

مؤلف درس، تست‌های تالیفی و تنظیم تست‌های این کتاب: فرهاد حامی

۱. مفهوم دنباله

◆ تعریف دنباله و جمله‌ی عمومی ◆

در این بخش ما با مفهوم دنباله‌ها آشنا می‌شویم. با یک مثال شروع می‌کنیم، فرض کنید می‌خواهید شجره‌نامه‌ی خانوادگی خود را بنویسید. شما دارای یک پدر و مادر و چهار پدر بزرگ و مادر بزرگ و ... هستید، در جدول زیر در هر مرحله اجداد شما نمایش داده شده است.

شماره‌ی مرحله	۱	۲	۳	۴	...
تعداد اجداد	۲	۴	۸	۱۶	...

$\Delta: ۲, ۴, ۸, ۱۶, \dots$

در جدول بالا، تعداد اجداد شما در هر مرحله نوشته شده است، به این گونه اعداد که به دنبال هم نوشته می‌شوند، یک دنباله می‌گوییم. ما می‌توانیم برای دنباله‌ی مطرح شده در بالا، یک الگو یا مدل ریاضی بیابیم و به عنوان مثال بگوئیم، **جد هفتم** ما چند نفر بودند؟ اعداد یک دنباله را معمولاً با a_1, a_2, a_3, \dots نمایش می‌دهند، در مثال بالا فرمولی برحسب شماره‌ی جمله‌ها به صورت $a_n = 2^n$ است که در آن n یک عدد طبیعی است، بنابراین جد هفتم شما $a_7 = 2^7 = 128$ نفرند. همچنین این دنباله را می‌توانیم به شکل دیگری نیز نمایش دهیم، در اینجا هر جمله (به غیر از جمله‌ی اول) دو برابر جمله‌ی قبلی است، یعنی:

$$a_n = 2a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

به این نوع نمایش، **دنباله‌ی بازگشتی** می‌گوییم. در اینجا با شرط $a_1 = 2$ و به ازای $n = 2, 3, 4, \dots$ جملات دیگر مشخص می‌شوند. حال آماده‌ایم که تعریف دقیق‌تری برای دنباله‌ها بیاوریم.

تعریف دنباله: یک دنباله را به صورت تعدادی اعداد به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

که در آن a_1 جمله‌ی اول دنباله، a_2 جمله‌ی دوم و ... و a_n را جمله‌ی عمومی دنباله می‌گوییم.

تذکر ▶ با داشتن جمله‌ی عمومی یک دنباله، از آن جایی که n یک عدد طبیعی است، می‌توانیم هر جمله‌ی دلخواهی از دنباله را بیابیم.

مثال: پنج جمله‌ی اولیه و همچنین جمله‌ی صدم هر یک از دنباله‌های زیر را بیابید.

(a) $a_n = 2n - 1$ (b) $b_n = n^2 - 1$ (c) $c_n = \frac{n}{n+1}$

حل: برای یافتن پنج جمله‌ی اولیه‌ی دنباله، با جایگزین کردن $n = 1, 2, 3, 4, 5$ در فرمول جمله‌ی عمومی، جملات اول تا پنجم به دست می‌آید و همچنین به ازای $n = 100$ ، در جمله‌ی عمومی، جمله‌ی صدم به دست می‌آید.

جمله‌ی عمومی	پنج جمله‌ی اول	جمله‌ی صدم
(a) $a_n = 2n - 1$	۱, ۳, ۵, ۷, ۹	۱۹۹
(b) $b_n = n^2 - 1$	۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴	۹۹۹۹
(c) $c_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$	$\frac{100}{101}$

◆ شناخت الگو ◆

یکی از مهم‌ترین کارها در ریاضی، یافتن الگویی برای یک دنباله است، به‌عنوان مثال در دنباله‌ی روبرو آیا می‌توانیم جمله‌ی عمومی یا الگویی برای آن بیابیم؟ با کمی دقت می‌بینیم که هر جمله‌ی دنباله، مربع شماره‌ی جمله است، یعنی:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$$

پس یک جمله‌ی عمومی برای این دنباله $a_n = n^2$ است.

همچنین توجه داشته باشید که برای همه‌ی دنباله‌ها، ما نمی‌توانیم یک الگو بیابیم، مثلاً برای دنباله‌ی اعداد اول نمی‌توانیم یک فرمول کلی بنویسیم.

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, \dots$$

◆ دنباله‌ی بازگشتی ◆

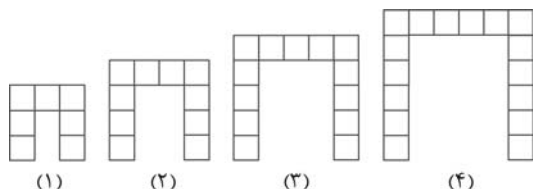
برای بعضی از دنباله‌ها، نمی‌توانیم یک فرمول ساده، برحسب شماره‌ی جملات بنویسیم، اما هر جمله با جمله‌ی قبلی یا جملات قبلی، یک رابطه‌ی معین دارد، به این گونه دنباله‌ها که بین هر جمله با جمله‌ی (جمله‌های) قبلی، رابطه‌ی معینی وجود دارد، دنباله‌ی بازگشتی می‌گوییم.

■ مثال: پنج جمله‌ی اولیه‌ی دنباله‌ی بازگشتی $a_n = 3(a_{n-1} + 2)$ و $a_1 = 1$ را بنویسید.
 ◀ حل:

$$\begin{aligned} a_2 &= 3(a_1 + 2) = 3(1 + 2) = 9 \\ a_3 &= 3(a_2 + 2) = 3(9 + 2) = 33 \\ a_4 &= 3(a_3 + 2) = 3(33 + 2) = 105 \\ a_5 &= 3(a_4 + 2) = 3(105 + 2) = 321 \end{aligned} \Rightarrow \text{جملات : } 1, 9, 33, 105, 321, \dots$$

یافتن یک مدل یا الگوی ریاضی برای پدیده‌ها، طرح‌ها یا آزمایش‌های متوالی، نیاز به سازماندهی و تنظیم اطلاعات دارد، در تنظیم اطلاعات، استفاده از جدول و یا تشکیل دنباله‌های آن، به ما کمک بسیار می‌نماید. این بخش را با مثالی در این مورد به پایان می‌بریم.

■ مثال: مطابق الگوی زیر، چند مربع در مرحله‌ی نهم داریم؟



◀ حل: در مرحله‌ی اول، داده‌ها را سازماندهی می‌کنیم:

مرحله	۱	۲	۳	۴
مقادیر اختلاف	۷	۱۰	۱۳	۱۶
		۳	۳	۳

می‌بینیم که در هر مرحله، سه مربع اضافه می‌شود، بنابراین در مرحله‌ی نهم که ۸ مرحله بعد از مرحله‌ی اول است، $8 \times 3 = 24$ مربع به تعداد مربع‌های اولیه اضافه می‌شود، یعنی در مرحله‌ی نهم $7 + 8 \times 3 = 31$ مربع داریم.

تعریف دنباله و جمله‌ی عمومی

(فصل اول - صفحه‌های ۶۵۲)

۱- مجموع جمله‌های اول و سوم و پنجم دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = n^2 + 1$ برابر است با:

۳۵ (۱) ۳۶ (۲) ۳۷ (۳) ۳۸ (۴)

(آزمون کانون - ۹۲)

۲- جمله $(3n+1)$ ام یک دنباله برابر با $\frac{n^2}{2n+3}$ است. جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟

۱ (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴)

(فصل اول - صفحه‌های ۶۵۲)

۳- مجموع ۴۸ جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ برابر است با:

۶ (۱) ۵ (۲) -۶ (۳) -۵ (۴)

(فصل اول - صفحه‌های ۶۵۲)

۴- حاصلضرب شش جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$ برابر است با:

۱ (۱) ۱ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)

۵- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = bn^2 + cn$ می‌باشد. اگر جملات اول و دوم این دنباله به ترتیب برابر ۳ و ۸ باشند، جمله‌ی دهم آن کدام است؟

(آزمون کانون - ۹۲)

۴۰ (۱) ۸۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۶۰ (۴)

(آزمون کانون - ۸۹)

۶- جمله‌ی چندم دنباله‌ی $a_n = n^2 - 12n + 11$ با جمله‌ی نهم همین دنباله برابر است؟

هفتم (۱) پنجم (۲) چهارم (۳) سوم (۴)

(فصل اول - صفحه‌های ۶۵۲)

۷- چندمین جمله از دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2 - 16}{n+1}$ برابر صفر است؟

۵ (۱) ۴ (۲) ۹ (۳) ۱۶ (۴)

۸- اگر چندجمله‌ی اولیه‌ی یک دنباله به صورت $\dots, -32, -16, -8, 4, -2$ باشد، جمله‌ی عمومی آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟ (فصل اول - صفحه‌های ۶۵۲)

۱ (۱) $a_n = (-1)^{n+1}$ ۲ (۲) $a_n = (-2)^n$ ۳ (۳) $a_n = (-1)^{n+1} 2^n$ ۴ (۴) $a_n = (-1)^{n+1} 2^{n+1}$

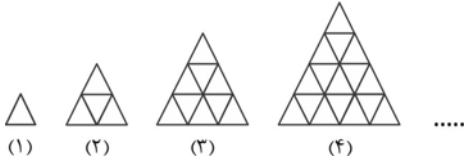
۹- اگر چند جمله‌ی اولیه‌ی یک دنباله به صورت $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$ باشد، جمله‌ی عمومی آن به کدام صورت می‌تواند باشد؟ (فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۲۲)

$a_n = \frac{2n-1}{2n}$ (۴)
 $a_n = \frac{2n+1}{2n}$ (۳)
 $a_n = \frac{2n+1}{n}$ (۲)
 $a_n = \frac{2n-1}{n}$ (۱)

شناخت الگو

(فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۲۲)

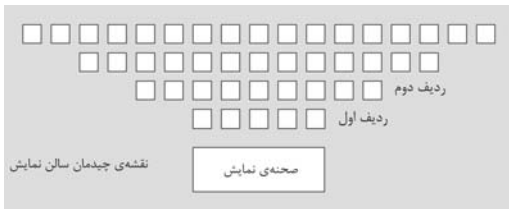
۱۰- مطابق شکل روبه‌رو، در طرح هفتم، چند مثلث کوچک داریم؟



- ۲۷ (۱)
- ۳۵ (۲)
- ۴۹ (۳)
- ۳۶ (۴)

(فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۲۲)

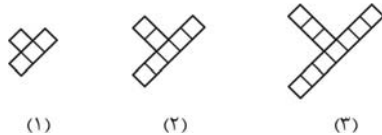
۱۱- شکل زیر، یک سالن تئاتر را نمایش می‌دهد، با توجه به شکل، در ردیف دهم چند صندلی داریم؟



- ۲۷ (۱)
- ۳۶ (۲)
- ۴۱ (۳)
- ۵۰ (۴)

(فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۲۲)

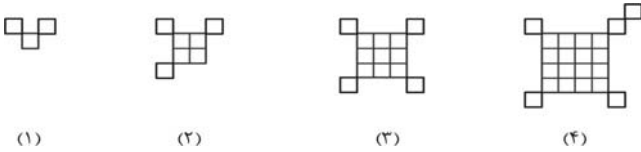
۱۲- برای ساختن حرف y الگوی زیر را داریم، با توجه به این الگو، دهمین y دارای چند مربع است؟



- ۲۹ (۱)
- ۳۰ (۲)
- ۳۱ (۳)
- ۳۲ (۴)

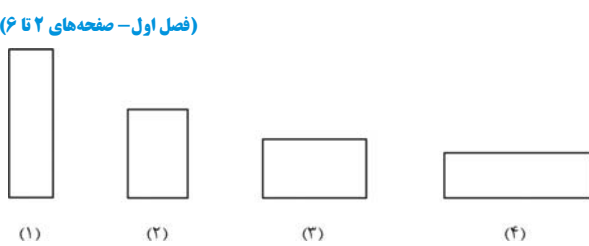
(فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۲۲)

۱۳- در الگوی شکل‌های مقابل، شکل شماره‌ی ۹ چند مربع کوچک دارد؟



- ۹۱ (۱)
- ۸۷ (۲)
- ۸۳ (۳)
- ۷۹ (۴)

۱۴- مطابق شکل زیر، جدولی از مستطیل‌های متمایز با مساحت برابر داده شده است. اگر طول و عرض همه‌ی این مستطیل‌ها اعداد طبیعی باشند، آن‌گاه چند مستطیل خواهیم داشت؟



- ۸ (۱)
- ۹ (۲)
- ۱۲ (۳)
- ۱۵ (۴)

عرض	۱	۲	۳	۴			...
طول	۱۲۰	۶۰	۴۰	۳۰			...

دنباله‌ی بازگشتی

۱۵- در دنباله‌ای، رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+1} = 2a_n - 5$ برقرار است. اگر جمله‌ی دوازدهم مساوی ۱۷ باشد، جمله‌ی دهم آن کدام است؟ (فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۲۲)

10 (۴)
 9 (۳)
 8 (۲)
 7 (۱)

۱۶- رابطه‌ی $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است. اگر $U_1 = U_2 = 1$ باشد، جمله‌ی نهم این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی - ۷۸)

32 (۴)
 33 (۳)
 34 (۲)
 35 (۱)

۱۷- اگر $a_n = 2a_{n-2} + n^2$ ، $(n \geq 3)$ و $a_1 = -1$ و $a_2 = 1$ باشد، جمله‌ی ششم این دنباله کدام است؟ (آزمون کانون - ۹۲)

27 (۴)
 72 (۳)
 85 (۲)
 58 (۱)

۱۸- در دنباله‌ی بازگشتی $a_{n+1} = (n+1)a_n$ و $a_3 = k$ ، نسبت جمله‌ی پنجم به جمله‌ی اول برابر است با:

50 (۴)
 100 (۳)
 120 (۲)
 90 (۱)

۲. دنباله‌ی حسابی (عددی)

◆ تعریف و جمله‌ی عمومی ◆

یک دنباله‌ی حسابی را دنباله‌ای می‌دانیم که هر جمله‌ی آن (به غیر از جمله‌ی اول)، از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید.

یک دنباله‌ی حسابی دنباله‌ای است به شکل:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \dots$$

که در آن a جمله‌ی اول و d قدر نسبت (تفاضل مشترک) دنباله نامیده می‌شود. جمله‌ی عمومی (جمله‌ی n ام) یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n = a + (n-1)d$$

به بیان دیگر دنباله‌ی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ یک دنباله‌ی حسابی است اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{یا} \quad a_r - a_1 = a_r - a_r = a_r - a_r = \dots = d$$

■ مثال: آیا دنباله‌ی $\dots, 11, 8, 5, 2$ یک دنباله‌ی حسابی است؟ جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

◀ حل: چون تفاضل هر جمله از جمله قبل خود مقدار ثابتی است، دنباله‌ی حسابی است:

$$5-2=8-5=11-8=\dots=3 \Rightarrow d=3 > 0, a=2$$

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)3 = 3n-1$$

■ مثال: آیا دنباله‌ی $\dots, -6, -1, 4, 9$ یک دنباله‌ی حسابی است؟ جمله‌ی عمومی آن را بیابید.

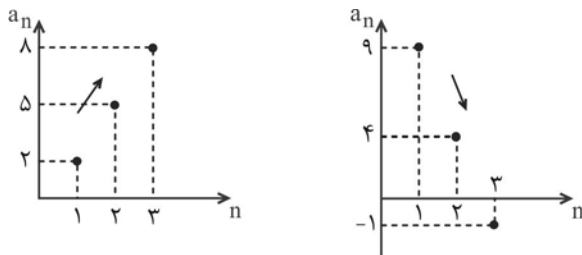
◀ حل: چون تفاضل هر جمله از جمله قبل خود مقدار ثابتی است، دنباله‌ی حسابی است:

$$4-9=-1-4=-6+1=\dots=-5 \Rightarrow d=-5 < 0, a=9$$

$$a_n = a + (n-1)d \Rightarrow a_n = 9 + (n-1)(-5) \Rightarrow a_n = -5n+14$$

تذکره ▶ اگر $d > 0$ ، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند و اگر $d < 0$ باشد، جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند.

به شکل‌های زیر در مورد دو مثال بالا دقت کنید.



تذکره ▶ با توجه به دو نمودار مثال بالا، مشخص می‌شود که جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی، یک عبارت خطی برحسب n است، یعنی جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به شکل کلی $a_n = A + Bn$ است که در آن، ضریب n قدر نسبت دنباله است. (چرا؟)

■ مثال: اگر جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی $a_n = -3n + 11$ باشد، قدر نسبت و جمله‌ی اول آن را بیابید.

◀ حل: قدر نسبت $d = -3$ و جمله‌ی اول با قرار دادن $n = 1$ ، به‌دست می‌آید، پس:

$$a_1 = -3(1) + 11 = 8$$

◆ واسطه‌ی حسابی بین دو عدد ◆

اگر a, b, c ، به‌ترتیب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

◀ نتیجه: سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی را به‌صورت زیر می‌توانیم نمایش دهیم:

$$a-d, a, a+d$$

◆ رابطه‌ی بین جملات ◆

تذکره ▶ اگر a_m و a_n دو جمله‌ی متمایز از یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

برای اثبات: از آنجایی که $a_m = a + (m-1)d$ و $a_n = a + (n-1)d$ ، لذا:

$$a_m - a_n = (a + (m-1)d) - (a + (n-1)d) = (m-n)d \Rightarrow \frac{a_m - a_n}{m - n} = d$$

مثال: اگر جمله‌های پنجم و نوزدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب ۱۵ و ۸۵ باشند، قدر نسبت دنباله را بیابید.

حل:

$$d = \frac{a_{19} - a_5}{19 - 5} = \frac{85 - 15}{14} = 5 \Rightarrow d = 5$$

تذکر: اضافه یا کم کردن یک عدد ثابت به تمامی جملات یک دنباله‌ی حسابی، قدر نسبت دنباله را تغییر نمی‌دهد.

تذکر: اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی غیر صفر ضرب کنیم، قدر نسبت در همان عدد ضرب می‌شود.

$$a, a + d, a + 2d, \dots \Rightarrow \text{قدر نسبت} = d$$

$$ka, k(a + d), k(a + 2d), \dots \Rightarrow \text{قدر نسبت} = k(a + d) - ka = kd$$

می‌بینیم که قدر نسبت در عدد k ضرب می‌شود.

درج چند واسطه‌ی حسابی بین دو عدد

اگر بخواهیم بین دو عدد a و b ، n واسطه‌ی حسابی قرار دهیم که با آن‌ها تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، آن‌گاه قدر نسبت دنباله‌ی حاصل برابر است با:

$$d = \frac{b - a}{n + 1}$$

(توجه کنید که a جمله‌ی اول و b جمله‌ی $(n + 2)$ ام است.)

مثال: اگر بین دو عدد -10 و 34 ، سه عدد قرار دهیم، که این پنج عدد تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، قدر نسبت دنباله‌ی حاصل را بیابید.

حل: در واقع یک دنباله‌ی حسابی داریم که جمله‌ی اول آن $a = -10$ و جمله‌ی آخر آن $a_5 = 34$ است، پس:

$$-10, \square, \square, \square, 34$$

$$a_5 = a + 4d \Rightarrow 34 = -10 + 4d \Rightarrow d = \frac{44}{4} = 11$$

تعریف و جمله‌ی عمومی

(آزاد انسانی - ۶۸)

۱۹- کدام یک از رشته‌های زیر، دنباله‌ی حسابی است؟

$$(1) \frac{1}{2} \text{ و } 1 \quad (2) \frac{1}{5} \text{ و } -1 \quad (3) 1 - \sqrt{2} \text{ و } -2 \text{ و } 1 - \sqrt{2} \quad (4) 3 - \sqrt{3} \text{ و } 2 \text{ و } 1 + \sqrt{3}$$

(سراسری انسانی - ۸۰)

۲۰- در دنباله‌ی حسابی ... و y و 35 و x و 125 ، عدد y کدام است؟

$$(1) -10 \quad (2) -5 \quad (3) \text{ صفر} \quad (4) 5$$

(سراسری تجربی - ۷۱)

۲۱- اگر $a + 14$ و 21 و a سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a باشند، جمله‌ی چهارم آن کدام است؟

$$(1) 28 \quad (2) 35 \quad (3) 43 \quad (4) 49$$

(آزاد پزشکی - ۸۰)

۲۲- کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی حسابی است؟

$$(1) t_n = 8n + 1 \quad (2) t_n = n^2 \quad (3) t_n = \frac{1}{n} \quad (4) t_n = n^2 + n$$

(سراسری تجربی - ۶۸)

۲۳- در یک دنباله‌ی حسابی $t_1 = 4$ و $t_{n+1} = t_n + 3$ ، جمله‌ی n ام آن چیست؟

$$(1) n + 5 \quad (2) 3n + 1 \quad (3) 2n + 3 \quad (4) 4n - 1$$

واسطه‌ی حسابی بین دو عدد

(سراسری ریاضی - ۸۴)

۲۴- اعداد $2P + 3$ ، $2P + 4$ و $5P - 1$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی عددی هستند. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

$$(1) 4 \quad (2) 5 \quad (3) 6 \quad (4) 7$$

(فصل اول - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

۲۵- اگر اعداد x ، y و z تشکیل دنباله عددی و اعداد $x + 1$ ، $2y$ و $z + 3$ نیز تشکیل دنباله عددی بدهند، y کدام است؟

$$(1) 1 \quad (2) 2 \quad (3) 3 \quad (4) 4$$

(فصل اول - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۶)

۲۶- اعداد $3x - 1$ ، $x + 5$ و $4x + 1$ به ترتیب جملات اول، سوم و پنجم از دنباله‌ی حسابی‌اند. جمله‌ی چهارم دنباله کدام است؟

$$(1) 7 \quad (2) 6 \quad (3) 5 \quad (4) 8$$

۲۷- اگر مجموع سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۱ و مجموع مربعات این سه جمله، برابر ۱۶۵ باشد، عدد کوچک‌تر برابر کدام است؟

(آزمون کانون - ۸۹)

$$(1) 7 \quad (2) 10 \quad (3) 14 \quad (4) 4$$

رابطه‌ی بین جملات

- ۲۸- در یک دنباله‌ی حسابی $a_7 - a_{11} = 12$ ، قدر نسبت کدام است؟
 (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳
 (سراسری ریاضی - ۶۵)
- ۲۹- اگر a_n جمله‌ی n ام یک دنباله‌ی حسابی باشد، $a_7 - a_8$ برابر است با:
 (۱) $a_{25} - a_{10}$ (۲) $a_{30} - a_{10}$ (۳) $a_{35} - a_{10}$ (۴) $a_{40} - a_{10}$
 (آزاد ریاضی - ۷۰)
- ۳۰- در دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی $a_n = (k-2)n^2 + (k+1)n + k^2$ ، جمله‌ی دهم و قدرنسبت دنباله به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟
 (۱) ۳ و ۳۱ (۲) ۳ و ۳۱ (۳) ۲ و ۳۴ (۴) ۳ و ۳۴
 (آزمون کانون - ۹۲)
- ۳۱- اگر به قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی ۲ واحد اضافه کنیم، به جمله‌ی پنجم دنباله‌ی حاصل چند واحد اضافه می‌شود؟
 (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۸ (۴) ۱۰
 (سراسری انسانی - ۷۶)
- ۳۲- زوایای داخلی یک پنج ضلعی محدب به ترتیب از کوچک به بزرگ تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر مجموع آن‌ها ۵۴۰ درجه و بزرگ‌ترین آن‌ها ۱۳۶ درجه باشد، قدر نسبت این دنباله چند درجه است؟
 (۱) ۱۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰
 (آزمون کانون - ۹۲)
- ۳۳- در دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت مثبت، $a_1 a_3 = 7$ و $a_2 + a_5 = 1$ می‌باشند. چند جمله‌ی دنباله، منفی است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۱
 (آزمون کانون - ۸۹)
- ۳۴- در دنباله حسابی a_1, a_2, \dots, a_{15} ، حاصل $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{14} a_{15}}$ کدام است؟ $(1 \leq i \leq 15, a_i \neq 0)$.
 (۱) $\frac{14}{a_1 a_{15}}$ (۲) $\frac{15}{a_1 a_{15}}$ (۳) $\frac{14 a_1 a_{15}}{15}$ (۴) $\frac{15 a_1 a_{15}}{14}$
 (فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۱۰)
- ۳۵- چندمین جمله از دنباله‌ی حسابی \dots و ۸ و ۵ و ۲ برابر ۵۶ است؟
 (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱
 (سراسری ریاضی - ۷۱)
- ۳۶- تعداد صندوق‌ها در ردیف‌های یک سینما، یک دنباله‌ی عددی تشکیل می‌دهند، اگر از ردیف جلو بشماریم ردیف دهم ۱۰۷ صندوقی و ردیف بیستم ۲۰۷ صندوقی دارد، اولین ردیف چند صندوقی دارد؟
 (۱) ۷ (۲) ۱۲ (۳) ۱۷ (۴) ۲۲
 (فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۱۰)
- ۳۷- قطار سریع‌السیر به طور آزمایشی، فاصله‌ی دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است. طبق برنامه‌ی تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود تا مدت زمان پیمودن این مسافت به ۲ ساعت پیش‌بینی شده برسد، تعداد نوبت‌های آزمایشی (با احتساب بار اول) کدام است؟
 (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵
 (سراسری انسانی - ۸۶)
- ۳۸- محصول تولیدی لوله‌های فولادی کارخانه‌ای، از آغاز سال ۱۳۶۸ تا پایان سال ۱۳۷۱، ۱۱ میلیون تن بوده است. اگر تولید لوله‌های فولادی هر سال افزایش ثابتی داشته باشد و در دو سال آخر این دوره، ۱/۲ میلیون تن لوله، بیش از دو سال اول دوره تولید شده باشد، میزان تولید کارخانه در سال ۱۳۶۸ چند میلیون تن بوده است؟
 (۱) ۱/۹ (۲) ۲/۱ (۳) ۲/۳ (۴) ۲/۹
 (فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۱۰)
- ۳۹- در دنباله‌ی عددی \dots و ۲۰۴ و ۲۰۸، جمله‌ی چندم صفر است؟
 (۱) ۵۲ (۲) ۵۱ (۳) ۵۴ (۴) ۵۳
 (آزاد تجربی - ۷۷)
- ۴۰- دنباله‌ی حسابی با جملات $a_1 = 170$ و $a_2 = 161$ ، چند جمله‌ی مثبت دارد؟
 (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۱۹
 (آزاد پزشکی - ۸۴)
- ۴۱- دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول ۶۳ و قدر نسبت (-4) ، چند جمله‌ی مثبت دارد؟
 (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸
 (آزاد ریاضی صبح - ۸۴)
- ۴۲- در دنباله‌ی عددی ۷، ۱۴، ۲۱، \dots ، ۱۰۵، چند جمله وجود دارد؟
 (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۷
 (فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۱۰)
- ۴۳- چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۴ برابر ۱ باشد؟
 (۱) ۲۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۸ (۴) ۲۲
 (فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۱۰)
- ۴۴- در یک دنباله‌ی عددی، جمله‌ی اول ۱۴-، جمله‌ی آخر ۴۰ و تعداد جمله‌ها ۹۱ است، این دنباله چند جمله‌ی مثبت دارد؟
 (۱) ۲۴ (۲) ۳۳ (۳) ۴۵ (۴) ۶۷
 (فصل اول - صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

۴۵- می‌خواهیم نردبانی بسازیم که طول پله‌های آن تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، اگر پله‌ی اول آن ۵۶ سانتی‌متر و پله‌ی آخر آن ۳۶ سانتی‌متر باشد و ۷ پله

(فصل اول - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۰)

$$4 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad 3/5 \quad (2) \quad 2/5 \quad (1)$$

۴۶- قیمت خرید اولیه‌ی یک دستگاه کارت‌خوان آزمون‌های تستی ۱۲/۵ میلیون تومان است، که سالانه ۱/۵ میلیون تومان از قیمت آن کم می‌شود، در ششمین

(فصل اول - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۰)

$$3/5 \quad (4) \quad 7 \quad (3) \quad 5 \quad (2) \quad 6 \quad (1)$$

۴۷- اگر مجموع جملات اول، پنجم و نهم یک دنباله‌ی عددی ۳۶ و جمله‌ی پانزدهم، برابر ۴۲ باشد، آن‌گاه قدر نسبت چقدر است؟

(آزاد ریاضی - ۷۶)

$$4 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad \frac{4}{3}$$

۴۸- در یک دنباله عددی، مجموع جملات اول، دوم و سوم برابر ۱۲ و مجموع جملات هفتم، هشتم و نهم، برابر ۴۸ است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

(آزاد پزشکی - ۸۷)

$$\frac{1}{2} \quad (4) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad \frac{3}{2} \quad (1)$$

۴۹- در یک دنباله‌ی حسابی $a_n + a_k = a_{n-1}$ ، در این دنباله $\frac{a_1}{d}$ کدام است؟ ($d \neq 0$)

(آزاد ریاضی - ۷۳)

$$2n - 4 \quad (4) \quad n - k \quad (3) \quad -k \quad (2) \quad k \quad (1)$$

۵۰- در یک دنباله‌ی حسابی $2a_1 + a_2 - 3a_3 = 10$ ، قدرنسبت این دنباله چقدر است؟

(آزاد پزشکی صبح - ۹۰)

$$-2 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad -\frac{5}{4} \quad (2) \quad \frac{5}{4} \quad (1)$$

۵۱- در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 = 1$ و $a_2 = \frac{5}{3}$ ، حاصل $\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{23} + a_{25} + a_{27}}$ کدام است؟

(آزاد ریاضی عصر - ۸۵)

$$\frac{21}{17} \quad (4) \quad \frac{7}{17} \quad (3) \quad \frac{105}{71} \quad (2) \quad \frac{35}{71} \quad (1)$$

۵۲- در یک دنباله‌ی حسابی، بین جملات ۸، رابطه‌ی $5a_3 = 8a_4 + 3a_5 - 2a_6$ برقرار است. حاصل $5a_1 - 3a_2 - 2a_3$ کدام است؟

(آزاد ریاضی صبح - ۹۰)

$$8 \quad (4) \quad \frac{8}{7} \quad (3) \quad -\frac{8}{7} \quad (2) \quad -8 \quad (1)$$

۵۳- جمله‌ی اول یک دنباله‌ی عددی ۱- و جمله‌ی سوم آن ۹ است، جمله‌ی پانزدهم این دنباله کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۲)

$$71 \quad (4) \quad 69 \quad (3) \quad 66 \quad (2) \quad 64 \quad (1)$$

۵۴- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول برابر ۱۰ و مجموع جملات پنجم و ششم برابر ۱۱ است. جمله‌ی چهارم کدام است؟

(آزاد پزشکی عصر - ۸۹)

$$13 \quad (4) \quad 8 \quad (3) \quad 7 \quad (2) \quad 6 \quad (1)$$

۵۵- تفاضل جمله‌ی دهم از جمله‌ی دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی، ۵ و مجموع دو جمله‌ی دهم و دوازدهم، ۲۵ است، جمله‌ی بیست و یکم این دنباله کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

$$28/5 \quad (4) \quad 37/5 \quad (3) \quad 36 \quad (2) \quad 35 \quad (1)$$

۵۶- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد، جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

$$9 \quad (4) \quad 8/5 \quad (3) \quad 8 \quad (2) \quad 7/5 \quad (1)$$

۵۷- در یک دنباله‌ی حسابی $a_m = k$ و $a_k = m$ است. a_{m+k} کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (4) \quad m \times k \quad (3) \quad \frac{m+k}{2} \quad (2) \quad m+k \quad (1)$$

۵۸- در یک دنباله‌ی حسابی $a_k = p$ و $a_p = k$ ، حاصل $a_{k+p} + a_{p-1}$ کدام است؟ ($p, k > 2$)

(فصل اول - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۰)

$$p+k-1 \quad (4) \quad \text{صفر} \quad (3) \quad p+k-2 \quad (2) \quad p+k+1 \quad (1)$$

۵۹- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هشتم k برابر جمله‌ی پنجم است، قدرنسبت چه کسری از جمله‌ی پنجم است؟

(فصل اول - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۰)

$$\frac{1-k}{k} \quad (4) \quad \frac{k-1}{3} \quad (3) \quad \frac{1-k}{3k} \quad (2) \quad \frac{k}{1-k} \quad (1)$$

۶۰- در یک دنباله‌ی عددی، جمله‌ی صد و یازدهم ۱۳۵ و جمله‌ی هفتاد و یکم ۷۵ است. این دنباله چند جمله‌ی منفی دارد؟

(فصل اول - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۰)

$$22 \quad (4) \quad 21 \quad (3) \quad 19 \quad (2) \quad 20 \quad (1)$$

۶۱- رابطه‌ی $a_{n+1} = -2 + a_n$ همواره بین جمله‌های دنباله‌ی $\{a_n\}$ برقرار است. اگر جمله‌ی پنجم این دنباله برابر ۲۰ باشد، آنگاه این دنباله چند جمله‌ی مثبت

(آزمون کانون - ۹۰)

$$16 \quad (4) \quad 15 \quad (3) \quad 14 \quad (2) \quad 13 \quad (1)$$

۶۲- در یک دنباله‌ی عددی، مجموع چهار جمله اول ۲۶ و مجموع چهار جمله سوم ۱۲۲ است، جمله‌ی دوم آن کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۵ (۴) ۹

۶۳- در دنباله‌ی حسابی $a_1 = 5$ و $d = 3$ ، جمله‌ی n ام چقدر از جمله‌ی n ام دنباله‌ی حسابی $a'_1 = 4$ و $d' = 3$ بزرگ‌تر است؟
 (۱) ۱ (۲) $n+1$ (۳) n (۴) $n-1$

۶۴- دنباله‌های عددی $(3, 7, 11, \dots)$ و $(4, 7, 10, \dots)$ چند جمله‌ی مساوی کوچک‌تر از ۵۰ دارند؟
 (۱) چهار جمله (۲) پنج جمله (۳) سه جمله (۴) دو جمله

۶۵- بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a_1 = 3$ و قدر نسبت $d_1 = 2$ با بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $b_1 = 2$ و قدر نسبت $d_2 = 3$ ، چند جمله‌ی مساوی دارند؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۶۶- در دنباله‌ی حسابی \dots و $\frac{7}{3}$ و $\frac{5}{3}$ و ۱ جمله‌ی اول را با $\frac{1}{3}$ و جمله‌ی دوم را با $\frac{7}{3}$ و جمله‌ی سوم را با $\frac{6}{3}$ جمع می‌کنیم. جمله‌ی شصت و پنجم دنباله جدید چقدر است؟
 (۱) $\frac{139}{3}$ (۲) ۱۲۵ (۳) ۲۵ (۴) ۲۴

۶۷- در دنباله‌ی حسابی \dots و $\frac{7}{4}$ و ۲، جملات a_4 و a_8 و a_{12} و a_{16} تشکیل دنباله‌ی حسابی دیگری می‌دهند. قدر نسبت این دنباله، چقدر است؟
 (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) -۱ (۳) -۴ (۴) $\frac{1}{4}$

۶۸- دو دوندی A و B در یک پیست مسابقه و در دو خط موازی حرکت می‌کنند. دوندی A، از دوندی B، ۱۱ متر عقب‌تر است. اگر دوندی A، هر ثانیه ۴ متر و دوندی B هر ثانیه ۳ متر بدونند، بعد از چند ثانیه، دوندی A به دوندی B می‌رسد؟
 (۱) ۱۰ ثانیه (۲) ۱۱ ثانیه (۳) ۱۲ ثانیه (۴) ۱۳ ثانیه

۶۹- اگر $x \neq y$ و هر یک از دنباله‌های (x, a_1, a_2, a_3, y) و $(x, b_1, b_2, b_3, b_4, y)$ تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، حاصل $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$ برابر است با:
 (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۷۰- اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه با ضلع کوچکتر a ، طول اضلاع را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم یک دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند. محیط این مثلث کدام است؟
 (۱) $\frac{10a}{3}$ (۲) $3a$ (۳) $\frac{11a}{3}$ (۴) $4a$

۷۱- در دنباله‌ی حسابی $a_1 = 3 + \sqrt{2}$ و $a_2 = 5 + \sqrt{2}$ ، مجموع چهار جمله چهارم چقدر از مجموع چهار جمله دوم بیشتر است؟
 (۱) ۸ (۲) ۶۴ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۷۲- در دنباله‌ی حسابی $3, 5\sqrt{2} + 3, \dots, 3\sqrt{2} + 5, 4(\sqrt{2} + 1), \dots$ نسبت جمله‌ی چهاردهم به جمله‌ی ششم کدام است؟
 (۱) $3 - \sqrt{2}$ (۲) $\frac{3 - \sqrt{2}}{2}$ (۳) $\frac{4 - \sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{5 - 2\sqrt{2}}{2}$

درج چند واسطه‌ی حسابی بین دو عدد

۷۳- بین اعداد ۱۲ و ۵۲، سه واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. مجموع این سه واسطه‌ی حسابی چقدر است؟
 (۱) ۶۰ (۲) ۶۴ (۳) ۶۸ (۴) ۷۲

۷۴- بین دو عدد ۲ و ۱۲ سه عدد قرار داده‌ایم که با این دو عدد، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی صعودی بدهند، جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟
 (۱) ۱۶ (۲) ۱۷ (۳) $14/5$ (۴) $15/5$

۷۵- جمله‌ی اول و هفتم یک دنباله‌ی عددی ۱۱ و ۳۵ است. در دنباله‌ی عددی دیگری بین اعداد ۳۸ و ۱۳ چند واسطه‌ی عددی می‌توان قرار داد تا جمله‌ی چهارم دو دنباله، برابر شوند؟
 (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۵ (۴) ۴

۷۶- بین دو عدد ۷ و ۵۵ به تعداد هفت جمله طوری نوشته شده است که دنباله‌ی حسابی تشکیل شود، جمله‌ی وسط کدام است؟
 (۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴) ۳۳

پانخ فصل اول

پانخ تست‌های گلور: حسین حاجیلو- فریدون ساسی- محمد رضا کتکچی بیرق
پانخ تست‌های تالیفی، آزمون‌های کانون و سخن: فریادحای
تیرین‌های کتاب درسی: فریادحای- حمید علیزاده

۱- گزینه‌ی «۴»

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2 \text{ و } a_2 = 2^2 + 1 = 5$$

$$\text{و } a_3 = 3^2 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 5 + 10 = 17$$

۲- گزینه‌ی «۳»

$$a_{3n+1} = \frac{n^2}{2n+3}, \quad 3n+1=7 \Rightarrow 3n=6 \Rightarrow n=2$$

$$a_7 = a_{3 \times 2 + 1} = \frac{2^2}{2 \times 2 + 3} = \frac{4}{7}$$

۳- گزینه‌ی «۳»

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{48}$$

$$= (\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - \sqrt{4}) + \dots + (\sqrt{48} - \sqrt{49})$$

$$= \sqrt{1} - \sqrt{49} = 1 - 7 = -6$$

۴- گزینه‌ی «۲»

جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & -\frac{4}{5} & \frac{5}{6} & -\frac{6}{7} \end{array}$$

لذا:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{-2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{-4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{-6}{7} = \frac{-1}{7}$$

۵- گزینه‌ی «۳»

$$a_n = bn^2 + cn \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b + c \\ a_2 = 4b + 2c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = b + c \\ 8 = 4b + 2c \end{cases} \Rightarrow b = 1, c = 2$$

$$\Rightarrow a_n = n^2 + 2n \xrightarrow{n=10} a_{10} = (10)^2 + 2(10) = 120$$

۶- گزینه‌ی «۴»

$$a_n = n^2 - 12n + 11 \Rightarrow a_9 = 9^2 - 12 \times 9 + 11 = -16$$

$$a_n = n^2 - 12n + 11 = -16 \Rightarrow n^2 - 12n + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (n-3)(n-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 9 \end{cases}$$

همان‌طور که دیده می‌شود، جمله‌های سوم و نهم این دنباله با یکدیگر برابر هستند.

۷- گزینه‌ی «۲»

باید شماره‌ی جمله‌ای را بیابیم که در آن $a_n = 0$ ، پس

$$0 = \frac{n^2 - 16}{n+1} \Rightarrow n^2 - 16 = 0 \Rightarrow n = 4 \text{ یا } n = -4$$

پس $n = 4$ است. یعنی جمله‌ی چهارم برابر صفر است.

۸- گزینه‌ی «۲»

جملات این دنباله، توان‌های متوالی عدد ۲ هستند، از طرفی یک در میان علامتشان عوض می‌شود، پس جمله‌ی عمومی آن به‌صورت $a_n = (-2)^n$ یا $a_n = (-1)^n 2^n$ خواهد بود.

۹- گزینه‌ی «۴»

توجه می‌کنیم که صورت و مخرج کسرها به ترتیب اعداد فرد و زوج طبیعی متوالی هستند، اعداد فرد و زوج طبیعی متوالی را با $2n-1$ و $2n$ نمایش می‌دهیم که در آن $n \in \mathbb{N}$ ، پس جمله‌ی عمومی آن به‌صورت $a_n = \frac{2n-1}{2n}$ می‌تواند باشد.

۱۰- گزینه‌ی «۳»

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1 = 1^2 & 4 = 2^2 & 9 = 3^2 & 16 = 4^2 & & 49 = 7^2 \end{array}$$

در هر طرح، تعداد مثلث‌ها، مربع شماره‌ی طرح است. پس در طرح هفتم ۴۹ مثلث داریم.

۱۱- گزینه‌ی «۳»

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{10} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & 5+1 \times 4 & 5+2 \times 4 & 5+3 \times 4 & & 5+9 \times 4 = 41 \end{array}$$

پس در ردیف دهم ۴۱ صندلی داریم.

۱۲- گزینه‌ی «۳»

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	...
تعداد مربع‌ها	۴	۷	۱۰	...

با توجه به جدول در هر مرحله ۳ مربع اضافه می‌شود پس در مرحله‌ی دهم $4 + 9(3) = 31$ مربع داریم.

۱۳- گزینه‌ی «۱»

در هر مرحله تعداد مربع‌های وسط، مربع شماره‌ی مرحله و تعداد گوشه‌ها، یک واحد بیش‌تر از شماره‌ی شکل است، یعنی جمله‌ی عمومی آن به‌صورت $a_n = n^2 + (n+1)$ است، پس $a_9 = 9^2 + 10 = 91$.

۱۴- گزینهی «۱»

چون مساحت مستطیل برابر است با حاصل ضرب طول در عرض پس
 $xy = ۱۲۰$ یا $y = \frac{۱۲۰}{x}$ بنابراین خواهیم داشت:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۸	۱۰
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
y	۱۲۰	۶۰	۴۰	۳۰	۲۴	۲۰	۱۵	۱۲

۱۵- گزینهی «۲»

$$n = ۱۱ \rightarrow a_{۱۲} = 2a_{۱۱} - ۵ \rightarrow ۱۷ = 2a_{۱۱} - ۵ \rightarrow a_{۱۱} = ۱۱$$

$$n = ۱۰ \rightarrow a_{۱۱} = 2a_{۱۰} - ۵ \rightarrow ۱۱ = 2a_{۱۰} - ۵ \rightarrow a_{۱۰} = ۸$$

۱۶- گزینهی «۲»

دنباله‌ی داده شده، دنباله‌ی فیبوناتچی است، در این دنباله هر جمله از جمله‌ی سوم به بعد، برابر است با مجموع دو جمله‌ی ماقبل آن.

$$(U_{n+2} = U_{n+1} + U_n, U_1 = U_2 = ۱)$$

از طرفی دو جمله‌ی اول و دوم آن داده شده، پس جملات دنباله به صورت زیر خواهند بود:

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ...

که جمله‌ی نهم دنباله $U_9 = ۳۴$ است.

۱۷- گزینهی «۳»

با توجه به جمله‌ی عمومی دنباله نیازی به یافتن جملات سوم و پنجم نیست، داریم:

$$a_۴ = 2a_۳ + ۴^2 = ۲ + ۱۶ = ۱۸$$

$$a_۶ = 2a_۴ + ۶^2 \Rightarrow a_۶ = ۳۶ + ۳۶ = ۷۲$$

۱۸- گزینهی «۲»

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1) \Rightarrow \frac{a_۵}{a_۴} = ۵ \text{ و } \frac{a_۳}{a_۲} = ۳$$

$$\frac{a_۵}{a_۱} = \frac{a_۵}{a_۴} \times \frac{a_۴}{a_۳} \times \frac{a_۳}{a_۲} \times \frac{a_۲}{a_۱} = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۱۲۰$$

۱۹- گزینهی «۴»

در دنباله حسابی، تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی، مقدار ثابتی است.

۲۰- گزینهی «۱»

در دنباله حسابی، تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی، مقدار ثابتی است. بنابراین باید:

$$x - ۱۲۵ = ۳۵ - x \Rightarrow 2x = ۱۶۰ \Rightarrow x = ۸۰$$

و

$$۳۵ - x = y - ۳۵ \xrightarrow{x=۸۰} ۳۵ - ۸۰ = y - ۳۵ \Rightarrow y = -۱۰$$

۲۱- گزینهی «۲»

$a, 21, a+14$
 می‌دانیم در دنباله حسابی، تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی برابر است، پس:
 $(a+14) - 21 = 21 - a \Rightarrow a = 14$
 پس جملات دنباله‌ی حسابی فوق به صورت مقابل است: ۱۴ و ۲۱ و ۲۸
 با توجه به اینکه قدر نسبت این دنباله برابر ۷ است، لذا جمله‌ی چهارم دنباله‌ی فوق، ۳۵ خواهد بود.

۲۲- گزینهی «۱»

می‌دانیم در دنباله‌ی عددی، حاصل $t_{n+1} - t_n$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، عددی ثابت است که به آن قدرنسبت دنباله گویند. در گزینه‌ی (۱) داریم:

$$\left. \begin{aligned} t_n &= 8n + 1 \\ t_{n+1} &= 8(n+1) + 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow t_{n+1} - t_n = 8(n+1) + 1 - 8n - 1 = 8$$

در سایر گزینه‌ها حاصل $t_{n+1} - t_n$ عددی ثابت نیست.

۲۳- گزینهی «۲»

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + 3 \\ t_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{n+1} - t_n = 3 \\ t_1 = 4 \end{cases}$$

اما می‌دانیم $t_{n+1} - t_n = d$ پس:

$$\begin{cases} t_1 = 4 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow t_n = 4 + (n-1)(3) \Rightarrow t_n = 3n + 1$$

۲۴- گزینهی «۴»

نکته شرط این که a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله عددی باشند، آن است که $2b = a + c$ که b را واسطه‌ی عددی بین a و c می‌نامیم.

بنابراین:

$$2(3P + 4) = (2P + 3) + (5P - 1)$$

$$6P + 8 = 7P + 2 \Rightarrow P = 6 \Rightarrow \text{جملات دنباله: } ۱۵, ۲۲, ۲۹$$

$$\Rightarrow d = 22 - 15 \Rightarrow d = 7$$

۲۵- گزینهی «۲»

با توجه به نکته داریم:

$$\begin{cases} 2y = x + z \\ 4y = x + 1 + z + 3 \end{cases} \Rightarrow 4y = 2y + 4 \Rightarrow y = 2$$

۲۶- گزینهی «۴»

$$2(x+5) = 3x-1+4x+1 \Rightarrow 2x+10 = 7x \Rightarrow x = 2$$

جملات: $\frac{9+y}{2} = 8 \Rightarrow$ جمله چهارم $\Rightarrow 9$ و 7 و 5 : جملات

↓ ↓ ↓
پنجم سوم اول

۲۷- گزینهی «۴»

اگر سه عدد را به صورت $x-d, x, x+d$ فرض کنیم، داریم:

$$(x-d) + x + (x+d) = 21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

$$(y-d)^2 + y^2 + (y+d)^2 = 165$$

$$\Rightarrow 49 + d^2 - 14d + 49 + 49 + d^2 + 14d = 165$$

$$\Rightarrow 147 + 2d^2 = 165 \Rightarrow d = \pm 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = +3 \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد}} x-d = 7-3 = 4 \\ d = -3 \xrightarrow{\text{کوچکترین عدد}} x+d = 7+(-3) = 4 \end{cases}$$

۲۸- گزینهی «۱»

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

در دنباله حسابی داریم:

پس:

$$d = \frac{a_7 - a_{11}}{7 - 11} = \frac{۱۲}{-۴} = -۳$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{d} \left(\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} + \dots + \frac{a_{15} - a_{14}}{a_{14} a_{15}} \right) \\
 &= \frac{1}{d} \left(\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{14}} - \frac{1}{a_{15}} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{15}} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{a_{15} - a_1}{a_1 a_{15}} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{14d}{a_1 a_{15}} \right) \\
 &= \frac{14}{a_1 a_{15}}
 \end{aligned}$$

۳۵- گزینهی «۲»

... و ۸ و ۵ و ۲

شماره‌ی جمله‌ای را می‌خواهیم که مقدار آن ۵۶ است. لذا:

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ d = 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow 56 = 2 + (n-1)3$$

$$\Rightarrow 56 = 2 + 3n - 3 \Rightarrow 3n = 57 \Rightarrow n = 19$$

۳۶- گزینهی «۳»

یک دنباله عددی داریم که در آن $a_1 = 107$ و $a_{20} = 207$ است. پس:

$$\begin{cases} a_1 + 9d = 107 \\ a_1 + 19d = 207 \end{cases} \Rightarrow 10d = 100 \Rightarrow d = 10$$

$$\Rightarrow a_1 + 9(10) = 107 \Rightarrow a_1 = 17$$

(پس ردیف اول ۱۷ صندلی دارد)

۳۷- گزینهی «۴»

میزان زمان‌های پیموده شده توسط قطار، تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت (۵-) می‌دهد. در بار اول، زمان پیموده شده ۲۴۰ دقیقه و در بار n ام زمان طی شده ۱۲۰ دقیقه است، باید n را محاسبه کنیم.

$$a_1 = 240, \quad d = -5, \quad a_n = 120, \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$120 = 240 - 5n + 5 \Rightarrow 5n = 245 - 120$$

$$\Rightarrow 5n = 125 \Rightarrow n = \frac{125}{5} = 25$$

۳۸- گزینهی «۳»

میزان تولید لوله‌های فولادی در کارخانه در سال ۱۳۶۸ را، برابر a میلیون تن می‌گیریم و فرض می‌کنیم تولید هر سال نسبت به سال قبل، d میلیون تن افزایش یابد. در این صورت، تولید این چهار سال برحسب میلیون تن چنین است:

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d$$

میزان تولید در دو سال آخر برابر $2a+5d$ و در دو سال اول $2a+d$ میلیون تن است، بنابراین:

$$(2a+5d) - (2a+d) = 1/2 \Rightarrow d = 0/3$$

چون مجموع تولید چهار سال ۱۱ میلیون تن بوده پس:

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) = 11 \Rightarrow 4a + 6d = 11$$

$$\Rightarrow 4a + 6 \times 0/3 = 11 \Rightarrow a = 2/3$$

۲۹- گزینهی «۱»

$$a_{20} - a_5 = (a_1 + 19d) - (a_1 + 4d) = 15d$$

در گزینه‌ها:

$$۱) \quad a_{25} - a_{10} = (a_1 + 24d) - (a_1 + 9d) = 15d$$

$$۲) \quad a_{30} - a_{15} = (a_1 + 29d) - (a_1 + 14d) = 15d$$

$$۳) \quad a_{35} - a_{20} = (a_1 + 34d) - (a_1 + 19d) = 15d$$

$$۴) \quad a_{40} - a_{25} = (a_1 + 39d) - (a_1 + 24d) = 15d$$

۳۰- گزینهی «۴»

می‌دانیم جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d برابر با $a_n = a_1 + (n-1)d$ است. پس ضریب n^2 در جمله‌ی عمومی برابر با صفر است. داریم:

$$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow a_n = 3n + 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ a_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow d = 10 - 7 = 3$$

$$a_{10} = a_1 + 9d \Rightarrow a_{10} = 7 + 27 = 34$$

۳۱- گزینهی «۳»

$$t_5 = t_1 + 4d$$

$$d' = d + 2$$

$$t'_5 = t_1 + 4(d+2) \Rightarrow t'_5 = t_1 + 4d + 8 \Rightarrow t'_5 = t_5 + 8$$

بنابراین به جمله‌ی پنجم ۸ واحد اضافه می‌شود.

۳۲- گزینهی «۱»

زوایای داخلی پنج ضلعی که به ترتیب از کوچک به بزرگ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند را به صورت $a, a+d, a+2d, a-d, a-2d$ می‌نویسیم، داریم:

$$(a-2d) + (a-d) + (a) + (a+d) + (a+2d) = 540^\circ$$

$$\Rightarrow 5a = 540^\circ \Rightarrow a = 108^\circ$$

$$a + 2d = 136^\circ \Rightarrow 108^\circ + 2d = 136^\circ$$

$$\Rightarrow 2d = 136^\circ - 108^\circ \Rightarrow 2d = 28^\circ \Rightarrow d = 14^\circ$$

۳۳- گزینهی «۱»

$$a_2 + a_5 = 1 \Rightarrow (a_1 + d) + (a_1 + 4d) = 1$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 5d = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1-5d}{2} \quad (۱)$$

$$a_1 a_2 = 7 \Rightarrow a_1(a_1 + d) = 7$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 2a_1 d = 7 \xrightarrow{(۱)} \left(\frac{1-5d}{2} \right)^2 + (1-5d)d = 7$$

$$\Rightarrow 1 + 25d^2 - 10d + 4d - 20d^2 = 7$$

$$\Rightarrow 5d^2 - 6d - 27 = 0 \Rightarrow (5d+9)(d-3) = 0$$

$$\xrightarrow{d>0} d = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{1-15}{2} = -7$$

$$-7, -4, -1, 2, \dots$$

بنابراین این دنباله تنها سه جمله‌ی منفی دارد.

۳۴- گزینهی «۱»

می‌دانیم $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{15} - a_{14} = d$ پس:

$$\text{عبارت} = \frac{1}{d} \left(\frac{d}{a_1 a_2} + \frac{d}{a_2 a_3} + \dots + \frac{d}{a_{14} a_{15}} \right)$$

۴۶- گزینهی «۲»

در واقع یک دنباله‌ی حسابی داریم که در آن $a = 12/5$ و $d = -1/5$ است و a_6 را می‌خواهیم، لذا:

$$a_6 = a + 5d = 12/5 + 5(-1/5) = 5$$

۴۷- گزینهی «۳»

با توجه به معلومات مسأله داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_5 + a_9 = 36 \\ a_{15} = 42 \end{cases}$$

با استفاده از فرمول $a_n = a_1 + (n-1)d$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + 4d) + (a_1 + 8d) = 36 \\ a_1 + 14d = 42 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + 12d = 36 \\ a_1 + 14d = 42 \end{cases} \Rightarrow d = 3$$

۴۸- گزینهی «۲»

می‌دانیم که در یک دنباله‌ی عددی با جمله‌ی اول a_1 و قدر نسبت d ، جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 12$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 3d = 12 \Rightarrow a_1 + d = 4 \quad (1)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 = 48$$

$$\Rightarrow (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 8d) = 48$$

$$\Rightarrow a_1 + 7d = 16 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 7d = 16 \\ a_1 + d = 4 \end{cases} \Rightarrow 6d = 12 \Rightarrow d = 2$$

۴۹- گزینهی «۲»

$$a_n + a_k = a_{n-1} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = -a_k : (1) \text{ رابطه‌ی}$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = d \\ a_k = a_1 + (k-1)d \end{cases}$$

با جای‌گذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی (1) خواهیم داشت:

$$d = -[a_1 + (k-1)d] \Rightarrow d = -a_1 + (1-k)d$$

$$\Rightarrow d = -a_1 + d - kd \Rightarrow 0 = -a_1 - kd \Rightarrow a_1 = -kd$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{d} = -k$$

۵۰- گزینهی «۲»

با توجه به جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی، $a_n = a_1 + (n-1)d$

داریم:

$$2a_1 + a_2 - 3a_3 = 10 \Rightarrow 2a_1 + (a_1 + d) - 3(a_1 + 2d) = 10$$

$$\Rightarrow -8d = 10 \Rightarrow d = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}$$

۳۹- گزینهی «۴»

$$208, 204, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 208 \\ d = 204 - 208 = -4 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 0 = 208 + (n-1)(-4)$$

$$\Rightarrow 4(n-1) = 208 \Rightarrow n-1 = 52 \Rightarrow n = 53$$

۴۰- گزینهی «۴»

جمله‌ی عمومی دنباله را به دست می‌آوریم:

$$a_1 = 170, a_7 = 161 \Rightarrow d = a_7 - a_1 = 161 - 170 = -9$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 170 - 9n + 9 = 179 - 9n$$

$$a_n > 0 \Rightarrow 179 - 9n > 0 \Rightarrow 9n < 179 \Rightarrow n < \frac{179}{9}$$

$$\Rightarrow n < 19/8$$

بنابراین نوزده جمله‌ی دنباله، مثبت است.

۴۱- گزینهی «۲»

$$a_n = a_1 + (n-1)d > 0 \Rightarrow 63 + (n-1)(-4) > 0$$

$$n-1 < \frac{63}{4} = 15/75 \Rightarrow n < 16/75 \Rightarrow n \in \{1, \dots, 16\}$$

پس ۱۶ جمله در شرط مورد نظر صدق می‌کند.

۴۲- گزینهی «۳»

قدر نسبت دنباله $d = 7 - 14 = -7$ است و جمله‌ی اول $a_1 = 105$ است، پس:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 7 = 105 + (n-1)(-7)$$

$$\Rightarrow -98 = (-7)(n-1) \Rightarrow n = 15$$

۴۳- گزینهی «۴»

در واقع یک دنباله‌ی حسابی داریم با جمله عمومی $a_n = 4n + 1$ که باید در آن $100 > a_n \geq 10$ باشد، پس:

$$10 \leq 4n + 1 < 100 \Rightarrow 9 \leq 4n < 99 \Rightarrow \frac{9}{4} \leq n < \frac{99}{4}$$

$$\Rightarrow 3 \leq n \leq 24 \Rightarrow \text{تعداد} = 24 - 3 + 1 = 22$$

۴۴- گزینهی «۴»

$$40 = -14 + 90d \Rightarrow d = \frac{54}{90} = 0/6$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -14 + (n-1) \times 0/6$$

$$a_n > 0 \Rightarrow -14 + (n-1) \times 0/6 > 0 \Rightarrow 0/6 \times (n-1) > 14$$

$$\Rightarrow n-1 > \frac{14}{0/6} = 23/3 \Rightarrow n > 24/3$$

بنابراین از جمله‌ی ۲۵م به بعد، جملات مثبت هستند. بنابراین $1 + 25 - 91$ ، یعنی ۶۷ جمله‌ی مثبت وجود دارد.

۴۵- گزینهی «۱»

یک دنباله‌ی حسابی داریم که در آن $a_1 = 56$ و تعداد جمله‌های آن ۹ تاست، لذا $a_9 = 36$ است، بنابراین:

$$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow 36 = 56 + 8d \Rightarrow \frac{-20}{8} = d$$

$$\Rightarrow d = -2/5 \text{ سانتی‌متر}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 15 \\ (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d) \\ + (a_1 + 8d) = 30 \end{cases}$$

پس:

$$-5 \times \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 90d = 45 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

با توجه به $4a_1 + 6d = 15$ ، به ازای $d = \frac{1}{2}$ ، $a_1 = 3$ به دست می‌آید

لذا، جمله یازدهم برابر است با:

$$a_{11} = a_1 + 10d \Rightarrow a_{11} = 3 + 10 \left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

۵۷- گزینهی «۴»

می‌دانیم در یک دنباله حسابی $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ ، پس:

$$d = \frac{a_m - a_k}{m - k} = \frac{k - m}{m - k} = -1$$

و از آن جا جمله اول برابر است با:

$$a_k = a_1 + (k - 1)d = m \Rightarrow a_1 = m + k - 1$$

$$a_{m+k} = a_1 + (m+k-1)d \quad \text{لذا:}$$

$$= (m+k-1) + (m+k-1)(-1) = 0$$

۵۸- گزینهی «۴»

$$a_p - a_k = (p - k)d \Rightarrow k - p = (p - k)d \Rightarrow d = -1$$

$$a_{k+2} + a_{p-1} = (a_k + 2d) + (a_p - d) = p + k - 1$$

۵۹- گزینهی «۳»

$$a_8 = ka_5 \Rightarrow a_5 + 3d = ka_5 \Rightarrow a_5(k-1) = 3d$$

$$\Rightarrow d = \left(\frac{k-1}{3}\right)a_5$$

۶۰- گزینهی «۱»

$$a_{111} - a_{11} = 40d \Rightarrow 135 - 75 = 40d \Rightarrow d = 1/5$$

$$a_{111} = a_1 + 110 \times d \Rightarrow 135 = a_1 + 165 \Rightarrow a_1 = -30$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -30 + (n-1)(1/5) < 0$$

$$\Rightarrow n-1 < 20 \Rightarrow n < 21 \Rightarrow n \leq 20$$

۶۱- گزینهی «۲»

رابطه $a_{n+1} = -2 + a_n$ نشان می‌دهد که در دنباله $\{a_n\}$ ، ازجمله دوم به بعد، هر جمله مساوی جمله قبلی از آن به اضافه (-2) است. پس $\{a_n\}$ یک دنباله حسابی است که در آن $d = -2$ و $a_5 = 20$ ، بنابراین داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)(d) \xrightarrow{a_5=20, d=-2} 20 = a_1 + 4(-2)$$

$$\Rightarrow a_1 = 28$$

حال باید محاسبه کنیم که چند جمله از این دنباله در رابطه $a_n > 0$

صدق می‌کنند، برای این منظور داریم:

$$a_n > 0 \Rightarrow a_1 + (n-1)(d) > 0$$

$$\xrightarrow{a_1=28, d=-2} 28 + (n-1)(-2) > 0$$

$$\Rightarrow 2n < 20 \Rightarrow n < 10$$

۵۱- گزینهی «۱»

$$d = a_7 - a_1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{23} + a_{25} + a_{27}} = \frac{3a_{17}}{3a_{25}} = \frac{a_{17}}{a_{25}} = \frac{a_1 + 16d}{a_1 + 24d}$$

$$= \frac{1 + 16\left(\frac{2}{3}\right)}{1 + 24\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{35}{71}$$

۵۲- گزینهی «۴»

$$2a_1 + 3a_7 - 5a_3 = 8 \Rightarrow 2a_1 + 3(a_1 + d) - 5(a_1 + 2d) = 8$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 3a_1 + 3d - 5a_1 - 10d = 8 \Rightarrow -7d = 8$$

$$\Rightarrow d = \frac{-8}{7} (*)$$

$$5a_1 - 3a_7 - 2a_3 = 5a_1 - 3(a_1 + d) - 2(a_1 + 2d)$$

$$= -7d \stackrel{(*)}{=} 8$$

۵۳- گزینهی «۳»

$$a_1 = -1 \text{ و } a_7 = 9$$

اما:

$$a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow 9 = -1 + 6d \Rightarrow d = 5/3$$

پس:

$$a_{15} = a_1 + 14d = -1 + 14\left(\frac{5}{3}\right) = 69/3 = 23$$

۵۴- گزینهی «۲»

$$a_5 + a_6 = 11 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 11$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 9d = 11$$

$$\xrightarrow{a_1=0} d = -1 \Rightarrow a_7 = a_1 + 6d = 0 - 6 = -6$$

۵۵- گزینهی «۳»

می‌دانیم جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید، پس:

$$\begin{cases} a_{12} - a_1 = 5 \\ a_{12} + a_1 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 11d) - (a_1 + 0d) = 5 \\ (a_1 + 11d) + (a_1 + 0d) = 25 \end{cases}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \begin{cases} 11d = 5 \Rightarrow d = 5/11 \\ 2a_1 + 22d = 25 \xrightarrow{d=5/11} 2a_1 + 20(5/11) = 25 \\ \Rightarrow a_1 = -12/11 \end{cases}$$

پس جمله بیست و یکم برابر است با:

$$a_{21} = a_1 + 20d = -12/11 + 20(5/11) = 37/11$$

۵۶- گزینهی «۲»

می‌دانیم جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست می‌آید،

پس:

$$\begin{cases} a_1 + a_7 + a_3 + a_9 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_4 + a_8 + a_2 = 30 \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم در هر دنباله حسابی داریم:

$$a_m - a_n = (m - n)d$$

$$a_8 - a_4 = (8 - 4)d \Rightarrow a_8 - a_4 = 4d \quad \text{پس:}$$

$$\Rightarrow a_8 - a_4 = 4 \left(\frac{-1}{4} \right) \Rightarrow a_8 - a_4 = -1$$

پس قدر نسبت دنباله‌ی حسابی ... و a_{12} و a_8 و a_4 برابر -۱ است.

۶۸- گزینه‌ی «۲»

فرض کنیم دونه‌ی A در مبدأ حرکت باشد، در این صورت با توجه به اینکه این دونه هر ثانیه ۴ متر می‌دود در ثانیه‌ی اول در ۴ متری، در ثانیه‌ی دوم در ۸ متری و ... از مبدأ قرار داد که دنباله‌ی آن به صورت زیر است:

$$4, 8, 12, \dots \Rightarrow a_t = 4 + (t-1)4 = 4t$$

همچنین از آنجا که دونه‌ی B ۱۱ متر جلوتر از دونه‌ی A است و با توجه به اینکه در هر ثانیه ۳ متر می‌دود، در ثانیه‌ی اول در ۱۴ متری، در ثانیه‌ی دوم در ۱۷ متری و ... از مبدأ قرار دارد که دنباله‌ی آن به صورت زیر است:

$$14, 17, 20, \dots \Rightarrow a'_t = 14 + (t-1)3 = 3t + 11$$

در لحظه‌ای که دونه‌ی A به دونه‌ی B می‌رسد، $a_t = a'_t$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$4t = 3t + 11 \Rightarrow t = 11$$

۶۹- گزینه‌ی «۲»

اگر d_1 و d_2 به ترتیب قدر نسبت دو دنباله باشند، آنگاه:

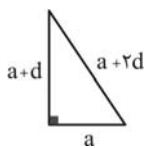
$$\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} = \frac{d_1}{d_2} \quad (1)$$

اما در دنباله‌ی اولی $y = x + 4d_1$ و در دنباله‌ی دومی $y = x + 5d_2$

$$\frac{y - x}{y - x} \xrightarrow{(1)} \frac{4}{5} = \frac{5}{4} \quad \text{پس:}$$

۷۰- گزینه‌ی «۴»

اگر ضلع کوچکتر a باشد باید ضلع‌های دیگر به ترتیب $a + d$ و $a + 2d$ باشند تا این سه ضلع تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند و چون مثلث قائم‌الزاویه است باید رابطه‌ی فیثاغورس بین اضلاع برقرار باشد.



$$(a + 2d)^2 = (a + d)^2 + a^2$$

$$\rightarrow a^2 + 4d^2 + 4ad = a^2 + d^2 + 2ad + a^2$$

$$\rightarrow a^2 - 2ad - 3d^2 = 0 \rightarrow (a + d)(a - 3d) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + d = 0 & \text{(غ‌ق)} \\ a - 3d = 0 \rightarrow a = 3d \end{cases}$$

$$p = 3a + 3d = 3a + a = 4a$$

۷۱- گزینه‌ی «۲»

$$d = a_7 - a_1 = 5 + \sqrt{2} - 3 - \sqrt{2} = 2$$

مجموع چهار جمله‌ی چهارم یعنی $a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16}$ و

مجموع چهار جمله‌ی دوم یعنی $a_5 + a_6 + a_7 + a_8$ بنابراین داریم:

$$a_{16} + a_{15} + a_{14} + a_{13} - a_8 - a_7 - a_6 - a_5$$

$$= (a_{16} - a_8) + (a_{15} - a_7) + (a_{14} - a_6) + (a_{13} - a_5)$$

$$= 8d + 8d + 8d + 8d = 32d = 32 \times 2 = 64$$

چون n عدد طبیعی است، از نامعادله‌ی $n < 15$ نتیجه می‌شود که این دنباله‌ی حسابی ۱۴ جمله مثبت دارد.

۶۲- گزینه‌ی «۳»

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$$

چهار جمله‌ی سوم

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 26 \\ a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 122 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + 6d = 26 \\ 4a_1 + 38d = 122 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = 3, a_1 = 2 \Rightarrow a_7 = a_1 + d = 5$$

۶۳- گزینه‌ی «۱»

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 5 + 3(n-1) = 3n + 2 \\ a'_n &= 4 + 3(n-1) = 3n + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n - a'_n = 1$$

۶۴- گزینه‌ی «۱»

۳ و ۷ و ۱۱ و ...

۴ و ۷ و ۱۰ و ...

جملات مشترک دنباله‌های فوق، دنباله‌ی عددی با جمله‌ی اول ۷ و

قدرنسبت ۱۲ می‌سازند، یعنی داریم:

۷ و ۱۹ و ۳۱ و ۴۳ و ...

لذا جملات مشترک کوچک‌تر از ۵۰ آن‌ها چهار تا می‌باشد.

۶۵- گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} a_n = 3 + 2(n-1) \Rightarrow 3, 5, 7, 9, \dots, 41 \\ b_n = 2 + 3(n-1) \Rightarrow 2, 5, 8, 11, \dots, 59 \end{cases}$$

جمله‌ی اول مشترک ۵ و جمله‌ی دوم مشترک ۱۱ است، پس قدر نسبت

دنباله‌ی جملات مشترک ۶ است. لذا جملات مشترک به صورت زیر خواهند بود:

۵ و ۱۱ و ۱۷ و ۲۳ و ۲۹ و ۳۵ و ۴۱

پس ۷ جمله‌ی مشترک داریم.

۶۶- گزینه‌ی «۳»

فرض کنیم a_n جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $(1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \dots)$ و

b_n جمله‌ی عمومی دنباله‌ی جدید باشد. داریم:

$$b_1 = a_1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

$$b_2 = a_2 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{12}{3}$$

$$b_3 = a_3 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

پس جملات دنباله‌ی حسابی $\{b_n\}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{11}{3}, \frac{12}{3}, \frac{13}{3}, \dots \Rightarrow d = \frac{12}{3} - \frac{11}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow b_{65} = b_1 + 64d = \frac{11}{3} + 64 \left(\frac{1}{3} \right) = 25$$

۶۷- گزینه‌ی «۲»

اگر قدر نسبت دنباله‌ی حسابی ... و $\frac{7}{4}$ را d بنامیم، خواهیم داشت:

$$d = \frac{7}{4} - 2 = \frac{-1}{4}$$

۷۸- گزینهی «۳»

در دنباله هندسی حاصل تقسیم هر جمله به جمله قبلی از خود مقدار ثابتی است، پس:

$$\frac{a-2}{a+6} = \frac{a-6}{a-2} \Rightarrow a^2 - 36 = (a-2)^2$$

$$\rightarrow a^2 - 36 = a^2 - 4a + 4 \rightarrow a = 10$$

$$\frac{a-6}{a-2} = \frac{2b-a}{a-6} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2b-10}{4} \rightarrow 8(2b-10) = 16$$

$$\rightarrow 2b - 10 = 2 \rightarrow b = 6 \rightarrow a + b = 16$$

۷۹- گزینهی «۱»

فرض کنید a مقدار ثابت باشد:

$$20 + a, 50 + a, 100 + a$$

$$\frac{a+50}{a+20} = \frac{a+100}{a+50} \Rightarrow a = 25$$

$$\text{پس: } q = \frac{a+100}{a+50} = \frac{125}{75} = \frac{5}{3}$$

۸۰- گزینهی «۳»

$$t_{n+1} = 4t_n \Rightarrow \frac{t_{n+1}}{t_n} = 4 \Rightarrow q = 4$$

$$\Rightarrow t_n = t_1 q^{n-1} = 5(4)^{n-1}$$

۸۱- گزینهی «۱»

باید جمله‌ی عمومی را به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ بنویسیم، تا بتوانیم جمله‌ی اول و قدرنسبت را پیدا کنیم:

$$a_n = \frac{2^{2-n}}{3} = \frac{2(2^{1-n})}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1 + q = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

۸۲- گزینهی «۳»

$$\frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab}$$

با تقسیم طرفین این رابطه بر b و ضرب کردن دو طرف تساوی در ۲ داریم:

$$\frac{a}{b} + 1 = 4\sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{a}{b}} + 1 = 0$$

با حل معادله‌ی درجه‌ی دوم فوق داریم:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \frac{a}{b} = (2 \pm \sqrt{3})^2$$

اما چون $a > b > 0$ است، پس $\frac{a}{b} > 1$ خواهد بود، لذا $2 - \sqrt{3}$ قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

۸۳- گزینهی «۱»

$$2^a, 4\sqrt{2}, 2^b \xrightarrow{\text{سه جمله‌ی متوالی}} \text{دنباله هندسی} \rightarrow (4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b$$

$$\Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow a + b = 5$$

۷۲- گزینهی «۳»

$$\text{قدر نسبت: } d = 4(\sqrt{2} + 1) - (3\sqrt{2} + 5) = \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{a_{14}}{a_6} = \frac{a_1 + 13d}{a_1 + 5d} = \frac{(2\sqrt{2} + 5) + 13(\sqrt{2} - 1)}{(3\sqrt{2} + 5) + 5(\sqrt{2} - 1)}$$

$$= \frac{16\sqrt{2} - 8}{8\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$$

۷۳- گزینهی «۱»

$$d = \frac{52 - (-12)}{3 + 1} = \frac{64}{4} = 16$$

لذا جملات به صورت زیر خواهند بود:

$$52 \text{ و } 36 \text{ و } 20 \text{ و } 4 \text{ و } -12$$

$$\text{جمع} = 4 + 20 + 36 = 60$$

۷۴- گزینهی «۲»

برای درج m واسطه‌ی حسابی بین a و b داریم:

$$d = \frac{b-a}{m+1} \quad (a=2) \quad (b=12)$$

$$d = \frac{12-2}{3+1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2/5$$

$$t_7 = t_1 + 6d \Rightarrow t_7 = 2 + 6(2/5) \Rightarrow t_7 = 17$$

۷۵- گزینهی «۴»

در دنباله‌ی اولیه:

$$a_7 - a_1 = 6d \Rightarrow 35 - 11 = 6d \Rightarrow d = 4$$

$$a_4 = a_1' \Rightarrow 11 + 3 \times 4 = a_1' + 3d'$$

$$\Rightarrow 23 = 3a_1' + 3d' \Rightarrow d' = -5$$

$$-5 = \frac{b-a}{n+1} \Rightarrow -5 = \frac{13-38}{n+1} \Rightarrow n = 4$$

۷۶- گزینهی «۲»

راه حل اول: چون بین دو عدد هفت جمله قرار گرفته، پس تعداد جملات دنباله‌ی حاصل ۹ جمله است. بنابراین:

$$7, \dots, 55$$

$$\text{جمله } 7$$

لذا $a_1 = 7$ و $a_9 = 55$ ، پس:

$$a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow 55 = 7 + 8d \Rightarrow d = 6$$

چون ۹ جمله داریم، جمله‌ی وسط، جمله‌ی پنجم است، لذا:

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow a_5 = 7 + 4(6) = 31$$

راه حل دوم: از آنجا که تعداد جملات فرد است، پس جمله‌ی وسط، واسطه‌ی حسابی بین جمله‌ی اول و آخر خواهد بود، یعنی:

$$\frac{7+55}{2} = 31$$

۷۷- گزینهی «۴»

فرض می‌کنیم جمله‌ی اول دنباله ۳ باشد. بنابراین با قدرنسبت (۲) جملات دنباله‌ی هندسی عبارتند از: (... و ۱۲ و ۶ و ۳) و با این فرض، هر یک از گزینه‌ها را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

تشکیل دنباله هندسی نمی‌دهند. ۱۸ و ۹ و ۴: گزینهی (۱)

تشکیل دنباله هندسی نمی‌دهند. ۲۸ و ۱۰ و ۴: گزینهی (۲)

تشکیل دنباله هندسی نمی‌دهند. ۱۵ و ۸ و ۴: گزینهی (۳)

تشکیل دنباله هندسی می‌دهند. ۱۶ و ۸ و ۴: گزینهی (۴)