دیفرانسیل

- ❐ فصل صفر – یادآوری مفاهیم اولیه
- ☑ دنباله
- ❐ حد
- ❐ پیوستگی
- ❐ مجانب

۵۲۱– دنباله‌ی $a_n = \left\{n\cos\frac{1}{n}\right\}$ چگونه است؟

۱) کراندار- صعودی ۲) بی‌کران- صعودی ۳) واگرا- نزولی ۴) بی‌کران- غیر یکنوا

۵۲۲– کدام‌یک از دنباله‌های زیر صعودی است؟

۱) $\left\{\frac{n-5}{2n-7}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{2n^2+3}{n^2+1}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ ۴) $\left\{\frac{n^3+1}{n^3+2}\right\}$

۵۲۳– به ازای چه مقادیری از a دنباله‌ی $a_n = \left\{\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{a\times n+4}\right\}$ همگرا به $\frac{1}{e}$ خواهد بود؟

۱) ۰ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{-1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵۲۴– دنباله‌ی همگرای $\{a_n\}$ به صورت $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$ و $a_1 = 2$ در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۱ ۴) ۰

۵۲۵– دنباله‌ی $a_n = \left\{\sqrt{n^4+n^2+1} - \sqrt{n^4+n^2+5}\right\}$ چگونه است؟

۱) همگرا- یکنوا ۲) همگرا-غیریکنوا ۳) واگرا- غیریکنوا ۴) واگرا - یکنوا

۵۲۶– در صورتی که $a_n = \left\{\frac{3n+4}{2n-7}\right\}$ و $k > 0$ وجود داشته باشد که به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم $|a_n| < k$ در این صورت مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{7}{5}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱۳ ۴) ۱۶

۵۲۷– کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $a_n = \log(\frac{1}{4n^2 - 28n + 50})$ صحیح است؟

۱) همواره نزولی است. ۲) از جمله‌ی چهارم به بعد نزولی است.
۳) از جمله‌ی چهارم به بعد صعودی است. ۴) از جمله‌ی سوم به بعد نزولی است.

۵۲۸– در صورتی که $a_n = \left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ و $b_n = \left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ کدام دنباله واگرا خواهد بود؟

۱) $\left\{\frac{a_{n+1}}{b_n}\right\}$ ۲) $\{a_n \times b_n\}$ ۳) $\{a_n + b_{n+1}\}$ ۴) $\{a_{2n} + b_{2n}\}$

۵۲۹– کدام دنباله واگراست؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\left\{\frac{n^2+\cos n}{n^2+\sin n}\right\}$ ۲) $\left\{\cos(4n-1)\frac{\pi}{2}\right\}$ ۳) $\left\{\cos(n!\times\frac{\pi}{3})\right\}$ ۴) $\left\{\left[\frac{(\cos n\pi)^{2n-1}}{n}\right]\right\}$

محل محاسبات

محل محاسبات

۵۳۰– حد دنباله‌ی $a_n = \left\{\left[\frac{۲n^۲+۳}{n^۲+۲}\right]+\left[\frac{۸n^۳+۱۹}{۲n^۳+۵}\right]\right\}$ چند است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۳۱– به ازای چه مقادیری از a دنباله‌ی $a_n = \left\{\left[\sqrt{n+۳}-\sqrt{n+a}\right]\right\}$ همگرا به (-۱) است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) $۰<a<۳$ ۲) $a>۳$ ۳) $a\in R$ ۴) $a=۳$

۵۳۲– جملات دنباله‌ی ... , ۲/۴۹۹۹۹ , ۲/۴۹۹۹ , ۲/۴۹۹ , ۲/۴۹، به یک عدد ثابت و گویا بسیار نزدیک می‌شود. جمله‌ی پنجم دنباله‌ی تفاضل آنها از این عدد ثابت کدام است؟

۱) $۱۰^{-۶}$ ۲) $۱۰^{-۵}$ ۳) $۱۰^{-۴}$ ۴) ۲×۱۰^{-۵}

۵۳۳– اگر $a_n = \begin{cases} \frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n} & , \quad n=۲k \\ ۱-\frac{۱}{n} & , \quad n=۲k+۱ \end{cases}$ باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+۲}-a_{n+۴})$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) وجود ندارد.

۵۳۴– نقاط نمودار کدام یک از دنباله‌های زیر، واقع برخطی به موازات محور xها است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) $\left[\frac{\sin n}{n}\right]$ ۲) $\left[\cos\frac{n\pi}{۲}\right]$

۳) $\left[(\sin^۳\frac{۷\pi}{۶})^{n^۲-n}\right]$ ۴) $\left[(\cos^۳\frac{۷\pi}{۶})^{n^۲+n}\right]$

۵۳۵– چه تعداد از جملات دنباله‌ی $a_n = \left\{\frac{n+\cos n\pi}{۲n+۱}\right\}$ در بازه‌ی $\left(\frac{۴}{۱۰},\frac{۶}{۱۰}\right)$ قرار نمی‌گیرند؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

۵۳۶– در دنباله‌ی $\{a_n\}$ که در آن $a_۰=۱$ و $a_n=(-۱)^n\times a_{n-۱}\times\cos(\frac{x}{۲^n})$، با در نظر گرفتن $\sin۲a=۲\sin a.\cos a$ و به ازای $x=\frac{\pi}{۳}$، اختلاف ۲ مقدار واگرایی کدام است؟

۱) $\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}$ ۳) $\frac{۳}{\pi}$ ۴) $\frac{۶}{\pi}$

۵۳۷– اگر $a_۱=۱$، در دنباله‌ی بازگشتی $a_{n+۱}=a_n+\frac{n^۳}{۳}$ جمله‌ی دهم کدام است؟

۱) $۱+\frac{(۴۵)^۲}{۳}$ ۲) $\frac{(۴۵)^۲}{۳}$ ۳) $۱+\left(\frac{۴۵}{۳}\right)^۲$ ۴) $\left(\frac{۴۵}{۳}\right)^۲$

۵۳۸– اگر دنباله‌ی a_n صعودی و بی‌کران باشد، آنگاه کدام‌یک از دنباله‌های زیر، کران بالا و پایین ندارد؟

۱) $\frac{۳^{۲a_n}+۴^{a_n}}{۹^{a_n+۱}}$ ۲) $\left[\frac{\cos n\pi}{a_n}\right]$

۳) $\log a_n$ ۴) $a_n\cos\frac{n\pi}{۴}$

۵۳۹– دنباله‌ی $a_n=\log\frac{۱}{n}$ شرایط کدام گزینه را داراست؟

۱) واگراست، کران بالا و پایین ندارد. ۲) کران بالا دارد و واگراست.

۳) کران پائین دارد و واگراست. ۴) همگراست ولی کران‌دار نیست.

۵۴۰– در صورتی که $۰<a<۱$ باشد، اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n=\left\{(-a)^{n+۱}\right\}$ کدام است؟

۱) $a_۱-a_۲$ ۲) $a_۱-\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ۳) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n-a_۱$ ۴) $a_۱-a_۳$

محل محاسبات

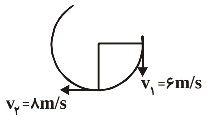
فیزیک پیش‌دانشگاهی

- ❐ حرکت در یک بُعد
- ❐ نمودارهای حرکت و سقوط آزاد
- ☑ **حرکت در دو بُعد - پرتابه**
- ❐ دینامیک
- ❐ حرکت دایره‌ای

۸۴۱- معادله‌های حرکت ذره‌ای در صفحه‌ی xoy برحسب یکاهای SI به‌صورت $y = t^{۳} + \frac{۹}{۴}t$ و $x = \frac{۴}{۳}t^{۳} - ۴t$ است. اندازه‌ی سرعت این ذره، هنگامی‌که اندازه‌ی شتاب آن به $۵\frac{m}{s^{۲}}$ می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۶ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) ۱۰

۸۴۲- ذره‌ای بر روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند و سرعت آن در شکل زیر در دو لحظه $t_{۱} = ۲s$ و $t_{۲} = ۴s$ به وسیله‌ی بردارهای $V_{۱}$ و $V_{۲}$ نشان داده شده است. شتاب متوسط این ذره بین این دو لحظه چند $m/s^{۲}$ است؟



۱) ۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۱ ۴) ۷

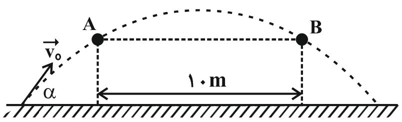
۸۴۳- معادله‌های مکان دو متحرک A و B در SI، به‌ترتیب $\vec{r}_A = (t^{۲}+۱)\vec{i} + (t+۲)\vec{j}$ و $\vec{r}_B = (۲t^{۲}-۳)\vec{i} + ۲t\vec{j}$ می‌باشد. در لحظه‌ای که دو متحرک به یک‌دیگر برخورد می‌کنند، بردار سرعت متحرک A در SI کدام است؟

۱) $۲\vec{i} + \vec{j}$ ۲) $۴\vec{i} + \vec{j}$ ۳) $۵\vec{i} + ۴\vec{j}$ ۴) $۸\vec{i} + ۲\vec{j}$

۸۴۴- معادله‌ی حرکت دو بُعدی جسمی در SI به‌صورت $x = ۲۰t^{۲}$ و $y = -۵t^{۳}$ است. زاویه‌ی بین بردارهای سرعت و شتاب این جسم در لحظه‌ی $t = ۱s$ برابر با چند درجه است؟ $(\tan ۳۷^{\circ} = \frac{۳}{۴}, \tan ۲۰^{\circ} = \frac{۳}{۸})$

۱) ۱۷ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۳۷

۸۴۵- در شرایط خلأ و مطابق شکل زیر، گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی $\vec{v}_{۰}$ از سطح زمین پرتاب می‌شود و در لحظه‌های $t_A = ۳s$ و $t_B = ۵s$، به‌ترتیب از نقطه‌های A و B که در یک سطح افقی قرار دارند، عبور می‌کند. بُرد این گلوله برابر با چند متر است؟



۱) ۲۰
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۵۰

۸۴۶- گلوله‌ای در شرایط خلأ تحت زاویه‌ی $\alpha < ۹۰$ نسبت به سطح افق رو به بالا پرتاب می‌شود، زاویه‌ی بین بردارهای سرعت و شتاب از لحظه‌ی پرتاب تا رسیدن به نقطه‌ی اوج، چگونه تغییر می‌کند؟

۱) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.
۲) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.
۳) پیوسته افزایش می‌یابد.
۴) پیوسته کاهش می‌یابد.

محل محاسبات

۸۴۷- اگر برد و ارتفاع اوج پرتابه‌ای که از سطح زمین پرتاب شده به ترتیب ۴۰ و ۱۰ متر باشد. زاویه‌ی پرتاب آن نسبت به افق چند درجه است؟ ($g = 10\,m/s^2$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) ۳۰ ۲) ۴۵
۳) ۶۰ ۴) ۱۰

۸۴۸- جسمی به جرم $2kg$ در راستایی که با افق زاویه‌ی 30° می‌سازد با سرعت اولیه‌ی $10\,m/s$ به طرف بالا پرتاب می‌شود. کم‌ترین انرژی جنبشی آن در طول مسیر حرکت چند ژول است؟ $(g = 10\,N/kg)$

۱) ۲۵ ۲) ۱۲/۵
۳) ۵۰ ۴) ۷۵

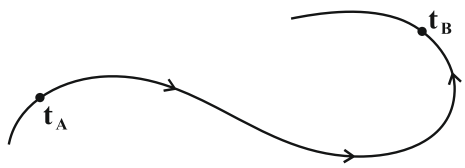
۸۴۹- گلوله‌ای از سطح زمین پرتاب شده و معادله‌ی مسیر آن در SI به‌صورت $y = -x^2 + 20x$ است. برد و ارتفاع اوج این گلوله به ترتیب چند متر است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

۱) ۴۰، ۲۰۰ ۲) ۲۰، ۱۰۰
۳) ۱۰، ۴۰ ۴) ۲۰، ۸۰

۸۵۰- در شرایط خلأ گلوله‌ای را از سطح زمین پرتاب می‌کنیم. ۳ ثانیه پس از پرتاب، گلوله با سرعت $40\frac{m}{s}$ از بالاترین نقطه‌ی مسیر می‌گذرد. سرعت اولیه‌ی پرتاب برحسب متر بر ثانیه و زاویه‌ی پرتاب نسبت به سطح زمین برحسب درجه، به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2}$، $\sin 37^\circ = 0/6)$

۱) ۵۰، 53° ۲) ۵۰، 37°
۳) ۴۰، 37° ۴) ۴۰، 53°

۸۵۱- مسیر حرکت متحرکی که با اندازه‌ی سرعت ثابت در صفحه‌ی xoy حرکت می‌کند، مطابق منحنی زیر است. جهت بردار شتاب متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی t_A تا t_B، تقریباً مطابق با کدام گزینه‌ی زیر است؟



۱) $\rightarrow$
۲) $\leftarrow$
۳) $\uparrow$
۴) $\downarrow$

۸۵۲- معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به صورت $\vec{r} = (t^3)\vec{i} + (t^2 + t)\vec{j}$ است. بردار شتاب متوسط در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 1s$ کدام است؟

۱) $3\vec{i} + 2\vec{j}$ ۲) $3\vec{i} + \vec{j}$
۳) $\vec{i} + 3\vec{j}$ ۴) $\vec{i} + 2\vec{j}$

۸۵۳- معادله‌ی حرکت دو بعدی جسمی در SI به صورت $x = 20t$ و $y = -5t^2$ می‌باشد. زاویه‌ی بین بردارهای سرعت و شتاب در لحظه‌ی $t = 2s$ چند درجه است؟

۱) ۴۵ ۲) 90°
۳) 60° ۴) 30°

۸۵۴- ذره‌ای روی خط $y = x + 1$ (در SI) با سرعت ثابت $4\sqrt{2}\,m/s$ در حرکت است. بردار سرعت آن کدام است؟

۱) $\vec{v} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ ۲) $\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$
۳) $\vec{v} = 4\sqrt{2}\,\vec{i} + 4\sqrt{2}\,\vec{j}$ ۴) $\vec{v} = 4\sqrt{2}\,\vec{i} + 2\sqrt{2}\,\vec{j}$

محل محاسبات

۸۵۵- از سطح زمین گلوله‌ای در شرایط خلاء تحت زاویه‌ی 37° نسبت به سطح افق پرتاب می‌شود. اگر پس از ۳ ثانیه به نقطه‌ی اوج برسد، ارتفاع نقطه‌ی اوج چند متر است؟ $(g = 10 m/s^2)$

۱) ۴۵ ۲) ۹۰
۳) ۴۰ ۴) ۸

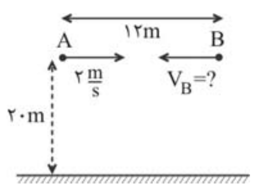
۸۵۶- گلوله‌ای را از سطح زمین در راستایی که با سطح افقی زاویه‌ی ۴۰ درجه می‌سازد رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر با ثابت ماندن سرعت اولیه، زاویه‌ی پرتاب را زیاد کنیم طول برد گلوله چگونه تغییر می‌کند؟

۱) افزایش می‌یابد.
۲) کاهش می‌یابد.
۳) ثابت می‌ماند.
۴) بسته به شرایط هر یک از سه گزینه می‌تواند صحیح باشد.

۸۵۷- در شرایط خلاء گلوله‌ای از روی سطح زمین با سرعت اولیه‌ی V_0 در جهتی که با افق زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد رو به بالا پرتاب می‌شود. در ضمن حرکت اندازه‌ی تغییر سرعت گلوله در یک بازه‌ی زمانی ۳ ثانیه‌ای چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

۱) ۳۰
۲) $30\sqrt{2}$
۳) $5\sqrt{2}$
۴) باید معلوم باشد ۳ ثانیه مربوط به چه بازه‌ی زمانی است.

۸۵۸- در شکل زیر از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین به‌طور هم‌زمان دو گلوله را از نقطه‌های A و B به فاصله‌ی ۱۲ متر در خلاف جهت هم در راستای افقی پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو گلوله در لحظه‌ی برخورد به زمین به یک نقطه برسند سرعت اولیه‌ی گلوله‌ی B چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ و مقاومت هوا ناچیز است)



۱) ۳
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۸۵۹- گلوله‌ای تحت زاویه‌ی α نسبت به افق، در مبداء زمان از مبدأ مختصات پرتاب می‌شود. این گلوله در لحظه‌های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 5$ از نقطه‌هایی می‌گذرد که در یک ارتفاع قرار دارند و فاصله‌ی بین آن‌ها ۶۰ متر است. سرعت اولیه‌ی گلوله چند متر بر ثانیه است؟ (مقاومت هوا ناچیز است و $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

۱) ۵۰ ۲) ۳۵
۳) ۴۰ ۴) ۳۰

۸۶۰- در شرایط خلاء گلوله‌ای از بالای برجی به ارتفاع ۸۰ متر به‌طور افقی پرتاب می‌شود و در فاصله‌ی ۱۶۰ متری از پای برج به زمین برخورد می‌کند. در لحظه‌ی برخورد به زمین، زاویه‌ی بین بردار سرعت گلوله و راستای افقی چند درجه است؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

۱) ۶۰ ۲) ۴۵
۳) ۳۰ ۴) ۳۷

دنباله

۵۲۱- گزینه‌ی «۲» واگرا و بی‌کران $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\times\cos\frac{1}{\infty} = \infty\times\cos 0 = \infty \to$

صعودی با جملات مثبت $\to \cos\frac{1}{n}$ در ربع اول نزولی $\cos$ $0<\frac{1}{n}\le 1 \to$ نزولی $n\to\frac{1}{n}$ صعودی

حاصلضرب دو دنباله‌ی صعودی با جملات مثبت خود دنباله‌ی صعودی است $\to n$ صعودی با جملات مثبت

نکته: در صورتی که دنباله‌ی a_n و b_n هر دو نزولی و مثبت باشند، دنباله‌ی a_nb_n صعودی خواهد بود.

۵۲۲- گزینه‌ی «۴» گزینه‌ی «۱»: چون ریشه مخرج بزرگ‌تر از ۱ است پس دنباله غیریکنواست.

گزینه‌ی «۲» : $a_n=\frac{2n^2+3}{n^2+1}=\frac{2n^2+2+1}{n^2+1}=2+\frac{1}{n^2+1}\to n^2+1$ صعودی $\to 2+\frac{1}{n^2+1}$ نزولی

گزینه‌ی «۳» : $a_1=2$ $a_2=\frac{4}{2}=2$ ، $a_3=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ ، ... $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ نزولی

گزینه‌ی «۴» : $a_n=\frac{n^3+1}{n^3+2}=\frac{n^3+2-1}{n^3+2}=1-\frac{1}{n^3+2}\to n^3+2$ صعودی $\to\frac{1}{n^3+2}$ نزولی $\to 1+\frac{-1}{n^3+2}\to$ صعودی

۵۲۳- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=(1)^\infty \quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{a\times n}\times\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^4\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n\right)^a$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\times\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)}\right)^a=(e^2)^a=e^{2a}$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e}\to e^{2a}=\frac{1}{e}\to e^{2a+1}=1\to 2a+1=0\to a=\frac{-1}{2}$$

۵۲۴- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=L\to L=\sqrt{2L-1}\to L^2=2L-1\to L^2-2L+1=0\to L=1$$

۵۲۵- گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2+1-n^4-n^2-5}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4+n^2+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\infty}=0$$ همگرا

$$a_n=\frac{-4}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4+n^2+5}}$$

دنباله‌های $\sqrt{n^4+n^2+1}$ و $\sqrt{n^4+n^2+5}$ هر دو صعودی بوده پس مجموعشان هم صعودی است ←

صعودی $\frac{-4}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4+n^2+5}}\leftarrow$ نزولی $\frac{4}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4+n^2+5}}$

۵۲۶- گزینه‌ی «۴»

$$a_n=\left\{\frac{3n+4}{2n-7}\right\}$$

$$\begin{cases} a_1=\frac{-7}{5} \\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2} \\ \text{ریشه‌ی مخرج}=3/5 \begin{cases} \to a_3=-13 \\ \to a_4=16 \end{cases}\end{cases} \to -13\le a_n\le 16\to k=\max\{|-13|,16\}=16$$

۵۲۷- گزینه‌ی «۴»

$$4n^2-28n+50=(2n-7)^2+1$$

دقت شود که در دنباله‌ی فوق از جمله‌ی اول تا جمله‌ی سوم دنباله نزول می‌کند و جمله‌ی سوم و چهارم برابر و از جمله‌ی چهارم به بعد دنباله صعود می‌کند پس این دنباله از جمله‌ی سوم به بعد صعودی است و در نتیجه داریم: صعودی $4n^2-28n+50$: از جمله‌ی سوم به بعد

$\Rightarrow \dfrac{۱}{۴n^۲-۲۸n+۵۰}$ نزولی $\Rightarrow a_n=\log\left(\dfrac{۱}{۴n^۲-۲۸n+۵۰}\right)$ نزولی

نکته: ترکیب دو دنباله‌ی صعودی (نزولی)، صعودی است و ترکیب یک دنباله‌ی صعودی و نزولی، نزولی است.

۵۲۸- گزینه‌ی «۴»

گزینه‌ی «۱»: $\dfrac{a_{n+۱}}{b_n}=\dfrac{\dfrac{\sin(n+۱)\pi}{۲}}{\cos\dfrac{n\pi}{۲}}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{۲}+\dfrac{\pi}{۲}\right)}{\cos\dfrac{n\pi}{۲}}=\dfrac{\cos\dfrac{n\pi}{۲}}{\cos\dfrac{n\pi}{۲}}=۱\to$ همگرا (دنباله ثابت)

گزینه‌ی «۲»: $a_n\times b_n=\sin\dfrac{n\pi}{۲}\times\cos\dfrac{n\pi}{۲}=\dfrac{۱}{۲}\sin n\pi=۰\to$ همگرا (دنباله ثابت)

گزینه‌ی «۳»: $a_n+b_{n+۱}=\sin\dfrac{n\pi}{۲}+\cos\left(\dfrac{n\pi}{۲}+\dfrac{\pi}{۲}\right)=\sin\dfrac{n\pi}{۲}-\sin\dfrac{n\pi}{۲}=۰\to$ همگرا (دنباله ثابت)

گزینه‌ی «۴»: $a_{۲n}+b_{۲n}=\sin n\pi+\cos n\pi=۰+(-۱)^n\to$ واگرا

۵۲۹- گزینه‌ی «۴»

گزینه‌ی «۱»: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^۲+\cos n}{n^۲+\sin n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^۲\left(۱+\dfrac{\cos n}{n^۲}\right)}{n^۲\left(۱+\dfrac{\sin n}{n^۲}\right)}=\dfrac{۱+۰}{۱+۰}=۱$ همگرا به ۱

گزینه‌ی «۲»: $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(۴n-۱)\dfrac{\pi}{۲}=۰$، $a_۱=\cos\dfrac{۳\pi}{۲}=۰$، $a_۲=\cos\dfrac{۷\pi}{۲}=۰$، $a_۳=\cos n\left(\dfrac{۱۱\pi}{۲}\right)=۰$ دنباله‌ی ثابت $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=۰$ همگرا

گزینه‌ی «۳»: $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(n!\times\dfrac{\pi}{۳}\right)=۱$، $a_۱=\cos\dfrac{\pi}{۳}=\dfrac{۱}{۲}$، $a_۲=\cos\dfrac{۲\pi}{۳}=\dfrac{-۱}{۲}$، $a_۳=\cos ۲\pi=۱$

$a_۴=\cos ۸\pi=۱\to$

از این به بعد کمان‌ها همگی مضارب زوج عدد π می‌باشند که کسینوس تمامی این کمان‌ها برابر عدد ۱ است. پس همگرا به ۱ است.

گزینه‌ی «۴»: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{((-۱)^n)^{۲n-۱}}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(-۱)^{۲n^۲-n}}{n}\right]$

$\xrightarrow[\text{فرد}]{۲n^۲-n}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{-۱}{n}\right]=[۰^-]=-۱$

$\xrightarrow[\text{زوج}]{۲n^۲-n}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{۱}{n}\right]=[۰^+]=۰$

$\to$ واگرا

۵۳۰- گزینه‌ی «۲»

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{۲n^۲+۴-۱}{n^۲+۲}\right]+\left[\dfrac{۸n^۳+۲۰-۱}{۲n^۳+۵}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[۲-\dfrac{۱}{n^۲+۲}\right]+\left[۴-\dfrac{۱}{۲n^۳+۵}\right]=[۲^-]+[۴^-]=۱+۳=۴$

۵۳۱- گزینه‌ی «۲»

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+۳-n-a}{\sqrt{n+۳}+\sqrt{n+a}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{۳-a}{\sqrt{n+۳}+\sqrt{n+a}}\right]=-۱$

برای آن‌که حد براکت عدد ۱- باشد، لازم است که حد عبارت درون براکت صفر منفی باشد و این در صورتی امکان‌پذیر است که صورت کسر منفی گردد. $۳-a<۰\to a>۳$

۵۳۲- گزینه‌ی «۱»

اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ی داده شده را با توجه به جملات آن یعنی $a_۱=۲/۴۹$ و $a_۲=۲/۴۹۹$ و $a_۳=۲/۴۹۹۹$ و ... به صورت $a_n=۲/۴\underbrace{۹۹...۹}_{n\ \text{تا}}$ در نظر بگیریم در این صورت جمله‌ی پنجم آن به صورت زیر است:

$a_۵=۲/۴\underbrace{۹۹...۹}_{۵\ \text{تا}}$

همچنین جملات این دنباله طبق فرض سؤال به عدد ثابت و گویای زیر که کسر مولد نامیده می‌شود نزدیک یا همگرا می‌شوند.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=۲/۴\overline{۹}=\dfrac{\text{کل عدد}-\text{غیر تکرار}}{\text{به تعداد تکرار نُه می‌نویسیم و به تعداد غیر تکرار پس از ممیز صفر می‌نویسیم}}=\dfrac{۲۴۹-۲۴}{۹۰}=\dfrac{۲۲۵}{۹۰}=\dfrac{۲۵}{۱۰}=۲/۵$

عدد ثابت - جمله‌ی پنجم $=۲/۵-۲/۴\underbrace{۹۹...۹}_{۵\ \text{تا}}=۰/\underbrace{۰۰۰۰۱}_{۵\ \text{تا}}=۱۰^{-۶}$

۵۳۳- گزینه‌ی «۱»

اگر n فرد $\to a_{n+2}\,,\,a_{n+4} \xrightarrow{\text{فرداند}} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+4} = 1 \to \lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_{n+4}) = 0$

اگر n زوج $\to a_{n+2}\,,\,a_{n+4} \xrightarrow{\text{زوج‌اند}} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+4} = \frac{1}{3} \to \lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+2}-a_{n+4}) = 0$

۵۳۴- گزینه‌ی «۴» وقتی نقاط نمودار روی خطی به موازات محور xها باشد، یعنی دنباله باید دنباله‌ی ثابت باشد. در واقع بررسی می‌کنیم کدام‌یک از دنباله‌ها ثابت است.

گزینه (۱): $\frac{\sin n}{n} = \frac{\text{عددی بین }-1\text{ تا }+1}{n} = \begin{cases} \frac{\text{عددی بین صفر تا }-1}{n} = 0^- \Rightarrow [0^-] = -1 \\ \frac{\text{عددی بین صفر تا }+1}{n} = 0^+ \Rightarrow [0^+] = 0 \end{cases}$

در نتیجه دنباله ثابت نیست،

گزینه (۲): $\left[\cos\frac{n\pi}{2}\right] = 0,-1,0,1,\ldots \Rightarrow$ دنباله غیرثابت

گزینه (۳): $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin(\pi+\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin^3\frac{7\pi}{6} = (-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$

$\xrightarrow{n\in N} \left[(-\frac{1}{8})^{n^2-n}\right] = \begin{cases} 1 & ;n=1 \\ [0^+] = 0 & ;n\neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ دنباله غیرثابت

گزینه (۴): $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \left[(\cos^3\frac{7\pi}{6})^{n^2+n}\right] = [0^+] = 0 \Rightarrow$ دنباله‌ی ثابت

۵۳۵- گزینه‌ی «۳»

$\frac{4}{10} < a_n < \frac{6}{10} \to \frac{4}{10}-\frac{1}{2} < a_n-\frac{1}{2} < \frac{6}{10}-\frac{1}{2} \to \frac{-1}{10} < a_n-\frac{1}{2} < \frac{1}{10}$

$\to \left|\frac{n+(-1)^n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10} \to \left|\frac{\cancel{2n}+2(-1)^n-\cancel{2n}-1}{2(2n+1)}\right| < \frac{1}{10} \to \left|\frac{2(-1)^n-1}{2n+1}\right| < \frac{1}{5}$

$\xrightarrow{n\text{ زوج}} \left|\frac{1}{2n+1}\right| < \frac{1}{5} \to 2n+1 > 5 \to n > 2 \to \underset{\text{زوج}}{\min(n)} = 4$

$\xrightarrow{n\text{ فرد}} \left|\frac{-3}{2n+1}\right| < \frac{1}{5} \to 2n+1 > 15 \to 2n > 14 \to n > 7 \to \min(n) = 9$

مشاهده می‌شود که جملات دنباله‌ی a_n از جمله‌ی هشتم به بعد در این بازه‌اند. ولی این بدان معنا نمی‌باشد که ۷ جمله‌ی اول خارج از بازه باشد. چون جملات زوج از جمله‌ی a_4 و a_6 در بازه‌اند. پس جملات خارج از بازه عبارتند از: a_1, a_2, a_3, a_5, a_7

۵۳۶- گزینه‌ی «۱»

$a_0 = 1$

$a_1 = -\cos\frac{x}{2}$

$a_2 = -\cos\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{4}$

$a_3 = \cos\frac{x}{2}\times\cos\frac{x}{4}\times\cos\frac{x}{8}$

$\vdots$

$$\left.\begin{aligned} a_{n-2} &= -\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-2}} = \frac{-\sin x}{2^{n-2}\times\sin(\frac{x}{2^{n-2}})} \overset{n\to\infty}{=} \frac{-\sin x}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2\pi} \\ a_n &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n\times\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \end{aligned}\right\} \to a_n - a_{n-2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - (-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

۵۳۷- گزینه‌ی «۱» نکته: $1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$$a_1=1$$
$$n=1\to a_2=a_1+\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}$$
$$n=2\to a_3=a_2+\frac{2^3}{3}=1+\frac{1}{3}+\frac{2^3}{3}=1+\frac{1^3+2^3}{3}$$
$$n=3\to a_4=a_3+\frac{3^3}{3}=1+\frac{1}{3}+\frac{2^3}{3}+\frac{3^3}{3}=1+\frac{1^3+2^3+3^3}{3}$$
$$\to a_n=1+\frac{1^3+2^3+\dots+(n-1)^3}{3}\to a_{10}=1+\frac{1^3+2^3+\dots+9^3}{3}=1+\frac{\left(\frac{9\times 10}{2}\right)^2}{3}=1+\frac{(45)^2}{3}$$

۵۳۸- گزینه‌ی «۴» چون a_n صعودی و بی‌کران است پس واگرا به $+\infty$ است.

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2a_n}+4^{a_n}}{9^{a_n+1}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{رشد بیشتر}}\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2a_n}}{9^{a_n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{9^{a_n}}{9^{a_n}\times 9}=\frac{1}{9}$$ همگراست و کران بالا و پایین دارد.

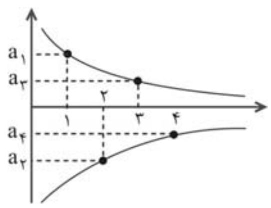
$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\cos n\pi}{a_n}\right]=\left[\frac{(-1)^{+\infty}}{+\infty}\right]=\begin{cases}[0^+]=0\\ [0^-]=-1\end{cases}$$ واگرا به چند عدد است و کران بالا و پایین دارد.

$$\lim_{n\to+\infty}\log a_n=\log(+\infty)=+\infty$$ واگرا به $+\infty$ است و فقط کران پایین دارد.

$$\lim_{n\to+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{4}=\begin{cases}0=a_n\times 0\\ +\infty\times\pm\frac{\sqrt{2}}{2}=\pm\infty\\ +\infty\times\pm 1=\pm\infty\end{cases}$$ واگراست و کران بالا و پایین ندارد.

۵۳۹- گزینه‌ی «۲» $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\log\frac{1}{n}=\log\frac{1}{+\infty}=\log_{10}0^+=-\infty\to$ دنباله واگراست و فقط کران بالا دارد.

۵۴۰- گزینه‌ی «۱» $a_n=(-1)^{n+1}\times(a)^{n+1},\ 0<a<1\longrightarrow a^{n+1}\to$ یک دنباله‌ی نزولی است



اختلاف بزرگترین و کوچکترین جمله $=\underset{\max(a_n)}{a_1}-\underset{\min(a_n)}{a_2}$

مد

۵۴۱- گزینه‌ی «۴» چون تابع f در $x=1$ فاقد حد است و در $x=1$ دارای مقادیر متفاوتی در چپ و راست این نقطه می‌باشد پس باید دنباله‌ای را انتخاب نمود که حد آن مقادیر متفاوتی باشد.

گزینه‌ی «۱»: $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{n-1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(1^-)=2\to$ نامناسب

گزینه‌ی «۲»: $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(1^+)=3\to$ نامناسب

گزینه‌ی «۳»: $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{(n+1)^2-1}+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{2n}{|n+1|+n}\right)=f(1^-)=2\to$ نامناسب

گزینه‌ی «۴»: $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ $\begin{cases}\xrightarrow{n\text{ زوج}}f(1+0^+)=f(1^+)=3\\ \xrightarrow{n\text{ فرد}}f(1+0^-)=f(1^-)=2\end{cases}\to$ واگرا

۸۳۸- گزینه‌ی «۲» با استفاده از معادله‌ی سرعت می‌توان نوشت:

$$V = -gt + v_0 \xrightarrow{v_0 = 30\frac{m}{s}} V = -10t + 30$$

$$\begin{cases} t_1 = 3s \rightarrow v_1 = -10 \times 3 + 30 = 0 \\ t_2 = 6s \rightarrow v_2 = -10 \times 6 + 30 = -30\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\bar{V} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0 - 30}{2} \Rightarrow \bar{V} = -15\frac{m}{s}$$

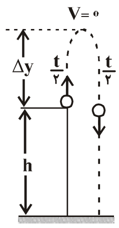
۸۳۹- گزینه‌ی «۴» با استفاده از معادله‌ی مکان- زمان و با فرض این‌که جهت پایین مثبت باشد معادله‌ی مکان هر کدام از گلوله‌ها را نوشته و سپس اختلاف آن‌ها را برابر ۷۵ متر قرار می‌دهیم.

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \xrightarrow[t_2 = t_1 - 3]{v_{01} = v_{02} = 0} \begin{cases} y_1 = 5t_1^2 \\ y_2 = 5(t_1 - 3)^2 \end{cases}$$

چون گلوله‌ی اول زودتر رها شده است $y_1 > y_2$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$y_1 - y_2 = 75 \Rightarrow 5t_1^2 - 5(t_1 - 3)^2 = 75 \Rightarrow 5t_1^2 - 5t_1^2 + 30t_1 - 45 = 75 \Rightarrow 30t_1 = 120 \Rightarrow t_1 = 4s$$

۸۴۰- گزینه‌ی «۱» با توجه به شکل، گلوله‌ی اول قسمت بالای نمودار را در مدت ۱ ثانیه طی کرده است که نصف این مدت زمان در موقع رفت و نصف دیگر آن در موقع برگشت بوده است. بنابراین گلوله‌ی دوم از نقطه‌ی اوج تا ارتفاع h را که دو گلوله به هم می‌رسند در مدت $\frac{1}{2}$ ثانیه طی کرده است. در این حالت می‌توان نوشت:



$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{2}g(\frac{1}{2})^2 + 0 = 1/25m$$

حرکت در دو بعد و پرتابه

۸۴۱- گزینه‌ی «۲» با مشتق گرفتن از معادله‌ی مکان ـ زمان نسبت به زمان، معادله‌ی سرعت ـ زمان و با مشتق‌گیری دوباره، معادله‌ی شتاب ـ زمان حرکت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{r} = (\frac{4}{3}t^3 - 4t)\vec{i} + (t^3 + \frac{9}{4}t)\vec{j}$$

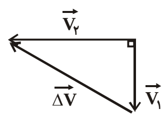
$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (4t^2 - 4)\vec{i} + (3t^2 + \frac{9}{4})\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (8t\vec{i} + 6t\vec{j})$$

$$|a| = \sqrt{(8t)^2 + (6t)^2} = 10t = 5 \Rightarrow t = 0/5s$$

$$\xrightarrow{t = 0/5s} \vec{v} = (4 \times 0/5^2 - 4)\vec{i} + (3 \times 0/5^2 + \frac{9}{4})\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -3\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

۸۴۲- گزینه‌ی «۱» دو بردار سرعت را از یک نقطه رسم می‌کنیم و اندازه‌ی ΔV را به دست می‌آوریم:



$$|\Delta V| = \sqrt{(V_1)^2 + (V_2)^2} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = 10\frac{m}{s}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{10}{4 - 2} = 5\frac{m}{s^2}$$

۸۴۳- گزینه‌ی «۲» در لحظه‌ی برخورد، مختصات مکان دو متحرک یکسان است.

$$\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 1 = 2t^2 - 3 \\ t + 2 = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 = 4 \\ t = 2s \end{cases} \Rightarrow t = 2s$$

بنابراین در لحظه‌ی $t = 2s$ دو متحرک به هم برخورد می‌کنند و مختصات نقطه‌ی برخورد $M\left|\begin{matrix} 5m \\ 4m \end{matrix}\right.$ است.

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_A = (2t)\vec{i} + \vec{j} \xrightarrow{t = 2s} \vec{v}_A = 4\vec{i} + \vec{j}\ (\frac{m}{s})$$

۸۴۴- گزینه‌ی «۱» ابتدا با مشتق گرفتن از معادله‌های مکان برحسب زمان، معادله‌های سرعت و سپس با مشتق‌گیری دوباره، معادله‌های شتاب حرکت جسم را به‌دست آورده و بردارهای آن را در لحظه‌ی $t=۱s$ تعیین می‌کنیم.

$$x=۲۰t^۲ \Rightarrow v_x=\frac{dx}{dt}=۴۰t \Rightarrow a_x=\frac{dv_x}{dt}=۴۰\frac{m}{s^۲}$$

$$y=-۵t^۳ \Rightarrow v_y=\frac{dy}{dt}=-۱۵t^۲ \Rightarrow a_y=\frac{dv_y}{dt}=-۳۰t$$

$$\xrightarrow{t=۱s} v_x=۴۰\frac{m}{s},\ v_y=-۱۵\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{-۱۵}{۴۰}=\frac{-۳}{۸}\Rightarrow \hat{\theta}=-۲۰^\circ$$

$$\xrightarrow{t=۱s} a_x=۴۰\frac{m}{s^۲},\ a_y=-۳۰\frac{m}{s^۲}$$

$$\Rightarrow \tan\theta'=\frac{a_y}{a_x}=\frac{-۳۰}{۴۰}=\frac{-۳}{۴}\Rightarrow \widehat{\theta'}=-۳۷^\circ$$

بنابراین زاویه‌ی بین دو بردار سرعت و شتاب جسم در لحظه‌ی $t=۱s$ برابر با ۱۷°

۸۴۵- گزینه‌ی «۳» ابتدا کل زمان حرکت گلوله را به‌دست می‌آوریم، داریم:

$$t_A+t_B=۲t_{\text{اوج}}=t_{\text{کل}}\Rightarrow t_{\text{کل}}=۳+۵=۸s$$

در راستای افقی حرکت گلوله با سرعت ثابت در مسیری مستقیم است، بنابراین داریم:

$$\Delta x=v_{\circ x}\Delta t\Rightarrow \Delta x=v_\circ\cos\alpha\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x_{AB}}{R}=\frac{\Delta t_{AB}}{\Delta t_{\text{کل}}}\Rightarrow \frac{۱۰}{R}=\frac{۲}{۸}\Rightarrow R=۴۰m$$

۸۴۶- گزینه‌ی «۴» تانژانت زاویه‌ی بردار سرعت با افق برابر نسبت $\tan\alpha=\frac{V_y}{V_x}$ است. با توجه به این‌که اندازه‌ی مؤلفه‌ی بردار سرعت در راستای قائم کاهش می‌یابد اندازه‌ی زاویه‌ی α نیز کاهش خواهد یافت. با توجه به این‌که زاویه‌ی بین بردار شتاب و سرعت برابر با $۹۰+\alpha$ می‌باشد، بنابراین با کاهش زاویه‌ی α زاویه‌ی بین بردار شتاب و سرعت پیوسته کاهش می‌یابد.

۸۴۷- گزینه‌ی «۲» با توجه به رابطه‌ی برد و ارتفاع اوج با زاویه‌ی پرتاب داریم:

$$\frac{H_s}{R}=\frac{\frac{V_\circ^۲\sin^۲\alpha}{۲g}}{\frac{V_\circ^۲\sin۲\alpha}{g}}=\frac{\frac{\sin^۲\alpha}{۲}}{۲\sin\alpha\cos\alpha}\Rightarrow \frac{H_s}{R}=\frac{۱}{۴}\tan\alpha$$

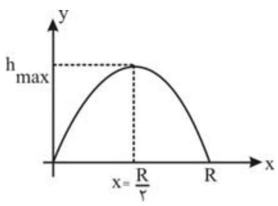
$$\frac{۱۰}{۴۰}=\frac{۱}{۴}\tan\alpha\Rightarrow \tan\alpha=۱\Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$$

۸۴۸- گزینه‌ی «۴» کم‌ترین سرعت متحرک در طول مسیر در نقطه‌ی اوج پرتاب است که برابر با $V_\circ\cos\alpha$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$V_{min}=V_\circ\cos۳۰\Rightarrow V_{min}=۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۵\sqrt{۳}\frac{m}{s}$$

$$K_{min}=\frac{۱}{۲}mV^۲_{min}\Rightarrow K_{min}=\frac{۱}{۲}\times۲(۵\sqrt{۳})^۲=۷۵J$$

۸۴۹- گزینه‌ی «۲» از معادله‌ی مسیر مشتق می‌گیریم و آن‌را مساوی صفر قرار می‌دهیم. مختصات بیشینه‌ی نمودار که در واقع همان $x=\frac{R}{۲}$ و $y=h_{max}$ است را به‌دست می‌آوریم.



$$y=-x^۲+۲۰x\Rightarrow y'=-۲x+۲۰=۰\Rightarrow x=۱۰m$$

$$x=\frac{R}{۲}\Rightarrow R=۲x=۲\times۱۰\Rightarrow R=۲۰m$$

$$x=۱۰m\rightarrow h_{max}=y=-۱۰^۲+۲۰\times۱۰\Rightarrow h_{max}=۱۰۰m$$

۸۵۰- گزینه‌ی «۲» چون سرعت گلوله در بالاترین نقطه‌ی مسیر صفر نیست، پس تحت زاویه‌ای نسبت به افق پرتاب شده است. داریم:

$$t=\frac{v_\circ\sin\alpha}{g}\Rightarrow ۳=\frac{v_\circ\sin\alpha}{۱۰}\Rightarrow v_\circ\sin\alpha=۳۰\quad(۱)$$

از طرفی سرعت گلوله در بالاترین نقطه‌ی مسیر (سرعت افقی گلوله) برابر است با:

$$v_\circ\cos\alpha=۴۰\quad(۲)$$

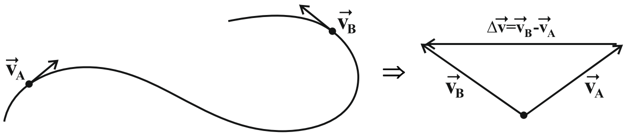
از تقسیم روابط (۱) و (۲) بر هم داریم:

$$\tan\alpha = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \alpha = ۳۷^\circ$$

برای محاسبه‌ی سرعت اولیه‌ی پرتاب گلوله، داریم:

$$v_\circ \sin\alpha = ۳۰ \Rightarrow v_\circ \times ۰/۶ = ۳۰ \Rightarrow v_\circ = ۵۰\frac{m}{s}$$

۸۵۱- گزینه‌ی «۲» خط مماس بر مسیر حرکت متحرک در هر لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک در آن لحظه را نشان می‌دهد. از طرفی با استفاده از تعریف شتاب متوسط $(\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{t_۲ - t_۱})$، بردار شتاب متوسط بین دو لحظه هم‌جهت با تغییرات سرعت بین آن دو لحظه است. بنابراین خواهیم داشت:



بنابراین گزینه‌ی «۲» پاسخ صحیح است.

۸۵۲- گزینه‌ی «۱» ابتدا یک بار از معادله‌ی مکان مشتق گرفته، تا معادله‌ی سرعت به‌دست آید و سپس با استفاده از آن شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$$\vec{r} = (t^۳)\vec{i} + (t^۲ + t)\vec{j}$$

$$\vec{V} = ۳t^۲\vec{i} + (۲t + ۱)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۰ \Rightarrow \vec{V}_۱ = \vec{j} \\ t_۲ = ۱s \Rightarrow \vec{V}_۲ = ۳\vec{i} + ۳\vec{j} \end{cases}$$

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_۲ - \vec{V}_۱ \Rightarrow \Delta\vec{V} = ۳\vec{i} + (۳-۱)\vec{j} = ۳\vec{i} + ۲\vec{j}$$

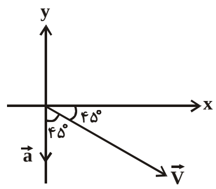
$$\bar{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \Rightarrow \bar{a} = \frac{۳\vec{i} + ۲\vec{j}}{۱} \Rightarrow \bar{a} = ۳\vec{i} + ۲\vec{j}$$

۸۵۳- گزینه‌ی «۱» ابتدا با مشتق‌گیری بردارهای سرعت و شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \vec{r} = ۲۰t\vec{i} + (-۵t^۲)\vec{j}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{V} = ۲۰\vec{i} + (-۱۰t)\vec{j} \xrightarrow{t=۲s} \vec{V} = ۲۰\vec{i} - ۲۰\vec{j}$$

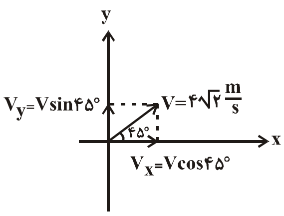
$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = ۰\vec{i} - ۱۰\vec{j} = -۱۰\vec{j}$$



چون بردار شتاب در راستای قائم است، بنابراین زاویه‌ی بردار سرعت با راستای قائم برابر با زاویه‌ی آن با بردار شتاب می‌باشد. زاویه‌ی بردار سرعت با راستای قائم برابر است با:

$$\tan\alpha = \left|\frac{-۲۰}{۲۰}\right| = ۱ \Rightarrow \alpha = ۴۵^\circ$$

۸۵۴- گزینه‌ی «۱» بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است. با توجه به این‌که شیب نمودار برابر ۱ است، زاویه‌ی نمودار با راستای افقی برابر ۴۵° است و داریم:



$$\begin{cases} V_x = V_\circ \cos۴۵ \Rightarrow V_x = ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۴\frac{m}{s} \\ V_y = V_\circ \sin۴۵ \Rightarrow V_y = ۴\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۴\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} = ۴\vec{i} + ۴\vec{j}$$

۸۵۵- گزینه‌ی «۱» با توجه به این‌که در نقطه‌ی اوج مؤلفه‌ی قائم بردار سرعت برابر صفر است، می‌توان نوشت:

$$V_y = -gt + V_\circ y \Rightarrow ۰ = -۱۰ \times ۳ + V_\circ y \Rightarrow V_\circ y = ۳۰\frac{m}{s}$$

$$H_s = \frac{V_{\circ y}^۲}{۲g} \Rightarrow H_s = \frac{(۳۰)^۲}{۲ \times ۱۰} = ۴۵m$$

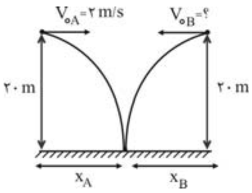
۸۵۶- گزینه‌ی «۴» چون به ازای زاویه‌ی ۴۵° برد پرتابه بیشینه است، تا قبل از ۴۵ درجه با افزایش زاویه‌ی پرتاب، برد پرتابه زیاد می‌شود و با عبور از آن با افزایش زاویه‌ی پرتاب، برد کاهش می‌یابد. همچنین به ازای زاویه‌ی ۵۰ درجه که متمم زاویه‌ی پرتاب است، برد گلوله برابر برد حالت اول خواهد بود، بنابراین هر سه حالت می‌تواند صحیح باشد.

۸۵۷- گزینه‌ی «۱» با استفاده از رابطه‌ی تکانه با نیرو و با توجه به این‌که فقط نیروی وزن بر گلوله وارد می‌شود. داریم:

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}\xrightarrow{F=mg,\Delta p=m\Delta v}mg=\frac{m\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\ \Delta v=g.\Delta t\xrightarrow{\Delta t=۳s,g=۱۰\frac{m}{s^۲}}\Delta v=۱۰\times۳=۳۰\frac{m}{s}$$

۸۵۸- گزینه‌ی «۴» با توجه به شکل، مجموع جابه‌جایی‌های افقی دو گلوله برابر $۱۲m$ است. چون هر دوگلوله از ارتفاع ۲۰ متری پرتاب شده‌اند زمان رسیدن آن به زمین برابر است با:

$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲+v_{۰A}\sin\alpha t\rightarrow ۲۰=۵t^۲+۰\Rightarrow t=۲s$$



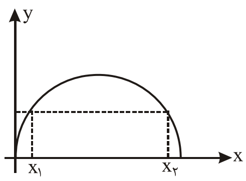
در این مدت جابه‌جایی گلوله‌ی A برابر است با:

$$x_A=(v_{۰A}\cos\alpha)t=(۲\times\cos(۰))\times۲\Rightarrow x_A=۴m$$

$$x_A+x_B=۱۲m\rightarrow ۴+x_B=۱۲\Rightarrow x_B=۸m$$

$$x_B=(v_{۰B}\cos\alpha)t\Rightarrow ۸=(v_{۰B}\times\cos۰)\times۲\Rightarrow v_{۰B}=۴\frac{m}{s}$$

۸۵۹- گزینه‌ی «۱» با توجه به مسیر حرکت گلوله که در شکل زیر رسم شده است، می‌توان نوشت:



$$x_۱=v_{۰x}t_۱\xrightarrow{t_۱=۳s}x_۱=۳v_{۰x}$$

$$x_۲=v_{۰x}t_۲\xrightarrow{t_۲=۵s}x_۲=۵v_{۰x}$$

$$x_۲-x_۱=۶۰\Rightarrow ۵v_{۰x}-۳v_{۰x}=۶۰\Rightarrow v_{۰x}=۳۰\frac{m}{s}$$

از طرف دیگر داریم:

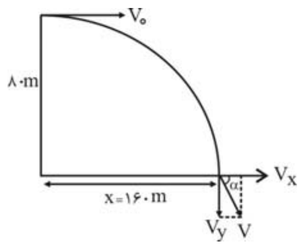
$$v_{۰y}=\frac{۱}{۲}g(t_۱+t_۲)=۵\times(۳+۵)=۴۰\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت اولیه برابر است با:

$$v_۰=\sqrt{v_{۰x}^۲+v_{۰y}^۲}=\sqrt{۹۰۰+۱۶۰۰}\Rightarrow v_۰=۵۰\frac{m}{s}$$

۸۶۰- گزینه‌ی «۲» با فرض این که جهت پایین مثبت باشد، ابتدا زمان رسیدن گلوله به زمین را حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{۱}{۲}gt^۲+(v_۰\sin\alpha)t\xrightarrow{y=۸۰m,\alpha=۰}۸۰=۵t^۲+۰\Rightarrow t=۴s$$



اکنون v_x و v_y را حساب می‌کنیم.

$$x=v_xt\xrightarrow[t=۴s]{x=۱۶۰m}۱۶۰=v_x\times۴\Rightarrow v_x=۴۰\frac{m}{s}$$

$$v_y=gt+v_۰\sin\alpha\xrightarrow{t=۴s,\alpha=۰}v_y=۱۰\times۴+۰\Rightarrow v_y=۴۰\frac{m}{s}$$

در نهایت زاویه‌ی α برابر است با:

$$\tan\alpha=\frac{v_y}{v_x}=\frac{۴۰}{۴۰}=۱\Rightarrow\alpha=۴۵^\circ$$

دینامیک

۸۶۱- گزینه‌ی «۳» طبق قانون دوم نیوتون شتاب مجموعه با برایند نیروهای وارد بر جسم رابطه‌ی مستقیم و با جرم جسم رابطه‌ی عکس دارد. بیش‌ترین مقدار نیروی برایند در حالتی رخ می‌دهد که نیروها با هم، هم‌جهت باشند.

$$F_{max}=۳+۷+۵=۱۵N\Rightarrow a_{max}=\frac{F_{max}}{m}=\frac{۱۵}{۱}=۱۵\frac{m}{s^۲}$$

با توجه به این‌که این ۳ نیرو می‌توانند اضلاع یک مثلث را تشکیل بدهند، بنابراین برایند آنها می‌تواند صفر شود، لذا داریم:

$$F_{min}=۰\Rightarrow a_{min}=۰$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$a_{max}-a_{min}=۱۵-۰=۱۵\frac{m}{s^۲}$$

۸۶۲- گزینه‌ی «۲» ابتدا شتاب جسم را به دست می‌آوریم.

$$V_۰=۰\quad,\quad t=۵s\quad,\quad V=۲۰\frac{m}{s}\quad,\quad a=?$$

$$V=at+v_۰\Rightarrow ۲۰=۵a+۰\Rightarrow a=۴\frac{m}{s^۲}$$

برایند نیروهای وارد بر جسم برابر است با:

$$\sum F=ma\Rightarrow\sum F=۲\times۴=۸N$$

با توجه به برابر بودن دو نیرو داریم:

$$\sum F=۲F\cos\frac{\alpha}{۲}\Rightarrow ۸=۲\times F\cos\frac{۱۲۰}{۲}\Rightarrow F=۸N$$