۴۵۸- گزینه‌ی «۳»

$$\sin^{-1}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\pi}{۳} \quad , \quad \cot^{-1}(\sqrt{۳})=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \cos^{۲}(\frac{۱}{۲}\times\frac{\pi}{۳})+\tan^{۲}(۲\times\frac{\pi}{۶})=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}+(\sqrt{۳})^{۲}=\frac{۳}{۴}+۳=\frac{۱۵}{۴}$$

۴۵۹- گزینه‌ی «۴»

$$\cos^{-1}(\frac{۱}{۳})=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۹}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

دقت کنید که با توجه به برد $y=\cos^{-1}x$ ، $(\frac{۱}{۳},\alpha)$ در ربع اول است.

۴۶۰- گزینه‌ی «۲»

$$\sin^{-1}\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha}=\frac{۲}{\sqrt{۵}} \quad (۱)$$

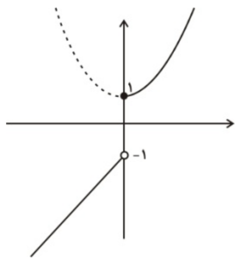
$$\cos^{-1}\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\beta \Rightarrow \cos\beta=\frac{۲}{\sqrt{۵}} \quad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow \cos\alpha=\cos\beta \Rightarrow \alpha=\beta$$

بنابراین باید حاصل عبارت $\sin^{-1}\frac{۱}{\sqrt{۵}}+\cos^{-1}\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ یعنی $\alpha+\alpha=۲\alpha$ را به‌دست آوریم، داریم:

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}=\frac{۲\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{۱-(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^{۲}}=\frac{۲\times\frac{\frac{۱}{\sqrt{۵}}}{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}}{۱-\left(\frac{\frac{۱}{\sqrt{۵}}}{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}\right)^{۲}}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲\alpha=\tan^{-1}\frac{۴}{۳}$$

مفهوم حد توابع ـ حد چپ و راست و همسایگی یک نقطه



۴۶۱- ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

الف) خیر، با توجه به نمودار اگر x با مقادیر بیش از صفر به آن نزدیک شود آن‌گاه مقدار تابع به ۱ و اگر x با مقادیر کم‌تر از صفر به آن نزدیک شود آن‌گاه مقدار تابع به ۱- نزدیک می‌شود. یعنی با نزدیک شدن x به صفر مقدار تابع به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود.

ب) مطابق شکل با نزدیک شدن مقدار x به (۳-) مقدار تابع به (۷-) نزدیک می‌شود. حال داریم:

$$|x-(-۳)|=۰/۱ \Rightarrow |x+۳|=۰/۱\ ,\ |f(x)-(-۷)|=|۲x-۱+۷|=|۲x+۶|=۲|x+۳|=۲\times۰/۱=۰/۲$$

$$|x-(-۳)|=۰/۰۱ \Rightarrow |x+۳|=۰/۰۱$$

$$|f(x)-(-۷)|=|۲x-۱+۷|=|۲x+۶|=۲|x+۳|=۲\times۰/۰۱=۰/۰۲$$

۴۶۲-

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)=۱$

پ) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$

ت) $\lim\limits_{x\to (-۱)^{+}} f(x)=-۳$

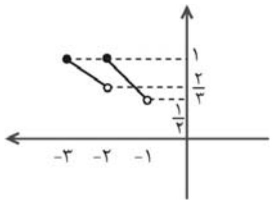
ث) $\lim\limits_{x\to (-۱)^{-}} f(x)=۱$

۴۶۳- الف) تابع در $x=a$ حد ندارد زیرا حد راست و چپ تابع در این نقطه با هم برابر نیستند.

ب) تابع در $x=a$ دارای حد است.

پ) تابع در $x=a$ حد ندارد زیرا $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=۰$ ، $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=+\infty$

۴۶۴- نمودار تابع را در بازه‌ی (۱- و ۳-] رسم می‌کنیم.



$$-۳ \le x < -۲ \Rightarrow [x] = -۳ \Rightarrow y = \frac{x}{-۳}$$

$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = \frac{x}{-۲}$$

با توجه به نمودار $\lim\limits_{x \to (-۲)^-} f(x) = \frac{۲}{۳}$ ، $\lim\limits_{x \to (-۲)^+} f(x) = ۱$

چون حد چپ و راست تابع در نقطه‌ی $x = -۲$ با هم برابر نیستند پس تابع f در $x = -۲$ حد ندارد.

۴۶۵- $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ موجود باشد یعنی حد چپ و راست تابع در $x = ۱$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} (a[x] + [x+۱]) = a + ۲$$

$$\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (a[x] + [x+۱]) = ۰ + ۱ = ۱$$

$$\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) \Rightarrow a + ۲ = ۱ \Rightarrow a = -۱$$

۴۶۶- کافی است دامنه‌ی تابع را به دست آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x^۲ - ۱}$$

$$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ , x = ۱$$

x		-۱		۱	
$x^۲ - ۱$	+	۰	−	۰	+

$$x^۲ - ۱ \ge ۰ \Rightarrow x \le -۱ \text{ یا } x \ge ۱ \Rightarrow D_f = (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$$

با توجه به دامنه‌ی تابع، مقادیر بیشتر از (۱−) $(x \to (-۱)^+)$ برای x تعریف نشده است و در نتیجه $\lim\limits_{x \to (-۱)^+} \sqrt{x^۲ - ۱}$ معنا ندارد.

۴۶۷- ابتدا دامنه‌ی عبارت را پیدا می‌کنیم:

$$[x - ۵] = ۰ \Rightarrow ۰ \le x - ۵ < ۱ \Rightarrow ۵ \le x < ۶ \Rightarrow D_f = R - [۵, ۶)$$

پس اگر $x \to ۵^+$ مقادیر بیش از ۵ برای تابع تعریف نشده است پس حد مورد نظر وجود ندارد.

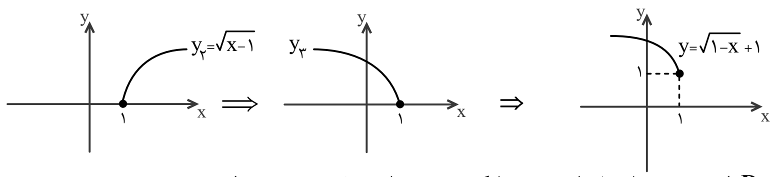
۴۶۸-

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x^n - ۱}{x^m - ۱} = \frac{۰}{۰} \xrightarrow{\text{مبهم}} \lim_{x \to ۱} \frac{(x-۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + \dots + ۱)}{(x-۱)(x^{m-۱} + x^{m-۲} + \dots + ۱)} = \frac{\overbrace{(۱+۱+\dots+۱)}^{\text{n تا}}}{\underbrace{(۱+۱+\dots+۱)}_{\text{m تا}}} = \frac{n(۱)}{m(۱)} = \frac{n}{m}$$

۴۶۹- برای رسم تابع $y = \sqrt{۱ - x} + ۱$ ، با استفاده از تابع $y_۱ = \sqrt{x}$ خواهیم داشت:

$$y = \sqrt{-(x-۱)} + ۱$$

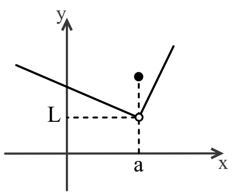
ابتدا تابع $y_۱$ را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم به تابع $y_۲ = \sqrt{x - ۱}$ می‌رسیم، سپس نمودار $y_۲$ را نسبت به خط $x = ۱$ تقارن می‌دهیم و به تابع $y_۳ = \sqrt{-(x-۱)}$ می‌رسیم و در انتها تابع $y_۳$ را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



دامنه‌ی تابع $D_y = (-\infty , ۱]$ است، پس تابع فقط در همسایگی چپ نقطه‌ی ۱ تعریف شده است.

$$\lim_{x \to ۱} (\sqrt{۱ - x} + ۱) = \lim_{x \to ۱^-} (\sqrt{۱ - x} + ۱) = ۰ + ۱ = ۱$$

۴۷۰- الف) با توجه به نمودار: $\lim\limits_{x \to a^+} y = \lim\limits_{x \to a^-} y = L$ ، پس تابع در $x = a$ دارای حد است و $\lim\limits_{x \to a} y = L$.



ب) با توجه به نمودار، تابع در همسایگی راست $x = a$ تعریف نشده است ولی حد چپ تابع در این نقطه موجود است. پس حد تابع در نقطه‌ی $x = a$ برابر حد چپ تابع و در نتیجه موجود است.

پ) با نزدیک‌شدن x به a، مقدار تابع بیش‌تر و بیش‌تر می‌شود و به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود، پس تابع در $x = a$ حد ندارد.

۴۷۱- گزینه‌ی «۴» $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد زیرا اگر $x\to 0$، مقدار مشخصی برای $\sin\frac{1}{x}$ به دست نمی‌آید و همواره $-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1$.

۴۷۲- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{6}}\cot(x-\frac{2\pi}{3})=\cot(\frac{-\pi}{6}-\frac{2\pi}{3})=\cot(\frac{-5\pi}{6})=-\cot\frac{5\pi}{6}=-\cot(\pi-\frac{\pi}{6})=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

۴۷۳- گزینه‌ی «۴» وقتی $x\to(\frac{-1}{5})^-$ یعنی $x<\frac{-1}{5}$ و $\frac{1}{x}>-5$ پس $\left[\frac{1}{x}\right]=-5$

۴۷۴- گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to4^+}\left[\frac{x}{2}\right]-[-2x]=\left[\frac{4^+}{2}\right]-[-2(4^+)]=[2^+]-[(-8)^-]=2-(-9)=11\\ \lim_{x\to4^-}\left[\frac{x}{2}\right]-[-2x]=\left[\frac{4^-}{2}\right]-[-2(4^-)]=[2^-]-[(-8)^+]=1-(-8)=9\end{array}\right\}\Rightarrow 11+9=20$$

۴۷۵- گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to3^+}\frac{[x]^2-9}{x^2-9}=\frac{[3^+]^2-9}{(3^+)^2-9}=\frac{9-9}{9^+-9}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

۴۷۶- گزینه‌ی «۴» در نمودار گزینه‌ی (۱) تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده پس این گزینه حذف می‌شود. در نمودار گزینه‌ی (۲) تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده اما در ۲ حد ندارد، پس این گزینه نیز حذف می‌شود.
در تابع گزینه‌ی (۳) تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده پس این گزینه نیز حذف می‌شود.

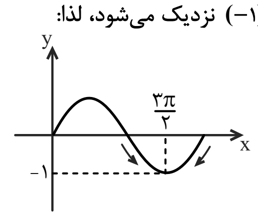
۴۷۷- گزینه‌ی «۲» با توجه به نمودار وقتی x از دو طرف به صفر نزدیک می‌شود، $f(x)$ با مقادیر بیش‌تر از (-1) به (-1) نزدیک می‌شود پس:

$$-1<f(x)\Rightarrow\frac{1}{f(x)}<-1$$

لذا:

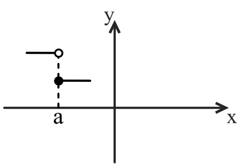
$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{f(x)}\right]=[\text{عددی بین } -2\,,\,-1]=-2$$

۴۷۸- گزینه‌ی «۲» با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ در همسایگی نقطه‌ی $x=\frac{3\pi}{2}$، تابع با مقادیر بیش‌تر از (-1) به (-1) نزدیک می‌شود، لذا:



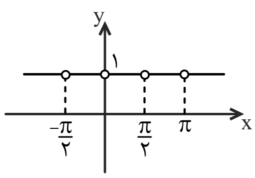
$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\left[\frac{1}{\sin x}\right]=\left[\frac{1}{(-1)^+}\right]=[-1/...]=-2$$

۴۷۹- گزینه‌ی «۴» با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[f(x)]$، اگر تابع در نقطه‌ی a حد نداشته باشد، آنگاه قدر مطلق اختلاف حد چپ و راست در این نقطه ۱ است، از آنجایی که تابع $y=x^2$ به ازای x های منفی، نزولی است پس حد چپ از حد راست بزرگتر است و در نتیجه:



$$\lim_{x\to a^+}f(x)-\lim_{x\to a^-}f(x)=-1$$

۴۸۰- گزینه‌ی «۱» از آنجایی که $(k\in Z)$ $x\neq\frac{k\pi}{2}$ ، $\tan x.\cot x=1$ ، پس نمودار تابع به‌صورت مقابل خواهد بود:



$$f(x)=1\ ,\ x\neq\frac{k\pi}{2}$$

این تابع در هر نقطه‌ی دلخواهی حد دارد و حد آن ۱ است.

۶۵۷- گزینه‌ی «۱» با توجه به نمودار، با افزایش شدت جریان الکتریکی، اندازه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر مولد A افزایش و اندازه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر مولد B کاهش می‌یابد.

بنابراین $V_A = \varepsilon_A + r_A I$ و $V_B = \varepsilon_B - r_B I$ است. با توجه به رابطه‌های فوق و اعداد روی نمودار می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow[V_A=۱۲V]{I=۰} ۱۲ = \varepsilon_A + ۰ \Rightarrow \varepsilon_A = ۱۲V$$

$$\xrightarrow[V_B=۱۲V]{I=۰} ۱۲ = \varepsilon_B - ۰ \Rightarrow \varepsilon_B = ۱۲V$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} V_A = ۱۲ + r_A I \xrightarrow[V_A=۱۷V]{I=۲A} ۱۷ = ۱۲ + ۲r_A \Rightarrow r_A = ۲/۵\Omega \\ V_B = ۱۲ - r_B I \xrightarrow[V_B=۵V]{I=۲A} ۵ = ۱۲ - ۲r_A \Rightarrow r_B = ۳/۵\Omega \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{۲/۵}{۳/۵} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{۵}{۷}$$

۶۵۸- گزینه‌ی «۳»

$$r = ۰/۵\Omega \quad , \quad R_۱ = ۴\Omega \quad , \quad R_۲ = ۳\Omega \qquad \frac{I_۲}{I_۱} = ?$$

با توجه به رابطه‌ی شدت جریان در مدار تک‌حلقه داریم : $I = \frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow \begin{cases} I_۱ = \frac{\varepsilon}{R_۱ + r} \xrightarrow[r=۰/۵\Omega]{R_۱=۴\Omega} I_۱ = \frac{\varepsilon}{۴+۰/۵} \\ I_۲ = \frac{\varepsilon}{R_۲ + r} \xrightarrow{R_۲=۳\Omega} I_۲ = \frac{\varepsilon}{۳+۰/۵} \end{cases} \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱} = \frac{۴/۵}{۳/۵} = \frac{۹}{۷}$

۶۵۹- گزینه‌ی «۲» با کاهش مقاومت R، بنا به رابطه‌ی $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ جریان در مدار افزایش می‌یابد و آمپرسنج عدد بزرگ‌تری را نشان می‌دهد و بنا به رابطه‌ی $V = \varepsilon - Ir$، با افزایش جریان، اختلاف پتانسیل دو سر مولد کاهش می‌یابد و بنابراین ولت‌سنج عدد کم‌تری را نشان می‌دهد.

۶۶۰- گزینه‌ی «۳» ابتدا شدت جریان مدار را محاسبه می‌کنیم: $R_T = R + ۲R = ۳R$ ، $I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۶}{۳R + ۰} = \frac{۲}{R}A$

و سپس از نقطه‌ی B و در جهت جریان به نقطه‌ی O می‌رویم و تغییر پتانسیل هر جزء را می‌نویسیم. با توجه به این که نقطه‌ی O به زمین وصل است. $V_O = ۰$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_B - ۲RI = V_O \Rightarrow V_B - ۲R \times \frac{۲}{R} = ۰ \Rightarrow V_B = ۴ \text{ ولت}$$

به هم بستن مقاومت‌ها و مدارهای چند حلقه

۶۶۱- الف) مقاومت $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ به صورت موازی به یکدیگر متصل شده‌اند و لذا مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$$\frac{۱}{R'} = \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳} + \frac{۱}{R_۴} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow R' = ۲\Omega$$

مقاومت معادل R' با مقاومت $R_۱$ به صورت متوالی به یکدیگر بسته شده است و لذا داریم:

$$R_T = R_۱ + R' \Rightarrow R_T = ۳ + ۲ = ۵\Omega$$

ب) برای محاسبه‌ی شدت جریان کل مدار داریم:

$$I_{\text{کل}} = \frac{\Sigma\varepsilon}{R_T + \Sigma r} = \frac{۶+۶}{۵ + (۰/۵ + ۰/۵)} = ۲A$$

و برای محاسبه‌ی جریان عبوری از شاخه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{I_۲}{I_{۳,۴}} = \frac{R_{۳,۴}}{R_۲} \Rightarrow \frac{I_۲}{I_{۳,۴}} = \frac{۳}{۶} \quad , \quad I_۲ + I_{۳,۴} = ۲A \Rightarrow I_۲ = \frac{۲}{۳}A$$

$$\frac{I_۴}{I_۲} = \frac{R_۲}{R_۴} \Rightarrow \frac{I_۴}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۶}{۱۲} \Rightarrow I_۴ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}A$$

$$I_۲ + I_۴ + I_۳ = ۲A \Rightarrow \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} + I_۳ = ۲A \Rightarrow I_۳ = ۱A$$

ج) $V_۱ = I_{\text{کل}} R_۱ = ۲ \times ۳ = ۶\ V$

د) $P_۲ = I_۲^۲ R_۲ = (\frac{۲}{۳})^۲ \times ۶ = \frac{۴}{۹} \times ۶ = \frac{۲۴}{۹}W$

هـ) $P_{\text{تولیدی}} = \varepsilon I_{\text{کل}} = (۶+۶) \times ۲ = ۲۴W$

(و) بنابر تعریف بازده‌ی یک مولد، نسبت توان مفید (توان مصرفی کل در مدار) به توان تولیدی آن است و داریم:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{تولیدی}}} = \frac{R_T I^2}{\varepsilon I} = \frac{5\times 2^2}{12\times 2} = \frac{5}{6}$$

۶۶۲- (الف) ابتدا با توجه به مقاومت R_2 و ولتاژ دو سر آن جریان I_2 را به دست می‌آوریم:
$$I_2 = \frac{V}{R_2} = \frac{4}{2} = 2A$$
چون R_2 و R_3 متوالی هستند.
$$I_3 = 2A$$
با توجه به قانون تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی داریم:
$$\frac{I_4}{I_3} = \frac{R_2+R_3}{R_4} \Rightarrow \frac{I_4}{2} = \frac{2+4}{12} \Rightarrow I_4 = 1A$$
شدت جریان کل عبوری برابر است با:
$$I_T = I_1 + I_2 + I_4 \Rightarrow I_T = 2+2+1 = 5A$$

ولتاژ دو سر مقاومت‌ها در هر شاخه با ولتاژ کل برابر است با:
$$V_4 = R_4 I_4 \Rightarrow V_4 = 12\times 1 = 12V$$
$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow 12 = \varepsilon - 5\times 1/6 \Rightarrow \varepsilon = 20V$$
(ب) چون جریان گذرا از شاخه‌های وسطی و شاخه‌ی سمت چپ با هم برابر است، بنابر قانون تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی، مقاومت این شاخه‌ها هم با هم برابرند و داریم:
$$R_1 = R_2 + R_3 \Rightarrow R_1 = 2+4 = 6\Omega$$

۶۶۳- (الف)
$$R' = R_7 + R_5 + R_8 \Rightarrow R' = 2+1+3 = 6\Omega$$
$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R'} \Rightarrow \frac{1}{R''} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \Rightarrow R'' = 2/4\Omega$$
$$R_T = R'' + R_1 + R_2 = 2/4 + 2/6 + 3 = 8\Omega$$
(ب)
$$I_T = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{18}{8+1} = 2A$$
(ج)
$$P_T = I_T^2 R_T = (2)^2 \times 8 = 32W$$

۶۶۴- (الف) ابتدا با استفاده از قانون تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی، جریان گذرا از آمپرسنج A_2 را به دست می‌آوریم:
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{4R_1}{R_1} \Rightarrow \frac{1/2}{I_2} = 4 \Rightarrow I_2 = 0/3A$$
بنابراین آمپرسنج A_2 جریان ۰/۳ آمپر و آمپرسنج‌های A_1 و A_3 جریان کل مدار که برابر $1/2 + 0/3 = 1/5A$ است را نشان می‌دهند.
(ب)
$$P_{\text{مفید}} = \varepsilon I - rI^2 = 9\times 1/5 - (1/5)^2 \times 0/1 = 13/275\ W$$

۶۶۵- (الف) ابتدا از رابطه‌ی شدت جریان اصلی، مقاومت کل را به دست می‌آوریم:
$$I = \frac{\Sigma\varepsilon}{R_T + r} \Rightarrow I = \frac{40-10}{R_T+2} \Rightarrow 5 = \frac{30}{R_T+2} \Rightarrow R_T + 2 = 6 \Rightarrow R_T = 4\Omega$$
بنابراین برای محاسبه‌ی R_1 داریم:
$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{12} \Rightarrow R_1 = 12\Omega$$
(ب)
$$\left.\begin{array}{l} I_1 + I_2 = 5A \\ \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{12}{6} \Rightarrow I_2 = 2I_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2I_1 + I_1 = 5A \Rightarrow I_1 = \frac{5}{3}A\ ,\ I_2 = \frac{10}{3}A$$

۶۶۶- از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B حرکت می‌کنیم و پتانسیل اجزاء مدار را جمع جبری می‌کنیم. بنابراین داریم:
$$V_A - I_1R_1 - I_1r_1 + \varepsilon_1 - I_1R_2 - I_1R_4 = V_B$$
$$V_A - V_B = 2\times 5 + 2\times 3 - 18 + 2\times 2 + 1\times 3 = 5V$$

۶۶۷- (الف) با دور زدن هر یک از حلقه‌های CEFD و CDBA و جمع جبری اجزاء مدار دو معادله به دست می‌آید و با توجه به قانون شدت جریان در گره C داریم:
$$V_C + \varepsilon_2 - I_2R_2 - I_3R_5 - I_3R_{3,4} = V_C \Rightarrow 8 = 6I_3 + I_2$$
$$V_C - \varepsilon_1 + I_1R_1 + I_2R_2 - \varepsilon_2 = V_C \Rightarrow 17 = +2I_1 + I_2$$
$$I_2 = I_1 + I_3 \Rightarrow \begin{cases} 8 = 7I_3 + I_1 \\ 17 = 3I_1 + I_3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} I_1 = 5/55A \\ I_3 = 0/35A \end{array}$$
$$I_2 = 5/55 + 0/35 = 5/9A$$

ب) $R_{3,4}=\frac{3\times 6}{3+6}=2\Omega$ $\quad P=RI^2 \Rightarrow P=6(0/35)^2 \simeq 0/735W$

$R_{3,4,5}=4+2=6\Omega$

۶۶۸- الف) بدون در نظر گرفتن خازن شدت جریان در مدار را حساب می‌کنیم: $I=\frac{\sum\varepsilon}{\sum R+\sum r} \Rightarrow I=\frac{2+12}{2+2+5+4+0/5+0/5}=1A$

ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر با اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ی A و C است. بنابراین داریم:

$$V_A-IR_1-Ir_1+\varepsilon_1-IR_2=V_C \Rightarrow V_C-V_A=-1\times 2-1\times 0/5+12-1\times 2=7/5V$$

$$U=\frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow U=\frac{1}{2}\times 2\times 10^{-6}\times(7/5)^2=56/25\times 10^{-6}J$$

۶۶۹- الف) ابتدا هر یک از حلقه‌ها را یک بار دور می‌زنیم و پتانسیل اجزاء را جمع جبری می‌کنیم (دو معادله) و با توجه به قانون شدت جریان‌ها در نقطه‌ی C داریم:

$$V_C-I_1R_1+\varepsilon_1-Ir_1-\varepsilon_2-I_2r_2-I_2R_2=V_C \Rightarrow 14=2I_1+3I_2$$

$$V_C-I_3R_3-I_3r_3+\varepsilon_3-I_3R_4-\varepsilon_2-I_2r_2-I_2R_2=V_C \Rightarrow 24=6I_3+3I_2$$

$$I_2=I_3+I_1 \Rightarrow \begin{cases}14=5I_1+3I_3\\ 8=I_1+3I_3\end{cases} \quad \begin{matrix}I_1=1/5A\\ I_3=\frac{13}{6}A\end{matrix} \qquad I_2=\frac{3}{2}+\frac{13}{6}=\frac{11}{3}A$$

ب) $V_B-\varepsilon_2-I_2r_2-I_2R_2-I_1R_1=V_A \Rightarrow V_A-V_B=-12-\frac{11}{3}\times 1-\frac{11}{3}\times 2-\frac{3}{2}\times 1$

$$V_A-V_B=-24/5V$$

۶۷۰- الف) ابتدا هر یک از حلقه‌ها را یک بار دور می‌زنیم و پتانسیل اجزاء مدار را جمع جبری می‌کنیم و شدت جریان‌ها در گره C داریم:

$$V_C+\varepsilon_1-I_1r_1-I_1R_1-I_3R_3=V_C \Rightarrow 20=5I_1+5I_3$$

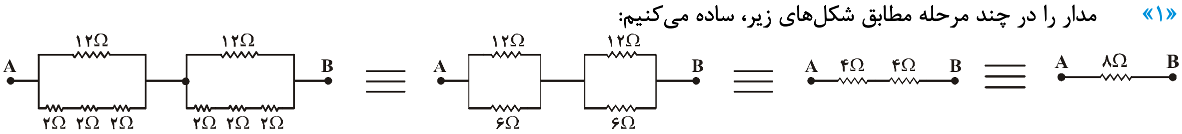
$$V_C+\varepsilon_2-I_2r_2-I_2R_2-I_3R_3=V_C \Rightarrow 30=10I_2+5I_3$$

$$I_3=I_1+I_2 \Rightarrow \begin{cases}4=2I_1+I_2\\ 6=I_1+3I_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}I_2=\frac{8}{5}=1/6A\\ I_1=\frac{6}{5}=1/2A\end{cases}$$

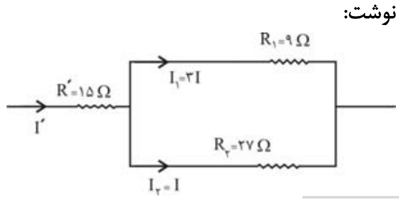
ب) $I_3=1/6+1/2=2/8A$

$$P=\varepsilon_2I_2-r_2I_2^2 \Rightarrow P=30\times 1/6-1\times(1/6)^2 \simeq 45/4W$$

۶۷۱- گزینه‌ی «۱» مدار را در چند مرحله مطابق شکل‌های زیر، ساده می‌کنیم:



۶۷۲- گزینه‌ی «۱» مقاومت معادل شاخه‌ی بالایی برابر $R_1=6+3=9\Omega$ و شاخه‌ی پایینی $R_2=7+20=27\Omega$ است. اگر فرض کنیم جریان شاخه‌ی پایینی I باشد، جریان شاخه‌ی بالایی که مقاومت آن $\frac{1}{3}$ مقاومت شاخه‌ی پایینی می‌شود برابر $3I$ خواهد شد. در نتیجه جریان مقاومت ۱۵ اهمی برابر $I'=I+3I=4I$ می‌شود. بنابراین طبق رابطه‌ی $P=RI^2$ می‌توان نوشت:



$$V_1=V_2 \Rightarrow R_1I_1=R_2I_2 \Rightarrow 9I_1=27I_2 \Rightarrow I_1=3I$$

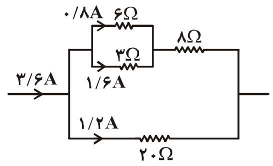
$$I'=I+3I=4I$$

$$\frac{P_3}{P_{15}}=\frac{R_3}{R_{15}}\times(\frac{I_1}{I'})^2 \Rightarrow \frac{P_3}{P_{15}}=\frac{3}{15}\times(\frac{3I}{4I})^2 \Rightarrow \frac{P_3}{P_{15}}=\frac{1}{5}\times\frac{9}{16}=\frac{9}{80}$$

۶۷۳- گزینه‌ی «۴» مقاومت معادل دو مقاومت موازی ۶ اهمی و ۳ اهمی برابر ۲ اهم است، بنابراین کل مقاومت معادل شاخه‌ی بالایی برابر 10Ω می‌شود و بنابر قانون تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی داریم:

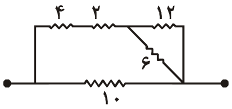
$$\frac{I_{\text{بالایی}}}{I_{\text{پایینی}}}=\frac{20}{10}=2 \quad , \quad I_{\text{بالایی}}+I_{\text{پایینی}}=3/6A \Rightarrow I_{\text{بالایی}}=2/4A \quad , \quad I_{\text{پایینی}}=1/2A$$

اکنون جریان $۲/۴A$ بین دو مقاومت ۶ و ۳ اهمی تقسیم می‌شود و داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\frac{I_۶}{I_۳}=\frac{R_۳}{R_۶}\Rightarrow\frac{I_۶}{I_۳}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\\ I_۶+I_۳=۲/۴A\end{array}\right\}\Rightarrow I_۶=۰/۸A\,,\,I_۳=۱/۶A$$

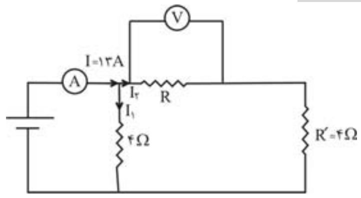
۶۷۴- گزینه‌ی «۱» دو سر مقاومت ۵ اهمی اتصال کوتاه است و این مقاومت از مدار حذف می‌گردد. سپس دو مقاومت ۱۲ و ۶ با هم موازی می‌شوند که حاصل آن‌ها با مقاومت‌های ۲ و ۴ متوالی و سپس مجموعه با مقاومت ۱۰ موازی می‌گردد.



$$R'=۴+۲+\frac{۶\times ۱۲}{۶+۱۲}=۱۰\Omega$$ (مقاومت شاخه‌ی بالا)

$$R_T=\frac{۱۰\times ۱۰}{۱۰+۱۰}=۵\Omega$$ (مقاومت کل)

۶۷۵- گزینه‌ی «۲» ابتدا مدار را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم در این حالت می‌توان نوشت:



$$R'=\frac{۱۲\times ۶}{۱۲+۶}=۴\Omega$$

$$۴I_۱=(R+R')I_۲\Rightarrow ۴I_۱=RI_۲+R'I_۲\xrightarrow{RI_۲=۲۰V\,,\,R'=۴\Omega}$$

$$۴I_۱=۲۰+۴I_۲\Rightarrow I_۱-I_۲=۵\quad (۱)$$

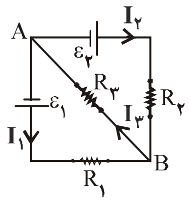
از طرف دیگر $I_۱+I_۲=۱۳$ است. بنابراین داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}I_۱-I_۲=۵\\ I_۱+I_۲=۱۳\end{array}\right.\Rightarrow ۲I_۱=۱۸\Rightarrow I_۱=۹A\;,\;I_۲=۱۳-۹=۴A$$

$$V=RI_۲\Rightarrow ۲۰=R\times ۴\Rightarrow R=۵\Omega$$

۶۷۶- گزینه‌ی «۴» با توجه به تقارن مدار، شدت جریان $I_۱$ برابر $I_۲$ است و با توجه به این که این دو جریان در مقاومت $R_۳$ درخلاف جهت هم هستند بنابراین شدت جریان $I_۳$ برابر صفر خواهد بود.

۶۷۷- گزینه‌ی «۲» ابتدا جهت جریان‌ها را مشخص می‌کنیم و با توجه به قانون‌های کیرشهف داریم:



$$V_A+\varepsilon_۲-I_۲R_۲-I_۳R_۳=V_A\Rightarrow \varepsilon_۲=۲۰I_۲+۲۰I_۳$$

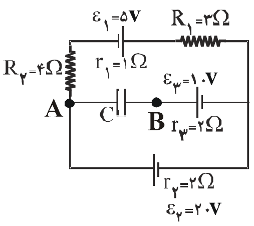
$$V_A+\varepsilon_۱-I_۱R_۱-I_۳R_۳=V_A\Rightarrow \varepsilon_۱=۲۰I_۱+۲۰I_۳$$

$$\left\{\begin{array}{l}I_۳=I_۱+I_۲\\ \varepsilon_۲+\varepsilon_۱=۲۰(I_۲+I_۱)+۴۰I_۳\end{array}\right.\Rightarrow \varepsilon_۲+\varepsilon_۱=۲۰I_۳+۴۰I_۳$$

$$۶=۶۰I_۳\Rightarrow I_۳=۰/۱A$$

۶۷۸- گزینه‌ی «۱» مقاومت خازن پر شده بی‌نهایت است بنابراین جریان عبوری از شاخه‌ی آن صفر است مدار را بدون در نظر گرفتن خازن دور می‌زنیم و پتانسیل اجزاء مدار را جمع می‌زنیم، اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ی A و B است داریم:

$$V_A-IR_۲+\varepsilon_۱-Ir_۱-IR_۱-Ir_۲+\varepsilon_۲=V_A$$



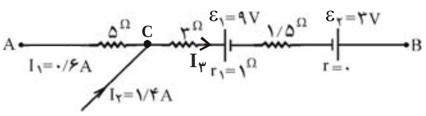
$$I=\frac{۵+۲۰}{۴+۱+۳+۲}=۲/۵A$$

$$V_A-IR_۲+\varepsilon_۱-Ir_۱-IR_۱+\varepsilon_۳=V_B$$

$$V_A-V_B=۲/۵\times ۴-۵+۱\times ۲/۵+۲/۵\times ۳-۱۰=۵V$$

$$q=CV_{AB}=۱۰\times ۵=۵۰\mu C$$

۶۷۹- گزینه‌ی «۲» با توجه به قانون شدت جریان در گره، شدت جریان در شاخه‌ی CB را به دست می‌آوریم:



$$I_۳=I_۱+I_۲=۱/۴+۰/۶=۲A$$

$$V_A-۰/۶\times ۵-۳\times ۲-۹-۱\times ۲-۱/۵\times ۲+۳=V_B$$

$$V_A-V_B=۳+۶+۹+۲+۳-۳=۲۰V$$

۶۸۰- گزینه‌ی «۲» از دور زدن مدار بیرونی و جمع اجزاء مدار داریم:

$$+۳I_۳+r_۳I_۳-\varepsilon_۳-۲I_۱+\varepsilon_۱+r_۱I_۱=۰$$

$$۳\times ۲+۰-\varepsilon_۳-۲\times ۲+۱۸+۰=۰\Rightarrow \varepsilon_۳=۲۰V$$