



تابع

فصل سوم

صفحه‌های ۴۷ تا ۷۰ کتاب درسی

تعداد سؤال

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.

آبی: مسلطم
سبز: نسبتاً مسلطم
زرد: مسلط نیستم.

گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیشتر دارید.

- ۳ توابع گویا
- ۳ توابع رادیکالی
- ۵ تساوی دو تابع
- ۷ توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

آبی سبز زرد

۱. آشنایی با برخی از انواع توابع
(۱۸ سؤال شناسنامه‌دار)

صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶ کتاب درسی

- ۴ وارون یک تابع
- ۱۰ تابع یک‌به‌یک
- ۶ یافتن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

آبی سبز زرد

۲. وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک
(۲۰ سؤال شناسنامه‌دار)

صفحه‌های ۵۷ تا ۶۴ کتاب درسی

تابع

۵۲ سؤال امتحانی شامل:
۳۲ سؤال از مدارس و امتحان نهایی
۲۰ سؤال طراحی شده از کتاب درسی

- نمایش ضابطه‌ای
- نمایش زوج مرتبی
- نمایش نموداری

آبی سبز زرد

۳. اعمال جبری روی توابع
(۱۴ سؤال شناسنامه‌دار)

صفحه‌های ۶۵ تا ۷۰ کتاب درسی

۱۴

۱. آشنایی با برخی از انواع توابع

توابع گویا

صفحه‌های ۴۸ تا ۵۶ کتاب درسی

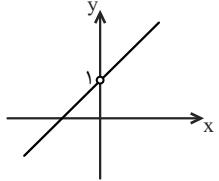
مرجع

<p>شهرضا - شاهد رجایی - دی ۹۴ (۴ تکرار)</p>	<p>۱۲۹. در تابع گویای $y = \frac{3x+4}{2x-8}$ الف) دامنه‌ی تابع را مشخص کنید. ب) به ازای چه مقداری از x مقدار تابع برابر با ۶ می‌شود؟</p>
<p>الف) امتحان نهایی - شهریور ۹۱ ب) امتحان نهایی - دی ۸۷ پ) امتحان نهایی - خرداد ۹۲ (۷ تکرار)</p>	<p>۱۳۰. دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید. الف) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ ب) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x+3}$ پ) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-4x+4}$ (صفحه‌ی ۵۶ - مکمل تمرین ۲ و صفحه‌ی ۵۰ - مکمل کار در کلاس)</p>
	<p>۱۳۱. نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید. الف) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ب) $D_f = (-\infty, 0)$ پ) $D_f = [-1, 1] - \{0\}$ (صفحه‌ی ۵۶ - مشابه تمرین ۱ و صفحه‌ی ۴۹ - مشابه فعالیت)</p>

توابع رادیکالی

<p>الف) شهریار - بهران - دی ۹۴ ب) خوی - شاهد امام حسین - دی ۹۴ پ) بوکان - سبحان - خرداد ۹۴ (۵ تکرار)</p>	<p>۱۳۲. دامنه‌ی توابع زیر را تعیین کنید. الف) $f(x) = \sqrt{2x+4} + 3$ ب) $g(x) = \sqrt{12-6x}$ پ) $p(x) = \sqrt{16-x^2}$ (صفحه‌ی ۵۳ - فعالیت - مکمل و مشابه ۱)</p>
<p>کهنوج - امام خمینی - دی ۹۴ (۱۰ تکرار)</p>	<p>۱۳۳. دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$ را به کمک تعیین علامت بیابید. (صفحه‌ی ۵۳ - فعالیت - مکمل ۱)</p>
<p>الف و ب) طراحی شده پ) شیروان - شاهد ۵ - خرداد ۹۴ (۱۰ تکرار)</p>	<p>۱۳۴. با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$، نمودار توابع زیر را رسم کنید. الف) $y = \sqrt{x} + 2$ ب) $y = \sqrt{x-1}$ پ) $y = 2 + \sqrt{x+1}$ (صفحه‌ی ۵۳ - فعالیت - مشابه ۱ و ۲)</p>

تساوی دو تابع

<p>اصفهان - نیلفروش زاده - دی ۹۵ (۴ تکرار)</p>	<p>۱۳۵. اگر دو تابع $f = \{(5, 3), (-3, 5)\}$ و $g = \{(b, c), (5, a), (b, 5)\}$ مساوی باشند، a، b و c را بیابید. (صفحه‌ی ۵۰ - مرتبط با متن درس)</p>
	<p>۱۳۶. نمودار مقابل مربوط به کدام یک از توابع زیر است؟ الف) $f(x) = x + 1$ و $x \neq 0$ ب) $g(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$ (صفحه‌ی ۵۰ - کار در کلاس - مشابه ۲)</p>

مرجع

	<p>۱۳۷. نمودار هریک از توابع را رسم کنید. آیا دو تابع مساوی هستند؟</p> $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \text{(الف)}$ $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} \quad \text{(ب)}$ <p>(صفحه ۵۱ - کار در کلاس - مشابه ۱)</p>
	<p>۱۳۸. کدام جفت از توابع زیر برابر هستند؟</p> $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad \text{(الف)}$ $g(x) = x + 3$ $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x+1} \\ g(x) = \frac{x+1}{x+1} \end{cases} \quad \text{(ب)}$ <p>(صفحه ۵۶ - مشابه تمرین ۳)</p>
<p>امتحان نهایی - خرداد ۹۲ (۱۰ تکرار)</p>	<p>۱۳۹. آیا دو تابع زیر با هم مساویند؟ چرا؟</p> $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & x \neq 5 \\ 6 & x = 5 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = x + 5$ <p>(صفحه ۵۶ - مشابه تمرین ۳)</p>

توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

	<p>۱۴۰. مقدار هریک از جزء صحیح‌های زیر را بیابید.</p> $[2/7] \quad \text{(الف)}$ $[\pi + \frac{1}{\pi}] \quad \text{(ب)}$ $[-\frac{82}{15}] \quad \text{(پ)}$ $[-3\sqrt{5}] \quad \text{(ت)}$ <p>(صفحه ۵۵ - مشابه کار در کلاس)</p>
<p>الف) امتحان نهایی - دی ۹۴ ب) امتحان نهایی - خرداد ۹۳ پ) امتحان نهایی - دی ۹۲ (۸ تکرار)</p>	<p>۱۴۱. جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر $f(x) = [x+1]$ باشد، حاصل $f(\sqrt{3}-1)$ برابر با است.</p> <p>ب) اگر $f(x) = [x+3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2-\sqrt{2})$ برابر است.</p> <p>پ) مقدار تابع $f(x) = [x+1]$ به ازای $x = \sqrt{2}$ می‌باشد.</p> <p>(صفحه ۵۵ - فعالیت - نتیجه ۳)</p>
<p>مشهد - امام رضا (ع) - دی ۹۵ (۵ تکرار)</p>	<p>۱۴۲. حاصل $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{13}]$ را بیابید.</p> <p>(صفحه ۵۵ - مشابه کار در کلاس)</p>
<p>امتحان نهایی - شهریور ۹۱ (۹ تکرار)</p>	<p>۱۴۳. نمودار تابع $y = [x] + 2$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.</p> <p>(صفحه ۵۶ - مشابه تمرین ۸)</p>
<p>ارومیه - رحیمی افشار - دی ۹۵ (۶ تکرار)</p>	<p>۱۴۴. نمودار تابع $y = [x+1]$ را در بازه $[-2, 1]$ رسم کنید.</p> <p>(صفحه ۵۶ - مشابه تمرین ۸)</p>
	<p>۱۴۵. در هریک از تساوی‌های زیر حدود x را بیابید.</p> $[x] = 3 \quad \text{(الف)}$ $[x+2] = -1 \quad \text{(ب)}$ <p>(صفحه ۵۵ - فعالیت - مشابه ۱ و ۳)</p>
	<p>۱۴۶. کرایه‌ی اولیه (ورودی) تاکسی‌های یک شرکت تاکسیرانی برای ۲ کیلومتر اول ۳۰۰۰ تومان است و برای هر کیلومتر مسافت بعدی و کمتر از آن، مبلغ ۲۰۰۰ تومان کرایه اضافی دریافت می‌شود. اگر حداکثر مسافت ۵ کیلومتر باشد، تابعی که مبلغ کرایه را برای تمامی مسافت‌ها نمایش می‌دهد را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.</p> <p>(صفحه ۵۴ - مشابه فعالیت)</p>

۲. وارون یک تابع و تابع یک به یک

وارون یک تابع

مرجع

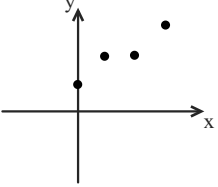
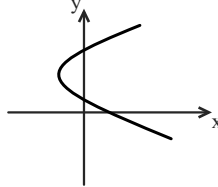
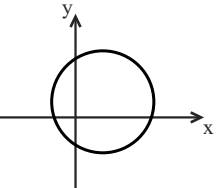
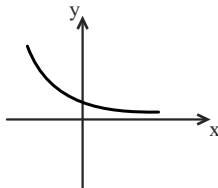
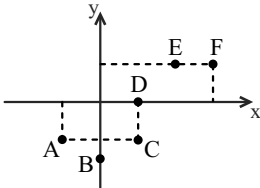
	<p>۱۴۷. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) نمودار f و f^{-1} نسبت به محور x ها قرینهاند. ب) وارون تابع $f = \{(1, 2), (0, 1), (2, \sqrt{4})\}$ یک تابع است. پ) اگر $(a, b) \in f^{-1}$ آنگاه $(b, a) \in f$ ت) وارون هر تابع خطی، یک تابع خطی است.</p> <p>(صفحه ۵۸ - مشابه فعالیت)</p>
	<p>۱۴۸. اگر $f = \{(-1, 2), (0, 3), (4, -1)\}$ باشد، تابع f^{-1} را بیابید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.</p> <p>(صفحه ۶۳ - مشابه تمرین ۱)</p>
<p>شهریار - عزیزاله پزشکی - دی ۹۴ (۴ تکرار)</p>	<p>۱۴۹. تابع $f = \{(m^4 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$ مفروض است. m و n را طوری تعیین کنید که برد وارون f، $\{-7, 18\}$ باشد.</p> <p>(صفحه ۶۳ - مکمل تمرین ۱)</p>
	<p>۱۵۰. نمودار وارون هریک از توابع زیر را رسم کنید.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="470 985 766 1344"> <p>الف)</p> <p>پ)</p> </div> <div data-bbox="941 940 1276 1142"> <p>ب)</p> </div> </div> <p>(صفحه ۶۳ - مکمل تمرین ۲)</p>

تابع یک به یک

۱۵۱. کدام یک از موارد زیر یک تابع یک به یک را مشخص می کند؟

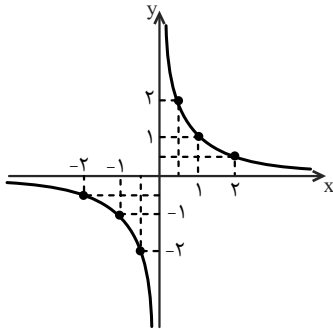
<p>الف، ب) دزفول - کوثر - دی ۹۴ (۵ تکرار) پ، ت) طراحی شده</p>	<p>الف) $f = \{(-2, 3), (0, -5), (1, 7), (4, 3)\}$</p> <p>ب)</p> <p>پ)</p> <p>ت)</p> <p>الف، ب، ت: صفحه ۵۹ - مشابه فعالیت) پ: صفحه ۶۰ - مشابه فعالیت)</p>
---	--

مرجع

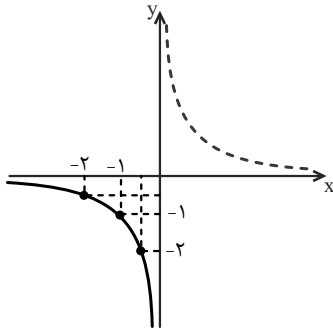
	<p>۱۵۲. مقادیر a و b را طوری بیابید که رابطه‌ی $f = \{(a, 2), (-1, 1), (0, 2), (a-1, b)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد. (صفحه‌ی ۵۹ - فعالیت - مشابه ۱)</p>
<p>شهریار - عزیزاله پزشکی - دی ۹۴ (۱۶ تکرار)</p>	<p>۱۵۳. a و b را طوری به‌دست آورید که رابطه‌ی $R = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد. (صفحه‌ی ۵۹ - فعالیت - مشابه ۱)</p>
	<p>۱۵۴. کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع یک‌به‌یک را نمایش می‌دهد؟</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>الف)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>ب)</p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;">  <p>پ)</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>ت)</p> </div> </div> <p>(صفحه‌ی ۶۰ - فعالیت - مشابه ۲)</p>
	<p>۱۵۵. الف) با توجه به نمودار مقابل، آیا تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟ ب) با حذف حداقل چند نقطه از نمودار، تابع یک‌به‌یک خواهد شد؟ نقاط را مشخص کنید.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>(صفحه‌ی ۶۳ - کار در کلاس اول - مشابه ۲)</p>
<p>تهران - ایسال - دی ۹۴ (۴ تکرار)</p>	<p>۱۵۶. تابعی بنویسید که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی $\{1, 2, 3\}$ باشد و هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کند: یک‌به‌یک نباشد و $f(3) < f(1)$ باشد. (صفحه‌ی ۶۴ - مکمل تمرین ۵)</p>
<p>خوی - صدیقه کبری - دی ۹۴ (۴ تکرار)</p>	<p>۱۵۷. نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه‌ی آن $(-5, 1)$ و برد آن $(0, 4)$ باشد، مشروط بر آنکه: الف) تابع یک‌به‌یک باشد. ب) تابع یک‌به‌یک نباشد. (صفحه‌ی ۶۴ - مشابه تمرین ۵)</p>
<p>بهبهان - رسول اکرم - دی ۹۴ (۵ تکرار)</p>	<p>۱۵۸. تابع خطی $y = 3ax + 17 - 18x$ یک‌به‌یک نیست. مقدار a را تعیین کنید. (صفحه‌ی ۶۳ - کار در کلاس اول - مرتبط با ۲)</p>
<p>امتحان نهایی - خرداد ۹۳ (۷ تکرار)</p>	<p>۱۵۹. آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک‌به‌یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید. (صفحه‌ی ۶۳ - مشابه کار در کلاس دوم)</p>
	<p>۱۶۰. تابع‌های زیر را در نظر بگیرید و نشان دهید یک‌به‌یک نیستند. در هر مورد بازه‌ای دلخواه مثال بزنید که با محدود کردن دامنه‌ی تابع به آن، یک تابع یک‌به‌یک حاصل شود.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>الف) $y = x-1$</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>ب) $y = x^2 - 2x - 1$</p> </div> </div> <p>(صفحه‌ی ۶۳ - مشابه کار در کلاس دوم)</p>

از نمودار را که در فاصله‌ی داده شده قرار دارد، نگه داشته و بقیه‌ی نمودار را حذف می‌کنیم.

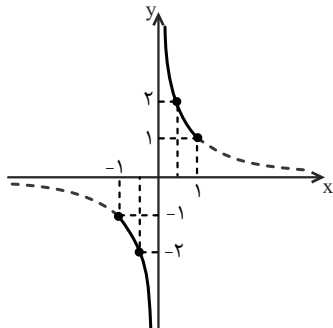
الف) $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$



ب) $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = (-\infty, 0)$



پ) $f(x) = \frac{1}{x}$, $D_f = [-1, 1] - \{0\}$



۱۳۲ عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج، باید نامنفی باشد، بنابراین:

(الف)

$$f(x) = \sqrt{2x+4} + 3$$

$$2x+4 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -4 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

(ب)

$$g(x) = \sqrt{12-6x}$$

$$12-6x \geq 0 \Rightarrow 12 \geq 6x \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_g = (-\infty, 2]$$

(پ)

$$p(x) = \sqrt{16-x^2}$$

$$16-x^2 \geq 0 \Rightarrow (4-x)(4+x) \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_p = [-4, 4]$$

پاسخ فصل سوم

پاسخ تشریحی: فرزاد دانه‌ای

۱۲۹ الف) در تابع گویا مخرج کسر مخالف صفر است:

$$y = \frac{3x+4}{2x-8}$$

$$2x-8 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{4\}$$

ب) باید مقداری از x را بیابیم که به ازای آن $y=6$ می‌شود، داریم:

$$y = \frac{3x+4}{2x-8} \xrightarrow{y=6} 6 = \frac{3x+4}{2x-8} \Rightarrow 12x-48 = 3x+4$$

$$\Rightarrow 9x = 52 \Rightarrow x = \frac{52}{9}$$

۱۳۰ در توابع گویا، مخرج کسر نمی‌تواند صفر باشد، بنابراین:

(الف)

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

$$x^2-4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$$

(ب)

$$f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x+3}$$

$$x^2-2x+3 \neq 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(3) = 4 - 12 = -8 < 0$$

Δ ی عبارت درجه دو x^2-2x+3 منفی و ضریب x^2 مثبت است،

پس این عبارت همواره مثبت است و به ازای هیچ x ی صفر نمی‌شود.

بنابراین:

$$D_f = \mathbb{R}$$

(پ)

$$f(x) = \frac{x+5}{x^2-4x+4}$$

$$x^2-4x+4 \neq 0 \Rightarrow (x-2)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

۱۳۱ با استفاده از نقطه‌یابی، نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم. با

توجه به جدول زیر، در تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، با افزایش مقادیر x ، مقادیر

تابع کاهش می‌یابد:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$

برای قسمت‌های (ب) و (پ) نمودار $y = \frac{1}{x}$ را رسم کرده و آن بخشی

$$\begin{cases} (\delta, 3) \in f \\ (\delta, a) \in g \end{cases} \xrightarrow{f=g} a=3$$

$$\begin{cases} (-3, \delta) \in f \\ (b, \delta) \in g \end{cases} \xrightarrow{f=g} b=-3$$

۱۳۶. نمودار داده شده مربوط به یک تابع خطی است که $x=0$ جزء دامنه آن نیست، بنابراین این نمودار مربوط به تابع f است. تابع g را نیز بررسی می‌کنیم. ابتدا دامنه آن را به دست آورده و سپس ضابطه آن را ساده می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$$

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g(x) = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$$

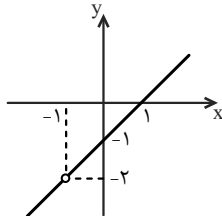
دامنه تابع g با دامنه نمودار داده شده برابر نیست. همچنین نمودار داده شده دارای طول از مبدأ منفی است، پس ضابطه تابع g نیز نمی‌تواند ضابطه نمودار داده شده باشد.

۱۳۷. ابتدا دامنه توابع را یافته، سپس ضابطه آنها را ساده کرده و آنها را رسم می‌کنیم:
(الف)

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1, \quad x \neq -1$$

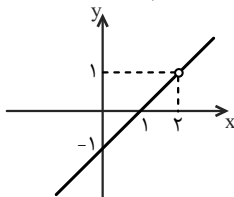


(ب)

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

$$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = x - 1, \quad x \neq 2$$



دامنه دو تابع f و g برابر نیست، پس دو تابع مساوی نیستند (همچنین واضح است که نمودار دو تابع بر هم منطبق نیست، پس مساوی نیستند).

۱۳۳. عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج باید نامنفی باشد، پس:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

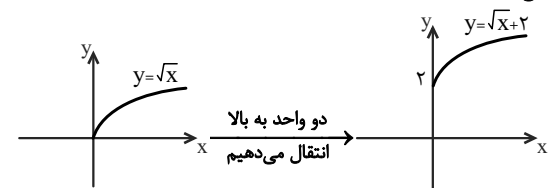
$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) \geq 0$$

با کمک جدول تعیین علامت عبارت درجه دوم، نامعادله را حل می‌کنیم:

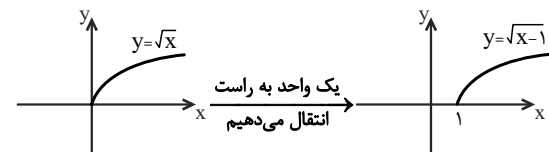
x	2	3
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$-$

$$D_f : x \leq 2 \cup x \geq 3$$

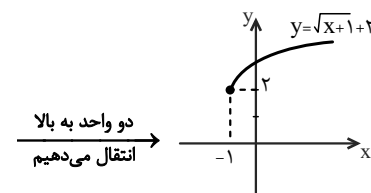
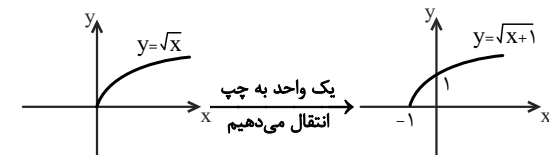
۱۳۴. (الف) نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را 2 واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x} + 2$ به دست آید.



(ب) نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = \sqrt{x-1}$ به دست آید.



(پ) نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را ابتدا یک واحد به چپ و سپس دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x+1}$ به دست آید.



۱۳۵. دو تابع به صورت زوج مرتب، در صورتی مساوی‌اند که به‌عنوان مجموعه با هم برابر باشند. از طرفی، تابع g ، دو زوج مرتب با مؤلفه‌ی اول برابر دارد، بنابراین باید مؤلفه‌های دومشان نیز برابر باشد تا g تابع باشد، لذا:

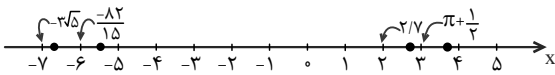
$$\begin{cases} (b, \delta) \in g \\ (b, c) \in g \end{cases} \xrightarrow{g \text{ تابع است}} c = \delta$$

۱۴۰. جزء صحیح هر عدد غیر صحیح برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن عدد روی محور اعداد، بنابراین ابتدا محل تقریبی هریک از اعداد را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:

$$\pi + \frac{1}{4} \approx 3,14 + 0,25 = 3,39$$

$$-\frac{82}{15} \approx -5,47$$

$$-3\sqrt{5} \approx -\sqrt{45} \approx -6,7$$



بنابراین با توجه به محور اعداد و تعریف جزء صحیح داریم:

$$[\pi + \frac{1}{4}] = 3 \quad (\text{ب}) \quad [2,7] = 2 \quad (\text{الف})$$

$$[-3\sqrt{5}] = -7 \quad (\text{ت}) \quad [-\frac{82}{15}] = -6 \quad (\text{پ})$$

۱۴۱. نکته: اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد آنگاه $[u+k] = [u] + k$ با توجه به این نکته، مقادیرهای خواسته شده را می‌یابیم.
(الف)

$$f(x) = [x+1]$$

$$f(\sqrt{3}-1) = [\sqrt{3}-1+1] = [\sqrt{3}]$$

حال محل تقریبی $\sqrt{3} \approx 1,7$ را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:



بنابراین:

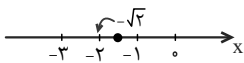
$$f(\sqrt{3}-1) = [\sqrt{3}] = 1$$

(ب)

$$f(x) = [x+3]$$

$$f(2-\sqrt{2}) = [2-\sqrt{2}+3] = [5-\sqrt{2}] = [-\sqrt{2}] + 5$$

حال محل تقریبی $-\sqrt{2} \approx -1,4$ را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:



بنابراین:

$$f(2-\sqrt{2}) = [-\sqrt{2}] + 5 = -2 + 5 = 3$$

(پ)

$$f(x) = [x+1]$$

$$f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}+1] = [\sqrt{2}] + 1$$

حال محل تقریبی $\sqrt{2} \approx 1,4$ را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم:



بنابراین:

$$f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] + 1 = 1 + 1 = 2$$

۱۳۸. دو تابع f و g در صورتی مساوی‌اند که اولاً دامنه‌ی آنها برابر باشد، ثانیاً به ازای هر x از دامنه داشته باشیم $f(x) = g(x)$. پس ابتدا دامنه‌ی هریک از توابع را به دست آورده و سپس ضابطه‌ها را ساده می‌کنیم.
(الف)

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3, \quad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$g(x) = x+3, \quad D_g = \mathbb{R}$$

دامنه‌ی تابع f و g برابر نیست، پس دو تابع مساوی نیستند.
(ب)

$$f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}$$

$$|x+1| \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+1}, & x > -1 \\ \frac{x+1}{-(x+1)}, & x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x > -1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$$

$$x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+1}, & x > -1 \\ \frac{-(x+1)}{x+1}, & x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} 1, & x > -1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$$

دامنه و ضابطه‌ی هر دو تابع به ازای هر x از دامنه برابر است، پس مساوی‌اند.

۱۳۹. دو تابع در صورتی با هم مساوی‌اند که اولاً دامنه‌ی آنها برابر باشد، ثانیاً به ازای هر x از دامنه مقدار دو تابع برابر باشد. دامنه‌ی هر دو تابع f و g مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، پس ضابطه‌ی آنها را مقایسه می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}, & x \neq 5 \\ 6, & x = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+5, & x \neq 5 \\ 6, & x = 5 \end{cases}$$

ضابطه‌ی هر دو تابع به ازای $x \neq 5$ برابر است. مقدار هر دو تابع به ازای $x = 5$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(5) = 6 \\ g(5) = 5+5 = 10 \end{cases} \Rightarrow f(5) \neq g(5)$$

\Rightarrow تابع f و g برابر نیستند

۱۴۵. الف)

$$[x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3$$

ب)

$$[x+2] = -1$$

با توجه به اینکه اگر $k \in \mathbb{Z}$ آنگاه $[u+k] = [u]+k$ خواهیم داشت:

$$[x]+2 = -1 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow -3 \leq x < -2$$

۱۴۶. اگر x مسافت طی شده برحسب کیلومتر توسط تاکسی و $f(x)$

کرایه‌ی آن برحسب تومان باشد، با توجه به توضیحات مسأله، داریم:

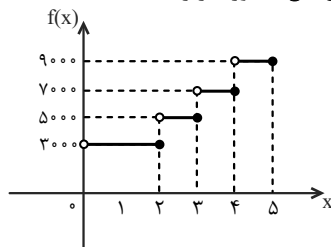
الف) اگر $0 < x \leq 2$ ، آنگاه $f(x) = 3000$

ب) اگر $2 < x \leq 3$ ، آنگاه $f(x) = 3000 + 1 \times 2000 = 5000$

پ) اگر $3 < x \leq 4$ ، آنگاه $f(x) = 3000 + 2 \times 2000 = 7000$

ت) اگر $4 < x \leq 5$ ، آنگاه $f(x) = 3000 + 3 \times 2000 = 9000$

پس نمودار این تابع به صورت زیر است:

۱۴۷. الف) نادرست است. نمودار تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$

قرینه‌اند.

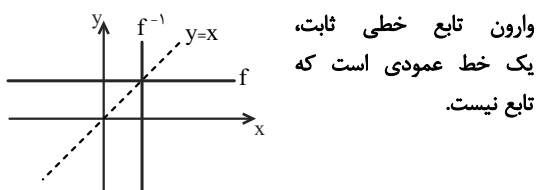
ب) نادرست است. وارون تابع f به صورت

$$f^{-1} = \{(2,1), (1,0), (2,2)\}$$

متمايز $(2,1)$ و $(2,2)$ مؤلفه‌ی اول برابر دارند، پس تابع نیست.

پ) درست است.

ت) نادرست است. به نمودار زیر توجه کنید.

۱۴۸. الف) از عوض کردن جای مؤلفه‌های اول و دوم در زوج‌های مرتب f

به دست می‌آید.

$$f = \{(-1,2), (0,3), (4,-1)\}$$

$$\Rightarrow f^{-1} = \{(2,-1), (3,0), (-1,4)\}$$

دامنه‌ی f^{-1} ، مجموعه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب

تشکیل‌دهنده‌ی آن است که برابر با برد تابع f است.

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, -1\} = R_f$$

برد f^{-1} ، مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده‌ی آن

است که برابر با دامنه‌ی تابع f است.

$$R_{f^{-1}} = \{-1, 0, 4\} = D_f$$

۱۴۲. جزء صحیح هر عدد صحیح برابر خود عدد است و جزء صحیح هر عدد

غیرصحیح برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن عدد روی محور اعداد، بنابراین:

$$[\sqrt{1}] = [1] = 1$$

اعداد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ بین دو عدد صحیح ۱ و ۲ قرار دارند، پس اولین عدد صحیح سمت چپ آنها روی محور اعداد ۱ است:

$$[\sqrt{2}] = 1, [\sqrt{3}] = 1, [\sqrt{4}] = [2] = 2$$

اعداد $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{7}$ و $\sqrt{8}$ بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارند، بنابراین اولین عدد صحیح سمت چپ آنها روی محور اعداد ۲ است:

$$[\sqrt{5}] = 2, [\sqrt{6}] = 2, [\sqrt{7}] = 2, [\sqrt{8}] = 2$$

$$[\sqrt{9}] = [3] = 3$$

اعداد $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{12}$ و $\sqrt{13}$ بین دو عدد صحیح ۳ و ۴ قرار دارند، بنابراین اولین عدد صحیح سمت چپ آنها روی محور اعداد ۳ است:

$$[\sqrt{10}] = 3, [\sqrt{11}] = 3, [\sqrt{12}] = 3, [\sqrt{13}] = 3$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{13}]$$

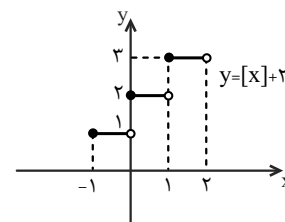
$$= 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

$$= 3 + 10 + 15 = 28$$

۱۴۳. x را به صورت بازه‌های زیر در نظر گرفته و مقدار جزء صحیح و تابع را

می‌یابیم:

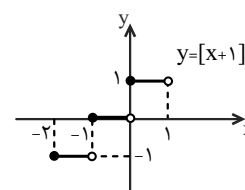
$$\begin{cases} -1 \leq x < 0 \Rightarrow y = [x] + 2 = -1 + 2 = 1 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = [x] + 2 = 0 + 2 = 2 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow y = [x] + 2 = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

۱۴۴. از آنجا که اگر $k \in \mathbb{Z}$ آنگاه $[u+k] = [u]+k$ ، ضابطه‌ی تابع

$y = [x+1]$ را می‌توان به صورت $y = [x]+1$ نوشت. x را

به صورت بازه‌های زیر در نظر گرفته و مقدار تابع را می‌یابیم:

$$\begin{cases} -2 \leq x < -1 \Rightarrow y = [x]+1 = -2+1 = -1 \\ -1 \leq x < 0 \Rightarrow y = [x]+1 = -1+1 = 0 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow y = [x]+1 = 0+1 = 1 \end{cases}$$



و از آنجا که f تابع است، هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن، نباید مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند، پس:

$$\begin{cases} (-1, 1) \in f \\ (-1, b) \in f \end{cases} \Rightarrow b = 1$$

۱۵۳ اگر رابطه‌ی R یک‌به‌یک باشد، هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن نباید مؤلفه‌های دوم برابر داشته باشند، پس:

$$\begin{cases} (3, 2) \in R \\ (b, 2) \in R \end{cases} \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow R = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (-1, 4)\}$$

و از آنجا که رابطه‌ی R تابع است، هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن نباید مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند، پس:

$$\begin{cases} (3, 2) \in R \\ (3, a^2 - a) \in R \end{cases} \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

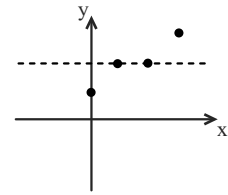
$$\Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

به ازای هر دو مقدار به‌دست آمده برای a ، رابطه‌ی R را بازنویسی می‌کنیم:

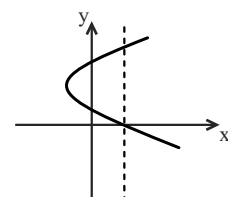
$$a = 2 \Rightarrow R = \{(3, 2), (2, 5), (-1, 4)\} \quad \checkmark$$

$$a = -1 \Rightarrow R = \{(3, 2), (-1, 5), (-1, 4)\} \quad \times$$

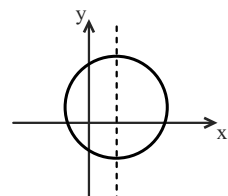
$a = -1$ قابل قبول نیست، زیرا در این حالت دو زوج مرتب متمایز $(-1, 5)$ و $(-1, 4)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند و R تابع نیست.



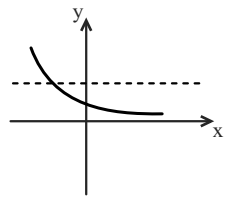
۱۵۴ الف) خطی موازی محور X ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس یک‌به‌یک نیست.



ب) خطی موازی محور Y ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.



پ) خطی موازی محور Y ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.



ت) هر خط موازی محور X ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس یک‌به‌یک است.

۱۴۹ ابتدا f^{-1} را می‌نویسیم:

$$f = \{(m^2 + 2, 5), (n^3 + 1, 4)\}$$

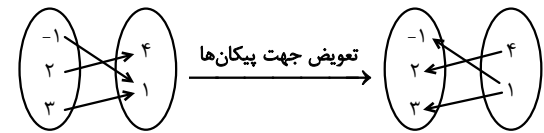
$$\Rightarrow f^{-1} = \{(5, m^2 + 2), (4, n^3 + 1)\}$$

$$\Rightarrow R_{f^{-1}} = \{m^2 + 2, n^3 + 1\}$$

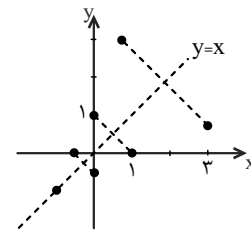
اگر $\{m^2 + 2, n^3 + 1\} = \{-7, 18\}$ ، از آنجا که $m^2 + 2$ همواره مثبت است باید برابر با ۱۸ و $n^3 + 1$ برابر با (-7) باشد، پس:

$$\begin{cases} m^2 + 2 = 18 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4 \\ n^3 + 1 = -7 \Rightarrow n^3 = -8 \Rightarrow n = -2 \end{cases}$$

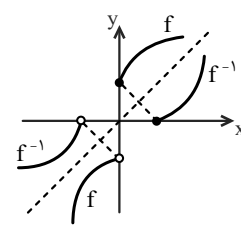
۱۵۰ الف) در نمایش پیکانی تابع، با عوض کردن جهت پیکان‌ها، وارون تابع به‌دست می‌آید:



ب) با قرینه کردن نقاط نسبت به خط $y = x$ وارون تابع به‌دست می‌آید:



پ) قرینه‌ی نمودار را نسبت به خط $y = x$ به‌دست می‌آوریم تا نمودار f^{-1} حاصل شود.



۱۵۱ الف) در تابع f ، دو زوج مرتب متمایز $(-2, 3)$ و $(4, 3)$ مؤلفه‌ی دوم برابر دارند، پس تابع f یک‌به‌یک نیست.

ب) در تابع g ، خطی موازی محور X ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع g یک‌به‌یک نیست.

پ) در تابع h به عضو صفر در مجموعه‌ی دوم (برد) دو پیکان وارد شده است، پس تابع h یک‌به‌یک نیست. همچنین هرگاه تعداد اعضای برد از تعداد اعضای دامنه کمتر باشد، تابع یک‌به‌یک نخواهد بود. در این تابع، دامنه دارای ۴ عضو و برد دارای ۳ عضو است، پس یک‌به‌یک نیست.

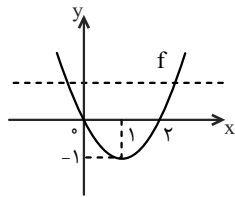
ت) در تابع k ، به هر عضو مجموعه‌ی دوم حداکثر یک پیکان وارد شده است، پس تابع یک‌به‌یک است.

۱۵۲ اگر f یک‌به‌یک باشد، هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن نباید مؤلفه‌های دوم برابر داشته باشند، پس:

$$\begin{cases} (a, 2) \in f \\ (0, 2) \in f \end{cases} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f = \{(0, 2), (-1, 1), (-1, b)\}$$

۱۵۹. نمودار تابع را رسم می‌کنیم. ابتدا معادله‌ی تابع را به صورت مربع کامل درآورده، سپس با استفاده از انتقال، آن را رسم می‌کنیم:

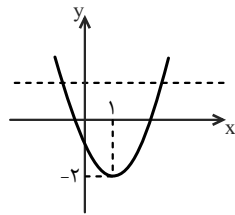
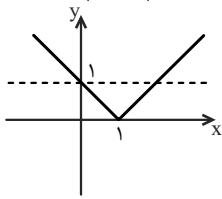
$$f(x) = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$



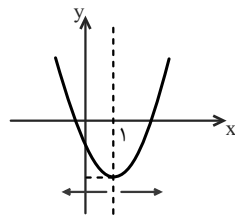
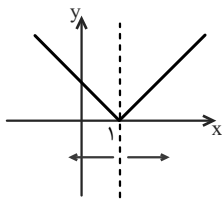
تابع f یک‌به‌یک نیست، زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند.

۱۶۰. نمودار هریک از تابع‌ها را به کمک انتقال رسم می‌کنیم:

(الف) $y = |x-1|$ (ب) $y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$



این دو تابع یک‌به‌یک نیستند زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار آنها را در بیش از یک نقطه قطع کند. اگر دامنه‌های هر دو تابع را به بازه‌های $[1, +\infty)$ یا $(-\infty, 1]$ محدود کنیم، یک‌به‌یک خواهند شد. در هر بازه‌ای که زیرمجموعه‌ی این بازه‌ها باشند نیز تابع‌ها یک‌به‌یک‌اند.



۱۶۱. برای یافتن ضابطه‌ی وارون تابع، ابتدا x را بر حسب y یافته، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

(الف) $f(x) = 3x - 4$

$$y = 3x - 4 \Rightarrow y + 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{y+4}{3}$$

تعویض جای x و y $\rightarrow y = \frac{x+4}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$

(ب) $g(x) = \frac{1-2x}{3}$

$$y = \frac{1-2x}{3} \Rightarrow 3y = 1-2x \Rightarrow x = \frac{1-3y}{2}$$

تعویض جای x و y $\rightarrow y = \frac{1-3x}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2}$

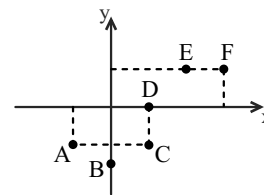
(پ)

$$2y - 3x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 2y + 6 = 3x \Rightarrow x = \frac{2y+6}{3}$$

تعویض جای x و y $\rightarrow y = \frac{2x+6}{3}$

۱۵۵. الف) نمودار داده شده یک‌به‌یک نیست، زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند (E و F یا A و C).



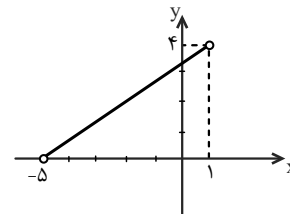
همچنین این نمودار، تابع نیست، زیرا خطی موازی محور y ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند (D و C).
 ب) چون خطی موازی محور y ها، نمودار را در دو نقطه‌ی D و C قطع می‌کند، پس باید یکی از این نقاط حذف شوند تا نمودار یک تابع شود. از طرفی، خطی موازی محور x ها نمودار را در دو نقطه‌ی A و C قطع می‌کند، پس برای اینکه حداقل نقاط را حذف کنیم، باید نقطه‌ی C را حذف کنیم.
 همچنین خطی موازی محور x ها، نمودار را در دو نقطه‌ی E و F قطع می‌کند، پس یکی از این نقاط نیز باید حذف شود تا نمودار یک تابع یک‌به‌یک شود.
 بنابراین حداقل دو نقطه‌ی C و E یا C و F باید حذف شوند.

۱۵۶

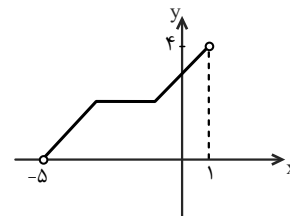
$$f = \{(1,1), (2,0), (3,0)\}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود به دلیل وجود دو زوج مرتب متمایز $(2,0)$ و $(3,0)$ در f ، این تابع یک‌به‌یک نیست و از آنجا که $(1,1) \in f$ ، پس $f(1) = 1$ و $(3,0) \in f$ ، پس $f(3) = 0$ ، در نتیجه $f(3) < f(1)$.

۱۵۷. الف) تابع خطی غیرثابت، تابعی یک‌به‌یک است، پس می‌توان در دامنه برد داده شده، یک تابع خطی رسم کرد.



ب) تابع زیر با دامنه‌ی $(-5, 1)$ و برد $(0, 4)$ یک‌به‌یک نیست، زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.



۱۵۸

هر تابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک است، ولی تابع خطی ثابت ($y = k$) یک‌به‌یک نیست، بنابراین شیب خط داده شده باید برابر با صفر باشد تا یک‌به‌یک نباشد:

$$y = 3ax + 17 - 18x \Rightarrow y = (3a - 18)x + 17$$

$$\Rightarrow \text{شیب} = 3a - 18 \Rightarrow 3a - 18 = 0 \Rightarrow a = 6$$