۱. مفهوم شهودی حد

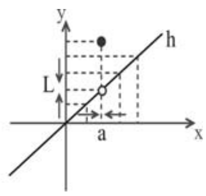
- حد و نمودار
- حد چپ و راست تابع در یک نقطه
- حدودی که وجود ندارند

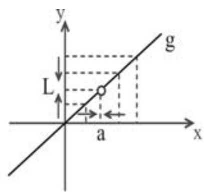
مؤلف درسنامه و تنظیم تست‌های این فصل: فرهاد حامی

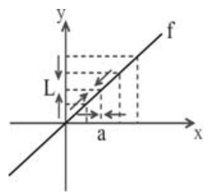
◆ حد و نمودار ◆

به نمودارهای زیر توجه کنید:

در هر سه تابع f، g و h، وقتی مقدارهای متغیر x به عدد a نزدیک می‌شوند، مقادیر تابع، به عدد L نزدیک می‌شوند. بنابراین می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.







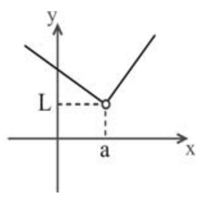
تعریف: فرض کنیم مجموعه‌ی D که زیر مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، دامنه‌ی تابع f باشد. اگر مقدار $f(x)$ به عدد L میل کند، وقتی x (حداقل دریک بازه از D) به a میل کند، می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. معنی آن این است که، فاصله‌ی $f(x)$ تا L از هر مقدار دل‌خواه کمتر شود.

توجه: با توجه به تعریف و شکل‌های بالا نتیجه می‌گیریم که، وجود یا عدم وجود مقدار تابع در نقطه‌ی a، اثری بر وجود حد تابع در نقطه‌ی a ندارد.

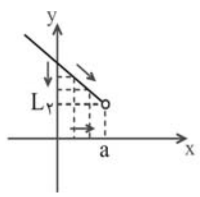
◆ حد چپ و راست تابع در یک نقطه ◆

۱) حد راست: اگر در تابع f، متغیر x (حداقل دریک بازه از دامنه‌ی f) با مقدارهای بزرگ‌تر از عدد a به a نزدیک شود، آنگاه $f(x)$ به عدد L_1 نزدیک شود، گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد راست دارد و مقدار آن L_1 است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_1$ (شکل ۱).

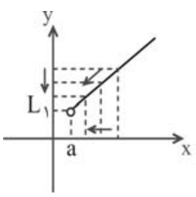
۲) حد چپ: اگر در تابع f، متغیر x (حداقل دریک بازه از دامنه‌ی f) با مقدارهای کوچک‌تر از عدد a به a نزدیک شود، آنگاه $f(x)$ به عدد L_2 میل کند، گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و مقدار آن L_2 است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_2$ (شکل ۲).



شکل (۳)



شکل (۲)



شکل (۱)

توجه: طبق قرارداد کتاب درسی، وقتی از حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ صحبت می‌کنیم فرض بر این است که تابع در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه‌ی a تعریف شده باشد.

به عنوان تابع $f(x)=\sqrt{4-x}$ در اطراف ۴ تعریف نشده است ولی در همسایگی چپ ۴ تعریف شده است، پس فقط $\lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{4-x}$ معنی دارد.

قرارداد: اگر تابعی مانند f فقط در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد راست f در a است و نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ به معنای $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ خواهد بود. به طریق مشابه اگر f فقط در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، منظور از حد f در a همان حد چپ f در a است و نماد $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ به معنای $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ است.

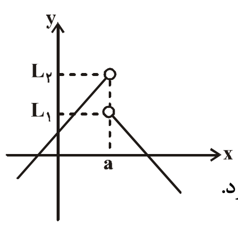
به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to 5^+}\sqrt{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x-5}=0$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x}{[x-1]}=\frac{1}{0-1}=-1=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{[x-1]}$.

اگر حدهای چپ و راست تابعی در یک نقطه موجود و با هم برابر باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن، همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است. (شکل ۳) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$

◆ حدودی که وجود ندارند ◆

با توجه به رفتار تابع، عموماً حد تابع در سه حالت زیر در نقطه‌ی a وجود ندارد

۱) حد چپ و راست در نقطه‌ی a، موجود ولی نابرابر باشند



به عنوان مثال در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ با رسم نمودار، $\lim\limits_{x\to 1^+}[x]=1$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}[x]=0$ ، پس $\lim\limits_{x\to 1}[x]$ وجود ندارد.

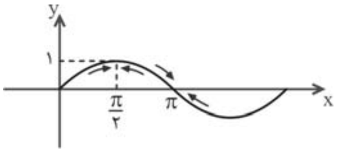
همچنین در تابع با ضابطه‌ی $g(x)=\frac{|x|}{x}$ با رسم نمودار، $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$ ، پس $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ وجود ندارد.

از طرفی در تابع علامت با ضابطه‌ی $sgn(x)=\begin{cases}۱ & , x>۰ \\ ۰ & , x=۰ \\ -۱ & , x<۰\end{cases}$ با رسم نمودار، $\lim\limits_{x\to ۰^-} sgn(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+} sgn(x)=۱$، پس $\lim\limits_{x\to ۰} sgn(x)$ وجود ندارد.

توجه: برای محاسبه‌ی حد توابع شامل جزء صحیح، قدر مطلقی و.... در یک نقطه، در صورت شناخت تابع می‌توانیم از رسم نمودار استفاده کنیم.

■ مثال: با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[\sin x]$، حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^+}[\sin x]$ ، $\lim\limits_{x\to\pi^-}[\sin x]$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}[\sin x]$ را بیابید.

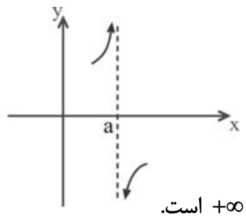
حل: نمودار تابع $y=\sin x$، در زیر رسم شده است، با توجه به نمودار وقتی $x\to\pi^-$ (x با مقادیر کم‌تر از π به π به نزدیک می‌شود) تابع با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود، پس $\lim\limits_{x\to\pi^-}[\sin x]=۰$، به طریق مشابه می‌توان بقیه‌ی حدود را یافت:



$$\lim_{x\to\pi^+}[\sin x]=-۱ \quad , \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}[\sin x]=۰$$

۲ حد تابع در نقطه‌ی a نامتناهی باشد.

اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی a رفتار بی‌کران داشته باشد، تابع در نقطه‌ی a حد ندارد.

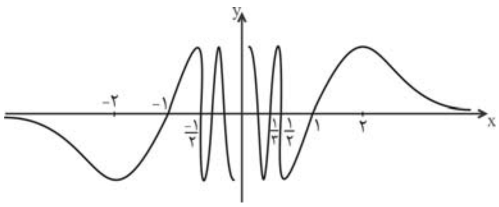


به عنوان مثال در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$، از آن‌جایی که:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{۱}{x-۱}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{x-۱}=-\infty$$

پس این تابع در $x=۱$ حد ندارد. همچنین تابع $f(x)=\frac{۱}{x^۲}$ در $x=۰$ حد ندارد ولی در این نقطه، دارای حد نامتناهی $+\infty$ است.

۳ تابع دارای نوسانات غیرمیرا در همسایگی نقطه‌ی a باشد



به عنوان مثال تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در همسایگی $x=۰$ دارای نوسانات غیرمیراست، در این تابع، وقتی x از دو طرف به سمت صفر نزدیک می‌شود، موج سینوسی بین دو عدد $y=۱$ و $y=-۱$ متراکم می‌شود و تابع در $x=۰$ حد ندارد.

توجه: توابع دیگری نیز وجود دارند که رفتار حدی نامعمولی دارند، یکی از این توابع که اغلب ذکر می‌شود تابع دیریکله نام دارد:

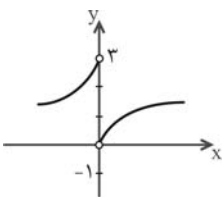
$$f(x)=\begin{cases}۱ & , \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ ۰ & , \text{اگر } x \text{ گنگ باشد}\end{cases}$$

این تابع در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

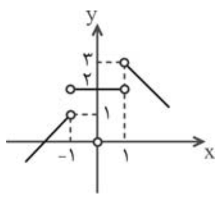
تیپ ۱

۱۳۰۱- شکل مقابل، نمودار تابع f است. $\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)+\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)$، کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۷۳)**



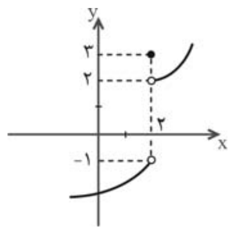
۱) صفر
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۳

۱۳۰۲- با توجه به شکل مقابل، $\lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)-\lim\limits_{x\to(-۱)^-}f(x)$ کدام است؟ **(سراسری تجربی - ۷۶)**



۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۱

۱۳۰۳- شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)+\lim\limits_{x\to ۲^-}f(x)+f(۲)$ کدام است؟ **(سراسری تجربی - ۷۹)**



۱) -۲
۲) صفر
۳) ۲
۴) ۴

۱۳۰۴– فرض کنید $f(x)=\begin{cases}۱ & , \quad x\le ۰\\ -۱ & , \quad x>۰\end{cases}$ حاصل $\lim f(x)$ وقتی $x\to ۰^-$، کدام است؟ (سراسری تجربی – ۷۱)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ∞

تیپ ۲

۱۳۰۵– کدام بیان در مورد حد توابع درست است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۸۲ با تغییر)

۱) اگر تابع f در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آنگاه در یک همسایگی چپ یا راست نقطه‌ی a کران‌دار است.

۲) اگر تابعی کران‌دار در نقطه‌ی a حد چپ و راست داشته باشد، آنگاه در نقطه‌ی a حد دارد.

۳) اگر مجموع دو تابع کراندار در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آنگاه هر دو تابع در نقطه‌ی a حد دارد.

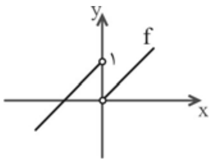
۴) اگر تابعی یکنوا در همسایگی محذوف a تغییر علامت دهد، آنگاه در نقطه‌ی a حد صفر دارد.

۱۳۰۶– حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲\sin^۲ x}{x^۳\sin\frac{۱}{۲x}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ∞

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۱۳۰۷– شکل زیر نمودار تابع f است، حاصل $\lim\limits_{x\to۰}\dfrac{|f(x)|}{f(x)}$ برابر است با: (حسابان فصل ۴ و دیفرانسیل فصل ۲–سؤال ترکیبی)



۱) ۱

۲) ۱-

۳) ۳

۴) وجود ندارد.

۱۳۰۸– در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}۰ & : x\in Z\\ -۱ & : x\in R-Z\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to۰^+}f(x)+\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^-}f(x)$ چقدر است؟ (آزاد پزشکی – ۸۱)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۱

۱۳۰۹– مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی که تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\tan x.\cot x$، در آن‌ها حد ندارد، کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی–۸۷)

۱) ϕ ۲) $\left\{\frac{k\pi}{۲},k\in Z\right\}$ ۳) $\{k\pi,k\in Z\}$ ۴) $\left\{k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in Z\right\}$

۱۳۱۰– اگر $a\in R$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}([۲x]+[-۲x])$ برابر است با: (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۶۸ – تمرین ۴)

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۳۱۱– در تابع براکت $y=\left[\frac{۱}{x}\right]$ وقتی $x\to\frac{-۱}{۱۰}$ حد چپ کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی–۸۴)

۱) ۱۱ ۲) ۹- ۳) ۱۰- ۴) ۱۱-

۱۳۱۲– حاصل $\lim\left[\frac{۱}{\sin x}\right]$ وقتی $x\to\frac{۳\pi}{۲}$ کدام است؟ (حسابان فصل ۴ و دیفرانسیل فصل ۲–سؤال ترکیبی)

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) صفر ۴) ۱

۱۳۱۳– تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x^۲]$ در نقطه‌ی $x=a$ حد ندارد، اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)-\lim\limits_{x\to a^-}f(x)$ کدام است؟ ([ ] علامت جـزء صـحیح است) (حسابان فصل ۴ و دیفرانسیل فصل ۲–سؤال ترکیبی)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۳۱۴– حدهای $\lim\limits_{x\to۱^+}\sqrt{x-۱}$ و $\lim\limits_{x\to۳}\sqrt{۳-x}$ به ترتیب.......... (حسابان – فصل ۴ – صفحه‌ی ۱۴۲ – مثال)

۱) صفر - وجود ندارد ۲) وجود ندارد - صفر است ۳) صفر – صفر است ۴) وجود ندارد-وجود ندارد

۱۳۱۵– حاصل $\lim\limits_{x\to۰}\dfrac{x}{[x]}$ کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۶۸ – تمرین ۵)

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) وجود ندارد.

۱۳۱۶– تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{\cos x-۱}$ از نظر حد در $x=۰$ کدام وضع را دارد؟ (آزمایشی سنجش ریاضی–۹۱)

۱) حد دارد. ۲) حد راست دارد. ۳) حد چپ دارد. ۴) حد ندارد.

۲. مفهوم ریاضی حد

- تعریف ریاضی حد
- تعریف ریاضی حد چپ و راست
- اثبات عدم وجود حد با دنباله‌ها

◆ تعریف ریاضی حد ◆

تعریف ریاضی حد: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از R و $f: D \to R$ یک تابع باشد، در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای D مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا است $a_n \neq a$، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد.

■ مثال: به کمک تعریف ثابت کنید $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲+۱)=۵$.

◀ حل: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲+۱$، برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ که $a_n \neq ۲$ و همگرا به ۲، خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty}((a_n)^۲+۱) = ۲^۲+۱ = ۵ \Rightarrow \lim_{x\to ۲} f(x) = ۵$$

◆ تعریف ریاضی حد چپ و راست ◆

۱ تعریف ریاضی حد راست: گوییم تابع f در نقطه‌ی a دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$، هرگاه به ازای هردنباله ازعضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n > a$ داشته باشیم، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L$.

■ مثال: برای اثبات $\lim\limits_{x\to ۲^+}[x]=۲$، می‌توانیم از دنباله‌ی $\left\{۲+\frac{۱}{n}\right\}$ استفاده کنیم (دقت کنید که به ازای هرعدد طبیعی n، $۲+\frac{۱}{n} > ۲$ و این دنباله همگرا به ۲ است)، بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[۲+\frac{۱}{n}\right]=۲$$

۲ تعریف ریاضی حد چپ: گوییم تابع f در نقطه‌ی a دارای حد چپ L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$، هرگاه به ازای هردنباله ازعضوهای دامنه‌ی f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست و $a_n < a$ داشته باشیم، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n)=L$.

■ مثال: برای اثبات $\lim\limits_{x\to ۲^-}[x]=۱$، می‌توانیم از دنباله‌ی $\left\{۲-\frac{۱}{n}\right\}$ استفاده کنیم (دقت کنید که به ازای هرعدد طبیعی $۲-\frac{۱}{n} < ۲$ و این دنباله همگرا به ۲ است)، بنابراین:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty}\left[۲-\frac{۱}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left(۲+\left[-\frac{۱}{n}\right]\right) = ۲-۱=۱$$

◆ اثبات عدم وجود حد با دنباله‌ها ◆

❖ قضیه‌ی عکس: از قضیه‌ی فوق به صورت عکس نیز می‌توان استفاده کرد، اگر دو دنباله‌ی غیر ثابت $\{a_n\}$ و $\{a'_n\}$ همگرا به a باشند و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(a'_n)$، آنگاه تابع f در $x=a$ حد ندارد.

در زیر، حالت‌های متداول را بررسی می‌کنیم:

۱ اگر حدچپ و راست در یک نقطه موجود ولی نابرابر باشند

در این حالت دو دنباله را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که یکی همواره با مقادیر کمتر از a به a میل کند (دنباله صعودی اکید باشد) ودیگری همواره با مقادیر بیشتر از a به a میل کند (دنباله نزولی اکید باشد).

در دنباله‌ی $\{a_n\}$ که همگرا به a است، برای تشخیص این که دنباله با مقادیر بیشتر به a میل می‌کند یا کمتر، کافیست علامت عبارت $(a_n - a)$ را در بی‌نهایت تعیین کنیم:

$(a_n - a)$: >۰ (یعنی با مقادیر بیش‌تر از a نزدیک می‌شود)
$(a_n - a)$: <۰ (یعنی با مقادیر کم‌تر از a نزدیک می‌شود)

■ مثال: آیا دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{۲n+۱}{n+۲}$ برای اثبات $\lim\limits_{x\to ۲^+}[x]=۲$ کارساز است؟

◀ حل: از آنجایی که $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۲n+۱}{n+۲}=۲$، بنابراین باید علامت (a_n-a) را در بی‌نهایت تعیین کنیم:

$$\left(\frac{۲n+۱}{n+۲}-۲\right)=\frac{-۳}{n+۲}$$

از آنجایی که $\frac{-۳}{n+۲}<۰$ بنابراین $a_n<۲$، لذا این دنباله با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می‌کند و برای اثبات $\lim\limits_{x\to ۲^+}[x]=۲$ کارساز نیست.

۲ اگر تابع در همسایگی نقطه دارای نوسانات غیرمیرا باشد

به عنوان مثال برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ در $x=0$، دو دنباله‌ی $\{\frac{1}{2n}\}$ و $\{\frac{1}{2n+\frac{1}{2}}\}$ کارسازند، زیرا هردو همگرا به صفرند از طرفی حد تابع آن‌ها نابرابر است.

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin 2n\pi=0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} f(a'_n)=\lim_{n\to+\infty}\sin(2n+\frac{1}{2})\pi=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

۳ عدم وجود حد در تابع دیریکله

برای اثبات عدم وجود حد تابع دیریکله با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد}\\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد}\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ دو دنباله باید به گونه‌ای اختیار شوند که هردو همگرا به صفر باشند و یکی همواره اعداد گویا و دیگری همواره اعداد گنگ تولید کند، لذا دو دنباله‌ی $\{\frac{1}{n}\}$(همواره اعداد گویا تولید می‌کند) و $\{\frac{\sqrt{2}}{n}\}$(همواره اعداد گنگ تولید می‌کند) کارسازند و خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n})=1 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} f(a'_n)=\lim_{n\to+\infty} f(\frac{\sqrt{2}}{n})=0$$

در تابع دیریکله برای اثبات عدم وجود حد در نقطه‌ی $x=\sqrt{2}$، دو دنباله باید به گونه‌ای اختیار شوند که هردو همگرا به $\sqrt{2}$ باشند و یکی همواره اعداد گویا و دیگری همواره اعداد گنگ تولید کند، لذا دو دنباله‌ی $\{\sqrt{2}+\frac{1}{n}\}$(همواره اعداد گنگ تولید می‌کند) و $\{\frac{[\sqrt{2}n]}{n}\}$(همواره اعداد گویا تولید می‌کند) کارسازند.

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{n\to+\infty} f(\sqrt{2}+\frac{1}{n})=0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} f(a'_n)=\lim_{n\to+\infty} f(\frac{[\sqrt{2}n]}{n})=1$$

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۳

۱۳۱۷- اگر دنباله‌ی $a_n=\frac{2n+1}{n+2}$ و تابع $f(x)=(x+1)[x]$ مفروض باشند آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟ (سراسری ریاضی - ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۳۱۸- اگر $a_n=\frac{4n+1}{2n+1}$ و $f(x)=b+[2x]$ به ازای کدام مقدار b دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد ۱ همگراست؟ (سراسری ریاضی - ۸۵)

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) نشدنی

۱۳۱۹- اگر $a_n=\frac{n+1}{n}$ و $f(x)=\frac{2x+[-x]}{x^2-1}$، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟ (سراسری ریاضی - ۸۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) همگرا نیست.

۱۳۲۰- اگر $f(x)=\frac{[x]-3}{x-4}$ و $a_n=\frac{4n-3}{n+2}$، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۷)

۱) همگرا به ۱- ۲) همگرا به صفر ۳) همگرا به ۱ ۴) واگرا

۱۳۲۱- در تابع $f(x)=\sqrt{1-x^2}$، اگر دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا به صفر باشد، انتخاب دنباله‌ی a_n با کدام جمله‌ی عمومی می‌تواند درست باشد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۳)

۱) $\frac{n^2-1}{n^2+1}$ ۲) $\frac{n^2+1}{n^2-1}$ ۳) $\frac{n^2+n}{n^2+1}$ ۴) $\frac{n+1}{2n}$

۱۳۲۲- اگر $a_n=\frac{(-1)^n}{2n}$ و $f(x)=\left|\left[\frac{x}{2}\right]\right|$ باشند، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) همگرا نیست

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۱۳۲۳- اگر $\lim_{x\to3^-} f(x)=5$ و دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به عدد ۵ همگرا باشد، آن‌گاه کدام دنباله برای $\{a_n\}$ مناسب است؟ (دیفرانسیل - فصل ۲- صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

۱) $\{a_n\}$ صعودی و همگرا به ۳ ۲) $\{a_n\}$ نزولی و همگرا به ۳ ۳) $\{a_n\}$ صعودی و همگرا به ۵ ۴) $\{a_n\}$ نزولی و همگرا به ۵

۱۳۲۴- اگر $f(x)=x+\frac{|x-1|}{x-1}$، آن‌گاه دنباله‌ی $\left\{f\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ چگونه است؟ **(آزمون کانون ریاضی - ۸۸)**

۱) همگرا به صفر　۲) همگرا به ۱　۳) همگرا به ۲　۴) واگراست

۱۳۲۵- اگر $a_n=\frac{n\pi}{n+\sin n}$ و $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos 2x}$، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگراست؟ **(آزمون کانون ریاضی - ۸۸)**

۱) صفر　۲) $\frac{1}{2}$　۳) ۱　۴) واگراست

۱۳۲۶- اگر $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$ و $f(1-x)=\begin{cases} x & , \ x>1 \\ 2 & , \ x=1 \\ -x & , \ x<1 \end{cases}$، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ چه وضعیتی دارد؟ **(آزمون کانون ریاضی - ۹۰)**

۱) همگرا به ۱-　۲) همگرا به ۱　۳) همگرا به ۲　۴) واگراست

۱۳۲۷- اگر $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}$ و تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , \ x\le 1 \\ x^2+1 & , \ x>1 \end{cases}$ باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟

(دیفرانسیل - فصل ۲ - صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)

۱) ۰　۲) ۱　۳) ۱-　۴) واگراست.

۱۳۲۸- اگر $f(x)=\frac{[x]-k}{[-x]-4}$ و به ازای هر دنباله‌ی $a_n\neq 1$ همگرا به ۱، دنباله‌ی $f(a_n)$ همگرا باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کدام است؟ **(آزمون کانون ریاضی - ۹۱)**

۱) ۱　۲) ۵-　۳) ۱-　۴) وجود ندارد.

۱۳۲۹- اگر $\lim\limits_{x\to 0^-}[x+2]=1$ و دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به یک همگرا باشد، کدام دنباله برای $\{a_n\}$ مناسب است؟ **(دیفرانسیل - فصل ۲ - صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)**

۱) $\left\{\frac{-1}{n}\right\}$　۲) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$　۳) $\{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\}$　۴) $\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}$

۱۳۳۰- اگرتابع f روی اعداد حقیقی تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=5$ و دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ واگرا باشد، آنگاه $\{a_n\}$ کدام دنباله می‌تواند باشد؟ **(دیفرانسیل - فصل ۲ - صفحه‌های ۶۹ تا ۷۲)**

۱) $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$　۲) $\{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\}$　۳) $\left\{\frac{\cos n\pi}{n}\right\}$　۴) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$

۱۳۳۱- با فرض $f(x)=\left[x+\frac{1}{3}\right]+[3x]$، دنباله‌ی $\left\{f\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)\right\}$ به چه عددی همگراست؟ **(دیفرانسیل - فصل ۲ - صفحه‌ی ۸۶ - تمرین ۱۴)**

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۱-　۴) ۲

۱۳۳۲- اگر $f(x)=[x]+\frac{|x|}{x}$ و $a_n=\sin(\frac{1}{n})-\frac{1}{n}$، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟ **(آزمون کانون ریاضی - ۹۱)**

۱) همگرا به ۱　۲) همگرا به ۱-　۳) همگرا به ۲-　۴) واگرا

۱۳۳۳- تابع f زوج و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=5$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ است. اگر $a_n=\frac{1-n}{1+n}$، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگراست؟ **(آزمون کانون ریاضی - ۹۱)**

۱) ۲　۲) ۵　۳) ۵-　۴) ۲-

۱۳۳۴- دنباله‌های $\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\begin{cases} 2 & , \ x\in Q \\ 1 & , \ x\in R-Q \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=\sqrt{2}$ استفاده شده‌اند. a_n کدام دنباله‌ی زیر می‌تواند باشد؟ **(آزمون کانون ریاضی - ۸۸)**

۱) $\left[\frac{\sqrt{2}}{n}\right]$　۲) $\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{1}{n}}$　۳) $\sqrt{2}\,n$　۴) $[\sqrt{2}n]$

۱۳۳۵- کدام دو دنباله برای اثبات عدم وجود حد برای تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}-\cos\frac{\pi}{x}$ در $x=0$ مناسب <u>نیست</u>؟ **(آزمون کانون ریاضی - ۸۸)**

۱) $\begin{cases} a_n=\frac{1}{2n} \\ b_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}} \end{cases}$　۲) $\begin{cases} a_n=\frac{1}{2n} \\ b_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{4}} \end{cases}$　۳) $\begin{cases} a_n=\frac{1}{2n} \\ b_n=\frac{1}{2n-\frac{1}{2}} \end{cases}$　۴) $\begin{cases} a_n=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}} \\ b_n=\frac{1}{2n-\frac{1}{2}} \end{cases}$

۳. روش‌های محاسبه‌ی حد

◆ قضایای حد ◆

می‌دانیم حد یک تابع در یک نقطه به مقدار آن در آن نقطه ارتباطی ندارد، ولی اگر حد تابع در یک نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه باشد، آن‌گاه حد را می‌توان با جانشینی مستقیم محاسبه کرد، یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ ، این‌گونه توابع را، توابع خوش‌رفتار می‌نامیم. توابع خوش‌رفتار در a، پیوسته هستند.

قضیه‌های زیر برای توابع خوش‌رفتار برقرارند.

قضیه‌ی (۱): هرگاه b و a اعداد حقیقی و n عدد صحیح مثبتی باشد، آن‌گاه خواص زیر برقرارند.

$$(1)\ \lim_{x\to a} b=b \qquad (2)\ \lim_{x\to a} x=a \qquad (3)\ \lim_{x\to a} x^n=a^n$$

قضیه‌ی (۲): اگر دو تابع f و g روی دامنه‌ی یکسانی تعریف شده باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$، آن‌گاه:

$$(1)\ \lim_{x\to a}(f+g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=L_1+L_2 \qquad (2)\ \lim_{x\to a}(f-g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L_1-L_2$$

$$(3)\ \lim_{x\to a}(f.g)(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=L_1.L_2 \qquad (4)\ \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\ ,\ L_2\neq 0$$

توجه: اگر دامنه‌ی دو تابع برابر نباشد ممکن است قضایای بالا برقرار نباشند.

به عنوان مثال دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ در $x=0$ دارای حد صفر هستند ولی با توجه به دامنه‌ها ($D_f=[0,+\infty)$ و $D_g=(-\infty,0]$)، دامنه‌ی تابع $f+g$، مجموعه‌ی $\{0\}$ خواهد بود و از حد در نقطه‌ی صفر برای آن نمی‌توان صحبت کرد.

☑ نکته‌ی (۱): اگر f و g روی دامنه یکسانی تعریف شده باشند و f در نقطه‌ی a حد نداشته باشد ولی g در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آن‌گاه $f+g$ ، $f-g$ و $\frac{g}{f}$ در نقطه‌ی a حد ندارند ولی برای $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ نمی‌توان نظر قطعی داد.

به عنوان مثال تابع $f(x)=[x]$ در $x=1$ حد ندارد و تابع $g(x)=x-1$ در $x=1$ حد دارد، اما تابع $(f.g)(x)=[x](x-1)$، در $x=1$ حد دارد.

☑ نکته‌ی (۲): اگر f و g روی دامنه یکسانی تعریف شده باشند و هر دو در نقطه‌ی a حد نداشته باشند، آن‌گاه در مورد حد داشتن یا نداشتن توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی a، نمی‌توان نظر قطعی داد.

به عنوان مثال توابع $f(x)=x^3+\frac{1}{x}$ و $g(x)=x^2-\frac{1}{x}$ ، در $x=0$ حد ندارند ولی مجموع آن‌ها در $x=0$ حد دارد، زیرا:

$$(f+g)(x)=(x^3+\frac{1}{x})+(x^2-\frac{1}{x})=x^3+x^2\ ,\ x\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(f+g)(x)=\lim_{x\to 0}(x^3+x^2)=0$$

۱) حد توابع چندجمله‌ای: اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$.

۲) حد توابع گویا: اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند، آن‌گاه $Q(a)\neq 0$ ، $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$.

۳) حد توابع گنگ: $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{c}$ ، که در آن n عددی طبیعی است (اگر n زوج باشد، $c\geq 0$).

۴) حد توابع مثلثاتی: برای محاسبه‌ی حد توابع مثلثاتی از دستورهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$(1)\ \lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0 \qquad (2)\ \lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0 \qquad (3)\ \lim_{x\to x_0\neq k\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\tan x_0 \qquad (4)\ \lim_{x\to x_0\neq k\pi}\cot x=\cot x_0$$

◆ روش‌های محاسبه‌ی بعضی از حدود ◆

الف – انتقال حد به نقطه‌ی صفر: برای محاسبه‌ی حد بعضی از توابع به ویژه توابع شامل جزء صحیح در یک نقطه، می‌توانیم از انتقال حد به نقطه‌ی صفر، استفاده کنیم:

$$\triangleright\ \lim_{x\to a} f(x)=L \xrightarrow[h\to 0]{x-a=h} \lim_{h\to 0} f(a+h)=L$$

بنابراین:

$$(1)\ \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(a+\varepsilon) \qquad (2)\ \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+} f(a-\varepsilon)$$

■ مثال: حد چپ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[-5x+0/3]$ در نقطه‌ی $x=\frac{2}{3}$ را بیابید.

◂ حل: وقتی $x\to\frac{2}{3}^-$ به مفهوم $x=\frac{2}{3}-\varepsilon$ است که در آن $\varepsilon\to 0^+$، پس خواهیم داشت:

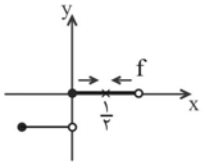
$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}[-5x+0/3]=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-5(\frac{2}{3}-\varepsilon)+0/3\right]=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{-10}{3}+5\varepsilon+0/3\right]=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{-91}{30}+5\varepsilon\right]=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-3\underbrace{-\frac{1}{30}+5\varepsilon}_{<0}\right]=-4$$

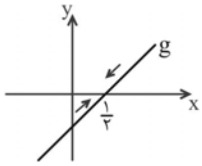
ب- یک روش غیر رسمی در محاسبه‌ی حد توابع شامل جزء صحیح: برای محاسبه‌ی سریع‌تر حد توابع شامل جزء صحیح در یک نقطه می‌توانیم از نقاط به اندازه‌ی کافی نزدیک به نقطه استفاده کنیم، به عنوان مثال در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x]$، می‌توانیم از عدد ۰/۹۹ استفاده کنیم، اما برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x+۰/۰۰۱]$ اگر از عدد ۰/۹۹ استفاده کنیم جواب غلط صفر را به‌دست می‌آوریم در حالیکه حاصل این حد ۱ است. یک روش غیر رسمی ولی مرسوم، در محاسبه‌ی حد راست (حد چپ) تابع شامل جزء صحیح در نقطه‌ی a، قرار می‌دهیم $a^+(a^-)$. به مثال زیر توجه کنید:

$$(۱)\quad \lim_{x\to ۱^-}[۳x]=[۳(۱^-)]=[۳^-]=۲ \qquad (۲)\quad \lim_{x\to ۱^+}[۳x]=[۳(۱^+)]=[۳^+]=۳$$

توجه: جاگذاری نمادهای $a^+(a^-)$ به جای $x\to a^+(x\to a^-)$ علمی نیست ولی برای درک بهتر قابل توجیه‌اند.

پ- صورت‌های شبیه مبهم: به‌طور غیر رسمی وقتی یک تابع مانند f، در یک بازه‌ی باز، شامل عدد a (به‌جز احتمالاً خود a) تابع ثابت صفر گردد، آنگاه مقدار تابع *«صفر مطلق»* خواهد بود.





به‌عنوان مثال در تابع $f(x)=[x]$، مقدار تابع در بازه‌ی $[۰,۱)$، صفر می‌شود و بر روی محور xها قرار می‌گیرد. اما در تابع با ضابطه‌ی $g(x)=x-\frac{۱}{۲}$، تابع در هر بازه‌ی شامل عدد $\frac{۱}{۲}$، با مقادیری کم‌تر یا بیش‌تر از صفر ، به صفر نزدیک می‌شود و به‌طور غیر رسمی آن را *«صفر حدی»* می‌نامیم.

با معرفی «صفر مطلق» و «صفر حدی» می‌توانیم در مورد وجود نداشتن حد بعضی توابع کسری، بدون محاسبه‌ی دامنه نظر دهیم.

☑ نکته‌ی (۱): در محاسبه‌ی حد توابع کسری وقتی در مخرج کسر صفر مطلق ظاهر شود، حد معنا ندارد و نمی‌توان از حد تابع در آن نقطه صحبت کرد.

$$\frac{\text{عدد یا صفر مطلق یا صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{معنا ندارد.}$$

به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\frac{x-۳}{[x]}$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x}{[x]}$، معنا ندارند.

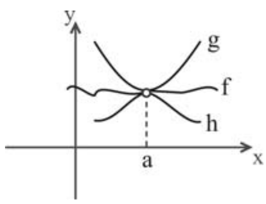
☑ نکته‌ی (۲): درحد توابع کسری $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰$ و $\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد}}=۰$، به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x}=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x+۲}=۰$.

◆ قضیه‌ی فشردگی ◆

این قضیه راجع به رفتار حدی تابعی است که بین دو تابع دیگر، که هر دو در یک نقطه داده شده حد مساوی دارند، برقراراست.

قضیه *هرگاه به ازای هر x در بازه‌ی بازی شامل a (جز احتمالاً در خود a)* $h(x)\le f(x)\le g(x)$ *و نیز* $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$ *آن‌گاه:*

$$\lim_{x\to a}f(x)=L$$



■ مثال: نشان دهید $\lim\limits_{x\to ۰}x\sin\frac{۱}{x}=۰$.

◂ حل: از آنجایی‌که $-۱\le \sin\frac{۱}{x}\le ۱$، برای مقدارهای مثبت x داریم $-x\le x\sin\frac{۱}{x}\le x$ و برای مقدارهای منفی x، $x\le x\sin\frac{۱}{x}\le -x$، حد توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در $x=۰$ برابر صفر است، پس $\lim\limits_{x\to ۰}x\sin\frac{۱}{x}=۰$ است.

☑ نکته‌ی (۲): با توجه به قضیه‌ی فشردگی می‌توان ثابت کرد $\lim\limits_{x\to ۰}x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$.

قضیه‌ی کران‌داری: اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=۰$ *و تابع g در یک همسایگی محذوف a کران‌دار باشد، آن‌گاه* $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=۰$ *است.*

به عنوان مثال $\lim\limits_{x\to ۰}\sin x\sin\frac{۱}{x}=۰$، زیرا $\sin\frac{۱}{x}$ در همسایگی محذوف صفر کران‌دار است و $\lim\limits_{x\to ۰}\sin x=۰$ پس $\lim\limits_{x\to ۰}\sin x.\sin\frac{۱}{x}=۰$.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیپ ۴

۱۳۳۶- اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته و $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵$ باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)$ کدام است؟ **(سراسری ریاضی - ۷۸)**

۱) ۳- ‏ ‏ ۲) ۲- ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ۴) ۳

۱۳۳۷- حد تابع باضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۷۶)

۱) $-\infty$ ۲) $\dfrac{-1}{2}$ ۳) صفر ۴) $\dfrac{1}{2}$

۱۳۳۸- اگر $f(x)=\begin{cases} ax-1 & x<1 \\ x^2+2a & x\geq 1\end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$ ، مقدار a کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۶)

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۲- ۴) ۱-

۱۳۳۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & x\geq -1 \\ 2x+1 & x<-1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-1$ حد دارد؟ (سراسری تجربی - ۸۰)

۱) $\{0\}$ ۲) $\{2\}$ ۳) ϕ ۴) R

۱۳۴۰- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & x>0 \\ -\sqrt{1+x} & x\leq 0\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۹)

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) موجود نیست.

تیپ ۵

۱۳۴۱- حد راست عبارت $2[x]$ از حد چپ آن در نقطه‌ی $x=-2$ چقدر بیش‌تر است؟ (سراسری تجربی - ۷۵)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۴۲- تابع f بر مجموعه‌ی اعداد حقیقی با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-[x]$ تعریف شده است، حد این تابع وقتی $x\to 0^-$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۶۲)

۱) صفر ۲) موجود نیست ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۳۴۳- حد عبارت $(1-x+[x]-[2x])$ وقتی $x\to 1^-$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۷۱)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۴۴- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x+a)[x]$ اگر $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)-\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) صفر

۱۳۴۵- حاصل‌ضرب حد چپ و راست تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]+\operatorname{sgn} x$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲-

۱۳۴۶- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=a[x]+[x+1]$ در نقطه‌ی $x=1$ حد دارد؟ (سراسری ریاضی - ۶۳)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۴۷- $\lim [x]([x]-1)$ وقتی $x\to 1$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۶۷)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

۱۳۴۸- حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)\left[\dfrac{1}{x+1}\right]$ کدام است؟ (نماد [ ] جزء صحیح است) (سراسری ریاضی -۸۱)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) ۱

۱۳۴۹- مقدار $\lim \dfrac{[5x^2]}{x+5}$ وقتی $x\to 0^+$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۶۶)

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۵

۱۳۵۰- حد عبارت $\dfrac{[x]+1}{x^2-1}$ وقتی $x\to(-1)^+$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۷۵)

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) صفر ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) ∞

تیپ ۶

۱۳۵۱- حد عبارت $x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ در کدام حالت متناهی نیست؟ (سراسری ریاضی - ۹۳)

۱) $x\to 0^-$ ۲) $x\to 0^+$ ۳) $x\to -\infty$ ۴) $x\to +\infty$

۱۳۵۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}|x|\left[\dfrac{1}{x}\right]$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۳)

۱) ۱- ۲) حد ندارد. ۳) صفر ۴) ۱

۱۳۵۳– هرگاه $f(x)$ تابعی باشد که $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$، آنگاه حد تابع $(f(x)+1)\sin\frac{\pi}{x^2}$ وقتی $x\to 0$ کدام است؟ **(سراسری ریاضی – ۶۳)**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) π

۱۳۵۴– f تابعی است حقیقی با دامنهٔ R و $|f|\le 2$ که در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست. تابع $(x^2-1)f(x)$ دقیقاً در چند نقطه دارای حدی است حقیقی؟ **(سراسری ریاضی – ۶۶)**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سایر آزمون‌ها و کتاب درسی

۱۳۵۵– اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 1\\ 2 & x>1\end{cases}$ باشند، در نقطهٔ $x=1$ کدام گزاره درست است؟ **(آزاد ریاضی – ۶۶)**

۱) $f(x).g(x)$ در نقطهٔ $x=1$ حد دارد.
۲) $f(x)$ در نقطهٔ $x=1$ حد دارد.
۳) $g(x)$ در نقطهٔ $x=1$ حد دارد.
۴) $f(x)+g(x)$ در نقطهٔ $x=1$ حد دارد.

۱۳۵۶– اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ وجود داشته باشد، آن‌گاه: **(دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحهٔ ۸۵ – تمرین ۲)**

۱) باید هر دو تابع f و g در $x=a$ حد داشته باشند.
۲) تفاضل دو تابع f و g در $x=a$ حد دارد.
۳) ممکن است هر دو تابع در $x=a$ حد نداشته باشند.
۴) حاصل‌ضرب آنها در $x=a$ حد دارد.

۱۳۵۷– در تابع جزء صحیح $f(x)=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]$ مجموع حد چپ و راست وقتی $x\to 6$ کدام است؟ **(آزاد غیرپزشکی – ۸۲)**

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

۱۳۵۸– اگر $f(x)=[x]+[4-x]$ باشد کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ **(آزاد ریاضی – ۶۶ با تغییر)**

۱) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=3$ ۲) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=3$ ۳) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=3$ ۴) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$

۱۳۵۹– مجموع حد چپ و راست تابع $y=(x^2+1)[x^2-2]$ در $x=\sqrt{2}$ کدام است؟ **(آزاد پزشکی – ۸۲)**

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۶-

۱۳۶۰– حد عبارت $\dfrac{\left[2x-\frac{1}{2}\right]+[1-3x]}{\left[4x+\frac{1}{3}\right]-[-5x+0/3]}$ وقتی $x\to \frac{2}{3}^-$ کدام است؟ **(آزمایشی سنجش ریاضی – ۹۱)**

۱) $\frac{-1}{3}$ ۲) $\frac{-1}{6}$ ۳) $\frac{-2}{5}$ ۴) $\frac{-3}{5}$

۱۳۶۱– حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]$ کدام است؟ **(دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌های ۷۸ تا ۸۶)**

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

۱۳۶۲– اگر $a\in R$ آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{4x^2+3}{x^2+1}\right]$ برابر است با: **(دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحهٔ ۸۶ – تمرین ۱۱)**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) وجود ندارد.

۱۳۶۳– تابع $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \ x\le -3\\ -2x & , \ x>-3\end{cases}$ مفروض است، حاصل $\lim\limits_{x\to 3^+} f(-x)$ کدام است؟ **(آزمون کانون ریاضی – ۸۸)**

۱) ۶- ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۱۱-

۱۳۶۴– تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(x^2+ax+b)[x]$ در تمام نقاط بازهٔ $(1,4)$ حد دارد. زوج مرتب (a,b) کدام است؟ **(آزمون کانون ریاضی – ۹۱)**

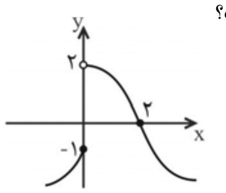
۱) $(-4,3)$ ۲) $(4,3)$ ۳) $(5,6)$ ۴) $(-5,6)$

۱۳۶۵– حاصل $\lim\limits_{x\to 0}(3^x-1)\left(\frac{1}{9^x-1}-\cos\frac{1}{x}\right)$ کدام است؟ **(آزمون کانون ریاضی – ۹۱)**

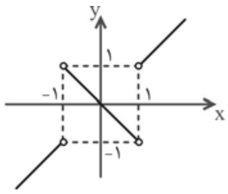
۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) وجود ندارد.

۱۳۶۶– نمودار تابع f مطابق شکل زیر است حد راست تابع fof در نقطه به طول ۲ چه قدر است؟ **(دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌های ۷۲ تا ۸۶)**

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲



۱۳۶۷– شکل زیر مربوط به نمودار تابع $y=f(x)$ است، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x^۲-۵x+۵)$ کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی – ۹۲)



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۱–

۱۳۶۸– اگر $f(x)=x\left[\frac{۱}{x}\right]$ و $g(x)=[x]$ آنگاه برای تابع $(gof)(x)$ در $x=۰$ کدام درست است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – نتیجه‌ی گیری مثال – صفحه‌ی ۸۱)

۱) حد چپ و راست موجود و برابر
۲) حد چپ و راست وجود ندارد
۳) حد چپ و راست موجود ولی نابرابر
۴) فقط معین است.

۱۳۶۹– حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} x^n\left[\frac{۱}{x^m}\right]$، m و n اعداد فرد طبیعی و $n<m$، کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – نتیجه‌ی گیری مثال – صفحه‌ی ۸۱)

۱) $-\infty$
۲) $+\infty$
۳) صفر
۴) وجود ندارد.

۱۳۷۰– اگر $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲+ax+b)\left[\frac{۱}{x-۲}\right]=۳$ آنگاه زوج مرتب $(a\,,\,b)$ کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۸۱)

۱) $(۱\,,\,۲)$
۲) $(۲\,,\,۱)$
۳) $(-۲\,,\,-۱)$
۴) $(-۱\,,\,-۲)$

۱۳۷۱– اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ آنگاه برای تابع fog در $x=۰$ کدام گزینه درست است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۶۸ – تمرین ۶)

۱) حد چپ و راست موجود نابرابرند.
۲) حد چپ و راست موجود و برابرند.
۳) حد چپ وجود دارد ولی حد راست وجود ندارد.
۴) حد راست وجود دارد ولی حد چپ وجود ندارد.

۱۳۷۲– اگر تابع f به ازای هر $x\neq ۰$ در نامساوی $-x^۲\leq f(x)-۳\leq x^۲$ صدق کند، $\lim\limits_{x\to ۰}\left[\frac{-۱}{f(x)}\right]$ کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۷۷)

۱) ۱–
۲) ۲
۳) حد ندارد
۴) صفر

۱۳۷۳– فرض کنید $f(x)=\operatorname{sgn}(x^۲-۳x+۴)$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x-۲)$ ($a\in R$) کدام است؟ (دیفرانسیل – ترکیبی – فصل ۲ – صفحه‌ی ۶۸ – تمرین ۶)

۱) صفر
۲) ۱–
۳) وجود ندارد
۴) ۱

۱۳۷۴– اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=(x^۲-ax)\sin\frac{۱}{x-۱}$ در $x=۱$ حد داشته باشد، a کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۷۷)

۱) وجود ندارد.
۲) هر مقدار دلخواه
۳) صفر
۴) ۱

۱۳۷۵– اگر تابع حقیقی $f(x)=\begin{cases}۱ & , \text{ گویا } x\\ ۰ & , \text{ اصم } x\end{cases}$ در α حد داشته باشد، مجموعه‌ی همه‌ی α ها کدام است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی – ۹۰)

۱) مجموعه‌ی اعداد گویا
۲) تهی
۳) مجموعه‌ی اعداد اصم
۴) مجموعه‌ی اعداد گویا و اصم

۱۳۷۶– تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}x+a & , \text{ گویا } x\\ ۳x+۱ & , \text{ گنگ } x\end{cases}$ در $x=\frac{۱}{۲}$ حد دارد، a کدام است؟ (دیفرانسیل – فصل ۲ – صفحه‌ی ۸۷ – تمرین ۱۷)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۱۳۷۷– اگر $f(x)=\begin{cases}۲ & ; \quad x\in Q\\ ۰ & ; \quad x\notin Q\end{cases}$، آنگاه تابع $g(x)=(x^۳-۴x^۲)f(x)$ در چند نقطه دارای حد می‌باشد؟ (آزمون کانون ریاضی – ۹۱)

۱) هیچ
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار