

فصل اول: حرکت شناسی در دوبعد

«پرسش‌های چهارگزینه‌ای سراسری»

۸۷-۹۳

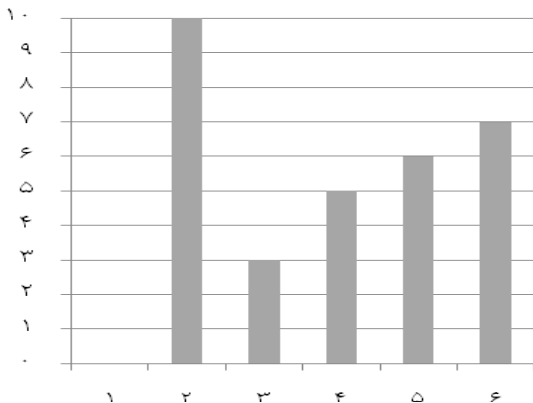
تعداد پرسش‌های چهارگزینه‌ای	
۰	۱- سرعت و شتاب در حرکت یک بعدی
۱۰	۲- حرکت با شتاب ثابت و تعیین نوع حرکت
۳	۳- پرتاب در راستای قائم به طرف پایین
۵	۴- پرتاب در راستای قائم به طرف بالا
۶	۵- حرکت در دوبعد
۷	۶- پرتابه
کل فصل: (۳۱ پرسش چهارگزینه‌ای)	

✓ در ۷ سال گذشته‌ی کنکور (سراسری)، در بین زیرموضوعات فصل اول، زیرموضوع حرکت با شتاب ثابت و تعیین نوع حرکت بیش‌ترین پرسش چهارگزینه‌ای را به خود اختصاص داده است.

فصل اول: حرکت‌شناسی در دو بعد

«پرسش‌های چهارگزینه‌ای سراسری ۹۳-۸۷»

تعداد پرسش‌های چهارگزینه‌ای



نمودار اهمیت درس‌ها براساس پرسش‌های چهارگزینه‌ای مطرح شده در
کنکورهای سراسری ۷ سال گذشته

حرکت با شتاب ثابت و تعیین نوع حرکت (۱۰ پرسش چهارگزینه‌ای)

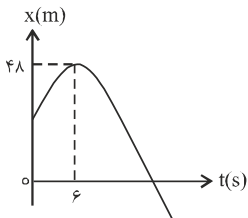
۱) نمودار مکان- زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر، به صورت سهمی است. اگر مسافت طی شده توسط متحرک در بازه‌ی زمانی $t = ۳s$ تا $t = ۹s$ برابر ۱۲ متر باشد، جابه‌جایی متحرک در این بازه چند متر است؟ (ریاضی-۹۳)

(۱) صفر

(۲) ۳

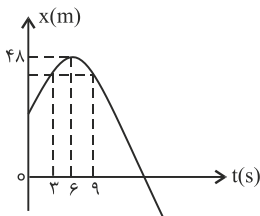
(۳) ۶

(۴) ۱۲



(۱) گزینه‌ی «۱»

با توجه به تقارن سهمی و این‌که بازه‌ی زمانی ۳ تا ۹ ثانیه، دو بازه‌ی متقارن در طرفین ماکزیمم نمودار $x-t$ است، می‌توان گفت جابه‌جایی در دو بازه‌ی زمانی (۳-۶) و (۶-۹) قرینه بوده و جمع جبری آن‌ها صفر است. به عبارتی، متحرک در طی این مدت به مکان اولیه‌ی خود برمی‌گردد و $\Delta x = 0$ خواهد بود.



۲) قطار A به طول ۲۰۰ متر با سرعت ثابت $40 \frac{m}{s}$ در حال حرکت است. قطار B به طول ۲۲۵ متر که روی ریل مجاور، توقف کرده است، به محض این که قطار A کاملاً از آن عبور کرد، با شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ در همان جهت حرکت قطار A شروع به حرکت می‌کند و سرعت خود را به $50 \frac{m}{s}$ می‌رساند و با همان سرعت حرکت خود را ادامه می‌دهد. قطار B چند ثانیه پس از شروع حرکت، از قطار A سبقت گرفته و از کنار آن کاملاً عبور می‌کند؟ (ریاضی-۹۲)

(۱) $57/5$

(۲) $82/5$

(۳) ۸۰

(۴) ۱۰۵



۲) گزینه‌ی «۴»

مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت قطار B با حرکت شتاب‌دار به $50 \frac{m}{s}$ برسد برابر است با:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{v_0=0, t=t'} 50 = 2t' + 0 \rightarrow t' = 25s$$

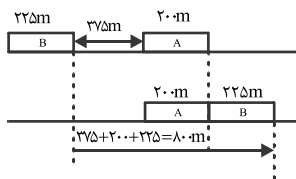
$v=50 \frac{m}{s}, a=2 \frac{m}{s^2}$

اکنون مسافت طی شده توسط دو قطار در این مدت 25s را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_B = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (25)^2 = 625 \text{ m}$$

$$\Delta x_A = v_A t = 40 \times 25 = 1000 \text{ m}$$

پس از مدت $t' = 25s$ فاصله‌ی
انتهای قطار B و ابتدای قطار A
برابر با $1000 - 625 = 375$ متر
است.



در لحظه‌ای که قطار B کاملاً از قطار A رد می‌شود، اختلاف جابه‌جایی دو قطار، برابر است با:

$$x_B - x_A = 375 + 200 + 225 = 800 \text{ m}$$

از لحظه‌ای که سرعت هر دو قطار یکنواخت است داریم:

$$x_B - x_A = (v_B - v_A)t \xrightarrow{x_B - x_A = 800 \text{ m}} v_B = 50 \frac{m}{s}, v_A = 40 \frac{m}{s}$$

$$800 = 10t \rightarrow t = 80s$$

کل زمان برابر است با:

$$t_{\text{کل}} = t' + t = 80 + 25 = 105 \text{ s}$$

۳) معادله‌ی مکان متحرکی در SI به صورت $x = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 20t$ است.

کم‌ترین سرعتی که این متحرک در مسیر حرکت پیدا می‌کند، چند

(ریاضی-۹۲)

متر بر ثانیه است؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

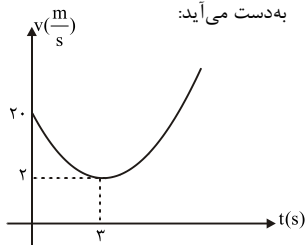
۴) ۴



۳) گزینه‌ی «۳»

با یک بار مشتق گرفتن از معادله‌ی مکان، معادله‌ی سرعت متحرک به دست می‌آید:

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow v = 2t^2 - 12t + 20$$



معادله‌ی سرعت به دست آمده‌ی یک تابع درجه‌ی دوم برحسب زمان است که نمودار آن سهمی و تقعر آن رو به بالاست. بنابراین کم‌ترین مقدار سرعت، همان کم‌ترین مقدار تابع فوق می‌باشد. بنابراین از معادله‌ی سرعت مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dv}{dt} = 4t - 12 = 0 \rightarrow t = 3s$$

$$v = 2t^2 - 12t + 20 \xrightarrow[t=v_{\min}]{t=3s} v_{\min} = 2(3)^2 - 12(3) + 20 = 2 \frac{m}{s}$$



۴) معادله‌ی حرکت متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند،

در SI به صورت $x = t^3 - 9t^2 + 27t$ است. در مورد این حرکت، کدام

گزینه درست نیست؟ (ریاضی-۹۱)

۱) در لحظه‌ی $t = 3s$ جهت حرکت عوض می‌شود.

۲) در لحظه‌ی $t = 3s$ جهت شتاب عوض می‌شود.

۳) در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 3s$ بزرگی شتاب در حال کاهش است.

۴) در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 3s$ حرکت، کندشونده و در جهت محور X است.



۴) گزینه‌ی «۱»

با یک و دوبار مشتق گرفتن از معادله‌ی حرکت متحرک نسبت به زمان، به ترتیب معادله‌های سرعت و شتاب متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x = t^3 - 9t^2 + 27t$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 27 \rightarrow v = 3(t-3)^2 \geq 0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18 \rightarrow a = 0 \rightarrow t = 3s$$

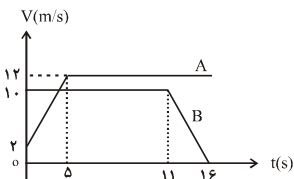
طبق معادلات بالا در لحظه‌ی $t = 3s$ ، اندازه‌ی سرعت و شتاب متحرک صفر می‌شود، ولی دقت کنید به ازای تمامی زمان‌ها، سرعت متحرک همیشه مثبت است (مربع کامل) و بنابراین هیچ‌گاه تغییر علامت نمی‌دهد. چون علامت سرعت، جهت حرکت را تعیین می‌کند و همواره $v > 0$ است، در نتیجه متحرک همواره در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند و در هیچ زمانی تغییر جهت نمی‌دهد.

در لحظه‌ی $t = 3s$ شتاب متحرک صفر می‌شود و علامت آن عوض می‌شود، بنابراین در این لحظه جهت شتاب عوض می‌شود (گزینه‌ی «۲»). در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 3s$ ، علامت شتاب منفی و اندازه‌ی آن در حال کاهش بوده (گزینه‌ی «۳») و چون علامت سرعت همواره مثبت است، بنابراین در این بازه‌ی زمانی حرکت متحرک کندشونده و در جهت محور x خواهد بود (گزینه‌ی «۴»).



۵) نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B، که روی محور x حرکت می کنند، مطابق شکل مقابل است. اگر در لحظه ی $t = 0$ ، هر دو در مکان $x = 0$ قرار داشته باشند، چند ثانیه پس از آن، دو متحرک به هم می رسند؟

(ریاضی - ۹۰)



(۱) ۷ / ۵

(۲) ۸

(۳) ۱۲

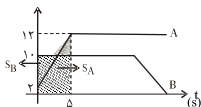
(۴) ۱۲ / ۵



۵) گزینه‌ی «۳»

چون دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند، وقتی به هم می‌رسند که جابه‌جایی دو متحرک (مساحت زیر نمودارها) یکسان باشد، بنابراین در نمودار، آن قدر پیش می‌رویم که مساحت زیر دو نمودار برابر شود. ابتدا مساحت‌ها را تا لحظه‌ی $t = 5s$ می‌یابیم:

$$v(\frac{m}{s})$$



$$S_A = \frac{2+12}{2} \times 5 = 35m$$

$$S_B = 10 \times 5 = 50m$$

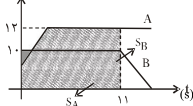
بنابراین تا این لحظه ($t = 5s$) متحرک B، ۱۵ متر جلوتر است.

حال تا $t = 11s$ مساحت‌ها را می‌یابیم

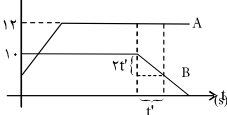
$$S_A = 35 + (6 \times 12) = 107m$$

$$S_B = 10 \times 11 = 110m$$

$$v(\frac{m}{s})$$



$$v(\frac{m}{s})$$



تا $t = 11s$ متحرک B هنوز ۳ متر جلوتر است، بنابراین در باقی مسیر، باید مساحت زیر نمودار A، به اندازه‌ی ۳ واحد بیشتر از مساحت زیر نمودار B باشد:

$$S_A - S_B = 3 \rightarrow 12t' - (\frac{10+10-2t'}{2} \times t') = 3 \rightarrow t' = 1s$$

بنابراین دو متحرک در لحظه‌ی $t = 12s$ به هم می‌رسند.

۶) متحرکی روی محور X با شتاب ثابت در حرکت است و در مبدأ زمان

با سرعت $v = +3 \frac{m}{s}$ از مکان $x = +4m$ می‌گذرد. اگر متحرک در

لحظه‌ی $t = 4s$ در جهت مثبت محور X در بیش‌ترین فاصله‌ی خود از

مبدأ باشد، در لحظه‌ی $t = 8s$ در چند متری مبدأ خواهد بود؟

(خارج از کشور - ۹۰)

۴ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

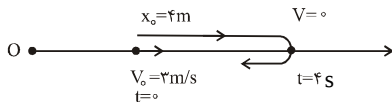
۱۲ (۴)



۶) گزینه‌ی «۱»

روش اول: با توجه به داده‌های مسئله به راحتی می‌توان معادله‌ی حرکت

را با توجه به رابطه‌ی $x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ تعیین کرد. در این جا x_0 و v_0 معلومند، باید a را بیابیم. در لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت می‌دهد، سرعت صفر است $V = 0$. پس داریم:



$$v = at + v_0 \quad \xrightarrow{v_0 = 3 \frac{m}{s}, t = 4s, v = 0}$$

$$0 = a(4) + 3 \rightarrow a = \frac{-3}{4} \frac{m}{s^2}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = \frac{a = \frac{-3}{4} \frac{m}{s^2}, v_0 = 3 \frac{m}{s}}{x_0 = 4m} \rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{-3}{4} \right) t^2 + 3t + 4 \quad \xrightarrow{t = 8s}$$

$$x = \left(\frac{-3}{8} \right) \times 8^2 + 3(8) + 4 \rightarrow x = -24 + 24 + 4 = 4m$$

روش دوم:

از آن جایی که شتاب حرکت، ثابت است، در صورتی که متحرک در زمان t به اندازه‌ی Δx در یک جهت حرکت کند، در همان مدت t به اندازه‌ی Δx نیز می‌تواند در خلاف جهت آن جابه‌جا شود. بدیهی است که اگر متحرک در ۴ ثانیه‌ی اول، در جهت محور رفته و بعد از توقف برگردد، در چهار ثانیه‌ی بعد به همان نقطه‌ی اول برمی‌گردد یعنی پس از ۸ ثانیه به جای اولش برگشته است.

(۷) متحرکی در مسیر مستقیم و با شتاب ثابت، فاصله‌ی ۸۰ متری از A تا B را در مدت ۸ ثانیه طی می‌کند و در لحظه‌ی رسیدن به نقطه‌ی B سرعتش به $15 \frac{m}{s}$ می‌رسد. شتاب متحرک چند متر بر مربع ثانیه است؟ (ریاضی-۸۹)

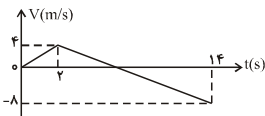
$$\frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۳)$$

(۸) متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت — زمان آن مطابق شکل زیر است. متحرک در ۱۴ ثانیه‌ی اول، چند ثانیه در سوی مخالف محور x حرکت کرده است؟ (ریاضی-۸۹)



$$4 \quad (۱)$$

$$6 \quad (۲)$$

$$8 \quad (۳)$$

$$12 \quad (۴)$$



گزینه‌ی «۴» (۷)

روش اول:

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} t \xrightarrow[\substack{\Delta x = \lambda \cdot m, t = \lambda s \\ v = 15 \frac{m}{s}}]{}$$

$$\lambda \cdot 0 = \frac{15 + v_0}{2} \times \lambda \rightarrow v_0 = 5 \frac{m}{s}$$

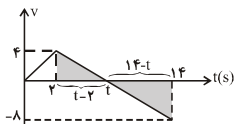
$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{15 - 5}{\lambda} = \frac{5}{4} \frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

می‌توان فرض کرد جهت حرکت متحرک معکوس بوده و با سرعت اولیه $15 \frac{m}{s}$ از نقطه B به A می‌رود که در این صورت شتاب منفی است.

$$\Delta x = -\frac{1}{2} a t^2 + v t \xrightarrow[\substack{\Delta x = \lambda \cdot m, t = \lambda s \\ v = 15 \frac{m}{s}}]{} a = \frac{5}{4} \frac{m}{s^2}$$

گزینه‌ی «۳» (۸)



لحظه‌هایی که متحرک در خلاف جهت مثبت، حرکت می‌کند، سرعتش منفی است و نمودار سرعت-زمان آن زیر محور زمان می‌باشد. از تشابه دو مثلث هاشورخورده استفاده می‌کنیم.

$$\frac{4}{t-2} = \frac{\lambda}{14-t} \rightarrow t = 6s$$

$14 - 6 = 8s$ مدت زمانی که متحرک در خلاف جهت مثبت محور x حرکت می‌کند.

۹) معادله‌ی سرعت - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در

SI به صورت $v = -2t + 4$ است. بزرگی جابه‌جایی متحرک در ۲

ثانیه‌ی سوم چند متر است؟ (ریاضی - ۸۸)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

۲۴ (۴)

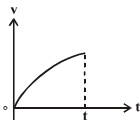
۱۸ (۳)

۱۰) شکل زیر، نمودار سرعت - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم

حرکت می‌کند. حرکت آن در فاصله‌ی زمانی نشان داده شده در شکل

(ریاضی - ۸۷)

چگونه است؟



۱) کندشونده با شتاب ثابت

۲) تندشونده با شتاب ثابت

۳) کندشونده با شتاب متغیر

۴) تندشونده با شتاب متغیر



۹) گزینه‌ی «۲»

به طور کلی در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی در t ثانیه‌ی n ام حرکت از رابطه‌ای به صورت $\Delta x = \frac{1}{2}at^2(n-1) + v_0 t$ محاسبه می‌شود. لذا با توجه به معادله‌ی سرعت داده شده، مقدار a و v_0 را تعیین کرده و بعد از آن جابه‌جایی را در بازه‌ی زمانی داده شده می‌یابیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2(n-1) + v_0 t$$

$$\xrightarrow[\substack{a = -\frac{2m}{s^2} \\ v_0 = 4(\frac{m}{s})}]{\Delta x = \frac{1}{2}(-2)t^2(n-1) + 4t}$$

$$\rightarrow \Delta x = -t^2(n-1) + 4t$$

$$\xrightarrow{n=3, t=2s \text{ دو ثانیه‌ی سوم یعنی }} \Delta x = -(2)^2(3-1) + 4 \times 2$$

$$\rightarrow \Delta x = -12m \rightarrow |\Delta x| = 12m$$

۱۰) گزینه‌ی «۴»

به طور کلی اگر نمودار سرعت- زمان از محور زمان دور شود، حرکت متحرک تندشونده است. از طرفی می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار سرعت- زمان برابر شتاب متحرک است. لذا اگر این نمودار به صورت یک منحنی باشد، شتاب حرکت (شیب خط مماس بر نمودار) متغیر خواهد بود یعنی در این جا متحرک دارای حرکت تندشونده با شتاب متغیر است.



پرتاب در راستای قائم به طرف پایین (۳ پرسش چهارگزینه‌ای)

۱۱) دو گلوله در شرایط خلأ به فاصله‌ی زمانی $\frac{2}{5}s$ از یک نقطه بالای زمین رها می‌شوند. چند ثانیه پس از رها شدن گلوله‌ی اول، فاصله‌ی دو

گلوله به $68/75m$ می‌رسد؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

(ریاضی-۹۱)

- | | |
|-------------------|-------------------|
| (۲) ۳ | (۱) $\frac{2}{5}$ |
| (۴) $\frac{4}{5}$ | (۳) ۴ |



۱۱) گزینه‌ی «۳»

محل رها شدن دو گلوله را مبدأ مکان و جهت مثبت را رو به پایین در نظر می‌گیریم و معادله‌ی حرکت هر گلوله را می‌نویسیم. دقت کنید گلوله‌ی دوم را ۲/۵s بعد از گلوله‌ی اول رها می‌کنیم.

$$y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 + v_{o1}t_1 + y_{o1} \xrightarrow{t_1=t, v_{o1}=0, y_{o1}=0} y_1 = \Delta t^2$$

$$y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 + v_{o2}t_2 + y_{o2} \xrightarrow{t_2=t-2/5, v_{o2}=0, y_{o2}=0} y_2 = \Delta(t-2/5)^2$$

چون گلوله‌ی اول همواره جلوتر از گلوله‌ی دوم است، بنابراین داریم:

$$\Delta y = y_1 - y_2 = \Delta t^2 - \Delta(t-2/5)^2$$

$$\xrightarrow{\Delta y = 68/75 \text{ m}} 68/75 = 25t^2 - 31/25 \rightarrow 25t^2 = 100 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

۱۲) گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع h رها می‌شود و در لحظه‌ای که به

۵۰ متری سطح زمین می‌رسد سرعتش $۱۵ \frac{m}{s}$ می‌شود. این گلوله چند

ثانیه پس از رها شدن به زمین می‌رسد؟ ($g = ۱۰ \frac{m}{s^2}$) (ریاضی-۸۹)

۳/۵ (۲)

۲ (۱)

۶/۵ (۴)

۵ (۳)

۱۳) از ارتفاع معینی، گلوله‌ای رها می‌شود و لحظه‌ای بعد گلوله‌ی دیگری

از همان نقطه رها می‌شود. تا رسیدن گلوله‌ی اول به زمین، فاصله‌ی بین

دو گلوله چگونه تغییر می‌کند؟ (مقاومت هوا ناچیز است).

(ریاضی-۸۷)

کاهش می‌یابد. (۲)

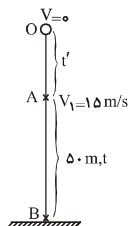
ثابت می‌ماند. (۱)

بستگی به جرم گلوله‌ها دارد. (۴)

افزایش می‌یابد. (۳)



۱۲) گزینه‌ی «۲»



$$\text{AB در مسیر } \Delta y = \frac{1}{2}gt'^2 + v_0 t$$

$$\rightarrow 50 = \frac{1}{2} \times 10 \cdot t'^2 + 15t \rightarrow t = 2s$$

$$\text{OA در مسیر } v = gt' + v_0 \rightarrow 15 = 10 \cdot t' + 0$$

$$\rightarrow t' = 1/5s$$

$$\text{کل } t = t + t' = 2 + 1/5 = 3/5s$$

۱۳) گزینه‌ی «۳»

اگر جهت مثبت را رو به پایین در نظر گرفته و فاصله‌ی زمانی رها شدن دو گلوله را t' بنامیم می‌توان زمان حرکت دو گلوله را به ترتیب $t_1 = t$ و $t_2 = t - t'$ در نظر گرفت. حال معادله‌ی جابه‌جایی هر یک را نوشته و سپس آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ \Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t_1 = t} \Delta y_1 = \frac{1}{2}gt^2 \\ \xrightarrow{t_2 = t - t'} \Delta y_2 = \frac{1}{2}g(t - t')^2 \end{cases}$$

برای تعیین فاصله‌ی دو گلوله (Δy) جابه‌جایی یکی را از دیگری کم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta y_1 - \Delta y_2 \xrightarrow{\Delta y_1 = \frac{1}{2}gt^2} \Delta y = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}g(t - t')^2 \\ &= -\frac{1}{2}gt'^2 + gtt' \end{aligned}$$

در این جا t' مقدار ثابتی بوده ولی t در حال افزایش است لذا Δy نیز افزایش می‌یابد.