

۱. معادله‌ی درجه‌ی دوم

۲. معادلات کسری و رادیکالی

◆ تابع درجه دوم ◆

تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن $a \neq 0$ و $b, c \in \mathbb{R}$ یک تابع درجه‌ی دوم می‌گویند.

معادله درجه دوم: معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را یک معادله‌ی درجه دوم گویند که حداکثر دارای ۲ ریشه یا دو جواب حقیقی می‌باشد.

◆ روش‌های حل معادله‌ی درجه دوم ◆

الف) حالت‌های خاص

۱) اگر $c = 0$ باشد در این حالت معادله دارای یک جواب صفر و جواب دیگر $-\frac{b}{a}$ خواهد بود.

$$\text{مثال: } 3x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(3x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 7 = 0 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

۲) اگر $b = 0$ در این حالت معادله فقط زمانی دارای جواب است که علامت‌های a و c مخالف یک‌دیگر باشند، که در این حالت جواب‌های معادله قرینه‌ی هم خواهند بود. (خاصیت ریشه زوج)

$$\text{مثال: } 4x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

معادله جواب حقیقی ندارد. \Rightarrow غرق $x^2 = -3 \Rightarrow 3x^2 + 9 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -9$

ب) حل معادله با تجزیه: با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها معادله را تجزیه کرده و هر کدام از پرانتزها را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \\ x^2 - a^2 = (x-a)(x+a) \end{cases} \Rightarrow \text{اتحادهای مهم}$$

تذکر ۱ ◀ اگر ضرب چند عامل برابر صفر شود تک‌تک آن عوامل را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$A \times B \times C \times \dots = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0 \text{ یا } C = 0 \dots$$

$$\text{مثال: } x^2 - 5x - 14 = 0 \Rightarrow (x-7)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-7=0 \Rightarrow x=7 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

پ) حل به روش مربع کامل: برای حل معادله‌ی $x^2 + bx + c = 0$ نصف مقدار b را به توان ۲ رسانده و به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.

$$\text{مثال: } x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 3 \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 9$$

عدد ۹ را به طرفین اضافه می‌کنیم:

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{اتحاد اول}} = 3 + 9 \Rightarrow (x+3)^2 = 12 \Rightarrow x+3 = \pm\sqrt{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{12} - 3 \\ x = -\sqrt{12} - 3 \end{cases}$$

ت) حل معادله در حالت کلی (Δ): برای حل معادله‌ی درجه دو، ابتدا مبین آن (Δ) را پیدا می‌کنیم و با فرمول زیر معادله را حل می‌کنیم:
شرط دارای جواب بودن معادله: اگر $\Delta = b^2 - 4ac$ باشد، آنگاه:

۱) معادله دو ریشه‌ی متمایز خواهد داشت: $\Delta > 0$ اگر

۲) معادله دو ریشه‌ی مساوی دارد یا ریشه‌ی مضاعف دارد: $\Delta = 0$ اگر

۳) معادله ریشه حقیقی (جواب) نخواهد داشت: $\Delta < 0$ اگر

۱) حال اگر $\Delta > 0$ باشد دو ریشه‌ی معادله از فرمول $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و x_2 تعیین خواهند شد.

۲) اگر $\Delta = 0$ معادله ریشه‌ی مضاعف داشته و آن ریشه از رابطه‌ی $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید.

☑ نکته‌ی ۱: اگر در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ضرایب برابر صفر شود (یعنی $a + b + c = 0$) در این صورت همواره یک ریشه‌ی معادله $x_1 = 1$ و ریشه‌ی دیگر $x_2 = \frac{c}{a}$ خواهد بود.

☑ نکته‌ی ۲: اگر در یک معادله‌ی درجه دوم $a + c = b$ آنگاه $x_1 = -1$ و $x_2 = \frac{-c}{a}$ خواهد بود.

◆ روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم ◆

اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو ریشه x_1 و x_2 خواهد بود و بین این دو ریشه روابط زیر برقرار است.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{مجموع ریشه‌ها}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \text{حاصل ضرب ریشه‌ها}$$

$$D = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad \text{یا} \quad \sqrt{S^2 - 4P}$$

تذکره ۱: اگر در معادله‌ی درجه دوم $\frac{c}{a}$ منفی باشد، معادله همواره دارای دو ریشه‌ی حقیقی خواهد بود و ریشه‌ها مختلف‌العلامه هستند.

نکته‌ی ۱: شرط آن که دو ریشه‌ی معادله قرینه‌ی یک‌دیگر باشند، آن است که $\frac{c}{a} < 0$ و $b = 0$ باشد.

نکته‌ی ۲: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم باشند، روابط زیر را می‌توان با استفاده از مجموع و حاصل ضرب به دست آورد.

$$1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$$

$$2) x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = P \times S$$

$$3) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$$

$$4) x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2PS$$

◆ تشکیل معادله درجه دوم ◆

اگر S مجموع ریشه‌ها و P حاصل ضرب آن‌ها باشد معادله‌ی درجه دوم را می‌توان از رابطه‌ی زیر تشکیل داد.

$$x^2 - Sx + P = 0$$

مثال: معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $3 \pm \sqrt{7}$ باشند.

حل: ابتدا ضرب و جمع این دو ریشه را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 3 + \sqrt{7} \\ x_2 = 3 - \sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} S = x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7} = 6 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \underbrace{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = (3)^2 - (\sqrt{7})^2 = 9 - 7 = 2 \end{array}$$

حال با داشتن S و P معادله‌ی درجه دوم به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد شد، یعنی:

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

◆ حل معادله‌های کسری ◆

برای حل معادله‌ی کسری مراحل زیر را طی می‌کنیم.

۱) ابتدا مقادیری را که مخرج کسر را صفر می‌کند به دست می‌آوریم. (دامنه‌ی معادله)

۲) طرفین تساوی را در ک.م.م مخرج‌ها (مخرج مشترک) آن‌ها ضرب کرده تا معادله از حالت کسری خارج گردد.

۳) پس از آن که معادله از حالت کسری خارج شد آن را حل کرده و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم.

۴) جواب‌های به دست آمده را کنترل کرده تا در معادله اولیه مخرج کسر را صفر نکنند.

مثال: جواب‌های معادله‌ی $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} = \frac{5x}{2x^2 - 7x + 3}$ را به دست آورید.

حل: ابتدا دامنه‌ی $2x^2 - 7x + 3$ را پیدا کرده، سپس آن را تجزیه می‌کنیم و ک.م.م مخرج‌ها را به دست می‌آوریم.

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2}, 3 \right\}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = (2x-1)(x-3) \Rightarrow \frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} = \frac{5x}{(2x-1)(x-3)}$$

با توجه به مخرج‌ها، ک.م.م بین آنها برابر $(2x-1)(x-3)$ می‌شود. حال طرفین تساوی را در $(2x-1)(x-3)$ ضرب می‌کنیم.

$$(x-3)(2x-1) \left[\frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} = \frac{5x}{(2x-1)(x-3)} \right] \Rightarrow \frac{x(x-3)(2x-1)}{x-3} - \frac{(x-3)(2x-1) \times 1}{2x-1} = \frac{5x(x-3)(2x-1)}{(2x-1)(x-3)}$$

$$\Rightarrow x(2x-1) - (x-3) = 5x \Rightarrow 2x^2 - x - x + 3 = 5x \Rightarrow 2x^2 - 2x - 5x + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

هر دو جواب غیر قابل قبولند زیرا اگر به جای x آن مقادیر را قرار دهیم مخرج کسر صفر می‌شود.

◆ حل معادله‌های رادیکالی ◆

برای حل معادله رادیکالی مراحل زیر را طی می‌کنیم.

(۱) دامنه‌ی متغیر معادله را تعیین می‌کنیم (اگر دامنه تهی باشد معادله جواب نخواهد داشت).

(۲) عبارت رادیکالی را یک طرف نگه داشته و بقیه را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم و طرفین تساوی را به توان فرجه رادیکال می‌رسانیم تا عبارت از زیر رادیکال خارج گردد. اگر باز هم رادیکال داشتیم این عملیات را مجدداً انجام می‌دهیم تا رادیکال از بین برود و معادله به دست آمده را حل می‌کنیم.

(۳) جواب‌های به دست آمده را کنترل می‌کنیم که در داخل دامنه قرار داشته باشند در غیر این صورت غیر قابل قبول‌اند و نیز جواب‌های به دست آمده را داخل معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم که هر دو طرف با هم مساوی باشند.

تذکر ◀ اگر مجموع چند رادیکال با فرجه زوج صفر باشد می‌بایستی تک‌تک آنها را مساوی صفر قرار داد و بین جواب‌های آنها اشتراک گرفت.

■ مثال:

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{2x+2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \\ 2x+2=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \cap \Rightarrow x=-1$$

■ مثال: معادله‌ی $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 5$ چند جواب حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 2 \end{cases} \cap x \geq 2$$

◀ حل:

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2})^2 &= 5^2 \Rightarrow x+3+x-2+2\sqrt{(x+3)(x-2)} = 25 \Rightarrow 2x+1+2\sqrt{(x+3)(x-2)} = 25 \\ &\Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(x-2)} = 25-2x-1 \Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(x-2)} = 2(12-x) \Rightarrow (\sqrt{(x+3)(x-2)})^2 = (12-x)^2 \\ &\Rightarrow (x+3)(x-2) = 144+x^2-24x \Rightarrow x^2+x-6 = x^2-24x+144 \Rightarrow 25x = 150 \Rightarrow x = \frac{150}{25} = 6 \end{aligned}$$

در معادله‌ی اولیه به جای x ، ۶ قرار دهیم دو طرف تساوی برابر می‌شوند. پس جواب قابل قبول است.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیب ۱

(سراسری انسانی-۶۷)

۵۵۲- ریشه‌های معادله‌ی $7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5$ کدام‌اند؟

(۱) $1, -1$ (۲) $1, -\frac{1}{2}$ (۳) $1, \frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

(سراسری انسانی-۶۴)

۵۵۳- اگر $A = \{x | x^2 + 2x - 3 = 0\}$ ، آن‌گاه A با کدام مجموعه‌ی زیر برابر است؟

(۱) $\{1, 3\}$ (۲) $\{1, -3\}$ (۳) $\{-1, 3\}$ (۴) $\{-1, -3\}$

(سراسری انسانی-۷۲)

۵۵۴- مجموع ضرایب معادله‌ی درجه‌ی دومی صفر است، کدام عدد همواره ریشه‌ی معادله است؟

(۱) -1 (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

(سراسری انسانی-۶۲)

۵۵۵- کدام‌یک از مقادیر زیر ریشه‌ی معادله‌ی $150x^2 - 2x - 148 = 0$ است؟

(۱) $-\frac{2}{150}$ (۲) $\frac{-148}{150}$ (۳) $\frac{2}{150}$ (۴) $\frac{148}{150}$

(سراسری انسانی-۸۷)

۵۵۶- در معادله درجه دوم $6 = (x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1)$ ، بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟

(۱) $4 - \sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

(سراسری انسانی خارج کشور-۹۱)

۵۵۷- به ازای کدام مقادیر a ، معادله‌ی درجه دوم $3x^2 + ax - 3 = 0$ دو جواب حقیقی و متمایز دارد؟

(۱) هر مقدار a (۲) هیچ مقدار a (۳) فقط $a = \pm 6$ (۴) فقط $a > 6$

(سراسری انسانی-۶۷)

۵۵۸- به ازای چه مقدار a ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 4x - a - 1 = 0$ مساوی‌اند؟

(۱) -5 (۲) -3 (۳) 1 (۴) 2

(سراسری انسانی-۶۵)

۵۵۹- به ازای چه مقدار a ریشه‌های معادله‌ی $2 = (3a+1)x + 2a^2 + x^2$ با هم برابرند؟

(۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

(سراسری انسانی-۹۱)

۵۶۰- معادله‌ی درجه‌ی دوم $a = x(2x-5)$ به ازای یک مقدار a ریشه‌ی مضاعف دارد، مقدار ریشه‌ی مضاعف کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۵۶۱- اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 - 12x + 9 = 0$ تفاضل دو ریشه برابر صفر باشد، یک ریشه‌ی این معادله کدام است؟ (سراسری انسانی خارج کشور - ۸۶)

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۵۶۲- تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ کدام است؟ (سراسری انسانی خارج کشور - ۹۲)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

تیپ ۲

۵۶۳- خط به معادله‌ی $y + 3x = 11$ با منحنی به معادله‌ی $y = x^2 + 1$ در دو نقطه‌ی A و B مشترک هستند. فاصله‌ی این دو نقطه، کدام است؟ (سراسری انسانی خارج کشور - ۹۳)

- (۱) $6\sqrt{5}$ (۲) $5\sqrt{10}$ (۳) $8\sqrt{5}$ (۴) $7\sqrt{10}$

۵۶۴- خط گذرا بر نقطه‌ی $(-2, 4)$ با شیب ۲، و منحنی $y = x^2$ در دو نقطه‌ی A و B مشترک هستند. مختصات وسط AB، کدام است؟ (سراسری انسانی - ۹۳)

- (۱) $(1, 8)$ (۲) $(1, 10)$ (۳) $(2, 9)$ (۴) $(2, 10)$

۵۶۵- حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(x+1)(x-5) + 12(x+1) = 0$ کدام است؟ (سراسری انسانی - ۷۳)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۵۶۶- در معادله‌ی $x^2 + (1-m)x + 2m = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر حاصل ضرب ریشه‌هاست. m کدام است؟ (سراسری انسانی - ۶۳)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۶۷- در معادله‌ی درجه دوم $4x^2 + kx = 21$ ، اگر مجموع دو ریشه، برابر ۲- باشد، ریشه‌ی بزرگتر کدام است؟ (سراسری انسانی خارج کشور - ۸۷)

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{7}{2}$

۵۶۸- در معادله‌ی درجه دوم $2x^2 + ax + 4 = 0$ ، به ازای یک مقدار a مجموع دو ریشه‌ی حقیقی معادله $\frac{-9}{2}$ است. ریشه‌ی بزرگتر کدام است؟

(سراسری انسانی خارج کشور - ۹۰)

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵۶۹- در معادله‌ی درجه دوم $x^2 - (b-2)x + 2b = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر ۱۰ است. ریشه‌ی بزرگتر کدام است؟ (سراسری انسانی - ۸۴)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۵۷۰- در معادله درجه دوم $4x^2 - 4x + a = 0$ به ازای کدام مقدار a یکی از ریشه‌ها ۲ واحد بیش‌تر از ریشه دیگر است؟ (سراسری انسانی - ۸۶)

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۳

تیپ ۳

۵۷۱- برای آن‌که $x = 1$ ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 + a^2x^2 - 3ax + 1 = 0$ باشد، a کدام است؟ (سراسری انسانی - ۶۶)

- (۱) $a = 0, a = 1$ (۲) $a = 1, a = -1$ (۳) $a = 2, a = 0$ (۴) $a = 1, a = 2$

۵۷۲- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ عدد ۱- باشد، مجموع ریشه‌های این معادله کدام است؟ (سراسری انسانی - ۷۴)

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۷۳- اگر مجموع ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دوم ثلث حاصل ضرب آن‌ها و یک ریشه برابر ۴ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟ (سراسری انسانی - ۷۴)

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۵۷۴- یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $3x^2 + kx - 10 = 0$ برابر ۵ است. جواب دیگر این معادله کدام است؟ (سراسری انسانی - ۷۷)

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۵۷۵- اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $5x^2 - 3x + k = 0$ باشد، ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟ (سراسری انسانی - ۸۳)

- (۱) $0/4$ (۲) $-0/3$ (۳) $0/3$ (۴) $0/4$

تیپ ۴

۵۷۶- در کدام معادله، مجموعه‌ی جواب‌ها به صورت $\{-1, \frac{1}{2}\}$ است؟ (سراسری انسانی - ۷۹)

- (۱) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 - x - 2 = 0$ (۳) $2x^2 + x - 1 = 0$ (۴) $2x^2 - x - 1 = 0$

۵۷۷- اگر مجموع دو عدد $S = \frac{11}{3}$ و حاصل ضرب آن‌ها $P = 6$ باشد، نسبت عدد بزرگ‌تر به کوچک‌تر کدام است؟ (سراسری انسانی-۷۳)

- (۱) ۲ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{11}{3}$

۵۷۸- اگر $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ و $xy = \frac{9}{2}$ باشند، کوچک‌ترین مقدار y کدام است؟ (سراسری انسانی-۷۸)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۵۷۹- جواب‌های کدام معادله به صورت $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ است؟ (سراسری انسانی-۹۱)

(۱) $x^2 + 2x - 1 = 0$ (۲) $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$

(۳) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 2x + 1 = 0$

۵۸۰- یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 6ax + 8a = 0$ نصف ریشه‌ی دیگر است. a کدام است؟ (سراسری انسانی-۶۴)

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۸۱- کدام معادله ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 3x - 2 = 0$ است؟ (سراسری انسانی-۶۸)

(۱) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ (۲) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

(۳) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۴) $x^2 + 3x + 2 = 0$

تیپ ۵

۵۸۲- در معادله‌ی $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1}{2x-4}$ مجموع ریشه‌ها کدام‌اند؟ (سراسری انسانی-۸۲)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۸۳- جواب‌های معادله‌ی $\frac{1-2x}{x+2} + \frac{x+1}{x-2} = 0$ کدام است؟ (سراسری انسانی-۶۴)

- (۱) -۱ و ۱ (۲) صفر و ۱ (۳) صفر و ۸ (۴) ۱ و ۸

۵۸۴- ریشه‌ی بزرگ‌تر معادله‌ی کسری $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$ ، کدام است؟ (سراسری انسانی-۹۰)

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۵۸۵- حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\frac{t}{t-2} - \frac{2}{t-1} = 2$ برابر است با: (آزاد انسانی-۸۵)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۸۶- در معادله‌ی $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 3$ حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟ (سراسری انسانی-۸۵)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۸۷- در معادله‌ی $\frac{x^2}{x-4} - \frac{2x+8}{x-4} = 2x$ ، تفاضل معکوس جواب از خود جواب، کدام است؟ (سراسری انسانی-۹۲)

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{5}{2}$

تیپ ۶

۵۸۸- در معادله‌ی $\sqrt{2x-1} = 2-x$ مجموع مربع جواب و خود جواب کدام است؟ (سراسری انسانی-۸۵)

- (۱) ۰ (۲) ۲ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

۵۸۹- معادله رادیکالی $3\sqrt{2x-9} = 2-x$ چند جواب دارد؟ (سراسری انسانی-۸۶)

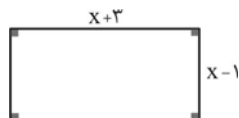
- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) فاقد جواب حقیقی

- ۵۹۰- جواب‌های معادله $\sqrt{x^2+6} = 3x+4$ چگونه است؟
 (۱) یک جواب منفی
 (۲) یک جواب مثبت
 (۳) دو جواب منفی
 (۴) یک جواب مثبت، یک جواب منفی
- (سراسری انسانی - کشور - ۸۸)
- ۵۹۱- در معادله $\sqrt{11x-2} = 2x+1$ ، قدر مطلق تفاضل دو ریشه کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{4}$
 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) $\frac{3}{2}$
- (سراسری انسانی - ۸۸)
- ۵۹۲- تعداد و علامت جواب معادله $\sqrt{2x+1} = x-2$ چگونه است؟
 (۱) دو جواب مثبت
 (۲) دو جواب مثبت و منفی
 (۳) فقط یک جواب مثبت
 (۴) فاقد جواب حقیقی
- (سراسری انسانی - ۹۳)
- ۵۹۳- جواب‌های مورد قبول معادله رادیکالی $\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+3} = 1$ چگونه‌اند؟
 (۱) فقط یک جواب منفی
 (۲) فقط یک جواب مثبت
 (۳) دو جواب مثبت
 (۴) یک جواب منفی و یک جواب مثبت
- (سراسری انسانی - ۸۹)
- ۵۹۴- مجموع جواب‌های معادله رادیکالی $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = 1$ ، کدام است؟
 (۱) صفر
 (۲) ۲
 (۳) ۳
 (۴) ۴
- (سراسری انسانی خارج کشور - ۸۹)
- ۵۹۵- در معادله رادیکالی $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+5} = 1$ مجموع جواب با چهار برابر معکوس جواب، کدام است؟
 (۱) -۵
 (۲) -۳
 (۳) ۳
 (۴) ۵
- (سراسری انسانی خارج کشور - ۸۶)
- ۵۹۶- تعداد و علامت جواب معادله $\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+5} = 1$ چگونه است؟
 (۱) فقط یک جواب منفی
 (۲) فقط یک جواب مثبت
 (۳) دو جواب مثبت و منفی
 (۴) دو جواب مثبت
- (سراسری انسانی خارج کشور - ۹۳)

آزمون‌های کانون و سایر منابع

- ۵۹۷- به ازای کدام مقدار m ، معادله $mx^2 + (m-1)x - 4x^2 - 8 = 0$ یک معادله درجه دوم نخواهد بود؟
 (۱) -۴
 (۲) صفر
 (۳) ۳
 (۴) ۴
- (آزمون کانون - ۹۰)
- ۵۹۸- ریشه‌ی بزرگتر معادله $3x^2 - 13x = 30$ کدام است؟
 (۱) -۲
 (۲) $\frac{5}{3}$
 (۳) ۶
 (۴) ۸
- (کتاب ریاضی سوم - صفحه ۶۴ - مثال)
- ۵۹۹- اگر $(a-1)(a+2) = 40$ باشد، مقدار $a(a+1)$ چه قدر است؟
 (۱) ۴۳
 (۲) ۴۲
 (۳) ۴۱
 (۴) ۴۰
- (آزاد انسانی - ۸۳)
- ۶۰۰- معادله $(x+2)(x+1) = x(1-x)$ دارای
 (۱) دو ریشه متمایز منفی است.
 (۲) یک ریشه است.
 (۳) ریشه‌ی حقیقی نیست.
 (۴) دو ریشه‌ی مختلف علامه است.
- (آزاد انسانی - ۷۵)
- ۶۰۱- معادله $x^2 - 9x - 1 + 6x = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟
 (۱) دو ریشه‌ی حقیقی هم‌علامت
 (۲) دو ریشه‌ی حقیقی مختلف‌العلامت
 (۳) دو ریشه‌ی مساوی
 (۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.
- (کتاب ریاضی سوم - صفحه ۶۷ - مشابه مسأله ۳)
- ۶۰۲- معادله $x^2 + ax - 5 = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟
 (۱) دو جواب هم‌علامت
 (۲) دو جواب مختلف‌العلامت
 (۳) یک ریشه
 (۴) بستگی به مقدار a دارد.
- (کتاب ریاضی سوم - صفحه ۶۷ - مسأله ۴)
- ۶۰۳- در حل معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ به روش مربع کامل: از «چه عددی» جذر گرفته می‌شود؟
 (۱) ۹
 (۲) $\frac{17}{4}$
 (۳) $\frac{9}{4}$
 (۴) ۱۱
- (آزاد انسانی - ۹۰)
- ۶۰۴- برای حل معادله $4x - 2x^2 = 0$ به روش مربع کامل کردن، پس از یک شدن ضریب x^2 ، چه مقداری را باید به دو طرف معادله اضافه کنیم؟ (آزمون کانون - ۹۰)
 (۱) ۳
 (۲) ۱
 (۳) ۴
 (۴) $\frac{1}{4}$

- ۶۰۵- ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $mx^2 - mx + 1 = 0$ کدام است؟ ($m \neq 0$)
- (۱) ۴ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر
- (آزاد انسانی - ۸۰)
- ۶۰۶- به ازای چه مقدار n معادله‌ی $m^2x^2 - 6mx + 2m + n = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف $\frac{3}{4}$ است؟
- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱
- (آزاد انسانی - ۸۲)
- ۶۰۷- به ازای کدام مقدار m ، معادله‌ی $x^2 - (m-1)x - m = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی قرینه دارد؟
- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲
- (آزمون کانون - ۹۰)
- ۶۰۸- دو ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^2 - 2mx + 3m = 0$ با هم مساوی بوده، حاصل ضرب ریشه‌های آن چه قدر است؟
- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۹
- (آزاد انسانی - ۷۸)
- ۶۰۹- اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2\sqrt{3}x - 2 = 0$ باشند، حاصل $A = x'x''^2 + x''x'^2$ کدام است؟
- (۱) ۱۲ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) $-4\sqrt{3}$ (۴) -۱۲
- (آزاد انسانی - ۷۰)
- ۶۱۰- در معادله‌ی $x^2 - x - 1 = 0$ مقدار $x^2 + x''^2$ کدام است؟
- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶
- (آزاد انسانی - ۷۷)
- ۶۱۱- یکی از جواب‌های معادله‌ی $(m-1)x^2 - 7x + 2m = 0$ برابر با ۲ بوده، جواب دیگر این معادله چه قدر است؟
- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) ۱
- (آزاد انسانی - ۷۸)
- ۶۱۲- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x^2 = x(7 - 4x)$ باشند، حاصل $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$ کدام است؟
- (۱) ۲۶ (۲) $\frac{1}{26}$ (۳) ۷ (۴) $\frac{1}{7}$
- (آزمون کانون - ۹۰)
- ۶۱۳- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + 2mx + (2m - 2) = 0$ ، معکوس جمع دو ریشه برابر با حاصلضرب آن دو ریشه است. m کدام است؟
- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$
- (آزمون کانون - ۹۱)
- ۶۱۴- معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $5 \pm 2\sqrt{5}$ باشد کدام است؟
- (۱) $x^2 - 10x - 5 = 0$ (۲) $x^2 + 10x - 5 = 0$
 (۳) $x^2 - 10x + 5 = 0$ (۴) $x^2 + 10x + 5 = 0$
- (کتاب ریاضی سوم - صفحه‌ی ۷۰ - تمرین ۲)
- ۶۱۵- عددی غیر صفر ۲ برابر عدد دیگر و مربع آن برابر مکعب عدد دیگری می‌باشد، میانگین آن دو چه قدر است؟
- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۴
- (آزاد انسانی - ۸۴)
- ۶۱۶- مساحت زمین مستطیل شکلی ۱۸ متر مربع و محیط آن ۱۷ متر است، اختلاف طول و عرض زمین، چند متر است؟
- (۱) $0/25$ (۲) ۱ (۳) $0/5$ (۴) ۲
- (آزاد انسانی - ۸۶)
- ۶۱۷- می‌خواهیم با نخ‌ی به طول ۶ متر مستطیلی بسازیم که مساحت آن برابر ۱۲۵۰۰ سانتی‌متر مربع باشد. نسبت طول به عرض این مستطیل کدام است؟
- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸
- (آزمایشی سنجش انسانی - ۹۱)
- ۶۱۸- مجموع مربعات دو عدد طبیعی متوالی برابر با ۲۵ است. عدد کوچکتر کدام است؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
- (آزمون کانون - ۹۰)
- ۶۱۹- اگر مساحت مستطیل زیر ۷ واحد مربع باشد، محیط آن چند واحد است؟
- (۱) $\sqrt{11} - 1$ (۲) $4\sqrt{11}$
 (۳) $8\sqrt{11}$ (۴) $2\sqrt{11}$
- (آزمون کانون - ۹۰)



(کتاب ریاضی سوم - صفحه ۷۲ - مثال)

$$4 + \sqrt{2} \quad (4)$$

$$-4 - 2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

۶۲۰- مجموع ریشه‌های معادله $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ کدام است؟

(کتاب ریاضی سوم - صفحه ۷۲ - مثال)

$$\frac{5 - \sqrt{3}}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5 + \sqrt{3}}{4} \quad (3)$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{4} \quad (1)$$

۶۲۱- بزرگترین جواب معادله $0 = -2 - 8(z-1) - 16(z-1)^2$ کدام است؟

(آزاد انسانی - ۸۰)

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۶۲۲- جواب معادله $\frac{x}{8} + \frac{2}{x-2} = \frac{x+2}{2x-4}$ چه عددی است؟

(کتاب ریاضی سوم - صفحه ۷۳ - فعالیت الف)

$$\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

۶۲۳- قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادله $3 = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)}$ کدام است؟

(آزمون کانون - ۹۰)

 (4) معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

$$2 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (1)$$

۶۲۴- حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله $\frac{x^2+3}{x-1} = \frac{x^2+2}{x}$ کدام است؟

(آزمون کانون - ۹۰)

 (2) دو ریشه‌ی هم‌علامت دارد.
 (4) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.۶۲۵- در مورد معادله $\frac{x}{x-3} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$ کدام گزینه صحیح است؟ (1) فقط یک ریشه‌ی مثبت دارد. (3) فقط یک ریشه‌ی منفی دارد.

(آزاد انسانی - ۸۴)

$$-1 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

۶۲۶- جواب معادله $1 - \frac{1}{x+4} = \frac{x+3}{x-2}$ «چه عددی» است؟

(کتاب ریاضی سوم - صفحه ۷۰ - مثال)

$$-\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۶۲۷- مجموع ریشه‌های معادله $5 = \frac{2}{t} - \frac{t}{t-2}$ کدام است؟

(آزمایشی سنجش انسانی - ۹۱)

۶۲۸- اگر n تعداد ریشه‌ها و S مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $1 + \frac{6}{x^2-1} = \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x-1}$ باشد، مقدار $n.S$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-4 \quad (1)$$

(آزاد انسانی - ۷۶)

$$\text{سه} \quad (4)$$

$$\text{دو} \quad (3)$$

$$\text{یک} \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

۶۲۹- معادله $\sqrt{2x+3} = \sqrt{x-3}$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

(آزاد انسانی - ۸۳)

$$-1 \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

۶۳۰- جواب معادله $x = 1 - \sqrt{x+1}$ کدام است؟

(کتاب ریاضی سوم - صفحه ۷۴ - تمرین ۲)

 (4) جواب حقیقی ندارد.

$$-1 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$-5 \quad (1)$$

۶۳۱- در معادله $0 = \sqrt{x^2-5} + 2\sqrt{x}$ مجموع جواب‌های حقیقی آن کدام است؟

(آزمون کانون - ۹۰)

$$5 \quad (4)$$

$$-1 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

۶۳۲- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3}$ کدام است؟

(کتاب ریاضی سوم - صفحه ۷۴ - تمرین ۴، قسمت الف)

$$\frac{16}{81} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{4}{9} \quad (1)$$

۶۳۳- حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله $\frac{2}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} = 5$ کدام است؟

(آزمایشی سنجش انسانی - ۹۱)

$$15 \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

۶۳۴- حاصلضرب ریشه‌های معادله $9 = \sqrt{2x-6} - \sqrt{x^2-9}$ کدام است؟

پایخ نگارهای سراسری و آزاد: حسین ابراهیم نژاد، بهرام طالبی
 پایخ آزمون های نخب و کانون: بهرام طالبی
 پایخ ترین های کتاب درسی: بهرام طالبی

پایخ فصل، هفتم

$$\Rightarrow a^2 + 36 > 0$$

$\Delta = a^2 + 36$ همواره بزرگتر از صفر است پس معادله به ازای هر مقدار a همواره دارای دو ریشه‌ی متمایز و حقیقی است و به مقدار a بستگی ندارد.

۵۵۸- گزینه‌ی «۱»

$$x^2 + 4x - a - 1 = 0$$

شرط آن که دو ریشه مساوی باشند یا آن که معادله ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، آن است که

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4(1)(-a-1) = 0 \\ \Rightarrow 16 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow 4a = -20 \Rightarrow a = -5$$

۵۵۹- گزینه‌ی «۲»

$$x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \text{شرط ریشه‌ی مضاعف}$$

$$(-(3a+1))^2 - 4(1)(2a^2+2) = 0$$

$$9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 8 = 0$$

$$a^2 + 6a - 7 = 0 \Rightarrow (a+7)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -7 \text{ یا } a = 1$$

۵۶۰- گزینه‌ی «۳»

$$2x^2 - 5x = a \Rightarrow 2x^2 - 5x - a = 0$$

مقدار ریشه‌ی مضاعف از فرمول $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید بنابراین:

$$x = \frac{-(-5)}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

۵۶۱- گزینه‌ی «۳»

اگر تفاضل دو ریشه صفر باشد یعنی دو ریشه مساویند و $\Delta = 0$ است.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-12)^2 - 4a(9) = 0 \Rightarrow 144 - 36a = 0$$

$$\Rightarrow 36a = 144 \Rightarrow a = \frac{144}{36} = 4$$

$$\text{معادله: } 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2(4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۵۶۲- گزینه‌ی «۱»

عبارت را تجزیه می‌کنیم.

$$x^4 + 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x^2 + 9)(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9 & \text{غقق} \\ x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 & \text{غقق} \end{cases}$$

معادله جواب حقیقی ندارد.

تذکر مهم: دقت کنید معادله‌ی $x^2 = k < 0$ جواب حقیقی ندارد.

۵۵۲- گزینه‌ی «۴»

$$7x^2 + 6x + 4 = 3x^2 + 6x + 5$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 3x^2 + 6x - 6x = 5 - 4 \Rightarrow 4x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

۵۵۳- گزینه‌ی «۲»

با استفاده از اتحاد جمله مشترک معادله را تجزیه کرده و پرانتزها را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow A = \{-3, 1\}$$

۵۵۴- گزینه‌ی «۴»

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب صفر باشد، $(a+b+c=0)$ آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر ۱ و ریشه‌ی دیگر برابر $\frac{c}{a}$ است. بنابراین:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$$

۵۵۵- گزینه‌ی «۲»

با توجه به ضرایب معادله‌ی درجه‌ی دوم مشاهده می‌شود که مجموع ضرایب معادله صفر است. $(150 - 2 - 148 = 0)$ پس یکی از ریشه‌ها ۱ و ریشه‌ی دیگر $\frac{c}{a}$ است.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-148}{150}$$

۵۵۶- گزینه‌ی «۱»

$$t^2 + 2\sqrt{3}t - 6 = 0$$

با فرض $x-1 = t$ داریم:

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6) = 12 + 24 = 36$$

$$t_{1,2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2} = -\sqrt{3} \pm 3$$

$$\begin{cases} t_1 = -\sqrt{3} + 3 \xrightarrow{t=x-1} x-1 = -\sqrt{3} + 3 \\ \Rightarrow x = -\sqrt{3} + 4 & \text{جواب بزرگ‌تر} \\ t_2 = -\sqrt{3} - 3 \xrightarrow{t=x-1} x-1 = -\sqrt{3} - 3 \\ \Rightarrow x = -\sqrt{3} - 2 \end{cases}$$

۵۵۷- گزینه‌ی «۱»

برای آنکه معادله‌ی درجه دوم دو جواب حقیقی و متمایز داشته باشد باید $\Delta > 0$ باشد.

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = a \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow a^2 - 4(3)(-3) > 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{2(4)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-8+20}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{-8-20}{8} = -\frac{28}{8} \end{cases} \quad \text{ریشه‌ی بزرگتر}$$

«۲»-۵۶۸

$$2x^2 + ax + 4 = 0 : S = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{-9}{2} = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = 9$$

$$2x^2 + 9x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(2)(4) = 81 - 32 = 49$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-9 \pm 7}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-9+7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-9-7}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

ریشه‌ی بزرگتر $-\frac{1}{2}$ است.

«۲»-۵۶۹

$$S = 10, S = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{b-2}{1} = 10 \Rightarrow b = 12$$

$$\Rightarrow x^2 - (12-2)x + 2(12) = 0$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases}$$

ریشه‌ی بزرگتر $x = 6$ می‌باشد.

«۱»-۵۷۰

روش اول: چون یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از دیگری بزرگ‌تر است، بنابراین $x_1 = x_2 + 2$. همچنین مجموع ریشه‌ها در معادله فوق برابر است با:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} + x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{3}{2} \times -\frac{1}{2} = -\frac{a}{4} \Rightarrow \frac{-3}{4} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = -3$$

روش دوم: چون یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه‌ی دیگر بزرگ‌تر است پس

تفاضل ریشه‌ها برابر ۲ است و تفاضل ریشه‌ها برابر است با: $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$$|x_2 - x_1| = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(-4)^2 - 4(4)(a)}}{4} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 - 16a} = 8 \Rightarrow 16 - 16a = 64 \Rightarrow -16a = 48$$

$$\Rightarrow a = -3$$

«۴»-۵۷۱

ریشه‌ی معادله در معادله صدق می‌کند.

«۴»-۵۶۳

ابتدا محل برخورد خط با منحنی را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = -3x + 11 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 = -3x + 11 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+5=0 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow y = (-5)^2 + 1 = 26 \Rightarrow A \begin{vmatrix} -5 \\ 26 \end{vmatrix} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y = (2)^2 + 1 = 5 \Rightarrow B \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(-5-2)^2 + (26-5)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 21^2}$$

$$= \sqrt{49 + 441} = \sqrt{490} = \sqrt{49 \times 10} = 7\sqrt{10}$$

«۲»-۵۶۴

ابتدا معادله‌ی خطی را که از نقطه‌ی (۴, -۲) بگذرد و شیب آن ۲ باشد، را پیدا می‌کنیم.

$$K \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \end{vmatrix}, m = 2$$

$$\Rightarrow y - 4 = 2(x - (-2)) \Rightarrow y - 4 = 2x + 4 \Rightarrow y = 2x + 8$$

حال محل تقاطع این خط را با منحنی $y = x^2$ پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x + 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow y = 4^2 = 16 \Rightarrow A \begin{vmatrix} 4 \\ 16 \end{vmatrix} \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow y = (-2)^2 = 4 \Rightarrow B \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \end{vmatrix} \end{cases}$$

اگر M وسط AB باشد:

$$M \begin{vmatrix} 4+(-2) \\ 16+4 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{vmatrix}$$

«۳»-۵۶۵

$$(x+1)(x-5) + 12(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + x - 5 + 12x + 12 = 0$$

$$x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{7}{1} = 7$$

«۲»-۵۶۶

$$S = P \Rightarrow -\frac{b}{a} = \frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{(1-m)}{1} = \frac{2m}{1}$$

$$\Rightarrow -1 + m = 2m \Rightarrow -1 = 2m - m \Rightarrow m = -1$$

«۲»-۵۶۷

$$4x^2 + kx - 21 = 0$$

$$S = \frac{-b}{a} \Rightarrow -2 = \frac{-k}{4} \Rightarrow -8 = -k \Rightarrow k = 8$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x - 21 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(4)(-21) = 64 + 336 = 400$$

۵۷۷- گزینهی «۲»

معادله‌ی درجه‌ی دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

بنابراین:

$$x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{11}{2}\right)^2 - 4 \times 6 = \frac{121}{4} - 24$$

$$= \frac{121 - 96}{4} = \frac{25}{4}$$

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2} = \frac{\frac{11}{2} \pm \frac{5}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\frac{11}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{\frac{11}{2} - \frac{5}{2}}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 \text{ و } x_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$

۵۷۸- گزینهی «۳»

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 1 \Rightarrow y+x = xy = \frac{9}{2}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{2} - y \quad (1) \\ xy = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به (1)}} \left(\frac{9}{2} - y\right)y = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}y - y^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow 2y^2 - 9y + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 81 - 4(2)(9) = 81 - 72 = 9$$

$$\Rightarrow y_1, y_2 = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{4} = \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ کوچکترین مقدار:}$$

۵۷۹- گزینهی «۲»

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 2 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2 \times 2} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$$

۵۸۰- گزینهی «۲»

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند. بنا به صورت سؤال داریم:

$$x_1 = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_2 = 2x_1$$

$$x = 1 \Rightarrow (1)^2 + a^2(1)^2 - 3a(1) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2=0 \Rightarrow a=2 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases}$$

۵۷۲- گزینهی «۲»

معادله‌ی اصلی را به روش دسته‌بندی تجزیه می‌کنیم.

$$\underbrace{x^2 + x^2 - 4x - 4 = 0}_{\text{دسته دوم}} \Rightarrow \underbrace{x^2(x+1) - 4(x+1)}_{\text{فاکتور از (x+1)}} = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = 2 - 2 - 1 = -1$$

۵۷۳- گزینهی «۴»

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند.

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{3}x_1 \times x_2$$

با توجه به صورت سؤال یکی از ریشه‌ها را برابر ۴ می‌گیریم ($x_1 = 4$)

$$4 + x_2 = \frac{1}{3} \times 4 \times x_2 \Rightarrow 4 = \frac{4}{3}x_2 - x_2$$

$$\Rightarrow 4 = x_2 \left(\frac{4}{3} - 1\right) \Rightarrow 4 = x_2 \times \frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4}{\frac{1}{3}} = 12$$

۵۷۴- گزینهی «۲»

با توجه به صورت سؤال $x_1 = 5$ یک جواب معادله است. جواب دیگر را x_2 فرض می‌کنیم.

از حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم یعنی $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ پیدا کردن جواب دوم کمک می‌گیریم.

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 5 \times x_2 = \frac{-10}{3} \Rightarrow x_2 = -\frac{10}{3 \times 5} \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3}$$

۵۷۵- گزینهی «۱»

$$x_1 = 1 \Rightarrow S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{(-3)}{5}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{3}{5} \Rightarrow 1 + x_2 = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3}{5} - 1 = \frac{-2}{5} = -0.4$$

۵۷۶- گزینهی «۳»

اگر S مجموع ریشه‌ها و P حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم باشند، معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود.

$$S = x_1 + x_2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} & (t-2)(t-1)\left(\frac{t}{t-2} - \frac{2}{t-1}\right) = 2 \\ & = \frac{t(t-2)(t-1)}{t-2} - \frac{2(t-2)(t-1)}{t-1} = 2(t-2)(t-1) \\ & \Rightarrow t(t-1) - 2(t-2) = 2(t-2)(t-1) \\ & \Rightarrow t^2 - t - 2t + 4 = 2t^2 - 6t + 4 \\ & \Rightarrow t^2 - 3t + 4 - 2t^2 + 6t - 4 = 0 \Rightarrow -t^2 + 3t = 0 \\ & \Rightarrow p = \frac{c}{a} = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

۵۸۶- گزینهی «۳»

طرفین را در ک.م.م.مخرجها ضرب می‌کنیم یعنی $x(x-2)$.

$$\begin{aligned} x(x-2)\left[\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 3\right] \\ & \Rightarrow x^2 + (x-2) = 3x(x-2) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 3x^2 - 6x \\ & \Rightarrow 2x^2 - 7x + 2 = 0 \\ & \Rightarrow P = x' \times x'' = \frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1 \text{ حاصل ضرب ریشه‌ها} \end{aligned}$$

۵۸۷- گزینهی «۲»

با شرط $x \neq 4$ چون مخرجها مشترکند صورتها را از هم کم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-4} - \frac{2x+8}{x-4} = 2x & \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{x-4} = 2x \\ & \Rightarrow \frac{(x-4)(x+2)}{x-4} = 2x \Rightarrow x+2 = 2x \Rightarrow x=2 \end{aligned}$$

$$\text{تفاضل معکوس جواب از خود جواب} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۵۸۸- گزینهی «۲»

طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1} = 2-x & \Rightarrow 2x-1 = (2-x)^2 \Rightarrow 2x-1 = 4-4x+x^2 \\ & \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow \sqrt{2(1)-1} = 2-1 \Rightarrow 1=1 \\ x=5 \Rightarrow \sqrt{2(5)-1} = 2-5 \Rightarrow 3 \neq -3 \end{cases} \\ & \text{با } (x=1) \text{ قابل قبول است زیرا در معادله صدق می‌کند.} \end{aligned}$$

$$\text{خود ریشه} + \text{مربع ریشه} = (1)^2 + (1) = 1+1=2$$

۵۸۹- گزینهی «۴»

روش اول: دامنه‌ی متغیر در معادله‌ی فوق $\begin{cases} 2x-9 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$ است. جواب

این دستگاه تهی است، زیرا دو معادله اشتراکی با هم ندارند. پس معادله‌ی داده شده فاقد جواب است.

روش دوم: طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\begin{aligned} (3\sqrt{2x-9})^2 = (2-x)^2 & \Rightarrow 9(2x-9) = 4-4x+x^2 \\ & \Rightarrow 18x-81 = 4-4x+x^2 \\ & \Rightarrow x^2 - 4x - 18x + 4 + 81 = 0 \Rightarrow x^2 - 22x + 85 = 0 \\ & \Rightarrow (x-17)(x-5) = 0 \Rightarrow x=17, x=5 \end{aligned}$$

هر دو جواب غرق هستند زیرا به ازای آنها سمت راست تساوی منفی می‌شود. پس معادله‌ی داده شده فاقد جواب حقیقی است.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_1 = \frac{6a}{1} \\ x_1 \times 2x_1 = \frac{18a}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 6a \\ 2x_1^2 = 18a \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2a \Rightarrow x_1^2 = 4a \Rightarrow (2a)^2 = 4a \\ x_1^2 = 4a \end{cases} \\ & \Rightarrow 4a^2 - 4a = 0 \Rightarrow 4a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

۵۸۱- گزینهی «۲»

اگر x ریشه‌ی معادله‌ی صورت سؤال و X ریشه‌ی معادله‌ی حاصل باشد، داریم:

$$\begin{aligned} X = \frac{1}{x} & \Rightarrow x = \frac{1}{X} \\ \left(\frac{1}{X}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{X}\right) - 2 & = 0 \Rightarrow \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X} - 2 = 0 \\ & \Rightarrow X^2\left(\frac{1}{X^2} + \frac{2}{X} - 2\right) = 0 \\ 1 + 2X - 2X^2 & = 0 \Rightarrow 2X^2 - 2X - 1 = 0 \end{aligned}$$

۵۸۲- گزینهی «۴»

معادله را طرفین وسطین می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1}{2x-4} & \Rightarrow (2x-4)^2 = (x+1)^2 \\ & \Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \\ & \Rightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-18)}{3} = 6 \end{aligned}$$

۵۸۳- گزینهی «۳»

$$\begin{aligned} \frac{1-2x}{x+2} + \frac{x+1}{x-2} = 0 & \Rightarrow \frac{(1-2x)(x-2) + (x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = 0 \\ & \Rightarrow (1-2x)(x-2) + (x+1)(x+2) = 0 \\ & \Rightarrow x-2-2x^2+4x+x^2+3x+2=0 \Rightarrow -x^2+8x=0 \\ & \Rightarrow -x(x-8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-8=0 \Rightarrow x=8 \end{cases} \end{aligned}$$

۵۸۴- گزینهی «۲»

طرفین معادله را در ک.م.م.مخرجها یعنی $3x(x-1)$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 3x(x-1)\left[\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3\right] \\ & \Rightarrow \frac{18x^2(x-1)}{x-1} + \frac{3x(x-1)^2}{3x} = 9x(x-1) \\ 18x^2 + x^2 - 2x + 1 & = 9x^2 - 9x \Rightarrow 10x^2 + 7x + 1 = 0 \\ & \Rightarrow \Delta = 49 - 40 = 9 \\ & \Rightarrow x_1 = \frac{-7+3}{20} = -\frac{1}{5}, x_2 = \frac{-7-3}{20} = -\frac{1}{2} \\ & \text{ریشه‌ی بزرگ‌تر است. } x = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

۵۸۵- گزینهی «۱»

طرفین معادله را در ک.م.م.مخرجها یعنی $(t-2)(t-1)$ ضرب می‌کنیم.

$x = 3 - \sqrt{6}$ غیر قابل قبول است زیرا در معادله‌ی اولیه صدق نمی‌کند و سمت راست تساوی به ازای آن منفی می‌شود و به ازای $x = 3 + \sqrt{6}$ دو طرف معادله برابر و مثبت خواهند بود.

۵۹۳- گزینه‌ی «۱»

را به طرف دیگر برده و طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+3} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{3x+3}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (1 + \sqrt{3x+3})^2$$

$$x+2 = 1 + 3x+3 + 2\sqrt{3x+3} \Rightarrow -2x-2 = 2\sqrt{3x+3}$$

منتقل به سمت چپ

تقسیم بر ۲

(دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم)

$$-x-1 = \sqrt{3x+3}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 3x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow \sqrt{2+2} - \sqrt{3(2)+3} = 1 \\ \text{غ ق ق} \rightarrow 2-3 = -1 \rightarrow -1 \neq 1 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow \sqrt{-1+2} - \sqrt{-3+3} = 1 \rightarrow 1=1 \\ \text{ق ق} \rightarrow 1=1 \end{cases}$$

پس فقط $x = -1$ قابل قبول است.

دقت شود پس از به دست آوردن جواب‌ها حتماً آن‌ها را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم.

۵۹۴- گزینه‌ی «۴»

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1})^2 = (1)^2$$

$$\Rightarrow 3x+4+2x+1-2\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x+1} = 1$$

$$\Rightarrow 5x+5-2\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x+1} = 1$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x+1} = 1-5x-5 = -4-5x$$

دوباره طرفین را به توان دو می‌رسانیم.

$$(-2\sqrt{3x+4}\sqrt{2x+1})^2 = (-4-5x)^2$$

$$\Rightarrow 4(3x+4)(2x+1) = 16+40x+25x^2$$

$$6x^2+11x+4 = 16+40x+25x^2$$

$$\Rightarrow 24x^2+44x+16 = 25x^2+40x+16$$

$$\Rightarrow 0 = 25x^2+40x+16-24x^2-44x-16$$

$$\Rightarrow x^2-4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{ق ق} \\ x=4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

مجموع جواب‌ها $= 0 + 4 = 4$

۵۹۵- گزینه‌ی «۴»

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+5})^2 = (1)^2$$

$$3x+4+x+5-2\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{x+5} = 1$$

$$\Rightarrow 4x+9-2\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{x+5} = 1$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{x+5} = 1-4x-9 = -8-4x = -4(2+x)$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{x+5} = -2(2+x)$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{x+5})^2 = 4(2+x)^2$$

$$\Rightarrow (3x+4)(x+5) = 4(4+4x+x^2)$$

$$\Rightarrow 3x^2 + \frac{15x+4x+20}{19x} = 16+16x+4x^2$$

۵۹۰- گزینه‌ی «۱»

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x^2+6})^2 \Rightarrow 9x^2+16+24x = x^2+6$$

مربع دوجمله‌ای

$$\Rightarrow 9x^2+16+24x-x^2-6 = 0 \Rightarrow 8x^2+24x+10 = 0$$

$$\Rightarrow 2(4x^2+12x+5) = 0$$

$$4x^2+12x+5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(4)(5)$$

$$= 144 - 80 = 64$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2(4)} = \frac{-12 \pm 8}{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-12+8}{8} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2} \\ x_2 = \frac{-12-8}{8} = \frac{-20}{8} = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

حال جواب‌ها را در معادله‌ی اولیه گذاشته و امتحان می‌کنیم.

$$x = \frac{-5}{2} \Rightarrow 3\left(\frac{-5}{2}\right) + 4 = \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 6}$$

$$\Rightarrow \frac{-7}{2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 6} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{-7}{2} \neq \frac{7}{2}$$

جواب $x = \frac{-5}{2}$ غیر قابل قبول است.

$$x = \frac{-1}{2} \Rightarrow 3\left(\frac{-1}{2}\right) + 4 = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

پس معادله فقط یک جواب منفی $x = \frac{-1}{2}$ دارد.

۵۹۱- گزینه‌ی «۱»

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم تا عبارت از حالت رادیکالی خارج شود:

$$(2x+1)^2 = (\sqrt{11x-2})^2 \Rightarrow 4x^2+4x+1 = 11x-2$$

$$\Rightarrow 4x^2+4x+1-11x+2 = 0 \Rightarrow 4x^2-7x+3 = 0$$

مجموع ضرایب برابر صفر است پس یک ریشه $x_1 = 1$ و ریشه‌ی دیگر

$$x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

است و هر دو ریشه نیز قابل قبول هستند.

$$|x_2 - x_1| = \left| \frac{3}{4} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها

۵۹۲- گزینه‌ی «۳»

طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم تا معادله از حالت رادیکالی خارج شود.

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (x-2)^2 \Rightarrow 2x+1 = x^2-4x+4$$

$$\Rightarrow 0 = x^2-4x+4-2x-1 \Rightarrow x^2-6x+3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4(1)(3) = 36 - 12 = 24$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{24}}{2(1)} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \times 6}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \sqrt{6} \\ x_2 = 3 - \sqrt{6} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4(3)(-30) = 169 + 360 = 529$$

۵۲۹ مربع کامل است و جذر آن ۲۳ است.

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{529}}{2(3)} = \frac{13 \pm 23}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{13+23}{6} = \frac{36}{6} = 6 & \text{ریشه‌ی بزرگتر} \\ x_2 = \frac{13-23}{6} = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

۵۹۹- گزینه‌ی «۲»

$$(a-1)(a+2) = 40 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 40 \Rightarrow a^2 + a - 42 = 0$$

$$\Rightarrow (a+7)(a-6) = 0$$

$$\begin{cases} a = -7 \Rightarrow a(a+1) = -7(-6) = 42 \\ \text{یا} \\ a = 6 \Rightarrow a(a+1) = 6(7) = 42 \end{cases}$$

روش دوم:

$$(a-1)(a+2) = 40 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 40 \Rightarrow a^2 + a = 42$$

$$\Rightarrow a(a+1) = 42$$

۶۰۰- گزینه‌ی «۳»

$$(x+2)(x+1) = x(1-x) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = x - x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 4 - 16 = -12 < 0$$

اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه حقیقی ندارد.

۶۰۱- گزینه‌ی «۳»

ابتدا معادله را استاندارد کرده، مبین (Δ) معادله را تعیین می‌کنیم.

$$-9x^2 + 6x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 6 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-9)(-1) = 36 - 36 = 0$$

چون $\Delta = 0$ است پس معادله ریشه‌ی مضاعف یا دو ریشه‌ی مساوی دارد.

۶۰۲- گزینه‌ی «۲»

ابتدا مبین (Δ) معادله را پیدا می‌کنیم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(1)(-5) = a^2 + 20 > 0$$

چون Δ همواره مثبت است پس معادله همواره دو ریشه‌ی حقیقی خواهد داشت.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5 < 0$$

چون ضرب ریشه‌ها منفی است پس یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است.

نکته: اگر در معادله‌ی درجه دوم $\Delta > 0$ و $P < 0$ باشد معادله دو جواب مختلف علامت حقیقی دارد.

۶۰۳- گزینه‌ی «۲»

برای حل به روش مربع کامل عدد ثابت را به سمت دیگر تساوی برده مربع نصف ضریب x را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم تا سمت چپ تساوی مربع کامل شود.

$$x^2 + 3x = 2 \Rightarrow x \text{ مربع نصف ضریب } x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow 0 = 4x^2 + 16x + 16 - 3x^2 - 19x - 20$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \end{cases}$$

حال جواب‌ها را در معادله‌ی اصلی امتحان می‌کنیم.

$$x = -1 \Rightarrow \sqrt{3(-1) + 4} - \sqrt{-1 + 5} = 1 \Rightarrow 1 - 2 \neq 1$$

$$x = 4 \Rightarrow \sqrt{3(4) + 4} - \sqrt{4 + 5} = 4 - 3 = 1$$

$$\text{مجموع جواب با چهار برابر معکوس آن} = 4 + 4 \times \frac{1}{4} = 4 + 1 = 5$$

۵۹۶- گزینه‌ی «۱»

طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم.

$$(\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+5})^2 = (1)^2$$

$$\Rightarrow x + 6 + 2x + 5 - 2\sqrt{x+6} \times \sqrt{2x+5} = 1$$

رادیکال را به یک طرف برده و بقیه را به طرف دیگر می‌بریم.

$$3x + 11 - 1 = 2\sqrt{x+6} \times \sqrt{2x+5}$$

$$\Rightarrow 3x + 10 = 2\sqrt{x+6} \times \sqrt{2x+5}$$

(طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم)

$$\Rightarrow (3x+10)^2 = 4(\sqrt{x+6})^2 (\sqrt{2x+5})^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 60x + 100 = 4(x+6)(2x+5)$$

$$2x^2 + 17x + 30$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 60x + 100 = 8x^2 + 68x + 120$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 60x + 100 - 8x^2 - 68x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

حال جواب‌های به‌دست آمده را در معادله‌ی اولیه قرار می‌دهیم تا بررسی کنیم جواب‌ها در دامنه قرار دارند و یا در معادله صدق می‌کنند یا خیر.

$$x = 10 \Rightarrow \sqrt{10+6} - \sqrt{2(10)+5} = \sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1 \neq 1$$

$x = 10$ در معادله صدق نمی‌کند پس غیر قابل قبول است.

$$x = -2 \Rightarrow \sqrt{-2+6} - \sqrt{2(-2)+5} = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1$$

پس فقط $x = -2$ قابل قبول است و معادله فقط یک جواب حقیقی منفی دارد.

۵۹۷- گزینه‌ی «۴»

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم.

$$mx^2 - 4x^2 + (m-1)x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (m-4)x^2 + (m-1)x - 8 = 0$$

اگر ضریب x^2 صفر باشد معادله درجه دو نخواهد بود، پس:

$$m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$$

۵۹۸- گزینه‌ی «۳»

ابتدا معادله را به حالت استاندارد درمی‌آوریم. سپس از روش Δ معادله را حل می‌کنیم.

$$3x^2 - 13x - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -13 \\ c = -30 \end{cases}$$

۶۰۹- گزینهی «۳»

$$S = x'' + x' = -\frac{b}{a} = -\frac{-2\sqrt{3}}{1} = 2\sqrt{3}$$

$$P = x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$A = \frac{x'x''^2 + x''x'^2}{x'x''} = \frac{x'x''(x'' + x')}{x'x''} = \frac{P \cdot S}{P}$$

$$\Rightarrow A = P \times S = -2(2\sqrt{3}) = -4\sqrt{3}$$

۶۱۰- گزینهی «۱»

با توجه به اتحاد اول $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، مقدار $x'^2 + x''^2$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' \\ x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = 1, x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = (1)^2 - 2(-1) = 3$$

تذکره: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ باشند داریم } S^2 - 2P = x'^2 + x''^2 \text{ که}$$

$$P = \frac{c}{a} \text{ و } S = \frac{-b}{a}$$

۶۱۱- گزینهی «۱»

۲ یکی از جواب‌های معادله است ($x_1 = 2$) پس در معادله صدق می‌کند.

$$\begin{cases} (m-1)x^2 - 7x + 2m = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow (m-1)(2)^2 - 7 \times 2 + 2m = 0$$

$$4m - 4 - 14 + 2m = 0 \Rightarrow 6m = 18 \Rightarrow m = 3$$

$$m = 3 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x_1 \times x_2 = 3$$

$$\Rightarrow 2 \times x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$$

۶۱۲- گزینهی «۳»

ابتدا معادله‌ی درجه دوم را استاندارد می‌کنیم.

$$1 - 2x^2 = x(7 - 4x) \Rightarrow 1 - 2x^2 = 7x - 4x^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2x^2 - 7x + 4x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{2} = \frac{7}{2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{S}{P} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{1} = 7$$

۶۱۳- گزینهی «۴»

$$\text{معکوس جمع دو ریشه: } \frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{1}{S}$$

$$\text{حاصلضرب دو ریشه: } x_1 \cdot x_2 = P$$

$$\frac{1}{S} = P \Rightarrow P \cdot S = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} \times \frac{-b}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2m-2}{1} \times \frac{-2m}{1} = 1 \Rightarrow -4m^2 + 4m = 1$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 2 + \frac{9}{4} \Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = \frac{17}{4}$$

حال می‌باید از طرفین تساوی جذر بگیریم یعنی از $\frac{17}{4}$ باید جذر گرفت.

۶۰۴- گزینهی «۲»

ابتدا از ضرب x^2 فاکتور می‌گیریم سپس مربع نصف ضرب x را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.

$$-2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow -2(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = \left(\frac{-2}{2}\right)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1$$

یعنی می‌باید $\left(\frac{-2}{2}\right)^2$ یعنی ۱ را پس از ۱ شدن ضرب x^2 به طرفین تساوی اضافه کنیم.

۶۰۵- گزینهی «۳»

ریشه‌ی مضاعف در معادله‌ی درجه‌ی دوم از دستور $x = -\frac{b}{2a}$ به دست

می‌آید. پس با توجه به معادله‌ی $mx^2 - mx + 1 = 0$ خواهیم داشت:

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-m}{2m} = \frac{1}{2}$$

۶۰۶- گزینهی «۴»

ریشه‌ی مضاعف از فرمول $x = -\frac{b}{2a}$ پیدا می‌شود.

$$m^2x^2 - 6mx + 2m + n = 0$$

$$\frac{3}{4} = -\frac{-6m}{2m^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{m} \Rightarrow m = 4$$

به جای m و x در معادله، $\frac{3}{4}$ و 4 را قرار می‌دهیم.

$$16x^2 - 24x + 8 + n = 0$$

$$\Rightarrow 16\left(\frac{9}{16}\right) - 24 \times \frac{3}{4} + 8 + n = 0 \Rightarrow 9 - 18 + 8 + n = 0$$

$$\Rightarrow n = 1$$

۶۰۷- گزینهی «۲»

برای آنکه معادله‌ی درجه دوم دو ریشه‌ی حقیقی قرینه داشته باشد باید $b = 0$ باشد و ضمناً علامت‌های a و c مخالف هم باشند.

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x^2 - (1-1)x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

۶۰۸- گزینهی «۴»

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های مثبت معادله باشند، بنا به صورت تست $x_1 = x_2$ است. بنابراین:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-2m)^2 - 4(2m) = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 12m = 0 \Rightarrow 4(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m = 0$$

$$\Rightarrow m(m-3) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$m = 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x_1 \times x_2 = \frac{9}{1} = 9$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -x^2 + 300x - 12500 &= 0 \\ \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac &= (300)^2 - 4(-1)(-12500) \\ &= 90000 - 50000 = 40000 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} &= \frac{-300 \pm \sqrt{40000}}{2(-1)} = \frac{-300 \pm 200}{-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-300 - 200}{-2} = 250 \\ x = \frac{-300 + 200}{-2} = 50 \end{cases}$$

چون طول از عرض بزرگتر است پس $x = 250$ و $y = -x + 300 = -250 + 300 = 50$

$$\text{نسبت طول به عرض} = \frac{x}{y} = \frac{250}{50} = 5$$

۶۱۸- گزینهی «۲»

اگر عدد کوچکتر را x بگیریم عدد بعدی $x+1$ خواهد بود، پس:

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 &= 25 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25 \\ \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 - 25 &= 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \\ \Rightarrow 2(x^2 + x - 12) &= 0 \Rightarrow 2(x-3)(x+4) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 & \text{عدد کوچکتر} \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 & \text{غرق (چرا؟)} \end{cases}$$

۶۱۹- گزینهی «۲»

$$\begin{aligned} S = (x+3)(x-1) = 7 &\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 7 \\ \Rightarrow x^2 + 2x - 3 - 7 &= 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 10 = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac &= (2)^2 - 4(1)(-10) = 4 + 40 = 44 \\ \Rightarrow x_1, x_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{44}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 11}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{11}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{11} \\ x_2 = -1 - \sqrt{11} & \text{غرق (چرا؟)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{محیط} = 2(\text{عرض} + \text{طول}) &= 2(x+3+x-1) = 2(2x+2) \\ &= 4x+4 = 4(-1+\sqrt{11})+4 = 4\sqrt{11} \end{aligned}$$

۶۲۰- گزینهی «۱»

x^2 را مساوی A فرض می‌کنیم:

$$x^2 = A \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 - 6(x^2) + 8 = 0$$

$$\Rightarrow A^2 - 6A + 8 = 0 \Rightarrow (A-2)(A-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A-2=0 \Rightarrow A=2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ A-4=0 \Rightarrow A=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) + (2) + (-2) = 0$$

۶۲۱- گزینهی «۳»

ابتدا $z-1$ را u فرض می‌کنیم:

$$16(z-1)^2 - 8(z-1) - 2 = 0, (z-1) = u$$

$$\Rightarrow 16u^2 - 8u - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(16)(-2)$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 0 \Rightarrow (2m-1)^2 = 0 \Rightarrow 2m-1 = 0$$

$$\Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

۶۱۴- گزینهی «۴»

اگر S مجموع دو ریشه و P حاصلضرب آنها باشد معادله‌ی درجه دوم از رابطه‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ به دست می‌آید.

دو ریشه‌ی این معادله $-5 + 2\sqrt{5}$ و $-5 - 2\sqrt{5}$ می‌باشند.

$$S = -5 + 2\sqrt{5} + (-5 - 2\sqrt{5}) = -10$$

$$\begin{aligned} P &= (-5 + 2\sqrt{5})(-5 - 2\sqrt{5}) = (-5)^2 - (2\sqrt{5})^2 \\ &= 25 - 4 \times 5 = 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 10x + 5 = 0$$

۶۱۵- گزینهی «۳»

دو عدد مورد نظر را x و y فرض می‌کنیم.

$$x = 2y \text{ و } x^2 = y^3$$

حال در رابطه‌ی $x = 2y$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \Rightarrow 4y^2 = y^3 \Rightarrow y^3 - 4y^2 = 0$$

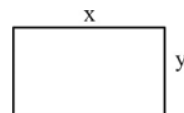
$$\Rightarrow y^2(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 & \text{غرق} \\ y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 2y = 2(4) = 8 \\ \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{x+y}{2} = \frac{4+8}{2} = 6 \end{cases}$$

۶۱۶- گزینهی «۳»

$$\text{محیط} = 2(x+y) = 17 \Rightarrow 2x + 2y = 17$$

$$\Rightarrow 2y = 17 - 2x \Rightarrow y = \frac{17}{2} - x$$



$$S = x \cdot y = 18 \Rightarrow x\left(\frac{17}{2} - x\right) = 18 \Rightarrow \frac{17x}{2} - x^2 = 18$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 17x + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(2x-9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4 \Rightarrow y = \frac{17}{2} - 4 = \frac{9}{2} & \text{غرق} \\ x = \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{17}{2} - \frac{9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \Rightarrow x-y = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2} = 0.5 \end{cases}$$

چون طول از عرض مستطیل باید بزرگ‌تر باشد پس $x = 4$ غیر قابل قبول است.

۶۱۷- گزینهی «۲»

چون طول نخ ۶ متر است پس محیط مستطیل ۶ متر یا ۶۰۰ سانتی‌متر خواهد شد. اگر طول مستطیل x و عرض آن y باشد

$$2(x+y) = 600 \Rightarrow x+y = 300 \Rightarrow y = -x + 300$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y = 12500 \Rightarrow x \cdot (-x + 300) = 12500$$

۶۲۵- گزینهی «۳»

$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$
 $x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$ \Rightarrow x نمی‌تواند ۳ و -۳ باشد.
 حال طرفین تساوی را در ک.م.م.مخرج‌ها که $(x-3)(x+3)$ می‌باشد ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (x-3)(x+3) \left[\frac{x}{x-3} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{18}{(x-3)(x+3)} \right] \\ = \frac{(x-3)(x+3)x}{x-3} + \frac{(x-3)(x+3)(x+1)}{(x+3)} \\ = \frac{18(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow (x+3)x + (x-3)(x+1) = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 + 3x + x^2 - 2x - 3 = 18 \Rightarrow 2x^2 + x - 3 - 18 = 0 \\ \Rightarrow 2x^2 + x - 21 = 0 \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(2)(-21) = 1 + 168 = 169 \\ x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 13}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+13}{4} = \frac{12}{4} = 3 & \text{غلق} \\ x_2 = \frac{-1-13}{4} = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

معادله یک ریشه‌ی منفی دارد.

۶۲۶- گزینهی «۲»

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x-2} = 1 - \frac{1}{x+4} \\ \frac{x+3}{x-2} = \frac{x+4-1}{x+4} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (x+3)(x+4) = (x-2)(x+3) \\ \text{فاکتور از } (x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+3)(x+4) - (x-2)(x+3) = 0 \\ \Rightarrow (x+3)[(x+4) - (x-2)] = 0 \\ \begin{cases} x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 & \text{قابل قبول است، چون جزء ریشه‌های مخرج کسر نیست.} \\ x+4 - x + 2 = 6 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

توجه: در معادلات کسری اگر ریشه به دست آمده جزء ریشه‌های مخرج کسر باشد، مورد قبول نخواهد بود.

۶۲۷- گزینهی «۱»

اول آنکه t نمی‌تواند صفر و ۲ باشد زیرا مخرج کسر صفر می‌شود. حال برای حل، مخرج مشترک گرفته و طرفین تساوی را در مخرج مشترک که $t(t-2)$ است ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} t(t-2) \left[\frac{2}{t} - \frac{t}{t-2} = 5 \right] \\ \Rightarrow \frac{2t(t-2)}{t} - \frac{t^2(t-2)}{(t-2)} = 5t(t-2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2t - 4 - t^2 = 5t^2 - 10t$$

همه را به سمت چپ یا راست می‌بریم تا معادله‌ی استاندارد درجه دوم به‌دست آید.

$$0 = 5t^2 - 10t + 4 - 2t + 4 \Rightarrow 5t^2 - 12t + 8 = 0$$

معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است (چرا؟) و مجموع آنها از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-12)}{5} = \frac{12}{5}$$

$$= 64 + 128 = 192$$

$$u = \frac{8 \pm \sqrt{192}}{2(16)} = \frac{8 \pm \sqrt{64} \times \sqrt{3}}{32} = \frac{8 \pm 8\sqrt{3}}{32} = \frac{8(1 \pm \sqrt{3})}{32} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{cases} z-1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow z = 1 + \frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{5+\sqrt{3}}{4} & \text{بزرگترین جواب} \\ z-1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow z = 1 + \frac{1-\sqrt{3}}{4} = \frac{5-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

۶۲۲- گزینهی «۲»

طرفین معادله را در ک.م.م.مخرج‌ها ضرب می‌کنیم.
 $(8(x-2)) = (8(x-2))$

$$8(x-2) \left[\frac{x}{8} + \frac{2}{x-2} = \frac{x+2}{2(x-2)} \right]$$

$$\Rightarrow x(x-2) + 8 \times 2 = \frac{8(x-2)(x+2)}{2(x-2)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 16 = 4x + 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \text{ غلق چون مخرج را صفر می‌کند.}$$

۶۲۳- گزینهی «۴»

با فرض $u = \frac{1}{x-2}$ معادله به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\left(\frac{1}{x-2} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{x-2} \right) - 3 = 0 \Rightarrow u^2 + 2u - 3 = 0$$

چون مجموع ضرایب معادله صفر است $(1+2+(-3)=0)$ پس یک ریشه $u = 1$ و ریشه‌ی دیگر $u = \frac{c}{a} = -3$ خواهد بود.

$$u = 1 \Rightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \Rightarrow x-2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$u = -3 \Rightarrow \frac{1}{x-2} = -3 \Rightarrow -3x + 6 = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \left| 3 - \frac{5}{3} \right| = \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

۶۲۴- گزینهی «۴»

اولاً x نمی‌تواند صفر و یک باشد. حال معادله را طرفین وسطین می‌کنیم.

$$\frac{x^2+3}{x-1} = \frac{x^2+2}{x}$$

$$\begin{aligned} x(x^2+3) = (x-1)(x^2+2) \Rightarrow x^3 + 3x = x^3 + 2x - x^2 - 2 \\ \Rightarrow x^3 + 3x - x^3 - 2x + x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(2) = -7 < 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۶۲۸- گزینهی «۴»

معادله‌ی کسری را حل کرده و جواب‌های آن را پیدا می‌کنیم.
برای حل معادله طرفین تساوی را در ک.م.م.مخرج‌ها که $(x-1)(x+1)$ است ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} (x-1)(x+1) \left[\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{6}{x^2-1} + 1 \right] \\ \frac{4(x-1)(x+1)}{x-1} - \frac{3(x-1)(x+1)}{x+1} \\ = \frac{6(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} + (x-1)(x+1) \\ \Rightarrow 4(x+1) - 3(x-1) = 6 + x^2 - 1 \\ \Rightarrow 4x + 4 - 3x + 3 = 6 + x^2 - 1 \Rightarrow x + 7 = x^2 + 5 \\ \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases} \quad \text{غقق (چون ریشه مخرج است)} \\ \text{معادله یک جواب دارد } n=1 \text{ و مجموع ریشه‌ها } S=2 \text{ است.} \\ n \times S = 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

۶۲۹- گزینهی «۱»

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا معادله از حالت رادیکالی خارج شود.
 $(\sqrt{2x+3})^2 = (\sqrt{x-3})^2 \Rightarrow 2x+3 = x-3$
 $\Rightarrow 2x-x = -3-3 \Rightarrow x = -6$
 $x = -6$ را اگر در معادله قرار دهیم زیر رادیکال را منفی می‌کند پس غقق است.

۶۳۰- گزینهی «۱»

$1 - \sqrt{x+1} = x \Rightarrow 1-x = \sqrt{x+1} \Rightarrow (1-x)^2 = (\sqrt{x+1})^2$
 $\Rightarrow 1-2x+x^2 = x+1 \Rightarrow x^2-3x=0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$
اگر در معادله به جای x ، ۳ را قرار دهیم دو طرف با هم مساوی نمی‌شوند پس $x=3$ غقق است.

۶۳۱- گزینهی «۴»

عبارت‌های $\sqrt{x^2-5}$ و $2\sqrt{x}$ چون رادیکال فرجه زوج هستند همواره نامنفی هستند و جمع دو عبارت نامنفی زمانی صفر می‌شود که هر دو برابر صفر باشند پس هر دو را مساوی صفر قرار داده و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-5} = 0 \Rightarrow x^2-5=0 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=0 \\ (x=0) \cap (x = \pm\sqrt{5}) = \emptyset \\ \text{هیچ اشتراکی ندارند. پس معادله جواب حقیقی ندارد.} \end{aligned}$$

۶۳۲- گزینهی «۱»

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3} = 2 \Rightarrow (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3})^2 = 2^2 \Rightarrow x \cdot (x-3) = 4$
 $\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$ غقق
مجموع ریشه‌ها = ۴

۶۳۳- گزینهی «۱»

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد پس $x > 0$ (x صفر هم نمی‌تواند باشد. چرا؟)
حال طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\begin{aligned} (\Delta)^2 = \left(3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^2 \Rightarrow 25 = 9x + \frac{4}{x} + 2(3\sqrt{x}) \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right) \\ \Rightarrow 25 = 9x + \frac{4}{x} + 12 \Rightarrow 9x + \frac{4}{x} = 25 - 12 \Rightarrow 9x + \frac{4}{x} = 13 \\ \text{طرفین تساوی را در } x \text{ ضرب می‌کنیم.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 9x^2 + 4 = 13x \Rightarrow 9x^2 - 13x + 4 = 0 \\ \text{مجموع ضرایب برابر صفر است } (9-13+4=0) \text{ پس یک ریشه } x=1 \\ \text{است و جواب دیگر } \frac{c}{a} = \frac{4}{9} = \frac{c}{a} \text{ که هر دو ریشه قابل قبول هستند.} \end{aligned}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{4}{9}$$

۶۳۴- گزینهی «۴»

طرفین را به توان ۴ می‌رسانیم.

$$\begin{aligned} (\sqrt[4]{x^2-9})^4 = (\sqrt[4]{2x-6})^4 \Rightarrow x^2-9 = (2x-6)^2 \\ \Rightarrow x^2-9 = 4x^2-24x+36 \Rightarrow 3x^2-24x+45=0 \\ \Rightarrow 3x^2-24x+45=0 \Rightarrow p = \frac{c}{a} = \frac{45}{3} = 15 \end{aligned}$$

۶۳۵- گزینهی «۲»

اگر رأس نمودار سهمی $y = -x^2$ را یک واحد به سمت چپ ببریم سهمی $y = -(x+1)^2$ بدست می‌آید و اگر رأس را ۳ واحد به بالا منتقل کنیم معادله‌ی سهمی $y = -(x+1)^2 + 3$ خواهد شد.
 $y = -(x+1)^2 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 3 = -x^2 - 2x - 1 + 3$
 $\Rightarrow y = -x^2 - 2x + 2$

۶۳۶- گزینهی «۲»

اگر نمودار $y = \frac{-1}{4}x^2 + 1$ را ۲ واحد به سمت چپ و یک واحد به بالا انتقال دهیم معادله نمودار به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{4}(x+2)^2 + 1 + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) + 2 \\ \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2 + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x \end{aligned}$$

۶۳۷- گزینهی «۱»

با ۲ واحد انتقال نمودار $y = \frac{1}{4}x^2$ به سمت راست معادله‌ی آن به صورت $y_1 = \frac{1}{4}(x-2)^2$ شده و اگر ۳ واحد y_1 را به پایین انتقال دهیم معادله به صورت $y_2 = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3$ خواهد شد.

$$\begin{aligned} y_2 = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 3 = \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 4) - 3 \\ \Rightarrow y_2 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2 - 3 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$