}$

۹- با توجه به اندازه‌های مشخص شده در شکل زیر، حاصل  $\vec{AB} \cdot \vec{CA}$  کدام است؟

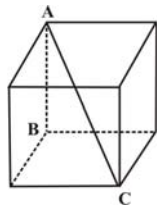
(۳۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۲ درصد پاسخ صحیح دادند). (۱۰۰ آبان ۹۲-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)



- (۱) -۶
- (۲) ۶
- (۳) -۸
- (۴) ۸

۱۰- شکل زیر، مکعبی به طول یال واحد را نمایش می‌دهد، اندازه‌ی  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  کدام است؟

(۲۹ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۸ درصد پاسخ صحیح دادند). (۲۴ آبان ۹۲-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)



- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲)  $\sqrt{2}$
- (۳)  $\sqrt{3}$
- (۴)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$

۱۱- بردار  $a'$  تصویر قائم بردار  $a$  روی امتداد بردار غیرصفر  $b$  است. اگر  $|a'| = |b|$ ، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

(۲۹ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۶ درصد پاسخ صحیح دادند). (۲۷ شهریور ۹۱-شرکت کنندگان ۲۹ هزار نفر)

- (۱)  $a \cdot a = b \cdot b$
- (۲)  $|a \cdot b| = a \cdot a$
- (۳)  $|a \cdot b| = b \cdot b$
- (۴)  $a \cdot b = 0$

۱۲- اگر بردارهای  $a$  و  $b$ ، دو ضلع مجاور یک مربع باشند، آنگاه در کدام یک از گزینه‌های زیر، دو بردار داده شده بر هم عمود هستند؟

(۲۹ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۱ درصد پاسخ صحیح دادند). (۱۰ آبان ۹۲-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

- (۱)  $a + 3b, 3a + b$
- (۲)  $2a - b, 2a + b$
- (۳)  $a + 2b, 2a - b$
- (۴)  $a + 3b, -3a - b$

۱۳- هرگاه  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$  و طول بردارهای  $a$  و  $b$  و  $c$ ، یکسان باشد، آنگاه  $|\vec{a} + \vec{b}|$  چند برابر  $|\vec{b} - \vec{c}|$  است؟

(۲۸ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۶ درصد پاسخ صحیح دادند). (۲۹ دی ۹۱-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳)  $\sqrt{2}$
- (۴)  $\sqrt{3}$

۱۴- اندازه‌ی تصویر قائم بردار  $a$  در راستای بردار  $b = (2\sqrt{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$  برابر ۲ است، مقدار مثبت  $a \cdot b$  کدام است؟

(۲۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۲۰ درصد پاسخ صحیح دادند). (۶ آبان ۹۰-شرکت کنندگان ۳۳ هزار نفر)

- (۱) ۲
- (۲) ۴
- (۳) ۸
- (۴) ۱۶

۱۵- بردارهای  $a = 2i - j + 2k$  و  $b$  و  $c$  طوری مفروض‌اند که  $a + b + c = 0$ ، حاصل  $a \cdot b + a \cdot c$  کدام است؟

(۲۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۹ درصد پاسخ صحیح دادند). (۲۰ آبان ۹۰-شرکت کنندگان ۳۳ هزار نفر)

- (۱) ۹
- (۲) -۹
- (۳) ۳
- (۴) -۳

۱۶- مساحت متوازی‌الاضلاعی که بردارهای  $(-1, 3, 0)$  و  $(1, -1, 2)$  قطره‌های آن هستند، کدام است؟

(۲۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۵ درصد پاسخ صحیح دادند). (۱۸ آذر ۹۰-شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

- (۱)  $\frac{2\sqrt{11}}{11}$
- (۲)  $\sqrt{11}$
- (۳)  $\frac{\sqrt{11}}{2}$
- (۴)  $2\sqrt{11}$

۱۷- دو بردار  $a$  و  $b$  مفروض‌اند؛ اگر  $|a|^2 + |b|^2 = ۳۶$  و  $|a - b| = \sqrt{۲}|a + b|$ ، آنگاه حاصل ضرب داخلی دو بردار  $a$  و  $b$  کدام است؟

(۲۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۲۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۶ آبان ۹۰-شرکت کنندگان ۲۳ هزار نفر)

- (۱) -۵  
(۲) ۵  
(۳) -۶  
(۴) ۶

۱۸- اگر بردار  $a = (۲, -۲, ۱)$  با محورهای مختصات، زوایایی به اندازه‌های  $\alpha, \beta, \gamma$  بسازد، آنگاه  $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$  کدام است؟

(۲۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۹ آبان ۹۳-شرکت کنندگان ۴۴ هزار نفر)

- (۱)  $\frac{1}{۳}$   
(۲)  $\frac{۲}{۳}$   
(۳)  $-\frac{1}{۳}$   
(۴)  $-\frac{۲}{۳}$

۱۹- اگر  $|۲x + y + ۶z| = \sqrt{۲}$  باشد، کمترین مقدار عبارت  $x^2 + y^2 + ۴z^2$ ، کدام است؟

(۲۴ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۲۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۷ مهر ۹۱-شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱)  $\frac{1}{۷}$   
(۲)  $\frac{۲}{۷}$   
(۳)  $\frac{۳}{۷}$   
(۴)  $\frac{۴}{۷}$

۲۰- سه بردار  $a = (۳, -۱, ۱)$ ،  $b = (۰, ۱, ۲)$  و  $c = (۳m, ۲ - n, m + n)$  مفروض‌اند. اگر  $(a \times b) \times c = 0$ ، آنگاه  $m - n$  کدام است؟

(۲۴ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۳ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۶ آبان ۹۰-شرکت کنندگان ۳۳ هزار نفر)

- (۱) ۵  
(۲) -۳  
(۳) -۲  
(۴) ۳

۲۱- نقطه‌ی  $A = (۲m, -۳m, ۶m)$  طوری مفروض است که بردار  $\overrightarrow{OA}$  برداری یگه است. طول تصویر قائم این بردار روی صفحه‌ی  $yz$  کدام است؟

(۲۳ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۲۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ مهر ۹۰-شرکت کنندگان ۳۵ هزار نفر)

(نقطه‌ی  $O$  مبدأ مختصات است.)

- (۱)  $\frac{۳}{۷}$   
(۲)  $\frac{۳\sqrt{۵}}{۷}$   
(۳)  $\frac{۶}{۷}$   
(۴)  $\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۷}$

### مبحث: بردار

### سؤال‌های دشوار

### فصل ۱

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ سوال پاسخ دهند.  
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ (یا ۴) سوال پاسخ دهند.  
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۵ سوال پاسخ دهند.

۲۲- نقاط  $A = (-۱, ۲, ۱)$ ،  $B = (۲m + ۱, ۳, m)$  و  $C = (-۱, ۵, m + ۴)$  سه رأس مثلث  $ABC$  را تشکیل می‌دهند. اگر طول میانه‌ی  $AM$  از این مثلث برابر ۲

(۲۳ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۵ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۳ شهریور ۹۱-شرکت کنندگان ۲۹ هزار نفر)

باشد، مجموع مؤلفه‌های نقطه‌ی  $M$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{۳}{۲}$   
(۲) ۲  
(۳) ۴  
(۴) صفر

۲۳- اندازه‌ی بردارهای  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  به ترتیب ۵، ۳، ۴ و ۶ است و  $a + b + c + d = 0$ . حاصل  $a \cdot c - b \cdot d$  کدام است؟

(۲۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۲۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۹ آبان ۹۳-شرکت کنندگان ۴۴ هزار نفر)

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۲۴- دو بردار  $a$  و  $b$  طوری مفروض اند که  $|a - b| = ۴$  و  $|a + b| = ۶$  و زاویه‌ی بین بردارهای  $a + b$  و  $a - b$  برابر  $۱۲۰^\circ$  درجه است. اندازه‌ی بردار  $a$  کدام است؟

(۲۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۱ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۳ دی ۹۰-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- (۱) ۵  
(۲)  $\sqrt{۱۹}$   
(۳)  $\sqrt{۷}$   
(۴) ۳

۲۵- زاویه‌ی بین دو بردار  $a$  و  $b$  برابر  $۸۰^\circ$  می‌باشد. زاویه‌ی بین دو بردار  $|a| - |b|$  و  $|a| + |b|$  کدام است؟

(۲۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند) (۶ مرداد ۹۱-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- (۱)  $۱۰۰^\circ$   
(۲)  $۵۰^\circ$   
(۳)  $۱۳۰^\circ$   
(۴)  $۴۰^\circ$

۲۶- اگر دو بردار  $a = (m, ۱, -۶)$  و  $b = (۳, m + ۱, ۵)$  اندازه‌های برابر داشته باشند، کدام بردار نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار  $a$  و  $b$  است؟

(۲۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۸ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۱ مهر ۹۱-شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱)  $(۳, ۴, -۱)$   
(۲)  $(-۳, ۴, -۱)$   
(۳)  $(۴, ۳, ۱)$   
(۴)  $(۴, ۳, -۱)$

۲۷- به ازای کدام مقدار  $m$ ، یکی از سه بردار  $a = (۱, m, -۱)$ ،  $b = (۲, ۱, ۱)$  و  $c = (۱, -m, ۱)$  روی صفحه‌ی شامل دو بردار دیگر قرار دارد؟

(۲۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۶ درصد پاسخ صحیح دادند) (۶ آبان ۹۱-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- (۱) ۱  
(۲) -۲  
(۳) ۲  
(۴) -۱

۲۸- اگر  $A = (۱, ۲, m)$  نقطه‌ای در فضای  $R^3$  و  $B$  و  $C$  به ترتیب قرینه‌ی  $A$  نسبت به محور  $y$  ها و تصویر  $A$  روی صفحه‌ی  $xz$  باشند، به ازای چه مقدار  $m$ ، مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قائمه است؟

(۲۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۲ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۶ مهر ۹۲-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- (۱)  $m = ۱$   
(۲)  $m = ۲$   
(۳) هیچ مقدار  $m$   
(۴) هر مقدار  $m$

۲۹- دو نقطه‌ی ثابت  $A = (۱, -۱, ۲)$  و  $B = (-۱, ۱, -۲)$  و نقطه‌ی متغیر  $M$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $\vec{MA}$  بر  $\vec{MB}$  عمود باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی  $M$  از مبدأ مختصات چند واحد است؟

(۲۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۶ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۵ مهر ۹۳-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

- (۱)  $\sqrt{۶}$   
(۲) ۶  
(۳) ۱۲  
(۴)  $۲\sqrt{۳}$

۳۰- بردار  $a$  به طول ۲ با بردار  $b$ ، زاویه‌ی  $۴۵^\circ$  می‌سازد. اگر  $a'$  و  $a''$  به ترتیب تصویر  $a$  روی  $b$  و قرینه‌ی  $a$  نسبت به  $b$  باشند، مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده روی دو بردار  $a'$  و  $a''$  کدام است؟

(۲۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۳ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۳ آبان ۹۳-شرکت کنندگان ۴۲ هزار نفر)

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴

۳۱- اعداد حقیقی  $x$ ،  $y$  و  $z$  به گونه‌ای مفروض اند که  $\sqrt{۲}x + y - z = ۷۲$ ، کم‌ترین مقدار  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  کدام است؟

(۲۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۸ درصد پاسخ صحیح دادند) (۶ آبان ۹۰-شرکت کنندگان ۳۳ هزار نفر)

- (۱) ۲۴  
(۲) ۳۶  
(۳) ۲۰  
(۴) ۱۶

۳۲- اگر نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار  $a = (۲, -۱, -۲)$  و  $b$  بردار غیرصفر  $b$ ، روی محور  $y$  ها قرار داشته باشد، مجموع مؤلفه‌های بردار  $e$  کدام است؟

(۲۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۳ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۴ شهریور ۹۱-شرکت کنندگان ۲۹ هزار نفر)

- (۱)  $\frac{۱}{۲}$   
(۲)  $\frac{۱}{۳}$   
(۳)  $-\frac{۱}{۳}$   
(۴)  $-\frac{۱}{۲}$

۳۳- بردارهای  $a = (1, 2, -m)$  و  $b = (2m, -1, 1)$  طوری مفروض اند که اندازه‌ی دو بردار  $a + b$  و  $a - b$  با هم برابر است. مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده

روی دو بردار  $a$  و  $b$  کدام است؟ (۲۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۴ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۳ شهریور ۹۱-شرکت کنندگان ۲۹ هزار نفر)

- (۱) ۹  
(۲)  $9\sqrt{2}$   
(۳) ۱۸  
(۴)  $18\sqrt{2}$

۳۴- سه بردار  $a$ ،  $b$  و  $c$  با شرط  $a + b + c = 0$  داده شده‌اند، به گونه‌ای که  $|a| = 2$ ،  $|b| = 4$  و  $|c| = 3$ ، حاصل  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$  برابر کدام است؟

(۲۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۳ آبان ۹۲-شرکت کنندگان ۴۲ هزار نفر)

- (۱) ۱۸  
(۲) -۸  
(۳) ۱۵  
(۴) -۱۳

۳۵- نقاط  $(2, 4, 1)$  و  $(4, 5, 2)$  رئوس یک متوازی‌الاضلاع و نقطه‌ی  $(2, 3, 0)$  مرکز آن است. طول بزرگ‌ترین ضلع این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

(۱۹ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ مهر ۹۲-شرکت کنندگان ۳۵ هزار نفر)

- (۱)  $2\sqrt{6}$   
(۲)  $\sqrt{6}$   
(۳)  $\sqrt{22}$   
(۴)  $2\sqrt{3}$

۳۶- تصویر قائم بردار  $a = 4i - 3j + 2k$  بر امتداد برداری که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد، کدام است؟

(۱۹ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۴ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۱۰ آبان ۹۲-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

- (۱)  $(-1, -1, -1)$   
(۲)  $(1, 1, 1)$   
(۳)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$   
(۴)  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

۳۷- حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار به اندازه‌های  $|a| = 5$ ،  $|b| = 3$  و  $|c| = 4$  بنا می‌شود برابر ۴۵ است. اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو

بردار  $b$  و  $c$  برابر  $60^\circ$  باشد، اندازه‌ی بردار  $a \times (b \times c)$  کدام است؟ (۱۹ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۶ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۶ دی ۹۲-شرکت کنندگان ۴۱ هزار نفر)

- (۱)  $12\sqrt{3}$   
(۲)  $15\sqrt{3}$   
(۳)  $9\sqrt{3}$   
(۴)  $18\sqrt{3}$

۳۸- اگر  $a - 2b + c = 0$  آنگاه حاصل  $a \times b + b \times c - a \times c$  کدام است؟ (۱۹ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۳ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۶ دی ۹۲-شرکت کنندگان ۴۱ هزار نفر)

- (۱)  $\vec{0}$   
(۲)  $4b \times c$   
(۳)  $2b \times c$   
(۴)  $3a \times b$

۳۹- طول بردارهای  $a$ ،  $b$  و  $2a - 3b$  به ترتیب برابر ۲، ۴ و  $2\sqrt{13}$  است. طول بردار  $a \times b$  کدام است؟

(۱۸ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۴ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۰ آبان ۹۰-شرکت کنندگان ۳۳ هزار نفر)

- (۱) ۴  
(۲)  $4\sqrt{3}$   
(۳) ۳  
(۴)  $3\sqrt{3}$

۴۰- اگر سه نقطه‌ی  $A = (0, 1, 1)$ ،  $B = (-1, 0, 2)$  و  $C = (2, 1, 1)$  سه رأس یک مثلث باشند، بردار  $\overrightarrow{BH}$  (ارتفاع وارد بر ضلع  $AC$ ) کدام است؟

(۱۸ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۱ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۱۸ فروردین ۹۱-شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

- (۱)  $(0, 1, -1)$   
(۲)  $(0, -1, 1)$   
(۳)  $(0, 3, -1)$   
(۴)  $(0, -3, 1)$

## فصل ۱

## سؤال‌های دشوارتر

## مبحث: بردار

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۱ سوال پاسخ دهند.  
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ (یا ۳) سوال پاسخ دهند.  
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۴ سوال پاسخ دهند.

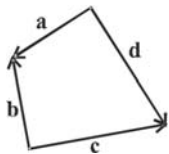
۴۱- فرض کنید  $e_1$  و  $e_2$  دو بردار یک‌ه باشند و  $V_1 = 5e_1 + 4e_2$  و  $V_2 = -2e_1 + e_2$ . اگر دو بردار  $V_1$  و  $V_2$  بر هم عمود باشند، زاویه‌ی بین دو بردار  $e_1$  و  $e_2$  چقدر است؟

(۱۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۳ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۶ دی ۹۳-شرکت کنندگان ۴۱ هزار نفر)

- (۱)  $30^\circ$   
(۲)  $60^\circ$   
(۳)  $150^\circ$   
(۴)  $120^\circ$

۴۲- بردارهای  $a, b, c$  و  $d$  به ترتیب با طول‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ مطابق شکل زیر مفروض‌اند. حاصل  $a \cdot c - b \cdot d$  کدام است؟

(۱۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۹ درصد پاسخ صحیح دادند) (۶ آبان ۹۰-شرکت کنندگان ۳۳ هزار نفر)



- (۱) صفر  
(۲) -۲  
(۳) -۴  
(۴) ۵

۴۳-  $a$  و  $b$  دو بردار هستند. اگر زاویه‌ی بین دو بردار  $a$  و  $b$  برابر  $70^\circ$  باشد، زاویه‌ی بین بردارهای  $a$  و  $e_a + e_b$  کدام است؟

(۱۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۴ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۱ مهر ۹۱-شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱)  $10^\circ$   
(۲)  $20^\circ$   
(۳)  $30^\circ$   
(۴)  $40^\circ$

۴۴- اگر  $a''$  قرینه‌ی بردار  $a$  نسبت به بردار  $b = (2, -4, 2)$  و  $b$  زاویه‌ی بین  $\bar{a}$ ،  $\bar{b}$  برابر  $120^\circ$  باشد، آن‌گاه  $\bar{a} + \bar{a}''$  کدام بردار می‌تواند باشد؟

(۱۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۱ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۶ آبان ۹۱-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- (۱)  $(-3, 6, 3)$   
(۲)  $(-3, 6, -3)$   
(۳)  $(3, -6, 3)$   
(۴)  $(3, 6, -3)$

۴۵- اگر  $a'' = (3, -5, -2)$ ،  $a'$  قرینه‌ی  $a = (-1, 1, 6)$  نسبت به بردار یک‌ه  $b$  باشد، بردار  $b$  کدام است؟

(۱۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۳ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۵ مهر ۹۳-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

- (۱)  $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$   
(۲)  $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$   
(۳)  $(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$   
(۴)  $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

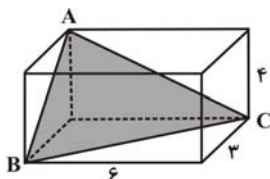
۴۶- اگر فاصله‌ی نقطه‌ی  $M = (x, y, z)$  از مبدأ مختصات برابر  $\sqrt{3}$  باشد، حداکثر مقدار صحیح عبارت  $2x - 2y + z$  کدام است؟

(۱۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند) (۹ آبان ۹۳-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

- (۱) ۴  
(۲) ۵  
(۳) ۶  
(۴) ۷

۴۷- مطابق شکل، رئوس مثلث  $ABC$  بر سه کنج مکعب مستطیلی با ابعاد ۳ و ۴ واقعند. کسینوس زاویه‌ی  $B$  در مثلث  $ABC$  کدام است؟

(۱۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۲ درصد پاسخ صحیح دادند) (۹ آبان ۹۳-شرکت کنندگان ۴۴ هزار نفر)



- (۱)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$   
(۲)  $\frac{3\sqrt{5}}{10}$   
(۳)  $\frac{\sqrt{5}}{10}$   
(۴)  $\frac{3\sqrt{5}}{25}$

۴۸- اگر بردار  $a = (2, 1, m - 1)$ ، تصویر قائم بردار  $a$  روی بردار  $b$  و بردار  $a' = (2, -1, m + 1)$ ، قرینه‌ی بردار  $a$  نسبت به بردار  $b$  باشد، اندازه‌ی بردار  $a$  کدام است؟

(۱۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۱ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۹ آبان ۹۳-شرکت کنندگان ۴۴ هزار نفر)

$\sqrt{6}$ (۲)	$\sqrt{5}$ (۱)
$\sqrt{14}$ (۴)	۳ (۳)

۴۹- زاویه‌ی بردار  $a$  با محورهای  $x$  و  $y$  به ترتیب  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  و  $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$  می‌باشد. زاویه‌ی این بردار با صفحه‌ی  $xy$  کدام است؟

(۱۵ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۱۰ آبان ۹۳-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

$\frac{\pi}{4}$ (۲)	$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ (۱)
$\frac{\pi}{3}$ (۴)	$\frac{\pi}{6}$ (۳)

۵۰- بردارهای  $z$  و  $2i + k - fi - k$  و  $z$  قطرهای سه وجه مجاور یک متوازی‌السطوح می‌باشند که در یک رأس مشترکند حجم این متوازی‌السطوح کدام است؟

(۱۵ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ فروردین ۹۳-شرکت کنندگان ۳۹ هزار نفر)

۳ (۲)	۲ (۱)
۵ (۴)	۴ (۳)

۵۱- اگر  $e_a = (k, m, -m)$  بردار جهت  $a = (t + 1, t, t - 2)$  باشد، آنگاه  $k$  کدام است؟

(۱۴ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۱۸ آذر ۹۰-شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)	$\frac{\sqrt{6}}{3}$ (۱)
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)	$\frac{\sqrt{6}}{2}$ (۳)

۵۲- اگر  $a \cdot i = a \cdot (j - k) = a \cdot (i - 2j + 3k) = 1$ ، اندازه‌ی بردار  $a$  کدام است؟

(۱۴ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۱ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۵ مهر ۹۳-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

$\sqrt{13}$ (۲)	$\sqrt{12}$ (۱)
$\sqrt{15}$ (۴)	$\sqrt{14}$ (۳)

۵۳- فاصله‌ی نقطه‌ی  $M = (a, b, \frac{c}{p})$  تا مبدأ مختصات برابر ۴ است. بیش‌ترین مقدار  $a + 2b + 3c$  کدام است؟

(۱۳ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۹ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۰ آبان ۹۰-شرکت کنندگان ۳۳ هزار نفر)

$\sqrt{41}$ (۲)	۵ (۱)
$16\sqrt{41}$ (۴)	$4\sqrt{41}$ (۳)

۵۴- دو بردار  $a = (1, 1, -1)$ ،  $b = (\alpha, -1, 1)$  با یکدیگر زاویه‌ی بزرگ‌تر از قائمه می‌سازند. اگر مساحت متوازی‌الاضلاع بنا شده روی این دو بردار برابر با  $3\sqrt{2}$  باشد، اندازه‌ی بردار  $a + b$  کدام است؟

(۱۳ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۶ آبان ۹۰-شرکت کنندگان ۳۳ هزار نفر)

$2\sqrt{3}$ (۲)	۴ (۱)
$2\sqrt{2}$ (۴)	۳ (۳)

۵۵- قرینه‌ی نقطه‌ی  $A = (-3, 4, \sqrt{7})$  نسبت به محور  $y$  را  $B$  و نسبت به صفحه‌ی  $xz$  را  $C$  می‌نامیم. مساحت مثلث  $ABC$  کدام است؟

(۱۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۹ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۱۰ آبان ۹۲-شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

۳۲ (۲)	۲۵ (۱)
۳۰ (۴)	۳۶ (۳)

۵۶- به ازای کدام مقدار صحیح  $m$ ، بردار  $a = \frac{1}{3m+1}$  بردار جهت  $12k - mj + i(1-m) = a$  است؟

(۱۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۲ مهر ۹۰- شرکت کنندگان ۳۵ هزار نفر)

- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

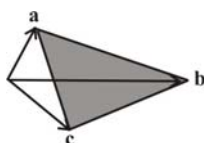
۵۷- اگر  $a$  و  $b$  دو بردار ناصفر باشند به طوری که  $b \cdot (a \times b) = (a \cdot b)^2 - 3|a \times b|^2$  آنگاه زاویه‌ی بین دو بردار  $a$  و  $b$  کدام می‌تواند باشد؟

(۱۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۶ آبان ۹۱- شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- $\frac{\pi}{6}$  (۱)       $\frac{\pi}{4}$  (۲)  
 $\frac{\pi}{2}$  (۳)       $\frac{\pi}{3}$  (۴)

۵۸- سه بردار  $a = (0, 1, 1)$ ،  $b = (4, 5, -3)$  و  $c = (2, 5, 1)$  مطابق شکل زیر مفروض‌اند. مساحت مثلث هاشورزده کدام است؟

(۱۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند) (۹ آبان ۹۲- شرکت کنندگان ۴۴ هزار نفر)



- ۱۰ (۱)       $8\sqrt{2}$  (۲)  
 $6\sqrt{3}$  (۳)       $4\sqrt{6}$  (۴)

۵۹- مجموع فواصل نقطه‌ی  $A = (a, b, c)$  از صفحات مختصات برابر  $10$  و فاصله‌ی  $A$  از مبدأ مختصات برابر  $5\sqrt{2}$  است. مقدار عددی  $ab + ac + bc$  کدام

(۱۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۹ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۶ مهر ۹۲- شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

است؟ ( $a$ ،  $b$  و  $c$  هم‌علامت‌اند.)

- ۲۵ (۱)      ۲۳ (۲)  
 $21$  (۳)       $19$  (۴)

۶۰- اگر تصویرهای قائم دو بردار غیرصفر  $v_1$  و  $v_2$  روی امتداد بردار  $(1, 2, -1)$ ، قرینه‌ی یکدیگر باشند، آنگاه مؤلفه‌های بردار  $v_1 + v_2$ ، کدام می‌تواند باشد؟

(۹ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند) (۲۶ دی ۹۳- شرکت کنندگان ۴۱ هزار نفر)

- $(3, -2, 1)$  (۱)       $(2, 1, 3)$  (۲)  
 $(-1, 2, 3)$  (۳)       $(1, -1, 2)$  (۴)

۶۱- اگر  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ،  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  دو ضلع از اضلاع مثلثی باشند، طول تصویر  $\vec{a}$  روی ضلع سوم این مثلث چقدر است؟

(۸ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند) (۱۲ آبان ۹۱- شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

- $\frac{6\sqrt{5}}{3}$  (۱)       $\frac{\sqrt{6}}{6}$  (۲)  
 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$  (۳)       $\frac{3\sqrt{6}}{3}$  (۴)