۱. مفهوم شهودی حد

مؤلف درسنامه و تنظیم تست‌های این فصل: فرهاد حامی

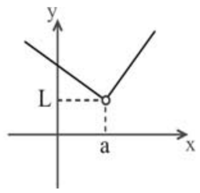
◆ حد و نمودار ◆

تعریف: فرض کنیم مجموعه‌ی D که زیر مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، دامنه‌ی تابع f باشد. اگر مقدار $f(x)$ به عدد L میل کند، وقتی x (حداقل دریک بازه از D) به a میل کند، می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. معنی آن این است که، فاصله‌ی $f(x)$ تا L از هر مقدار دل‌خواه کمتر شود.

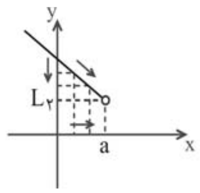
◆ حد چپ و راست تابع در یک نقطه ◆

۱ حد راست: اگر در تابع f، متغیر x (حداقل دریک بازه از دامنه‌ی f) با مقدارهای بزرگ‌تر از عدد a به a نزدیک شود، آنگاه $f(x)$ بـه عـدد $L_۱$ نزدیک شود، گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد راست دارد و مقدار آن $L_۱$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_۱$ (شکل ۱).

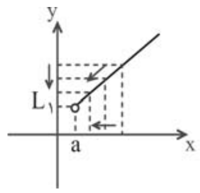
۲ حد چپ: اگر در تابع f، متغیر x (حداقل دریک بازه از دامنه‌ی f) با مقدارهای کوچک‌تر از عدد a به a نزدیک شود، آنگاه $f(x)$ به عدد $L_۲$ میل کند، گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و مقدار آن $L_۲$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_۲$ (شکل ۲).



شکل(۳)



شکل (۲)



شکل (۱)

توجه: طبق قرارداد کتاب درسی، وقتی از حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ صحبت می‌کنیم فرض بر این است که تابع در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه‌ی a تعریف شده باشد.

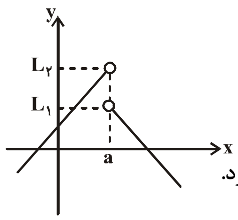
به عنوان تابع $f(x)=\sqrt{۴-x}$ در اطراف ۴ تعریف نشده است ولی در همسایگی چپ ۴ تعریف شده است، پس فقط $\lim\limits_{x\to ۴^-}\sqrt{۴-x}$ معنی دارد.

قرارداد: اگر تابعی مانند f فقط در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد راست f در a است و نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ به معنای $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ خواهد بود. به طریق مشابه اگر f فقط در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد چپ f در a است و نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ به معنای $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ است.

به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to ۵^+}\sqrt{x-۵}=\lim\limits_{x\to ۵}\sqrt{x-۵}=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{x}{[x-۱]}=\dfrac{۱}{۰-۱}=-۱=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x}{[x-۱]}$.

اگر حدهای چپ و راست تابعی در یک نقطه موجود و با هم برابر باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن، همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است. (شکل ۳) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

◆ حدودی که وجود ندارند ◆



با توجه به رفتار تابع، عموماً حد تابع در سه حالت زیر در نقطه‌ی a وجود ندارد

۱ حد چپ و راست در نقطه‌ی a، موجود ولی نابرابر باشند

به عنوان مثال در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ با رسم نمودار، $\lim\limits_{x\to ۱^+}[x]=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x]=۰$ ، پس $\lim\limits_{x\to ۱}[x]$ وجود ندارد.

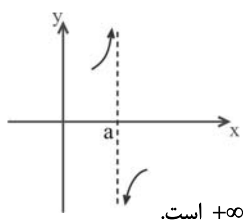
همچنین در تابع با ضابطه‌ی $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$ با رسم نمودار، $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{|x|}{x}=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{|x|}{x}=-۱$ ، پس $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{|x|}{x}$ وجود ندارد.

از طرفی در تابع علامت با ضابطه‌ی $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}۱ & , x>۰\\ ۰ & , x=۰\\ -۱ & , x<۰\end{cases}$ با رسم نمودار، $\lim\limits_{x\to ۰^-}\operatorname{sgn}(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+}\operatorname{sgn}(x)=۱$، پس $\lim\limits_{x\to ۰}\operatorname{sgn}(x)$ وجود ندارد.

توجه: برای محاسبه‌ی حد توابع شامل جزء صحیح، قدر مطلق و..... در یک نقطه، در صورت شناخت تابع می‌توانیم از رسم نمودار استفاده کنیم.

۲ حد تابع در نقطه‌ی a نامتناهی باشد.

اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی a رفتار بی‌کران داشته باشد، تابع در نقطه‌ی a حد ندارد.



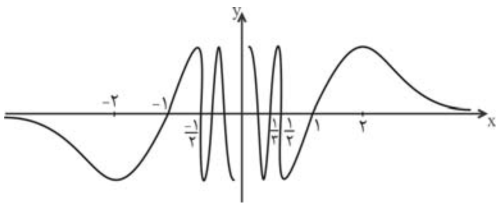
به عنوان مثال در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{۱}{x-۱}$، از آن‌جایی که:

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{x-۱}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+}\frac{۱}{x-۱}=+\infty$$

پس این تابع در $x=۱$ حد ندارد. هم‌چنین تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^۲}$ در $x=۰$ حد ندارد ولی در این نقطه، دارای حد نامتناهی $+\infty$ است.

۳ تابع دارای نوسانات غیرمیرا در همسایگی نقطه‌ی a باشد

به عنوان مثال تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در همسایگی $x=0$ دارای نوسانات غیرمیراست،
در این تابع، وقتی x از دو طرف به سمت صفر نزدیک می‌شود، موج سینوسی بین
دو عدد $y=1$ و $y=-1$ متراکم می‌شود و تابع در $x=0$ حد ندارد.



توجه: توابع دیگری نیز وجود دارند که رفتار حدی نامعمولی دارند، یکی از این توابع که اغلب ذکر می‌شود تابع دیریکله نام دارد:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد}\end{cases}$$

این تابع در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۱

۶۰۴- کدام بیان در مورد حد توابع درست است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۲ با تغییر)

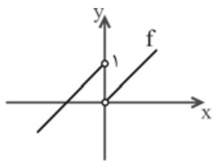
۱) اگر تابع f در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آنگاه در یک همسایگی چپ یا راست نقطه‌ی a کران‌دار است.
۲) اگر تابعی کران‌دار در نقطه‌ی a حد چپ و راست داشته باشد، آنگاه در نقطه‌ی a حد دارد.
۳) اگر مجموع دو تابع کراندار در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آنگاه هر دو تابع در نقطه‌ی a حد دارد.
۴) اگر تابعی یکنوا در همسایگی محذوف a تغییر علامت دهد، آنگاه در نقطه‌ی a حد صفر دارد.

۶۰۵- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x^3\sin\frac{1}{2x}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۶)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ∞

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۶۰۶- شکل زیر نمودار تابع f است، حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ برابر است با: (حسابان فصل ۴ و دیفرانسیل فصل ۲-سؤال ترکیبی)



۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۳
۴) وجود ندارد.

۶۰۷- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}0 & : x\in Z \\ -1 & : x\in R-Z\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)+\lim\limits_{x\to (\frac{1}{2})^-}f(x)$ چقدر است؟ (آزاد پزشکی - ۸۱)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۱

۶۰۸- اگر $a\in R$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}([2x]+[-2x])$ برابر است با: (دیفرانسیل - فصل ۲ - صفحه‌ی ۶۸ - تمرین ۴)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۶۰۹- در تابع براکت $y=\left[\frac{1}{x}\right]$ وقتی $x\to\frac{-1}{10}$ حد چپ کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی- ۸۴)

۱) ۱۱ ۲) ۹- ۳) ۱۰- ۴) ۱۱-

۶۱۰- حاصل $\lim\left[\frac{1}{\sin x}\right]$ وقتی $x\to\frac{3\pi}{2}$ کدام است؟ (حسابان فصل ۴ و دیفرانسیل فصل ۲-سؤال ترکیبی)

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۱

۶۱۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x^2]$ در نقطه‌ی $x=a$ حد ندارد، اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)-\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ کدام است؟ ([ ] علامت جزء صحیح است) (حسابان فصل ۴ و دیفرانسیل فصل ۲-سؤال ترکیبی)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

۶۱۲- حدهای $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{3-x}$ به ترتیب.......... (حسابان- فصل ۴- صفحه‌ی ۱۴۲ - مثال)

۱) صفر - وجود ندارد ۲) وجود ندارد - صفر است ۳) صفر - صفر است ۴) وجود ندارد- وجود ندارد

۶۱۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{[x]}$ کدام است؟ (دیفرانسیل - فصل ۲ - صفحه‌ی ۶۸ - تمرین ۵)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۲. مفهوم ریاضی حد

◆ تعریف ریاضی حد ◆

تعریف ریاضی حد: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از R و $f: D \to R$ یک تابع باشد، در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای D مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست $a_n \neq a$، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد.

■ مثال: به کمک تعریف ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲+۱)=۵$.

◄ حل: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲+۱$، برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $a_n \neq ۲$ و همگرا به ۲، خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}((a_n)^۲+۱)=۲^۲+۱=۵ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x)=۵$$

◆ تعریف ریاضی حد چپ و راست ◆

۱) تعریف ریاضی حد راست: گوییم تابع f در نقطه‌ی a دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$، هرگاه به ازای هردنباله ازعضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n>a$ داشته باشیم، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L$.

۲) تعریف ریاضی حد چپ: گوییم تابع f در نقطه‌ی a دارای حد چپ L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$، هرگاه به ازای هردنباله ازعضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n<a$ داشته باشیم، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L$.

◆ اثبات عدم وجود حد با دنباله‌ها ◆

❖ *قضیه‌ی عکس: از قضیه‌ی فوق به صورت عکس نیز می‌توان استفاده کرد، اگر دو دنباله‌ی غیر ثابت $\{a_n\}$ و $\{a'_n\}$ همگرا به a باشند و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)\neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(a'_n)$، آنگاه تابع f در $x=a$ حد ندارد.*

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۲

۶۱۴- اگر دنباله‌ی $a_n=\frac{۲n+۱}{n+۲}$ و تابع $f(x)=(x+۱)[x]$ مفروض باشند آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟ (سراسری ریاضی – ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۶۱۵- اگر $a_n=\frac{۴n+۱}{۲n+۱}$ و $f(x)=b+[۲x]$ به ازای کدام مقدار b دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد ۱ همگراست؟ (سراسری ریاضی – ۸۵)

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) نشدنی

۶۱۶- اگر $a_n=\frac{n+۱}{n}$ و $f(x)=\frac{۲x+[-x]}{x^۲-۱}$، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟ (سراسری ریاضی – ۸۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) همگرا نیست.

۶۱۷- اگر $f(x)=\frac{[x]-۳}{x-۴}$ و $a_n=\frac{۴n-۳}{n+۲}$، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۷)

۱) همگرا به ۱- ۲) همگرا به صفر ۳) همگرا به ۱ ۴) واگرا

۶۱۸- در تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$، اگر دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا به صفر باشد، انتخاب دنباله‌ی a_n با کدام جمله‌ی عمومی می‌تواند درست باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۳)

۱) $\frac{n^۲-۱}{n^۲+۱}$ ۲) $\frac{n^۲+۱}{n^۲-۱}$ ۳) $\frac{n^۲+n}{n^۲+۱}$ ۴) $\frac{n+۱}{۲n}$

۶۱۹- اگر $a_n=\frac{(-۱)^n}{۲n}$ و $f(x)=\left|\left[\frac{x}{۲}\right]\right|$ باشند، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۹)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) همگرا نیست

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۶۲۰- با فرض $f(x)=\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+[۳x]$، دنباله‌ی $\left\{f\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n}\right)\right\}$ به چه عددی همگراست؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۸۶ – تمرین ۱۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۳. روش‌های محاسبه‌ی حد

◆ قضایای حد ◆

قضیه‌ی (۱): اگر دو تابع f و g روی دامنه‌ی یکسانی تعریف شده باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_۱$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۲$، آن‌گاه:

(۱) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۱+L_۲$ (۲) $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۱-L_۲$

(۳) $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۱.L_۲$ (۴) $\lim\limits_{x\to a}(\frac{f}{g})(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_۱}{L_۲}\ ,\ L_۲\neq ۰$

توجه: اگر دامنه‌ی دو تابع برابر نباشد ممکن است قضایای بالا برقرار نباشند.
به عنوان مثال دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ در $x=۰$ دارای حد صفر هستند ولی با توجه به دامنه‌ها ($D_f=[۰,+\infty)$ و $D_g=(-\infty,۰]$)، دامنه‌ی تابع $f+g$، مجموعه‌ی $\{۰\}$ خواهد بود و از حد در نقطه‌ی صفر برای آن نمی‌توان صحبت کرد.

۱ حد توابع چندجمله‌ای: اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$.

۲ حد توابع گویا: اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه $Q(a)\neq ۰$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$.

۳ حد توابع گنگ: $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{c}$ ، که در آن n عددی طبیعی است (اگر n زوج باشد، $c\geq ۰$).

۴ حد توابع مثلثاتی: برای محاسبه‌ی حد توابع مثلثاتی از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

(۱) $\lim\limits_{x\to x_۰}\sin x=\sin x_۰$ (۲) $\lim\limits_{x\to x_۰}\cos x=\cos x_۰$ (۳) $\lim\limits_{x\to x_۰\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}}\tan x=\tan x_۰$ (۴) $\lim\limits_{x\to x_۰\neq k\pi}\cot x=\cot x_۰$

◆ روش‌های محاسبه‌ی بعضی از حدود ◆

الف ـ انتقال حد به نقطه‌ی صفر: برای محاسبه‌ی حد بعضی از توابع به ویژه توابع شامل جزء صحیح در یک نقطه، می‌توانیم از انتقال حد به نقطه‌ی صفر، استفاده کنیم:

$$\rhd \lim_{x\to a} f(x)=L \xrightarrow[h\to ۰]{x-a=h} \lim_{h\to ۰} f(a+h)=L$$

بنابراین:

(۱) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to ۰^+} f(a+\varepsilon)$ (۲) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to ۰^+} f(a-\varepsilon)$

■ مثال: حد چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[-۵x+۰/۳]$ در نقطه‌ی $x=\frac{۲}{۳}$ را بیابید.

◀ حل: وقتی $x\to\frac{۲}{۳}^-$ به مفهوم $x=\frac{۲}{۳}-\varepsilon$ است که در آن $\varepsilon\to ۰^+$، پس خواهیم داشت:

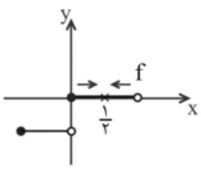
$$\lim_{x\to\frac{۲}{۳}^-}[-۵x+۰/۳]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\left[-۵(\frac{۲}{۳}-\varepsilon)+۰/۳\right]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\left[\frac{-۱۰}{۳}+۵\varepsilon+۰/۳\right]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\left[\frac{-۹۱}{۳۰}+۵\varepsilon\right]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\left[-۳\underbrace{-\frac{۱}{۳۰}+۵\varepsilon}_{<۰}\right]=-۴$$

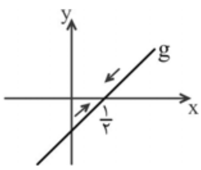
ب ـ یک روش غیر رسمی در محاسبه‌ی حد توابع شامل جزء صحیح: برای محاسبه‌ی سریع‌تر حد توابع شامل جزء صحیح در یک نقطه می‌توانیم از نقاط به اندازه‌ی کافی نزدیک استفاده کنیم، به عنوان مثال در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x]$، می‌توانیم از عدد ۰/۹۹ استفاده کنیم، اما برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x+۰/۰۰۱]$ اگر از عدد ۰/۹۹ استفاده کنیم جواب غلط صفر را به‌دست می‌آوریم در حالیکه حاصل این حد ۱ است. یک روش غیر رسمی ولی مرسوم، در محاسبه‌ی حد راست (حد چپ) تابع شامل جزء صحیح در نقطه‌ی a، قرار می‌دهیم $(a^-)a^+$. به مثال زیر توجه کنید:

(۱) $\lim\limits_{x\to ۱^-}[۳x]=[۳(۱^-)]=[۳^-]=۲$ (۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+}[۳x]=[۳(۱^+)]=[۳^+]=۳$

توجه: جاگذاری نمادهای $(a^-)a^+$ به جای $(x\to a^-)x\to a^+$ علمی نیست ولی برای درک بهتر قابل توجیه‌اند.

پ ـ صورت‌های شبیه مبهم: به‌طور غیر رسمی وقتی یک تابع مانند f، در یک بازه‌ی باز، شامل عدد a (به‌جز احتمالاً خود a) تابع ثابت صفر گردد، آنگاه مقدار تابع «صفر مطلق» خواهد بود.





به‌عنوان مثال در تابع $f(x)=[x]$، مقدار تابع در بازه‌ی (۱ , ۰]، صفر می‌شود و بر روی محور xها قرار می‌گیرد. اما در تابع با ضابطه‌ی $g(x)=x-\frac{۱}{۲}$، تابع در هر بازه‌ی شامل عدد $\frac{۱}{۲}$، با مقادیری کم‌تر یا بیش‌تر از صفر ، به صفر نزدیک می‌شود و به‌طور غیر رسمی آن را «صفر حدی» می‌نامیم.

با معرفی «صفر مطلق» و «صفر حدی» می‌توانیم در مورد وجود نداشتن حد بعضی توابع کسری، بدون محاسبه‌ی دامنه نظر دهیم.

☑ نکته‌ی (۱): در محاسبه‌ی حد توابع کسری وقتی در مخرج کسر صفر مطلق ظاهر شود، حد معنا ندارد و نمی‌توان از حد تابع در آن نقطه صحبت کرد.
$\dfrac{\text{عدد یا صفر مطلق یا صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}=$ معنا ندارد.

به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x-3}{[x]}$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{[x]}$، معنا ندارند.

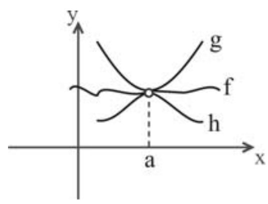
☑ نکته‌ی (۲): درحد توابع کسری $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$ و $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد}}=0$، به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[x]}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[x]}{x+2}=0$.

◆ قضیه‌ی فشردگی ◆

این قضیه راجع به رفتار حدی تابعی است که بین دو تابع دیگر، که هر دو در یک نقطه داده شده حد مساوی دارند، برقراراست.

قضیه *هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی بازی شامل a (جز احتمالاً در خود a)* $h(x)\le f(x)\le g(x)$
و نیز $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ *آن‌گاه:*

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$



■ مثال: نشان دهید $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

◄ حل: از آنجایی‌که $-1\le \sin\dfrac{1}{x}\le 1$، برای مقدارهای مثبت x داریم $-x\le x\sin\dfrac{1}{x}\le x$ و برای مقدارهای منفی x، $x\le x\sin\dfrac{1}{x}\le -x$، حد توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در $x=0$ برابر صفر است، پس $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$ است.

☑ نکته: با توجه به قضیه‌ی فشردگی می‌توان ثابت کرد $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

قضیه‌ی کران‌داری: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کران‌دار باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=0$ است.

به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \sin\dfrac{1}{x}=0$، زیرا $\sin\dfrac{1}{x}$ در همسایگی محذوف صفر کران‌دار است و $\lim\limits_{x\to 0} \sin x=0$ پس $\lim\limits_{x\to 0} \sin x.\sin\dfrac{1}{x}=0$.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۳

۶۲۱- اگر $f(x)=\begin{cases} ax-1 & x<1 \\ x^2+2a & x\ge 1\end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$، مقدار a کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۶)**

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۱-

۶۲۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & x\ge -1 \\ 2x+1 & x<-1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ حد دارد؟ **(سراسری تجربی - ۸۰)**

۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) ϕ ۴) R

۶۲۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x>0 \\ -\sqrt{1+x} & x\le 0\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۸۹)**

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) موجود نیست.

تیپ ۴

۶۲۴- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x+a)[x]$ اگر $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ **(سراسری تجربی - ۸۷)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) صفر

۶۲۵- حاصل‌ضرب حد چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]+\operatorname{sgn} x$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟ **(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۶۲۶- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-} (x+1)\left[\dfrac{1}{x+1}\right]$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است) **(سراسری ریاضی - ۸۱)**

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) ۱

۶۲۷- حد عبارت $x\left[\frac{1}{x}\right]$ در کدام حالت متناهی نیست؟ (سراسری ریاضی – ۹۳)

۱) $x\to 0^-$ ۲) $x\to 0^+$ ۳) $x\to -\infty$ ۴) $x\to +\infty$

۶۲۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}|x|\left[\frac{1}{x}\right]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۳)

۱) ۱- ۲) حد ندارد. ۳) صفر ۴) ۱

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۶۲۹- اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود داشته باشد، آن‌گاه: (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۸۵ – تمرین ۲)

۱) باید هر دو تابع f و g در $x=a$ حد داشته باشند.
۲) تفاضل دو تابع f و g در $x=a$ حد دارد.
۳) ممکن است هر دو تابع در $x=a$ حد نداشته باشند.
۴) حاصل‌ضرب آنها در $x=a$ حد دارد.

۶۳۰- در تابع جزء صحیح $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]$ مجموع حد چپ و راست وقتی $x\to 6$ کدام است؟ (آزاد غیرپزشکی – ۸۲)

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

۶۳۱- مجموع حد چپ و راست تابع $y=(x^2+1)[x^2-2]$ در $x=\sqrt{2}$ کدام است؟ (آزاد پزشکی – ۸۲)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۶-

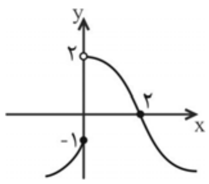
۶۳۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]$ کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

۶۳۳- اگر $a\in R$ آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{4x^2+3}{x^2+1}\right]$ برابر است با: (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۸۶ – تمرین ۱۱)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۶۳۴- نمودار تابع f مطابق شکل زیر است حد راست تابع fof در نقطه به طول ۲ چه قدر است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌های ۷۲ تا ۸۶)



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲

۶۳۵- اگر $f(x)=x\left[\frac{1}{x}\right]$ و $g(x)=[x]$ آنگاه برای تابع $(gof)(x)$ در $x=0$ کدام درست است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – نتیجه‌ی گیری مثال – صفحه‌ی ۸۱)

۱) حد چپ و راست موجود و برابر
۲) حد چپ و راست وجود ندارد
۳) حد چپ و راست موجود ولی نابرابر
۴) فقط معین است.

۶۳۶- اگر $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax+b)\left[\frac{1}{x-2}\right]=3$ آنگاه زوج مرتب $(a\,,\,b)$ کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۸۱)

۱) $(1\,,\,2)$ ۲) $(2\,,\,1)$ ۳) $(-2\,,\,-1)$ ۴) $(-1\,,\,-2)$

۶۳۷- اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ آنگاه برای تابع fog در $x=0$ کدام گزینه درست است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۶۸ – تمرین ۶)

۱) حد چپ و راست موجود نابرابرند.
۲) حد چپ و راست موجود و برابرند.
۳) حد چپ وجود دارد ولی حد راست وجود ندارد.
۴) حد راست وجود دارد ولی حد چپ وجود ندارد.

۶۳۸- اگر تابع f به ازای هر $x\neq 0$ در نامساوی $-x^2\leq f(x)-3\leq x^2$ صدق کند، $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{-1}{f(x)}\right]$ کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۷۷)

۱) ۱- ۲) ۲ ۳) حد ندارد ۴) صفر

۶۳۹- فرض کنید $f(x)=\mathrm{sgn}(x^2-3x+4)$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}f(x-2)$ ($a\in R$) کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۸۱)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) وجود ندارد ۴) ۱

۶۴۰- اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^2-ax)\sin\frac{1}{x-1}$ در $x=1$ حد داشته باشد، a کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۷۷)

۱) وجود ندارد. ۲) هر مقدار دلخواه ۳) صفر ۴) ۱

۶۴۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x+a & ,\ \text{گویا } x\\ 3x+1 & ,\ \text{گنگ } x\end{cases}$ در $x=\frac{1}{2}$ حد دارد، a کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۸۷ – تمرین ۱۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر