



00:85

زمان پیشنهادی

ریاضیات

۱۰۱- اگر  $\alpha = \sqrt[3]{2\sqrt{3}-3}$  و  $\beta = \sqrt[3]{2\sqrt{3}+3}$  باشند، حاصل عبارت  $(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)$  کدام است؟

- (۱)  $4\sqrt{3}$  (۲)  $5\sqrt{3}$  (۳) ۵ (۴) ۶

۱۰۲- اگر نمودار تابع  $f(x) = (2\sqrt{2}+1)x^2 - 4mx + m^2 - 4$  به شکل مقابل باشد حدود  $m$  کدام است؟

- (۱)  $0 < m < 2$  (۲)  $-1 < m < 1$  (۳)  $-2 < m < 2$  (۴)  $0 \leq m \leq 2$

۱۰۳- اگر  $g(x) = 4^{ax}$  و  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x+b}}$  در نقطه‌ای به طول ۱ متقاطع باشند و  $f(5) = 4$  آن‌گاه مقدار  $f^{-1}(32)$ ، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۰۴- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = a \sin(x-b)$  را نشان می‌دهد. با فرض این‌که

$0 < a, b < \pi$  حاصل  $ab$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3\pi}{2}$  (۲)  $\frac{\pi}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  (۴)  $\frac{\pi}{6}$

۱۰۵- اگر چند جمله‌ای  $p(x) = 2ax^2 + (b-2a)x^2 - bx^2 - 4bx - 4$  بر عبارت  $x^2 - x - 2$  بخش‌پذیر باشد مقدار  $a+b$  چقدر است؟

- (۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2}$

۱۰۶- مجموعه جواب نامعادله  $|x-1| < \sqrt{x+1}$  به صورت  $[a, b) \cup (c, +\infty)$  است. حاصل  $a^2 + 3b - c$  کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۶

۱۰۷- دامنه  $f(x) = \sqrt{3 - \log_7(x^2 - 2x)}$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) بی‌شمار

۱۰۸- معادله  $\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۳

۱۰۹- تابع  $y = \sin(\cot^{-1} x)$  و خط  $y = mx$ ، به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$  در یک نقطه، مشترک هستند؟

- (۱)  $\mathbb{R}$  (۲)  $(-\infty, 0)$  (۳)  $\mathbb{R} - \{0\}$  (۴)  $(0, +\infty)$

۱۱۰- حد عبارت  $\left[ \cot^2 x + \cos 6x + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \right]$  وقتی  $x \rightarrow \frac{\pi}{6}$  کدام است؟ (نماد  $[]$  به مفهوم جزء صحیح است).

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) حدی ندارد.

۱۱۱- تعداد نقاط ناپیوستگی تابع با ضابطه  $f(x) = [x^3]$ ، در بازه  $[-1, 2]$  کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

۱۱۲- خط مماس بر منحنی  $y = e^{x^2-2x}$  در کدام نقطه موازی محور  $x$  هاست؟

- (۱)  $(1, e)$  (۲)  $(1, \frac{1}{e})$  (۳)  $(0, 1)$  (۴)  $(e, 1)$

۱۱۳- دنباله  $\left\{ \frac{2^n + \cos n\pi}{2^{n-1} + 4} \right\}$  چگونه است؟

- (۱) غیر یکنوا - واگرا (۲) غیر یکنوا - همگرا (۳) نزولی - واگرا (۴) صعودی - همگرا

۱۱۴- حد عبارت  $\left( 1 - 2x \left[ \frac{1}{2x} \right] \right)^{\frac{1}{2x}}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  کدام است؟ (نماد  $[]$  به مفهوم جزء صحیح است).

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\infty$  (۴) حد ندارد.

۱۱۵- کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین دنباله  $\left\{ \frac{2n+5}{2n+3} \right\}$ ، به ترتیب کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{3}, 1$  (۲)  $1, \frac{5}{3}$  (۳)  $\frac{5}{3}, 1$  (۴)  $1, \frac{5}{3}$



۱۱۶- خط مجانب منحنی به معادله  $y = \sqrt[3]{-x^3 - 2x^2 + 3}$  ، محور  $y$ ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $-\frac{3}{2}$  (۳)  $-\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۱۱۷- اگر  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$  باشد، حاصل  $f^{-1}(\frac{\sqrt{6}}{3}) + f^{-1}(\frac{\sqrt{6}}{4})$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۲ (۴)  $\frac{1}{2}$

۱۱۸- خط مماس بر نمودار  $f(x) = xe^{-2x+3} + 1$  در نقطه  $x = 1$  با خطی که نقطه تماس را به  $B(0, 1)$  وصل می‌کند زاویه  $\alpha$  می‌سازد.  $\tan \alpha$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲) ۳ (۳) ۲ (۴)  $\frac{1}{2}$

۱۱۹- خط  $y = 2x - 1$  در نقطه  $x = 3$  بر منحنی پیوسته  $y = f(x)$  مماس است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{xf(x) - f^2(x) + 1}{x^2 - 9}$  ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $-\frac{2}{5}$  (۳)  $\frac{3}{5}$  (۴)  $-\frac{3}{5}$

۱۲۰- اگر  $A(2, -2)$  مختصات نقطه عطف منحنی  $y = ax + \sqrt[3]{x+b}$  باشد،  $a+b$  کدام است؟

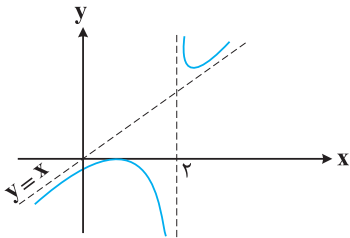
- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) -۳ (۴) -۴

۱۲۱- در مخروطی مجموع ارتفاع و قطر قاعده ۱۲ است. بیش‌ترین حجم مخروط کدام است؟

- (۱)  $18\pi$  (۲)  $\frac{32\pi}{3}$  (۳)  $-\frac{128\pi}{3}$  (۴)  $\frac{64\pi}{3}$

۱۲۲- شکل زیر منحنی  $y = \frac{x^2 + ax + b}{x - c}$  را نمایش می‌دهد، مقدار  $b$  کدام است؟

- (۱) ۴ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳) ۱ (۴) ۲



۱۲۳- مقدار میانگین  $f(x) = x + \sqrt{x}$  در بازه  $[1, 4]$  چقدر است؟

- (۱)  $\frac{67}{18}$  (۲)  $\frac{73}{18}$  (۳)  $\frac{67}{6}$  (۴)  $\frac{73}{6}$

۱۲۴- کدام است،  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 1 + \frac{1 - \cos 2x}{2 \cos^2 x} dx$  ؟

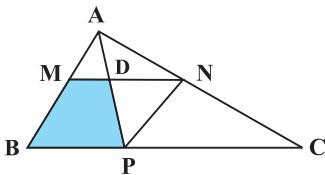
- (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$  (۳)  $1 - \sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{3} - 1$

۱۲۵- مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  ( $A=90^\circ$ ) مفروض است که در آن  $AB = AC = 2$  به مرکز رأس قائمه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا به قاعده مماس بوده و دو ضلع دیگر را در  $P$  و  $Q$  قطع کند فاصله نقطه  $P$  تا دورترین رأس چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{6}$

۱۲۶- در شکل مقابل  $MNPB$  متوازی‌الاضلاع است اگر  $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}$  باشد مساحت قسمت رنگ شده چه کسری از مساحت مثلث  $ABC$  خواهد بود؟

- (۱)  $\frac{42}{125}$  (۲)  $\frac{7}{30}$  (۳)  $\frac{7}{15}$  (۴)  $\frac{1}{6}$



۱۲۷- یک دوزنقه قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۴ واحد را حول قاعده کوچک دوران می‌دهیم حجم حاصل چقدر خواهد بود؟

- (۱)  $64\pi$  (۲)  $32\pi$  (۳)  $16\pi$  (۴)  $18\pi$

۱۲۸- در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} > \hat{C}$ ) نیمساز زاویه  $B$  و عمود منصف ضلع  $AC$  یک‌دیگر را در  $D$  قطع می‌کنند، کدام نامساوی زیر همواره برقرار است؟

- (۱)  $DA > DB$  (۲)  $DA > DC$  (۳)  $\hat{BDA} > \hat{BDC}$  (۴)  $\hat{BAD} > \hat{BCD}$

۱۲۹- چهار ضلع دوزنقه متساوی الساقین  $ABCD$  ( $AD = BC$ ) بر دایره‌ای مماسند حاصل  $(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + DA^2)$  برابر است با:

- (۱)  $AB^2 - BC^2$  (۲)  $(AB - CD)^2$  (۳)  $(AB + CD)^2$  (۴)  $\frac{(AB - CD)^2}{2}$



در ابتدا او نتوانست اثبات کند که ایده او صحیح است. او خودش نیز به این نتیجه رسید که مسیر را اشتباه رفته است. اما سال‌ها بعد او مجدداً بر روی این مسئله کار کرد و دریافت که نظر او صحیح بوده است. او کتاب معروفی در زمینه جاذبه نوشت.

نیوتن کشف‌های بسیار دیگری نیز انجام داد. برخی از آن‌ها راجع به نور است. برای مثال، او دریافت که نور خورشید از رنگ‌های رنگین کمان تشکیل شده است. او بر روی بخشی از نور خورشید به وسیله دمیدن در حباب‌های صابون و تماشای رنگ‌های آن، مطالعه کرد. همسایگان او از دیدن یک مرد بزرگ که هر بار، ساعت‌ها در حباب‌های صابون می‌دمید، شگفت زده بودند.

نیوتن می‌خواست که بیشتر راجع به سیارات و اجرام سنگین (آسمانی) بداند. اما تلسکوپ‌هایی که در دسترس بود، او را راضی نمی‌کرد. برای به دست آوردن یک تلسکوپ بهتر، او نوع جدیدی از تلسکوپ - تلسکوپ انعکاسی - را اختراع کرد. این مسئله به او کمک کرد که مطالب بسیار جدیدی راجع به آسمان کشف کند.

۹۷- گزینه ۱ **معنی جمله:** دانشمندان قبل از نیوتن با آن چه که ما اکنون جاذبه می‌دانیم، آشنا بودند.

۹۸- گزینه ۱ **معنی جمله:** نیوتن زمانی که فهمید نظریاتش درست است، اولین کتاب خود را نوشت.

۹۹- گزینه ۴ **معنی جمله:** کلمه "one" در پاراگراف ۴ به تلسکوپ اشاره دارد.

۱۰۰- گزینه ۳ **معنی جمله:** با دمیدن در حباب‌های صابون، نیوتن می‌خواست چه چیزی را بداند؟ مطالعه در مورد نور خورشید

ریاضیات



۱۰۱- گزینه ۲

$$(\alpha^x + \beta^x + \alpha\beta)(\alpha^x + \beta^x - \alpha\beta) = [(\alpha^x + \beta^x) + (\alpha\beta)][(\alpha^x + \beta^x) - (\alpha\beta)] = [(\alpha^x + \beta^x)^2 - (\alpha\beta)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^x + \beta^x + 2\alpha^x\beta^x - \alpha^x\beta^x = \alpha^x + \beta^x + \alpha^x\beta^x = \sqrt[4]{(2\sqrt{3}-3)^4} + \sqrt[4]{(2\sqrt{3}+3)^4} + (\sqrt[4]{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)})^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}+3+\sqrt{12-9} = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

۱۰۲- گزینه ۱

مطابق شکل، معادله  $f(x) = 0$  دو جواب مختلف علامه دارد و همچنین طول رأس سهمی مثبت است.

$$\begin{cases} \frac{c}{a} < 0 \\ \frac{-b}{2a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m^x - 4}{2\sqrt{2} + 1} < 0 \\ -\frac{-4m}{2(2\sqrt{2} + 1)} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^x - 4 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 2$$

۱۰۳- گزینه ۳

$$f(1) = g(1) \quad , \quad f(x) = 2^{x-b} = \frac{1}{2^{-x+b}}$$

$$2^{1-b} = 4^a = 2^{2a} \Rightarrow 2a = 1-b \Rightarrow 2a + b = 1$$

$$f(5) = 4 \Rightarrow 2^{5-b} = 4 = 2^2 \Rightarrow 5-b = 2 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = -1$$

$$f^{-1}(32) = x \Rightarrow f(x) = 32 \Rightarrow 2^{x-2} = 32 \Rightarrow 2^{x-2} = 2^5 \Rightarrow x-2 = 5 \Rightarrow x = 7$$

۱۰۴- گزینه ۳ بیشترین مقدار تابع  $f(x) = a \sin(x-b)$  برابر  $|a|$  است پس با توجه به شکل و این که  $a$  عددی مثبت است داریم  $a = 2$ . از طرفی:

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{5\pi}{4} - b\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{4} - b\right) = 0$$

$$\frac{5\pi}{4} - b = k\pi \Rightarrow b = \frac{5\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{0 < b < \pi} b = \frac{\pi}{4} \Rightarrow ab = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۱۰۵- گزینه ۴ با توجه به این که  $p(x)$  بر  $x^2 - x - 2$  بخش پذیر است پس بر  $(x-2)$  و  $(x+1)$  بخش پذیر است، بنابراین:

$$p(2) = 0 \Rightarrow 32a + 8(b-2a) - 4b - 8b - 4 = 0$$

$$p(-1) = 0 \Rightarrow 2a - (b-2a) - b + 4b - 4 = 0$$

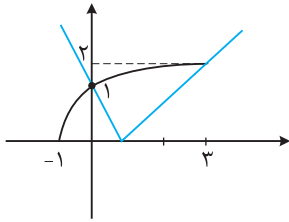
$$\Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ 8a + 4b = 8 \end{cases} \Rightarrow 24a = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$4\left(\frac{1}{2}\right) + 2b = 4 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



۱۰۶- گزینه ۱

با توجه به نمودار



$$\sqrt{x+1} = |x-1| \Rightarrow x+1 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} = [-1, 0) \cup (3, +\infty) \Rightarrow a = -1, b = 0, c = 3$$

$$a^2 + 2b - c = -1 + 0 - 3 = -4$$

۱۰۷- گزینه ۲

$$3 - \log_7(x^2 - 2x) \geq 0 \Rightarrow \log_7(x^2 - 2x) \leq 3 = \log_7 2^3 = \log_7 8$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x \leq 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

$$(x-4)(x+2) \leq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \begin{array}{c} -2 \quad 4 \\ + \quad - \quad + \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \quad 2 \\ + \quad - \quad + \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow [-2, 0) \cup (2, 4]$$

از طرفی  $x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0$

که شامل اعداد صحیح  $\{4, 3, 1, -2\}$  است که چهارتاست.

۱۰۸- گزینه ۲

$$2 \sin x \cos x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x$$

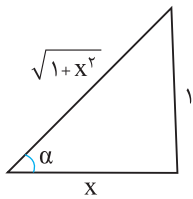
طرفین را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم.

با فرض  $\cos 2x \neq 0$  طرفین را بر  $\cos 2x$  تقسیم می‌کنیم.

$$\tan 2x = 1 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8} \right\}$$

بنابراین جواب‌های واقع در  $[0, 2\pi]$ ؛ چهارتاست.

۱۰۹- گزینه ۳



$$y = \sin(\cot^{-1} x) \cdot \cot^{-1}(x) = \alpha \Rightarrow \cot \alpha = x$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = mx \xrightarrow{\text{با فرض این که } mx > 0} \frac{1}{1+x^2} = m^2 x^2 \Rightarrow$$

$$m^2 x^4 + m^2 x^2 - 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = t \geq 0} m^2 t^2 + m^2 t - 1 = 0, \quad a = m^2, b = m^2, c = -1$$

$a$  و  $c$  مختلف‌العلامه  $\Rightarrow$

دو ریشه مختلف‌العلامه برای  $t$  وجود دارد که ریشه مثبت قابل قبول است و  $m \in \mathbb{R} - \{0\}$

۱۱۰- گزینه ۴

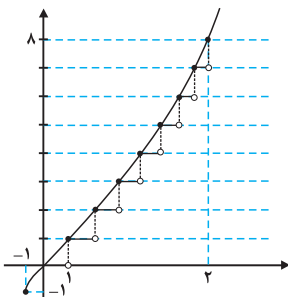
$$x \rightarrow \frac{\pi^+}{6} : [\cos(\cdot^+)] \cdot \cos(\pi^+) + \left[ \cot^2\left(\frac{\pi^+}{6}\right) \right] = [1^-] \times (-1) + [3^-] = 0 \times (-1) + 2 = 2$$

$\Rightarrow$  چون حد چپ و راست برابر نیست لذا حدی ندارد.

$$x \rightarrow \frac{\pi^-}{6} : [\cos(\cdot^-)] \cdot \cos(\pi^-) + \left[ \cot^2\left(\frac{\pi^-}{6}\right) \right] = [1^-] \times (-1) + [3^+] = 3$$

۱۱۱- گزینه ۲

با توجه به نمودار  $y = [x^2]$  تابع در ۸ نقطه ناپیوستگی دارد.



۱۱۲- گزینه ۲

خط مماس وقتی موازی محور Xهاست یعنی شیب آن صفر است پس باید مشتق را مساوی صفر قرار دهیم.



$$y' = (2x - 2)e^{x^2 - 2x} = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = e^{1-2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

پس در نقطه  $(1, \frac{1}{e})$  مشتق برابر صفر است و در نتیجه خط مماس موازی محور  $x$  هاست.

۱۱۳- گزینه ۴

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + \cos n\pi}{2^{n-1} + 4} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2 \Rightarrow \text{دنباله همگراست.}$$

تعدادی از جملات دنباله به صورت زیر است:

$$a_1 = \frac{2^1 + (-1)}{1 + 4} = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{2^2 + 1}{2 + 4} = \frac{5}{6}, \quad a_3 = \frac{2^3 - 1}{8} = \frac{7}{8}, \quad a_4 = \frac{16 + 1}{12} = \frac{17}{12} \Rightarrow \text{دنباله صعودی و یکنواست.}$$

۱۱۴- گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} (1 - 2x \left[ \frac{1}{2x} \right]) = \left( \frac{1}{2x} - \left[ \frac{1}{2x} \right] \right) = m, \quad 0 \leq m < 1$$

اگر  $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x} \rightarrow \infty$  و مقدار آن مقدار منحصر به فردی نیست پس حد ندارد.

$$\text{توجه: } u = [u] + p, 0 \leq p < 1 \Rightarrow u - [u] = p \Rightarrow 0 \leq u - [u] < 1$$

$$\text{۱۱۵- گزینه ۲ دنباله } \left\{ \frac{2n+5}{2n+3} \right\} \text{ هموگرافیک است. و با توجه به مشتق آن } a'_n = \frac{6-10}{(2n+3)^2} = \frac{-4}{(2n+3)^2} < 0 \text{ دنباله نزولی است.}$$

چون ریشه مخرج  $(-\frac{3}{2})$  است و کوچکتر از یک است، دنباله یکنوا است. در دنباله نزولی فوق  $(\inf)$  (بزرگترین کران پایین) همان حد در بی نهایت یعنی

$$\frac{3}{2} \text{ است. و } (\sup) \text{ (کوچکترین کران بالا) به ازای } n = 1 \text{ به دست می آید. که برابر } \frac{2(1)+5}{2(1)+3} = \frac{7}{5} \text{ است.}$$

۱۱۶- گزینه ۳

نکته:

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \sim \begin{cases} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right| & \text{زوج } n \\ \sqrt[n]{a} \left( x + \frac{b}{na} \right) & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{-x^2 - 2x^2 + 3} = \sqrt{-1} \left( x + \frac{2}{3} \right) \Rightarrow y = -x - \frac{2}{3} \text{ مجانب مایل}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3} \text{ عرض از مبدأ}$$

۱۱۷- گزینه ۱

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad f(-x) = -x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f(x) \cdot f(-x) = (\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x) = (x^2 + 1 - x^2) = 1 \Rightarrow f(x) f(-x) = 1$$

در تابع  $y = f(x)$  اگر  $x$ ها قرینه شوند،  $y$ ها معکوس هم دیگر می شوند؛ بنابراین در تابع  $y = f^{-1}(x)$  اگر  $x$ ها معکوس باشند آن گاه  $y$ ها قرینه هم دیگر می شوند.

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ معکوس هم دیگرند.}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + f^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0$$

۱۱۸- گزینه ۲

$$A = (1, f(1)) = (1, 2), \quad B = (e, 1) \Rightarrow m_{AB} = \frac{2-1}{1-e} = 1 = m_1$$

$$m = f'(1) = \text{شیب خط مماس} = \text{مشتق در نقطه تماس}$$

$$f'(x) = e^{-x+2} - 2xe^{-x+2} \Rightarrow f'(1) = e^{-1} - 2e^{-1} = 1 - 2 = -1 = m_2$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{1 - (-1)}{1 + (-2)} \right| = \left| \frac{2}{-1} \right| = 2$$



۱۱۹- گزینه ۴

با توجه به این که خط  $y = 2x - 1$  دارای شیب  $m = 2$  است و بر  $y = f(x)$  مماس است  $f'(2) = 2$  و  $f(2) = 5$  است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - f^2(x) + 10}{x^2 - 9} = \frac{2f(2) - f^2(2) + 10}{9 - 9} = \frac{15 - 25 + 10}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{هوپیتال}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - f^2(x) + 10}{x^2 - 9} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - xf'(x) - 2f(x)f'(x)}{2x} = \frac{5 - 6 - 20}{6} = \frac{-21}{6} = \frac{-7}{2} = -3.5$$

۱۲۰- گزینه ۳

$$y' = a + \frac{1}{\sqrt[3]{(x+b)^2}} \Rightarrow y'' = \frac{-2}{9\sqrt{(x+b)^5}}$$

واضح است که  $y''$  در  $x = -b$  تغییر علامت می‌دهد و چون تابع در  $x = -b$  معین است پس  $x = -b$  طول عطف تابع است. لذا  $b = -2$  برای یافتن  $a$  داریم:

$$f(2) = -2 \Rightarrow 2a + \sqrt[3]{2-2} = -2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow a + b = -3$$

۱۲۱- گزینه ۴

$$V_R + h = 12 \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi}{3} R^2 (12 - 2R) = \frac{\pi}{3} (12R^2 - 2R^3) \Rightarrow V'(R) = \frac{\pi}{3} (24R - 6R^2)$$

$$V'(R) = 0 \Rightarrow 24R - 6R^2 = 0 \Rightarrow 6R(4 - R) = 0 \Rightarrow R = 4$$

$$V_{\max} = \frac{\pi}{3} (16)(12 - 8) = \frac{64\pi}{3}$$

۱۲۲- گزینه ۳

$$x = 2 \text{ مجانب قائم} \Rightarrow c = 2$$

$$\frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = x + \frac{k}{x - 2} \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 2x + k \Rightarrow a = -2$$

شیب مجانب مایل برابر ۱ است، لذا  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1$  چون:

چون نمودار تابع بر محور  $x$ ها مماس است پس  $\Delta$ ی صورت برابر صفر است.

$$x^2 + ax + b = x^2 - 2x + b \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4b = 0 \Rightarrow b = 1$$

۱۲۳- گزینه ۲

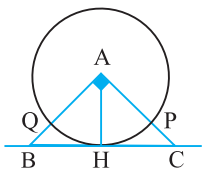
$$\bar{f} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \text{ مقدار میانگین:}$$

$$\bar{f} = \frac{\int_1^4 (x + \sqrt{x}) dx}{4 - 1} = \frac{1}{3} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{3/2} \right) \Big|_1^4 \Rightarrow \frac{1}{3} \left( \frac{16}{2} + \frac{2}{3} \times 8 \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3} \left( 8 + \frac{16}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{73}{18}$$

۱۲۴- گزینه ۴

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \tan^2 x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \tan^2 x) dx = (\tan x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} - 1$$

۱۲۵- گزینه ۴ اگر  $AH$  ارتفاع باشند داریم:



$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{AB \times AC}{2} \Rightarrow AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \sqrt{2}$$

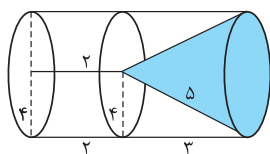
$$\xrightarrow{AP = \sqrt{2}} BP^2 = AP^2 + AB^2 \Rightarrow BP = \sqrt{6}$$

۱۲۶- گزینه ۱

$$\left. \begin{array}{l} MN \parallel BC \\ NP \parallel AB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{BP}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5} \quad (1)$$

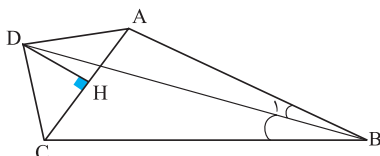
$$\longrightarrow \frac{S_{AMD}}{S_{ABP}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \longrightarrow \frac{S_{MDBP}}{S_{ABP}} = \frac{21}{25} \xrightarrow{(1)} \frac{S_{MDBP}}{S_{ABC}} = \frac{21}{25} \times \frac{2}{5} = \frac{42}{125}$$

۱۲۷- گزینه ۱



$$\text{حجم مخروط} - \text{حجم استوانه} = \text{جواب} = (16\pi \times 5) - \left(\frac{16\pi \times 3}{3}\right) = 64\pi$$

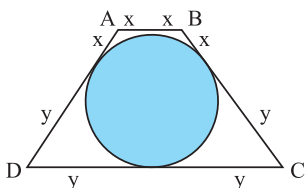
۱۲۸- گزینه ۴



$$A > C \Rightarrow CB > AB$$

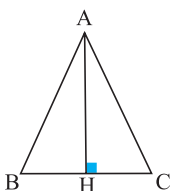
$$\begin{cases} DA = DC \\ DB = DB \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه لولا}} \hat{BDC} > \hat{BDA} \xrightarrow{B_1=B_2} \hat{BAD} > \hat{BCD} \\ CB > AB \end{cases}$$

۱۲۹- گزینه ۴



$$(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + DA^2) = 4x^2 + 4y^2 - (2x^2 + 2y^2 + 4xy) = 2(x-y)^2 = \frac{(AB-CD)^2}{2}$$

۱۳۰- گزینه ۱



$$\cos 70^\circ = \sin 20^\circ, \cos 50^\circ = \sin 40^\circ$$

$$S = \frac{AH \times BC}{2} \Rightarrow \lambda \cos 50^\circ = \frac{1}{2} AH \times \lambda \cos 70^\circ \Rightarrow AH = 2 \cos 20^\circ \xrightarrow{HC=2 \sin 20^\circ} AB = AC = 4$$

۱۳۱- گزینه ۴

دو خط  $\Delta'$  و  $\Delta$  دوران یافته یکدیگرند پس بر هم عمودند و در نتیجه شیب‌های آن‌ها عکس و قرینه یکدیگرند.

$$\xrightarrow{\text{خط } \Delta'} 2x + 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{-2}{3}x + 2 \Rightarrow \text{شیب } \Delta' = \frac{-2}{3} \Rightarrow \text{شیب } \Delta = \frac{3}{2}$$

اگر نقطه  $A'(3, 0)$  را روی خط  $\Delta'$  در نظر بگیریم و آن را به اندازه  $\frac{\pi}{4}$  عقب برگردانیم به نقطه  $A(0, -3)$  روی خط  $\Delta$  می‌رسیم:

$$\Delta \text{ معادله خط} \Rightarrow y + 3 = \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow 2x - 2y = 6$$

انتقال یافته خط  $\Delta$  با بردار  $v$  با آن موازی است.

$$\xrightarrow{B(2, 0)} \text{انتقال یافته } B \text{ با بردار } v \Rightarrow B'(0, -5) \rightarrow 2x - 2y = 10$$

۱۳۲- گزینه ۳

این خط فقط در صورتی وجود دارد که صفحه شامل  $d$  و  $A$  خط  $d'$  را قطع کند.

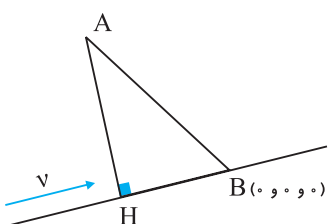
۱۳۳- گزینه ۳

در صورتی  $a+b$  و  $a-b$  هم اندازه‌اند که  $a$  و  $b$  متعامد باشند.

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow (m+1+6) + (6-2m) = 0 \Rightarrow m = 13 \Rightarrow \begin{cases} a+b(15, 5, -1) \\ a-b(-13, -1, -12) \end{cases}$$

$$\cos \theta = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{|a+b||a-b|} = \frac{-104}{314} = \frac{-52}{157}$$

۱۳۴- گزینه ۳



$$AH = \frac{|AB \times v|}{|v|} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ -10 \\ -1 \end{vmatrix} \\ \rightarrow \text{جواب} = \frac{\sqrt{117}}{3} = \sqrt{13} \end{cases}$$