

۲۲۹- به ازای $n \geq M$ ، اندازه‌ی فاصله‌ی جملات دنباله‌ی $a_n = \left[\frac{n^2 + 29}{2n^2 + 3n + 1} \right]$ از حد دنباله به حداقل می‌رسد. کم‌ترین مقدار طبیعی M کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

(۲۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ تا ۹۲- شرکت کنندگان ۴۳ هزار نفر)

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۲۳۰- در اثبات $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 2n) = +\infty$ برای هر عدد حقیقی مثبت k ، حداقل عدد طبیعی M کدام است؟ ($n \geq M \Rightarrow a_n > k$)

(۱۸ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ تا ۹۲- شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) $[\sqrt{k}] + 1$ (۲) $[\sqrt{k+1}]$
(۳) $[\sqrt{k}] + 2$ (۴) $[\sqrt{k+2}]$

۲۳۱- جملات دنباله‌ی $\{a_n\} = \{-n^2 - 6n\}_{n=1}^{\infty}$ از عدد طبیعی M به بعد از عدد $[k = -9991]$ بزرگ‌تر نمی‌باشند. حداقل مقدار M کدام است؟

(۱۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ تا ۹۲- شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)

- (۱) ۹۶ (۲) ۹۷ (۳) ۹۸ (۴) ۱۰۰

۲۳۲- اگر دنباله‌ی $\{n(1 + \frac{a}{n})^2 - n\}_{n=1}^{\infty}$ به عدد ۱۲ همگرا باشد، a کدام است؟

(۱۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۲ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ تا ۹۲- شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳۳- با فرض $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ ، اگر به ازای $n \geq n_0$ فاصله‌ی نقاط نظیر دنباله‌ی $\{\frac{-2S_n}{2S_n + n + 1}\}$ از نقطه همگرایی خود کم‌تر از 0.3 باشد، کوچک‌ترین مقدار n_0 کدام است؟

(۱۵ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۲ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ تا ۹۲- شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) ۳۱ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴) ۳۰

۲۳۴- قدرمطلق اختلاف سوپریموم و اینفیموم مجموعه‌ی مقادیر دنباله‌ی $a_n = \tan^{-1}(-n^2 + 7n - 13)$ کدام است؟

(۱۳ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۳ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ تا ۹۲- شرکت کنندگان ۴۲ هزار نفر)

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

۲۳۵- به ازای هر عدد حقیقی و منفی k از نامساوی $n \geq \sqrt[3]{1-k}$ می‌توان نامساوی $a_n < k$ را نتیجه گرفت. دنباله‌ی $\{3^{a_n}\}$ چگونه است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

(۱۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۵ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ تا ۹۲- شرکت کنندگان ۴۲ هزار نفر)

- (۱) همگرا به صفر (۲) همگرا به یک (۳) واگرا به $+\infty$ (۴) واگرا به $-\infty$

۲۳۶- اگر $a_n = 1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$ باشد، چه تعداد از جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ در نابرابری $a_n < 0.996$ صدق می‌کند؟

(۶ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۳ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۲ تا ۹۲- شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

مبحث: حد

سؤال‌های نسبتاً دشوار

فصل ۲ دیفرانسیل

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۴ (یا ۵) سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۶ سوال پاسخ دهند.

۲۳۷- تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ [x] & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در کدام مجموعه‌ی نقاط دارای حد است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است.)

(۴۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۷ درصد پاسخ صحیح دادند.) (۲۶ تا ۹۲- شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) $\{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$
(۳) \mathbb{Z} (۴) \emptyset

۲۳۸- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in Q \\ x^2 + 1, & x \notin Q \end{cases}$ باشد، $g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ تابع در چند نقطه دارای حد است؟

(۳۰ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۴ درصد پاسخ صحیح دادند. (۲۲ فروردین ۹۳-شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۳۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x - 1) \left(\frac{1}{9^x - 1} - \cos \frac{1}{x} \right)$ کدام است؟

(۲۸ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۱ درصد پاسخ صحیح دادند. (۸ دی ۹۱-شرکت کنندگان ۳۰ هزار نفر)

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) وجود ندارد.

۲۴۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \left[\frac{1}{[x]-x} \right]$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

(۲۶ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند. (۱۷ شهریور ۹۱-شرکت کنندگان ۲۶ هزار نفر)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $-\infty$

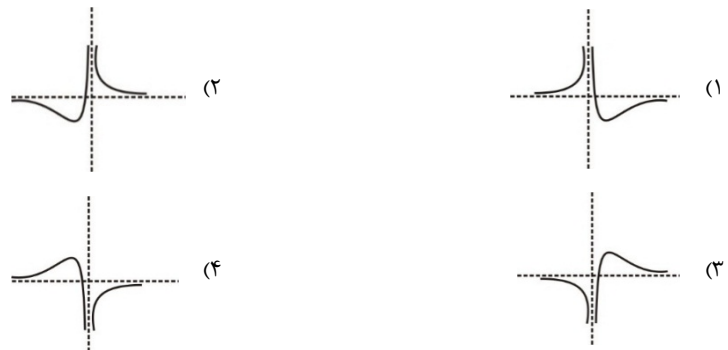
۲۴۱- اگر $f(x) = [x] + \frac{|x|}{x}$ و $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$ ، آنگاه دنباله $f(a_n)$ چگونه است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

(۲۵ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند. (۸ دی ۹۱-شرکت کنندگان ۳۰ هزار نفر)

- (۱) همگرا به ۱ (۲) همگرا به -۱ (۳) همگرا به -۲ (۴) واگرا

۲۴۲- نمودار $y = \frac{x-2}{x^2+4x+4}$ با توجه به مجانب‌هایش شبیه کدام شکل زیر است؟

(۲۴ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۵ درصد پاسخ صحیح دادند. (۲۹ دی ۹۱-شرکت کنندگان ۴۲ هزار نفر)



۲۴۳- اگر $f(x) = \frac{[x]-k}{[-x]-4}$ و به ازای هر دنباله $a_n \neq 1$ ، دنباله $f(a_n)$ همگرا باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟ ([]، علامت جزء صحیح است.)

(۲۳ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند. (۸ دی ۹۱-شرکت کنندگان ۳۰ هزار نفر)

- (۱) ۱ (۲) -۵ (۳) -۱ (۴) وجود ندارد.

۲۴۴- حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$ کدام است؟

(۲۳ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۲ درصد پاسخ صحیح دادند. (۳ دی ۹۳-شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) ۱ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{2}$

فصل ۲ دیفرانسیل

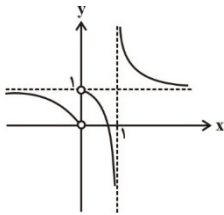
سؤال‌های دشوار

مبحث: حد

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ (یا ۴) سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۵ سوال پاسخ دهند.

۲۴۵- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر همگراست؟

(۲۰ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۴ درصد پاسخ صحیح دادند. (۹۳دی۹۳-شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)



$$f \circ f \left(\frac{(-1)^n}{n+1} \right) \quad (۱)$$

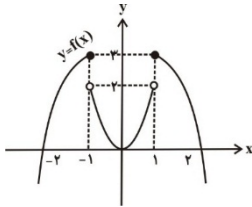
$$f \circ f(n-1) \quad (۲)$$

$$f \circ f \left(\frac{n}{n+1} \right) \quad (۳)$$

$$f \circ f(1-n) \quad (۴)$$

۲۴۶- اگر $H(x)$ تابع هوی‌ساید و $\text{sgn}(x)$ تابع علامت باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟ ([] علامت جزء صحیح است.)

(۱۹ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند. (۲۲آذر۹۳-شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)



$$A = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) + \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \text{sgn}(f(x))$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۳ \quad (۱)$$

$$۱ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

۲۴۷- کدام دنباله به همراه دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{n\pi}$ می‌تواند در اثبات عدم وجود حد $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x \sin \frac{1}{x}]$ استفاده شود؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

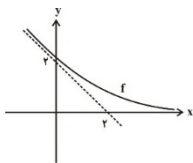
(۱۶ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند. (۲۲فروردین۹۳-شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

$$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{6}} \quad (۲)$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad (۱)$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi + \pi} \quad (۴)$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \quad (۳)$$



۲۴۸- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت شکل زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + (x+1)f(x)}{x}$ کدام است؟

(۱۵ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۹ درصد پاسخ صحیح دادند. (۱۶فروردین۹۳-شرکت کنندگان ۳۸ هزار نفر)

$$-\infty \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۲۴۹- تابع $g(x) = \begin{cases} f(x), & x > -1 \\ -2x - 2, & x \leq -1 \end{cases}$ مفروض است. اگر تابع درجه‌ی دوم f در نقطه‌ی $(0, -1)$ مینیمم داشته باشد و حد چپ و راست g در $x = -1$ برابر باشند، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ کدام است؟

(۱۴ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند. (۲۲آذر۹۳-شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)

$$۴ \quad (۴)$$

$$۳ \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$۱ \quad (۱)$$

۲۵۰- اگر تابع f در بازه‌ی $(-1, 1)$ در شرایط $f^2(x) - 2\cos^2 xf(x) + \cos 2x \leq 0$ صدق کند، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ کدام است؟

(۱۴ درصد) شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۱۰ درصد پاسخ صحیح دادند. (۲۲فروردین۹۳-شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

$$۲ \quad (۴)$$

$$-۱ \quad (۳)$$

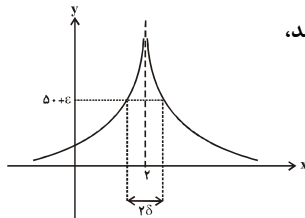
$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

۲۵۱- حد راست تابع $f(x) = \frac{\sqrt{\cos 3x - \cos x}}{\sin 3x - \sin x}$ در $x = \pi$ کدام است؟

(۱۳ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند). (۹۳ شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- ۱ (۴) -۱ (۳) $-\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)



۲۵۲- با توجه به شکل زیر که نمودار تابع $f(x) = \frac{2}{(x-2)^2}$ را نشان می‌دهد، اگر ε عددی نامنفی باشد،

آنگاه بیشترین مقدار δ کدام است؟

(۱۳ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند). (۹۰ شرکت کنندگان ۳۵ هزار نفر)

- ۰/۰۲ (۱) ۰/۲ (۲) ۰/۴ (۳) ۱/۰۴ (۴)

۲۵۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x(\tan^{-1} x + x)}{1+x} + \frac{x^2 - \sin x}{1-x} \right)$ کدام است؟

(۱۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۴ درصد پاسخ صحیح دادند). (۹۰ شرکت کنندگان ۴۰ هزار نفر)

- ۲ - $\frac{\pi}{2}$ (۱) $-2 - \frac{\pi}{2}$ (۲) $+\infty$ (۳) $-\infty$ (۴)

۲۵۴- اگر داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+a}) = 2a - 5$ ، آنگاه مقدار a کدام است؟

(۱۲ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۹ درصد پاسخ صحیح دادند). (۹۲ شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)

- ۳ (۱) -۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

سؤال‌های دشوارتر

فصل ۲ دیفرانسیل

مبحث: حد

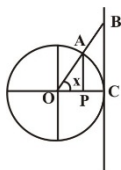
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۱ سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ (یا ۳) سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۴ سوال پاسخ دهند.

۲۵۵- با توجه به دایره‌ی مثلثاتی زیر، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AP} \times \overline{PC}}{\sin x - BC}$ کدام است؟ (\overline{AB} ، اندازه‌ی پاره‌خط AB است).

(۱۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۷ درصد پاسخ صحیح دادند). (۹۱ شرکت کنندگان ۳۰ هزار نفر)



- ۱ (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

۲۵۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{16^x - 16x^4}{a^x - 2x^b}$ باشد، آنگاه مقدار $a + b$ کدام است؟ (۱۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۷ درصد پاسخ صحیح دادند). (۹۲-۹۳ شرکت کنندگان ۳۱ هزار نفر)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۵۷- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x}{ax+b}} - 1 \right) = -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $a + b$ کدام است؟

(۱۱ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۸ درصد پاسخ صحیح دادند). (۲۲ فروردین ۹۳- شرکت کنندگان ۳۷ هزار نفر)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۲۵۸- اگر داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{\tan^2 x - \sin^3 x} = 2$ ، آنگاه زوج مرتب (a, b) کدام می‌تواند باشد؟

(۱۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند). (۱۲ آذر ۹۳- شرکت کنندگان ۵۱ هزار نفر)

- (۱) (۳, ۱) (۲) (۱, ۳) (۳) (۲, $\sqrt{2}$) (۴) ($\sqrt{2}$, ۲)

۲۵۹- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m + x^2}{px^n + mx^2} = 3$ و $n \geq 3$ ، آنگاه حاصل $m + p - n$ کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۶ درصد پاسخ صحیح دادند). (۲۷ دی ۹۳- شرکت کنندگان ۵۲ هزار نفر)

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{7}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$

۲۶۰- حاصل حد $\frac{\log_7^x - \log_x^7}{\log_7^{\left(\frac{x}{7}\right)^2}}$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟

(۱۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۵ درصد پاسخ صحیح دادند). (۵ دی ۹۳- شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) ۴

۲۶۱- معادله $x^2 + x + \log a = 0$ در بازه $(-1, 1)$ ریشه دارد. برای a چند مقدار صحیح وجود دارد؟

(۱۰ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۷ درصد پاسخ صحیح دادند). (۵ دی ۹۳- شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) ۹۹ (۲) ۱۰۰ (۳) ۲۰۰ (۴) ۲۹۹

۲۶۲- اگر $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + 2^{a-x} - 6}{2^{2-x} + 2^x - 5}$ باشد، مقدار متناهی L کدام است؟

(۷ درصد شرکت کنندگان به این سوال پاسخ دادند اما ۳ درصد پاسخ صحیح دادند). (۵ دی ۹۳- شرکت کنندگان ۳۶ هزار نفر)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۲۳۵- گزینهی «۱»

به ازای هر عدد حقیقی و منفی k ، مقدار طبیعی $M = \sqrt[3]{|1-k|}$ یافت شده است. به طوری که:

$$n \geq M \Rightarrow a_n < k$$

پس دنباله‌ی $\{a_n\}$ واگرا به $-\infty$ است و داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{a_n} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = 0$$

(دیفرانسیل- صفحه‌ی ۳۹)

$$\Rightarrow a_n = \frac{-n(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{-n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

$$|a_n - (-1)| < 0.3 \Rightarrow \left| \frac{-n}{n+1} + 1 \right| < 0.3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{3}{100} \Rightarrow n+1 > \frac{100}{3}$$

$$\Rightarrow n+1 > 33.\bar{3} \Rightarrow n > 32.\bar{3} \Rightarrow n \geq 33$$

پس کم‌ترین مقدار n برابر ۳۳ است.

۲۳۶- گزینهی «۲»

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷)

$$a_n < 0.996 \Rightarrow 1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2} < 0.996 \Rightarrow \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2} < -\frac{4}{1000}$$

اگر $\sin \frac{n\pi}{2} = 1$ برابر صفر یا یک باشد، نامعادله غیرممکن است پس $\sin \frac{n\pi}{2} = -1$ است.

$$\frac{-1}{n^2} < -\frac{4}{1000} \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{4}{1000} \Rightarrow n^2 < 250 \Rightarrow n < 15.8 \dots$$

$$n \leq 15$$

از طرفی برای این که $\sin \frac{n\pi}{2} = -1$ برقرار باشد باید $n = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{Z}$) باشد.

پس:

$$n \in \{3, 7, 11, 15\} \Rightarrow 4 \text{ جمله وجود دارد.}$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۶)

۲۳۴- گزینهی «۲»

با توجه به این که تابع $f(x) = \tan^{-1} x$ صعودی اکید است، بنابراین \sup و \inf دنباله‌ی a_n به ترتیب به ازای بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار

دنباله‌ی $b_n = -n^2 + 7n - 13$ به دست می‌آید. بیش‌ترین مقدار

تابع $g(x) = -x^2 + 7x - 13$ به ازای $\frac{-b}{2a} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$ به دست می‌آید. با

توجه به این که $n \in \mathbb{N}$ است، عدد طبیعی قبل و بعد از $\frac{7}{2}$ را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$n = 3 : b_n = -(3)^2 + 7(3) - 13 = -1$$

$$n = 4 : b_n = -(4)^2 + 7(4) - 13 = -1$$

بنابراین بیش‌ترین مقدار a_n به ازای $n = 3$ (یا $n = 4$) به دست می‌آید.

$$\sup(a_n) = a_3 = \tan^{-1}(-1) = \frac{-\pi}{4}$$

کم‌ترین مقدار دنباله‌ی a_n به ازای کم‌ترین مقدار دنباله‌ی b_n به دست می‌آید و

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ ، دنباله‌ی b_n کران پایین ندارد، پس:

$$\inf(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \tan^{-1}(-\infty) = \frac{-\pi}{2}$$

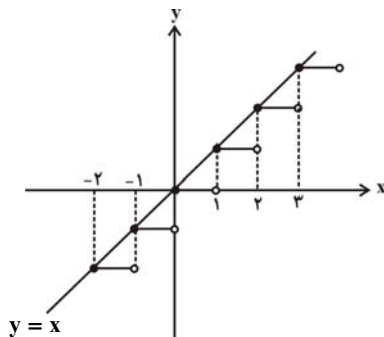
$$|\sup(a_n) - \inf(a_n)| = \left| \frac{-\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{2} \right) \right| = \frac{\pi}{4}$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۳۱ و ۴۲)

فصل سوم / حد

۲۳۷- گزینهی «۴»

نقاط تابع روی یکی از نمودارهای $y = x$ و $y = [x]$ هستند. همان طور که ملاحظه می‌کنید تابع در نقاط صحیح دارای حد راست است ولی حد چپ ندارد. در باقی نقاط نیز نه حد چپ دارد و نه حد راست. پس تابع در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.



(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۲۳۸- گزینهی «۴»

تابع g در نقاطی حد دارد که در آن نقاط (1) عبارت $x^3 - 2x$ - صفر شود (یا 2) دو ضابطه‌ی تابع f برابر باشد.

$$1) x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm\sqrt{2}$$

$$2) 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

بنابراین تابع g در 4 نقطه حد دارد.

توجه: در نقاطی که عبارت $x^3 - 2x$ صفر می‌شود، حد تابع g به صورت (کران‌دار ∞) می‌شود. بنابراین در این نقاط g حد دارد.

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۸۵ تا ۸۷)

۲۳۹- گزینهی «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^x - 1) \left(\frac{1}{9^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x - 1)}{(3^x - 1)(3^x + 1)} = \frac{1}{2}$$

بنا به قضیه فشردگی داریم $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x - 1) \cos \frac{1}{x} = 0$ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^x - 1) \left(\frac{1}{9^x - 1} - \cos \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۷۵ تا ۸۷)

۲۴۰- گزینهی «۱»

$$[x] = 1$$

وقتی $x \rightarrow 1^+$ ، آنگاه:

حال با فرض $t = 1 - x$ ، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \left[\frac{1}{1-x} \right] = - \lim_{t \rightarrow 0^+} t \left[\frac{1}{t} \right] = -1$$

یادآوری: با توجه به تمرین کتاب درسی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

(ریفرانسیل- صفحه‌ی ۸۱)

۲۴۱- گزینهی «۳»

اگر $x > 0$ باشد، آنگاه $x > \sin x$ است. بنابراین با توجه به این

$$\frac{1}{n} > \sin \frac{1}{n} \Rightarrow \sin \left(\frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} < 0 \Rightarrow a_n < 0$$

با توجه به این که دنباله‌ی a_n همگرا به صفر است و از مقادیر کم‌تر به عدد صفر نزدیک می‌شود. داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left([x] + \frac{|x|}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left([x] + \frac{-x}{x} \right)$$

$$= -1 - 1 = -2$$

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۷۸ تا ۸۲)

۲۴۲- گزینهی «۳»

$$y = \frac{x-2}{(x+2)^2}$$

بنابراین در اطراف خط مجانب قائم $x = -2$ ، تابع به سمت $-\infty$ میل می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۳) یا (۴) می‌تواند درست باشد.

در ضمن داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$$

اما وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، y مثبت وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، y منفی است. بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۱۰۷ تا ۱۱۴)

۲۴۳- گزینهی «۳»

چون به ازای هر دنباله‌ی $a_n \neq 1$ همگرا به ۱، دنباله‌ی $f(a_n)$ همگراست.

پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وجود دارد، پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x] - k}{[-x] - 4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - k}{-2 - 4} = \frac{k-1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - k}{[-x] - 4} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0 - k}{-1 - 4} = \frac{k}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \frac{k-1}{6} = \frac{k}{5} \Rightarrow 5k - 5 = 6k \Rightarrow k = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{k}{5} = -1$$

(ریفرانسیل- صفحه‌ی ۸۰)

۲۴۴- گزینهی «۳»

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4}}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{x-2} \times 2\sqrt{2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{\left(\sqrt{x-2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} + 1 \right)}$$

$$= \frac{2}{0+1} = 2$$

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۲۴۵- گزینهی «۳»

گزینهی «۳»: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \right]$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \right] = [0^-] = -1$

گزینهی «۴»: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2n\pi + \pi} \sin(2n\pi + \pi) \right]$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{0}{2n\pi + \pi} \right] = [0] = 0$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۷۱ و ۷۲)

۲۴۸- گزینهی «۱»

مطابق شکل، معادله‌ی مجانب مایل تابع f به صورت $y = -x + 2$ می‌باشد. پس:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + (x+1)f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + xf(x) + f(x)}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + f(x) + \frac{f(x)}{x} \right) = 2 - 1 = 1$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۱۸ تا ۱۲۲)

۲۴۹- گزینهی «۳»

چون f یک تابع درجه‌ی دوم است، پس معادله‌ی آن به صورت

$f(x) = ax^2 + bx + c$ خواهد بود. از طرفی با توجه به این‌که f در $(0, -1)$

مینیمم دارد و حد چپ و حد راست تابع g در $x = -1$ برابر است، نمودار تابع

$g(x)$ به صورت زیر است:

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x) = 0$

با توجه به نمودار، مختصات نقطه‌ی $(-1, 0)$ در معادله‌ی تابع f صدق می‌کند.

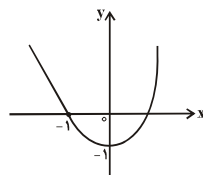
داریم:

$$\begin{cases} f(-1) = a - b + c = 0 \\ f(0) = -1 \Rightarrow c = -1 \\ \text{طول نقطه‌ی مینیمم} = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 - 1 = 3$

(صبا بان- صفحه‌های ۱۳۵ تا ۱۳۹ و دیفرانسیل- ۶۹ تا ۷۴)



با توجه به این‌که دنباله‌ی $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ با مقادیر کم‌تر از ۱ به ۱ همگراست، داریم:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} fof\left(\frac{n}{n+1}\right) = fof(1^-) = 1$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۵۳ تا ۷۴)

۲۴۶- گزینهی «۴»

$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = [2^-] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \text{sgn}(f(x)) = \text{sgn}(0^-) = -1 \end{cases} \Rightarrow A = 1 + 1 - 1 = 1$$

(دیفرانسیل- صفحه‌ی ۶۸)

۲۴۷- گزینهی «۳»

اگر فرض کنیم $f(x) = \left[x \sin \frac{1}{x} \right]$ ، داریم:

$f(a_n) = \left[\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi) \right] = [0] = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 0$

بنابراین حد دنباله‌ی $\{f(b_n)\}$ نباید صفر باشد. (b_n) در تمامی گزینه‌ها با مقادیر

بیش‌تر از صفر به صفر همگرا هستند.

گزینهی «۱»: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right]$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \right] = [0^+] = 0$

گزینهی «۲»: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{6}} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right) \right]$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{6}} \right] = [0^+] = 0$

۲۵۰- گزینهی «۲»

راه حل اول: اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f^{\sqrt{x}}(x) - \sqrt{x} \cos^{\sqrt{x}} x f(x) + \cos^{\sqrt{x}} x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow L^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} L + 1 \leq 0 \Rightarrow (L-1)^{\sqrt{x}} \leq 0 \Rightarrow L = 1$$

راه حل دوم: $\sqrt{x} \cos^{\sqrt{x}} x = 1 + \cos^{\sqrt{x}} x$

$$\Rightarrow f^{\sqrt{x}}(x) - (1 + \cos^{\sqrt{x}} x) f(x) + \cos^{\sqrt{x}} x \leq 0$$

$$\Rightarrow (f(x) - 1)(f(x) - \cos^{\sqrt{x}} x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \cos^{\sqrt{x}} x \leq f(x) \leq 1 \left. \begin{array}{l} \text{فشردگی} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \cos^{\sqrt{x}} x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۷۳ تا ۷۸)

۲۵۱- گزینهی «۳»

در صورت و مخرج کسر از تبدیل جمع به ضرب استفاده می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{\sqrt{-\sqrt{x} \sin^{\sqrt{x}} x \cos^{\sqrt{x}} x}}{\sqrt{x} \sin^{\sqrt{x}} x \cos^{\sqrt{x}} x} = \frac{\sqrt{-\sqrt{x} (\sin^{\sqrt{x}} x \cos^{\sqrt{x}} x) \sin x}}{\sqrt{x} \sin^{\sqrt{x}} x \cos^{\sqrt{x}} x}$$

$$= \frac{\sqrt{-\sin^{\sqrt{x}} x \cos^{\sqrt{x}} x}}{\sin^{\sqrt{x}} x \cos^{\sqrt{x}} x}$$

پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\sin x| \sqrt{-\cos x}}{\sin^{\sqrt{x}} x \cos^{\sqrt{x}} x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{-\cos x}}{\cos^{\sqrt{x}} x} = -1$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۸۲ تا ۸۵)

۲۵۲- گزینهی «۲»

با توجه به شکل و فرض سؤال، اگر $\sqrt{x} - \delta < x < \sqrt{x} + \delta$ و $x \neq \sqrt{x}$.

آنگاه $f(x) > 50$. به عبارت دیگر، اگر $|\sqrt{x} - x| < \delta$.

$$\text{آنگاه } \frac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2} > 50 \text{ پس داریم:}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2} > 50 \Rightarrow 0 < (x-\sqrt{x})^2 < \frac{\sqrt{x}}{50} = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow 0 < |x-\sqrt{x}| < \frac{1}{5} = 0.2 \Rightarrow \delta \leq 0.2 \Rightarrow \max(\delta) = 0.2$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶)

۲۵۳- گزینهی «۲»

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x(\tan^{-1} x + x)}{1+x} + \frac{x^{\sqrt{x}} - \sin x}{1-x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{-\pi}{\sqrt{x}} + x \right) (1-x) + (1+x)(x^{\sqrt{x}} - \sin x)}{(1+x)(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-\pi}{\sqrt{x}} x + \frac{\pi}{\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}} + x^{\sqrt{x}} - x^{\sqrt{x}} + x^{\sqrt{x}} - \sin x + x^{\sqrt{x}} - x \sin x}{1-x^{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{\sqrt{x}} \right) + x \left(\frac{-\pi}{\sqrt{x}} - \sin x \right) - \sin x}{1-x^{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{\sqrt{x}} \right)}{-x^{\sqrt{x}}} = -\sqrt{x} - \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۲۵۴- گزینهی «۳»

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+a}) \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+a}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+a}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \left(\frac{x+1-x-a}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+a}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+a}} \right) (1-a) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \right) (1-a)$$

$$= 1-a \Rightarrow 1-a = 2a-5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۶۵ تا ۶۸)

۲۵۵- گزینهی «۲»

اگر فرض کنیم شعاع دایره برابر یک باشد، داریم:

$$\overline{AP} = \sin x, \overline{PC} = 1 - \cos x, \overline{BC} = \tan x$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overline{AP} \times \overline{PC}}{\sin x - \overline{BC}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \times (1 - \cos x)}{\sin x - \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \times (1 - \cos x)}{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x (1 - \cos x)}{\sin x (\cos x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\cos x = -1$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۸۳ تا ۸۷ و ۹۵ و ۹۶)

۲۵۶- گزینهی «۳»

با توجه به این که حد صورت کسر برابر صفر است. باید حد مخرج نیز صفر باشد در غیر این صورت حاصل حد برابر صفر خواهد بود.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a^x - 2x^b) = a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{16^x - 16x^6}{a^x - 2x^b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4^x - 4x^2)(4^x + 4x^2)}{2^x - 2x^b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2^x - 2x)(2^x + 2x)(4^x + 4x^2)}{2^x - 2x^b}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2^x - 2x)(4)(4)}{2^x - 2x^b} = 32$$

واضح است که باید $2^x - 2x^b$ با عبارت $2^x - 2x$ حذف شود. بنابراین داریم:

$$b = 1 \Rightarrow a + b = 3$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۸۲ تا ۸۷)

۲۵۷- گزینهی «۳»

باید داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\frac{x}{ax+b}} - 1) = 0$ زیرا در غیر این صورت حاصل حد داده شده برابر بی‌نهایت خواهد بود و برای این منظور، باید $a = 1$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{(\sqrt{\frac{x}{x+b}} - 1)(\sqrt{\frac{x}{x+b}} + 1)}{(\sqrt{\frac{x}{x+b}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\frac{x}{x+b} - 1)}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\frac{x-x-b}{x+b})}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-bx}{2(x+b)} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{-b}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = 1 + 1 = 2$$

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۰۴ تا ۱۰۶)

۲۵۸- گزینهی «۲»

با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)x = \lim_{x \rightarrow 0} x$$

نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)x = \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{\tan^2 x - \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{x^2 - x^2} \times \frac{\sqrt{\cos ax} + \sqrt{\cos bx}}{\sqrt{\cos ax} + \sqrt{\cos bx}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)x \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)x}{2x^2(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\left(\frac{a+b}{2}\right)x\left(\frac{a-b}{2}\right)x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b^2 - a^2)x^2}{4x^2} \\ &\Rightarrow \frac{b^2 - a^2}{4} = 2 \Rightarrow b^2 - a^2 = 8 \end{aligned}$$

به ازای $a = 1$ و $b = 3$ تساوی فوق برقرار است.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۵۵ و ۶۹ تا ۷۴)

۲۵۹- گزینهی «۲»

اگر $n > 3$ ، الزاماً $m > n$ و $m = n$ خواهد بود و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{px^n} = 3 \xrightarrow{m=n} \frac{1}{p} = 3 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m + p - n = (m - n) + p = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

اگر $n = 3$ ، دو حالت $m = 3$ و $m < 3$ را بررسی می‌کنیم:

$$n = 3, m = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{(p+3)x^3} = 3 \Rightarrow \frac{2}{p+3} = 3$$

$$\Rightarrow p + 3 = \frac{2}{3} \Rightarrow p = -\frac{7}{3} \Rightarrow m + p - n = 3 - \frac{7}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$$

$$n = 3, m < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(p+m)x^3} = 3 \Rightarrow \frac{1}{p+m} = 3$$

$$\Rightarrow p + m = \frac{1}{3} \Rightarrow m + p - n = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

توجه کنید حالت $n = 3$ و $m > 3$ امکان‌پذیر نیست.

(دیفرانسیل- صفحه‌های ۱۱۰ تا ۱۱۳)

۲۶۰- گزینهی «۱»

$$\text{می‌دانیم } \log_x^y = \frac{1}{\log_x^y}$$

$$\log_x^x - \frac{1}{\log_x^x} = \frac{(\log_x^x)^2 - 1}{\log_x^x} = \frac{(\log_x^x - 1)(\log_x^x + 1)}{\log_x^x}$$

از طرفی:

فصل چهارم / پیوستگی و مجانب

۲۶۳- گزینهی «۳»

$y_1 = [x]$ در بازه‌ی $(0, 1)$ پیوسته است.

$y_2 = [2x]$ در بازه‌ی $(0, 1)$ فقط در $x = \frac{1}{2}$ ناپیوسته است.

$y_3 = [3x]$ در بازه‌ی $(0, 1)$ فقط در $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ناپیوسته است.

چون نقاط ناپیوستگی غیرمشترک می‌باشند. بنابراین با توجه به مسئله‌ی ۱۰

صفحه‌ی ۹۹ کتاب درسی، f در ۳ نقطه ناپیوسته است.

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۸۹ تا ۹۹)

۲۶۴- گزینهی «۴»

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{2}{x} \geq 2\} \Rightarrow D_{gof} = (0, 1]$$

با توجه به این که تابع gof در سمت راست ۱ تعریف نشده است. بنابراین اگر

تابع gof در $x = 1$ پیوستگی چپ داشته باشد، در این نقطه پیوسته است.

$$gof(1) = g(f(1)) = g(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} gof(x) = g(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)) = g(2^+) = 3$$

بنابراین تابع gof در $x = 1$ پیوسته است.

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۹۱ تا ۹۶)

۲۶۵- گزینهی «۱»

ضابطه تابع به صورت زیر است.

$$y = \left[\frac{1}{|x|} \right] = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \\ 0 & , 2 \leq x \end{cases}$$

و ملاحظه می‌کنیم تابع در دامنه تعریفش در $x = 2$ ناپیوسته و در سایر نقاط

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۹۰ تا ۹۵)

پیوسته است.

$$\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 2 \log_{\sqrt{2}} \frac{|x|}{2} \quad x > 0 \\ = 2(\log_{\sqrt{2}} x - \log_{\sqrt{2}} 2) = 2(\log_{\sqrt{2}} x - 1) = 2(\log_{\sqrt{2}} x - 1)$$

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_{\sqrt{2}} x - \log_{\sqrt{2}} 2}{\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\log_{\sqrt{2}} x - 1)(\log_{\sqrt{2}} x + 1)}{2(\log_{\sqrt{2}} x - 1) \times \log_{\sqrt{2}} x} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log_{\sqrt{2}} x + 1}{2 \log_{\sqrt{2}} x} = \frac{1+1}{2 \times 1} = 1$$

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)

۲۶۱- گزینهی «۱»

f پیوسته و صعودی اکید است. پس فقط یک ریشه می‌تواند داشته باشد که با

توجه به صورت سوال، این ریشه در بازه‌ی $(-1, 1)$ است. طبق قضیه بولزانو داریم:

$$f(-1)f(1) < 0 \Rightarrow (-2 + \log a)(2 + \log a) < 0 \Rightarrow -2 < \log a < 2$$

$$\Rightarrow \log^{-0.1} < \log a < \log^{1.0} \Rightarrow 0.1 < a < 10$$

$$\xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a \in \{1, 2, \dots, 9, 99\} \text{ مقدار } 99$$

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۱۰۰ تا ۱۰۲)

۲۶۲- گزینهی «۲»

با توجه به این که منحنی کسر وقتی $x \rightarrow 2$ ، به صفر میل می‌کند، باید صورت

کسر هم دارای حد صفر باشد در غیر این صورت L متناهی نمی‌شود:

$$2^2 + 2^{a-2} - 6 = 0 \Rightarrow 2^{a-2} = 2 \Rightarrow a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$$

به ازای $a = 3$ خواهیم داشت:

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + \frac{1}{2^x} - 6}{2^2 \times 2^{-x} + 2^x - 5} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x + \frac{1}{2^x} - 6}{4 + 2^x - 5} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2^x)^2 - 6(2^x) + 1}{(2^x)^2 - 5(2^x) + 4}$$

به کمک تغییر متغیر $t = 2^x$ ، حاصل حد را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$L = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - 6t + 1}{t^2 - 5t + 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t-4)(t-2)}{(t-4)(t-1)} = \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$$

(ریفرانسیل- صفحه‌های ۸۳ تا ۸۵)