گراف: آشنایی با گراف

بررسی گراف ساده و تعاریف مرتبط (رأس، یال، مرتبه و اندازه)

تعریف گراف ساده

هر گراف ساده مانند G عبارت است از زوج مرتب (V, E) که در آن V مجموعه‌ای است شمارا، متناهی و ناتهی که اعضاء آن رئوس G را تشکیل می‌دهند و E زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است که اعضاء آن یال‌های G را تشکیل می‌دهند.

توجه: برای گراف ساده‌ی G مجموعه‌ی رئوس را با $V(G)$ و مجموعه‌ی یال‌ها را با $E(G)$ نیز نمایش می‌دهیم و اگر فرض کنیم $V(G) = \{V_۱, V_۲, V_۳, ..., V_p\}$ آنگاه هر عضو از $E(G)$ به صورت $\{V_i, V_j\}$ خواهد بود که برای سادگی این یال را با $V_i V_j$ یا $V_j V_i$ نمایش داده و گفته می‌شود که رئوس V_i و V_j با هم مجاورند.

(اگر دو یال در یک رأس مشترک باشند مانند $V_۱ V_۲$ و $V_۲V_۳$ آن‌ها را دو یال مجاور می‌نامند.)

نتایج حاصل از تعریف

۱- در گراف ساده‌ی G :

اولاً: بین هر دو رأس متمایز حداکثر یک یال ساده (بدون جهت) می‌تواند موجود باشد که این یال در نمودار می‌تواند به صورت منحنی یا پاره‌خط باشد.

ثانیاً: رأسی وجود ندارد که با خودش مجاور باشد به عبارت دیگر گراف ساده‌ی G فاقد طوقه است.

۲- اگر S مجموعه‌ی شامل کلیه‌ی زیرمجموعه‌های دو عضوی V باشد آنگاه تعداد عضوهای مجوعه‌ی S برابر است با:

$$|S| = \binom{p}{۲} = \frac{p(p-۱)}{۲}$$

که در آن p تعداد رئوس است.

از آن‌جایی که $E(G)$ زیرمجموعه‌ای از S است چنانچه تعداد اعضاء $E(G)$ را با q نشان دهیم (p را مرتبه و q را اندازه‌ی گراف ساده‌ی G می‌نامیم.) همواره خواهیم داشت: $\circ \le q \le \frac{p(p-۱)}{۲}$

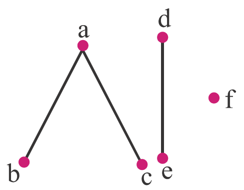
توجه:

۱- رأس منفرد (ایزوله، تنها، منزوی): رأسی که هیچ یالی به آن متصل نیست را رأس منفرد گویند.

۲- دو رأس مجاور: دو رأسی که با یک یال به هم متصل هستند را دو رأس مجاور گویند.

۳- بخش در گراف ساده: قسمت‌هایی از گراف، که با یکدیگر ارتباطی ندارند به عبارت دیگر توسط یالی به یکدیگر متصل نباشند بخش‌های گراف گویند. واضح است که هر رأس منفرد، یک بخش محسوب می‌شود.

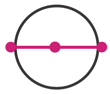
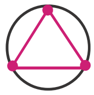
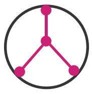
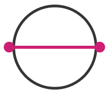
مثال: در گراف روبه‌رو:



رأس f منفرد است، رأس b با رأس a مجاور است در حالی‌که با رأس c مجاور نیست. این گراف، یک گراف سه بخشی است.

الگوی ۱

۱- کدام نمودار، نمودار یک گراف ساده است؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

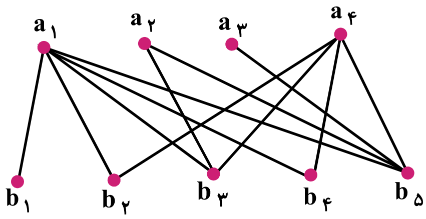
۲- تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف $G=(V\ ,\ E)$ با $V=\{v_۱,v_۲,v_۳,v_۴,v_۵\}$ و $E=\{v_۱v_۲,v_۱v_۴,v_۲v_۳,v_۱v_۵\}$ به ترتیب برابر:

۱) ۸ و ۵ است.　۲) ۵ و ۸ است.　۳) ۵ و ۴ است.　۴) ۵ و ۷ است. (آزاد ریاضی - ۷۶)

۳- گراف ساده $G=(V,E)$ که در آن $V=\{V_۱,V_۲,V_۳,V_۴,V_۵,V_۶,V_۷\}$ و $E=\{V_۱V_۲,V_۱V_۴,V_۲V_۳,V_۲V_۴,V_۳V_۴,V_۵V_۶\}$ می‌باشند، چند بخش جدا از هم دارد؟ (تمرین کتاب درسی)

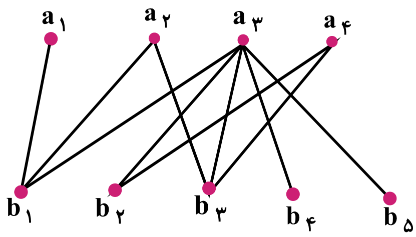
۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۴- افراد $b_۱$ و $b_۲$ و $b_۳$ و $b_۴$ و $b_۵$ مطابق گراف زیر، متقاضی مشاغل $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و $a_۴$ شده‌اند. شرکت به چند طریق می‌تواند این افراد را استخدام کند؟ (تمرین کتاب درسی)



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

* ۵- افراد $b_۱$ و $b_۲$ و $b_۳$ و $b_۴$ و $b_۵$ جهت استخدام در مشاغل $a_۱$ و $a_۲$ و $a_۳$ و $a_۴$ مطابق گراف زیر اعلام آمادگی کرده‌اند. امکان بیکار ماندن کدام داوطلب از همه بیش‌تر است؟ (آزمون کانون - ۹۰)



۱) $b_۱$
۲) $b_۲$
۳) $b_۳$
۴) $b_۵$

۶- مجموع مرتبه و اندازه‌ی گراف G برابر ۱۶ می‌باشد. این گراف حداقل چند رأس دارد؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) ۵　۲) ۶　۳) ۷　۴) ۸

* ۷- گراف ساده‌ای با اندازه‌ی $q=۱۳$، حداقل چند رأس دارد؟ (آزاد خارج از کشور ریاضی - ۸۸)

۱) ۵　۲) ۴　۳) ۷　۴) ۶

۸- در گرافی $p=۲۰$ و $q=۱۷$، این گراف حداکثر چند رأس منفرد دارد؟ (آزاد ریاضی صبح - ۸۷)

۱) ۱۵　۲) ۱۳　۳) ۲۱　۴) ۲۳

* ۹- در گرافی $p=۲۰$ و $q=۸$، این گراف حداقل چند رأس منفرد دارد؟ (آزمون کانون - ۸۸)

۱) ۴　۲) ۱۱　۳) ۱۶　۴) ۷

۱۰- گراف G از مرتبه‌ی ۱۵، رأس منفرد ندارد. این گراف حداقل چند یال دارد؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) ۱۴　۲) ۷　۳) ۸　۴) ۹

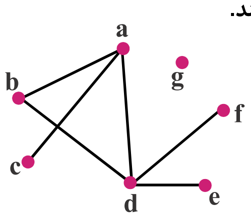
۱۱- ۷ نفر به گردش علمی می‌روند. در وقت بازگشت قرار گذاشته‌اند که هر یک از آنان به سه نفر دیگر نامه بفرستند. چند روش موجود است؟

۱) ۸　۲) ۹　۳) ۲۱　۴) نشدنی (آزمون کانون - ۹۰)

گراف: تعاریف اولیه

درجه و اندازه در گراف ساده و قضایای مرتبط

درجه: به تعداد یال‌هایی که به یک رأس گراف متصل‌اند، درجه‌ی آن رأس گراف گویند. اگر این تعداد، زوج باشد رأس را رأس زوج و اگر این تعداد، فرد باشد رأس را رأس فرد گویند. بزرگ‌ترین درجه را با Δ و کوچک‌ترین درجه را با δ نشان می‌دهند.



مثال: در گراف روبه‌رو داریم:

$$\deg(a)=۳,\ \deg(b)=۲,\ \deg(c)=۱,\ \deg(d)=۴,\ \deg(e)=۱,\ \deg(f)=۱,\ \deg(g)=۰$$

به رأس‌های a، c، e و f رأس فرد می‌گویند و رأس‌های b، d و g رأس زوج می‌باشند. در این گراف $\Delta=۴$ و $\delta=۰$ می‌باشند.

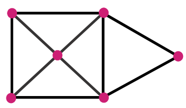
قضیه: در هر گراف ساده، مجموع درجات رئوس، دو برابر اندازه‌ی گراف است یعنی: $\sum_{i=۱}^{p}\deg v_i=۲q$

نکته: در هر گراف ساده رابطه‌ی $\delta\le\frac{۲q}{p}\le\Delta$ برقرار است که $\frac{۲q}{p}$ در حقیقت میانگین درجات رئوس گراف است.

توجه: اگر مقادیر Δ و δ داده شوند نمی‌توان همواره از رابطه‌ی $\delta\le\frac{۲q}{p}\le\Delta$ برای تعیین حدود q استفاده کرد.

الگوی ۲

۱۲– در گراف ساده زیر حاصل $۵p^۲-۵q^۲+(\Delta^۳-\delta^۳)\frac{\Delta}{\delta}+۲۰۸$ چقدر است؟ (آزاد ریاضی صبح – ۹۱)



۱) ۷-   ۲) ۱۷   ۳) صفر   ۴) ۱

۱۳– در گراف ساده‌ای از مرتبه‌ی ۱۲، میانگین درجات رئوس برابر ۴ است. اگر این گراف، ۳ رأس منفرد و تعدادی رأس از درجه‌ی ۵ یا ۶ داشته باشد، آنگاه این گراف چند رأس زوج دارد؟ (آزمون کانون – ۸۸)

۱) ۶   ۲) ۵   ۳) ۸   ۴) ۹

۱۴– گرافی ۶ رأس از درجه‌ی ۳ و تعدادی رأس از درجه‌ی ۲ دارد. اگر اندازه‌ی گراف ۱۳ باشد، میانگین درجات این گراف کدام است؟

۱) ۲/۵۵   ۲) ۲/۶   ۳) ۲/۵   ۴) ۲/۴۵ (آزمون کانون – ۸۹)

* ۱۵– در گراف G داریم: $p=۱۱$ و $\Delta=۵$، q چند مقدار مختلف می‌تواند بپذیرد؟ (آزمون کانون – ۸۸)

۱) ۲۱   ۲) ۲۲   ۳) ۲۳   ۴) ۲۴

۱۶– در گراف G داریم: $p=۱۱$ و $\delta=۳$، این گراف حداکثر چند یال دارد؟ (آزمون کانون – ۸۹)

۱) ۱۶   ۲) ۱۷   ۳) ۳۹   ۴) ۴۸

* ۱۷– گرافی که $p=۱۰$، دارای دو رأس درجه‌ی ۵ است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟ (آزاد ریاضی صبح – ۸۷)

۱) ۴۱   ۲) ۳۸   ۳) ۴۵   ۴) ۳۷

۱۸– گرافی که $p=۱۰$، دارای دو رأس درجه‌ی ۵ است. این گراف حداقل چند یال دارد؟ (آزمون کانون – ۸۶)

۱) ۱۰   ۲) ۳۸   ۳) ۹   ۴) ۱۵

۱۹– در گراف G داریم: $q=۴۷$ و $\delta=۳$، این گراف حداقل چند رأس دارد؟ (آزمون کانون – ۸۹)

۱) ۱۳   ۲) ۱۵   ۳) ۱۲   ۴) ۱۱

۲۰- در گراف G داریم: $p=12$ و $q=58$، δ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (آزمون کانون - ۸۸)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۲۱- در گراف G داریم: $p=12$ و $q=58$، Δ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

*۲۲- گراف G از مرتبه‌ی ۱۰، یک رأس درجه‌ی ۹ و سه رأس درجه‌ی یک دارد. این گراف رأس با کدام درجه را ندارد؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴ (آزمون کانون - ۸۹)

۲۳- G گرافی ساده از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۱۸ است. کمترین مقدار $\delta(G)+\Delta(G)$ کدام است؟ (آزمون کانون - ۸۸)

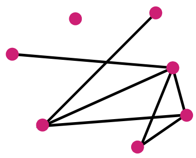
۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۷

گراف: دنباله‌ی گرافی

دنباله‌ی درجات رئوس گراف ساده

دنباله‌ی درجات رئوس

هرگاه درجات رئوس گراف را به صورت ناصعودی بنویسیم، دنباله‌ای پدید می‌آید که به آن، دنباله‌ی درجات رئوس گراف گویند.



$\Leftrightarrow$ ۴,۳,۳,۲,۱,۱,۰

نکته: در دنباله‌ی درجات رئوس هر گراف ساده از مرتبه‌ی P:

۱) تعداد رئوس فرد عددی زوج است.

۲) تعداد رئوس زوج از نظر زوج یا فرد بودن مانند مرتبه‌ی گراف است.

۳) اگر n رأس از درجه‌ی $p-1$ باشد آنگاه $\delta \geq n$

(زیرا هر رأس دلخواه گراف حداقل با این n رأس مجاور است.)

۴) اگر m رأس از درجه‌ی صفر باشند آنگاه $\Delta \leq p-(m+1)$

(بزرگ‌ترین درجه‌ی رئوس مربوط به رأسی است که بتواند با همه‌ی رئوس به غیر از خودش و m رأس درجه‌ی صفر مجاور باشد.)

۵) حداقل دو رأس متمایز دارای درجات رئوس یکسان هستند. (اثبات با استفاده از اصل لانه کبوتری)

۶) اگر در گراف مرتبه‌ی p، یک رأس درجه‌ی $p-1$ و یک رأس درجه‌ی $p-2$ وجود داشته باشد آنگاه حداکثر یک رأس درجه‌ی یک وجود دارد.

الگوریتم هاول - حکیمی

اگر با استفاده از نکات فوق، گرافی بودن دنباله‌ای قابل تشخیص نبود از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

گام اول: درجات رئوس گراف را به صورت ناصعودی مرتب می‌کنیم.

گام دوم: بزرگ‌ترین درجه، یعنی Δ را حذف کرده و از Δ رأس بعدی، یک واحد کم می‌کنیم.

گام سوم: اگر دنباله‌ی حاصل، دنباله‌ی درجات رئوس گراف ساده باشد قابل قبول است. توجه شود که گام‌های اول و دوم را می‌توان برای دنباله‌ی حاصل نیز اجرا نمود.

مثال: آیا دنباله‌ی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۵ و ۶ می‌تواند دنباله‌ی درجات رأس‌های یک گراف ساده باشد؟

حل: مرحله‌ی اول) ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۴

مرحله‌ی دوم) ۰ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳

واضح است که دنباله‌ی ۰ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ نمی‌تواند مربوط به درجات رأس‌های یک گراف ساده باشد، پس دنباله‌ی ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۵ و ۶ نیز نمی‌تواند دنباله‌ی درجات رأس‌های یک گراف ساده باشد.

الگوی ۳

۲۴- کدام دنباله می‌تواند دنباله‌ی درجه‌های رأس‌های یک گراف باشد؟ (سراسری ریاضی مرحله‌ی اول – ۷۵)

۱) ۰ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ ۲) ۰ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ ۳) ۰ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ ۴) ۰ و ۲ و ۳ و ۳ و ۵

* **۲۵- درجه‌ی رأس‌های گراف همبند[1] G به صورت ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و b و a است. کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟** (سراسری ریاضی – ۸۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

* **۲۶- در گراف ساده از مرتبه‌ی ۶، دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های آن، به کدام صورت می‌تواند باشد؟** (سراسری ریاضی – ۸۵)

۱) ۰ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ ۲) ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ ۳) ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ ۴) ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۴ و ۵

۲۷- کدام عدد نمی‌تواند حاصلضرب درجات رئوس گراف از مرتبه‌ی ۴ باشد؟ (آزمون کانون – ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۸۱

۲۸- در گرافی که ۱۶ رأس دارد، تعداد رأس‌های زوج، عددی .... و تعداد رأس‌های فرد، عددی .... است. (سراسری ریاضی – ۸۶)

۱) فرد – فرد ۲) فرد – زوج ۳) زوج – فرد ۴) زوج – زوج

۲۹- اگر دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده به صورت x و ۶ و ۶ و ۶ و ۷ و ۸ و ۸ و ۸ و ۸ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱ (آزمون کانون – ۸۷)

۳۰- دنبلهی درجات رئوس یک گراف ساده با اندازه‌ی ۷ به صورت ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و y و x و ۴ اشت. حاصل $2x-3y$ کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) صفر (آزمون کانون – ۸۸)

۳۱- به ازای چند مقدار x، دنباله‌ی ۱ و ۱ و y و x و ۴ و ۵ می‌تواند دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف ساده باشد؟ (آزمون کانون – ۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۲- درگراف G داریم: $p=8$ و $\Delta=6$ و $\delta=3$، حدود q کدام است؟ (آزمون کانون – ۹۰)

۱) $14 \le q \le 22$ ۲) $13 \le q \le 22$ ۳) $13 \le q \le 23$ ۴) $14 \le q \le 23$

۳۳- در گراف G داریم: $p=8$ و $\Delta=7$ و $\delta=2$، حدود q کدام است؟ (آزمون کانون – ۹۰)

۱) $10 \le q \le 23$ ۲) $10 \le q \le 25$ ۳) $11 \le q \le 25$ ۴) $11 \le q \le 23$

* **۳۴- در گراف G داریم $p=8$ و $\Delta=7$ و $\delta=2$، اگر این گراف رأس با درجه‌ی ۳ نداشته باشد، کم‌ترین مقدار q کدام است؟**

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳ (آزمون کانون – ۸۶)

۳۵- دنباله‌ی $4,a,a,b,b,b$ درجه‌ی رأس‌های گراف ساده‌ی G با اندازه‌ی ۸ است. درجه‌ی چند رأس G زوج است؟ (آزمون کانون – ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

[1] با گراف همبند در ادامه‌ی فصل آشنا می‌شویم. در این سؤال همبند بودن تأثیری در حل سؤال ندارد.

گراف‌های یکریخت و شمارش تعداد گراف‌های ساده با استفاده از برچسب‌گذاری

گراف‌های یکریخت (هم ساختار یا ایزومورف)

فرض کنید G و G' گراف‌هایی به ترتیب با مجموعه‌ی رئوس $V(G)$ و $V(G')$ و مجموعه‌ی یال‌های $E(G)$ و $E(G')$ باشند، G و G' یکریخت هستند اگر و تنها اگر تناظرهای یک به یک $f:V(G)\to V(G')$ و $g:E(G)\to E(G')$ وجود داشته باشند به طوری که به‌ازای هر V_i و V_j از $V(G)$ اگر V_i و V_j در G مجاورند آنگاه $f(V_i)$ و $f(V_j)$ نیز در G' مجاور باشند و بالعکس.

نتایج حاصل از تعریف

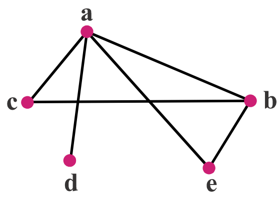
فرض کنیم که G و G' دو گراف ساده‌ی یکریخت باشند.

۱) G و G' هم مرتبه و هم اندازه خواهند بود.

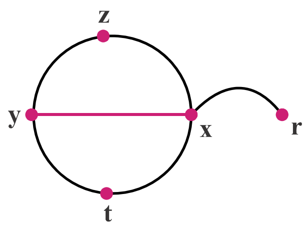
۲) دنباله‌ی درجات رئوس G و G' یکسان است.

۳) G و G' دارای تعداد بخش‌های یکسانی هستند.

مثال: نشان دهید گراف‌های مقابل یکریخت هستند.

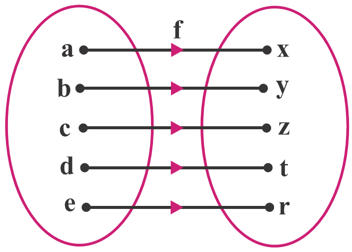


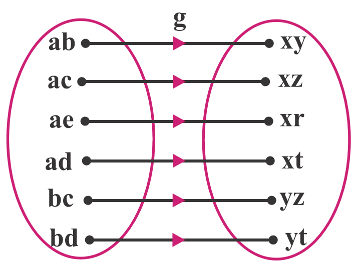
(G)



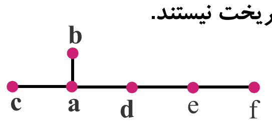
(G´)

حل: اولاً: دو گراف ساده‌ی G و G' شرایط لازم برای یکریخت بودن را دارا هستند، بدین ترتیب که دارای دنباله‌ی درجات رئوس یکسان بوده (۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴) و هر دو دارای یک بخش، مرتبه‌ی ۵ و اندازه‌ی ۶ هستند. ثانیاً: تناظر یک به یک در میان مجموعه‌ی رئوس و یال‌های G و G' به گونه‌ای است که برای هر V_i و V_j از مجموعه‌ی رئوس G که مجاور باشند. آنگاه $f(V_i)$ و $f(V_j)$ در G' مجاورند.

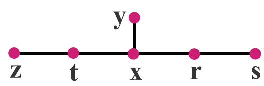




مثال: نشان دهید دو گراف زیر دارای دنباله‌ی درجات رئوس یکسان هستند ولی یکریخت نیستند.



G

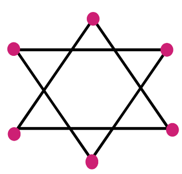


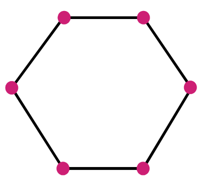
G´

حل: دنباله‌ی درجات رئوس هر دو گراف G و G' به صورت ۱ و ۱ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳ است و هر دو از یک بخش تشکیل شده و هم‌اندازه نیز هستند ولی یکریخت نیستند به عنوان مثال در G دو یال وجود دارد که بین دو رأس درجه‌ی سه و درجه‌ی یک قرار دارند (ac,ab) ولی در G' تنها یک یال وجود دارد که بین دو رأس درجه‌ی سه و درجه‌ی یک هستند (xy) همچنین در G تنها یک یال وجود دارد که بین دو رأس درجه‌ی سه و درجه‌ی دو قرار دارد (ad) ولی در G' دو یال وجود دارد که بین دو رأس درجه‌ی سه و درجه‌ی دو قرار دارند. (xt,xr).

مثال: نمودار دو گراف ساده را رسم کنید که دارای دنباله‌ی درجات رئوس یکسان بوده و همچنین هم‌اندازه باشند ولی دارای تعداد بخش‌های یکسان نباشند.

حل: در نمودار مقابل G و G' هم‌اندازه بوده و دنباله‌ی درجات رئوس هر دو گراف به صورت ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ است ولی G دارای دو بخش بوده و G' از یک بخش تشکیل شده است. پس G و G' یکریخت نیستند.


(G)


(G´)

شمارش گراف‌ها

اگر رئوس گراف نام‌گذاری شده باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود رئوس گراف برچسب‌گذاری شده‌اند. با استفاده از برچسب‌گذاری رئوس می‌توان از آنالیز ترکیبی برای به دست آوردن تعداد گراف‌ها استفاده کرد، اما اگر رئوس گراف برچسب‌گذاری نشده باشند منظور مسئله از تعداد گراف‌ها قاعدتاً شکل‌های متفاوتی است که می‌تواند آن گراف داشته باشد. در این حالت استفاده از روش ترسیم، بهترین راه برای محاسبه‌ی تعداد گراف‌هاست.

نکته: تعداد گراف‌های ساده مانند G که $V(G)=\{V_۱,V_۲,V_۳,...V_p\}$ مجموعه‌ی رئوس آن‌ها بوده و دارای q یال باشند برابر است با:

$$\binom{\frac{p(p-۱)}{۲}}{q}$$

همچنین تعداد کل گراف‌های ساده مانند G که مجموعه‌ی رئوس آن‌ها $V(G)=\{V_۱,V_۲,V_۳,...V_p\}$ باشد برابر است با: $۲^{\binom{\frac{p(p-۱)}{۲}}{}}$

مثال: با رئوس $\{a,b,c,d,e,f\}$ چند گراف ساده با شرایط زیر می‌توان رسم کرد؟

الف) یال ab را داشته باشند، ولی یال cd را نداشته باشند.

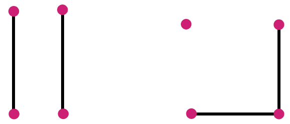
حل) با این ۶ رأس می‌توان حداکثر $\binom{۶}{۲}=۱۵$ یال داشت. از این ۱۵ یال، وضعیت دو یال ab و cd مشخص است ولی ۱۳ یال دیگر هرکدام می‌توانند در گراف باشند یا نباشند. پس هرکدام ۲ حالت دارند. طبق اصل ضرب تعداد گراف‌ها برابر است با: $۲^{۱۳}$

ب) اندازه‌ی آن‌ها ۴ باشد و یال‌های ab و cd را داشته باشند ولی یال ef را نداشته باشند.

حل) با ۶ رأس می‌توان $\binom{۶}{۲}=۱۵$ یال داشت. از این ۱۵ یال، ۴ یال را می‌خواهیم. یال‌های ab و cd باید باشند، پس باید ۲ یال دیگر از ۱۳ یال باقی‌مانده انتخاب کنیم، اما از این ۱۳ یال، یال ef نباید انتخاب شود، بنابراین ۲ یال را از ۱۲ یال دیگر انتخاب می‌کنیم که تعداد حالات ممکن برابر است با: $\binom{۱۲}{۲}=۶۶$

مثال: چند گراف ساده از مرتبه‌ی ۴ و اندازه‌ی ۲ وجود دارد؟

حل) چون رئوس گراف برچسب ندارند باید حالات مختلف را رسم کنیم که فقط دو حالت مقابل وجود دارد.



الگوی ۴

* ۳۶- با رئوس $\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده می‌توان رسم کرد به طوری که رأس a منفرد بوده و یال bc را نداشته باشند؟

۱) ۶۴ ۲) ۱۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۱۶ (آزمون کانون – ۹۰)

۳۷- با رئوس $\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده می‌توان رسم کرد به طوری که درجه‌ی رأس a برابر ۲ باشد و یال‌های bc و cd را داشته باشند؟

۱) ۱۰×۲^{۶} ۲) ۶×۲^{۵} ۳) ۶×۲^{۴} ۴) ۱۰×۲^{۵} (آزمون کانون – ۸۹)

۳۸- با رئوس $\{a,b,c,d,e,f\}$ چند گراف ساده با اندازه‌ی ۵ می‌توان رسم کرد که درجه‌ی رأس a برابر ۳ بوده و یال‌های bd و de را نداشته باشند؟ (آزمون کانون – ۸۸)

۱) ۲۸۰ ۲) ۳۵۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۳۶۰

۳۹- با رئوس $\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده با اندازه‌ی ۲ می‌توان رسم کرد، به طوری که در گراف‌ها $\Delta-\delta=1$ باشد؟

۱) ۷۵ ۲) ۱۵ ۳) ۴۵ ۴) ۳۶ (آزمون کانون - ۹۰)

* ۴۰- با رئوس $\{a,b,c,d,e\}$ چند گراف ساده با اندازه‌ی ۲ می‌توان رسم کرد، به طوری که ۲ یال در یک رأس مشترک باشند؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۲۱ ۴) ۶ (آزمون کانون - ۸۸)

الگوی ۵

۴۱- چند گراف ساده از مرتبه‌ی ۳ وجود دارد؟ (آزمون کانون - ۹۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۲- چند گراف ساده از مرتبه‌ی ۴ وجود دارد؟ (آزمون کانون - ۸۴)

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

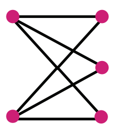
* ۴۳- چند گراف ساده از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۳ وجود دارد؟ (آزمون کانون - ۹۳)

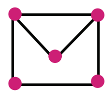
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

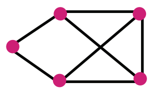
۴۴- چند گراف ساده از مرتبه‌ی ۵ و اندازه‌ی ۵ وجود دارد؟ (آزمون کانون - ۸۶)

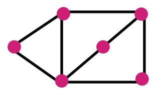
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

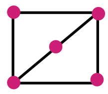
۴۵- گراف روبه‌رو با کدام گراف یکسان است؟ (آزمون کانون - ۹۲)



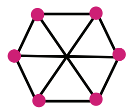
۱) 

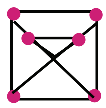
۲) 

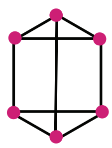
۳) 

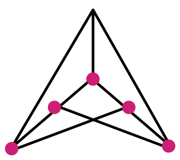
۴) 

* ۴۶- کدام گراف زیر با بقیه فرق دارد؟ (آزمون کانون - ۸۷)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۷- چند نوع گراف ساده داریم که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آن، ۵ باشد؟ (آزمون کانون - ۹۰)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

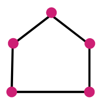
۴۸- چند گراف ساده با ۵ رأس و ۴ یال می‌توان رسم کرد که از دو بخش جدا از هم تشکیل شده باشد؟ (آزمون کانون - ۹۱)

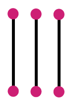
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

گراف: گراف‌های منتظم

گراف‌های منتظم

گراف منتظم: گراف G از مرتبه‌ی p را r – منتظم گوییم، هرگاه درجه‌ی هر رأس آن r باشد.


۲– منتظم از مرتبه‌ی ۵


۱– منتظم از مرتبه‌ی ۶


۰– منتظم از مرتبه‌ی ۳

نکات

۱) در گراف r– منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q داریم:

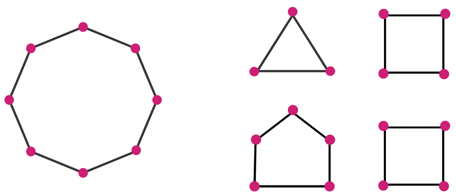
$$\sum_{i=1}^{p} \deg V_i = 2q \Rightarrow rp = 2q$$

۲) از آن‌جایی که rp برابر عدد زوج ۲q است پس از بین r و p، حداقل یکی زوج است و این یعنی، گراف فرد – منتظم از مرتبه‌ی فرد وجود ندارد. ضمن آن که همواره $0 \le r \le p-1$

توجه: اگر در سؤالی تعداد گراف‌های r– منتظم از مرتبه‌ی p را خواستند، تفاوت در شکل‌های گراف مدنظر سؤال است.

مثال: چند گراف ۲– منتظم از مرتبه‌ی ۸ وجود دارد؟

حل: سه گراف وجود دارد.



تذکر: چون رسم شکل، وقت‌گیر است از روش زیر هم می‌توانیم استفاده کنیم:

از آن‌جایی که یک گراف ۲– منتظم، حداقل ۳ رأس نیاز دارد پس باید بررسی کنیم عدد ۸ را به چند طریق می‌توان به صورت مجموع اعدادی با حداقل ۳ نوشت یعنی: $8 = 3 + 5 = 4 + 4$

۳) چون گراف r– منتظم، نیاز به حداقل r+1 رأس دارد، پس حداکثر بخش‌های یک گراف r– منتظم از مرتبه‌ی p، برابر $\left[\dfrac{p}{r+1}\right]$ است.

۴) اگر دنباله‌ی درجات رئوس یک گراف، تشکیل یک تصاعد حسابی یا هندسی دهند، آن‌گاه گراف منتظم است.

الگوی ۶

* ۴۹– در گراف ۳– منتظم G، اندازه‌ی گراف از دو برابر مرتبه‌ی آن، ۳ واحد کم‌تر است. مجموع مرتبه و اندازه‌ی گراف کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸ (تمرین کتاب درسی)

۵۰– در یک گراف ۸– منتظم، اندازه‌ی گراف از سه برابر مرتبه‌ی آن، ۸ واحد بیش‌تر است. مجموع مرتبه و اندازه‌ی این گراف کدام است؟

(آزمون کانون – ۸۷)

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۳۰ ۴) چنین گرافی وجود ندارد

۵۱– گرافی با درجه‌ی رئوس $\{4,4,4,4,4\}$ دارای چند یال است؟ (آزاد ریاضی – ۸۲)

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

* ۵۲– چند گراف ۳– منتظم از مرتبه‌ی ۱۵ وجود دارد؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۳- گراف r- منتظم G، از مرتبه‌ی ۷ می‌باشد. r چند مقدار مختلف می‌تواند بپذیرد؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۴- چند گراف منتظم وجود دارد که ۶ یال داشته باشد؟ (آزمون کانون - ۸۸)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۵۵- چند گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۹ وجود دارد؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۶- چند گراف ۲- منتظم از مرتبه‌ی ۱۲ وجود دارد؟ (آزمون کانون - ۸۵)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

* ۵۷- گراف ۳- منتظم از مرتبه‌ی ۴۶، حداکثر چند بخش جدا از هم دارد؟ (آزمون کانون - ۸۶)

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۹

۵۸- دنباله‌ی درجات گرافی، تشکیل تصاعد هندسی داده و شامل ۱۳ جمله است. δ کدام عدد می‌تواند باشد؟ (آزمون کانون - ۸۸)

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۵۹- در گراف G داریم: $p=۹$ ، $q=۱۸$ و $\delta=۴$، Δ کدام می‌تواندباشد؟ (آزمون کانون - ۸۶)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) نمی‌توان تعیین کرد

۶۰- کدام گزینه نمی‌تواند مرتبه‌ی گراف منتظمی باشد که اندازه‌ی آن ۹۰ است؟ (آزمون کانون - ۸۹)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۶۱- اگر از گراف ساده‌ی G، پنج یال برداریم، ۳-منتظم و اگر سه یال به G اضافه کنیم، ۴- منتظم می‌شود. اندازه‌ی G کدام است؟ (آزمون کانون - ۹۰)

۱) ۲۴ ۲) ۲۹ ۳) ۳۱ ۴) ۳۶

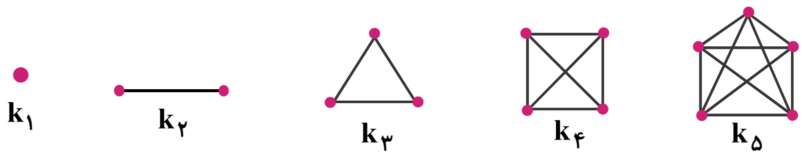
۶۲- یک گراف ساده از مرتبه‌ی p، دارای $(p-۱)$ رأس از درجه‌ی $(p-۵)$ و یک رأس از درجه‌ی ۴ است. اندازه‌ی این گراف، کدام عدد می‌تواند باشد؟ (آزمون کانون - ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

گراف: گراف کامل

گراف کامل

اگر در گراف r- منتظم از مرتبه‌ی p، $r = p - 1$ باشد، گراف را کامل از مرتبه‌ی p گفته و با K_p نشان می‌دهیم.



نکات

۱) در گراف K_p با اندازه‌ی q داریم:

$$rp = 2q \xrightarrow{r=p-1} p(p-1) = 2q \rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2}$$

۲) در گراف کامل، هر دو رأس دلخواه مجاورند.

۳) گراف کامل، تمام یال‌هایی را که یک گراف ساده می‌تواند داشته باشد، دارد.

۴) اگر در سؤالی رابطه‌ای بین مرتبه و اندازه‌ی یک گراف کامل خواسته شد، آن رابطه را برحسب p به دست می‌آوریم.

مثال: کدام گزینه می‌تواند مجموع مرتبه و اندازه‌ی یک گراف کامل باشد؟

۱) ۱۲۱ ۲) ۱۳۶ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۰

حل: گزینه‌ی ۲

$$p + q = p + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p^2 + p}{2} = \frac{p(p+1)}{2} \Rightarrow 2(p+q) = p(p+1)$$

و این یعنی اگر $p+q$ را دو برابر کنیم باید بتوانیم آن را به صورت ضرب دو عدد متوالی بنویسیم.

$2 \times 110 \neq p(p+1)$ $2 \times 100 \neq p(p+1)$ $2 \times 136 = 16 \times 17 = P(P+1)$ $2 \times 121 \neq p(p+1)$

۵) اگر در سؤالی، مرتبه و اندازه‌ی یک گراف را دادند و در مورد درجات گراف سؤالی پرسیدند، گراف را با گراف کامل هم مرتبه با خودش مقایسه می‌کنیم.

مثال: مرتبه‌ی گراف G، ۸ و اندازه‌ی آن ۲۷ می‌باشد. درجه‌ی چند رأس آن ماکسیمم است؟ (سراسری ریاضی – ۷۶)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

حل: گزینه‌ی ۲

اگر گراف G، K_8 بود؛ $\binom{8}{2} = 28$ یال داشت، اما این گراف یک یال کم‌تر از K_8 دارد. اگر یک یال را از K_8 حذف کنیم درجه‌ی دو رأس، یک واحد کم شده و درجه‌ی ۶ رأس، همچنان ماکسیمم باقی می‌ماند.