فصل ۱ حسابان | **سؤال‌های نسبتاً دشوار** | محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۵ سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۶(یا ۷) سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۸ سوال پاسخ دهند.

۱- معادله‌ی $|2x-|x-1||=2$ چند جواب دارد؟

(٪۳۹ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ٪۱۴ پاسخ صحیح دادند.)(۲۴آبان ۹۲- شرکت کنندگان۱۳۰۰۸نفر۸۴)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۲- معادله‌ی $\sqrt{x^2-x-6}+\sqrt{x^3-5x^2-2x+24}=0$ چند جواب دارد؟

(٪۳۷ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ٪۱۲ پاسخ صحیح دادند.)(۱۲آبان ۹۱- شرکت کنندگان۱۴۸۰۶نفر۷۹)

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

۳- معادله‌ی $\sqrt{2x+4}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2}(x+3)$ چند جواب صحیح دارد؟

(٪۳۶ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ٪۱۳ پاسخ صحیح دادند.)(۱۸آذر ۹۰- شرکت کنندگان۲۲۱۰۰نفر۸۶)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) صفر

۴- تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x^3+x^2+x-1=0$ ، کدام است؟

(٪۳۶ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ٪۸ پاسخ صحیح دادند.)(۷بهمن ۹۰- شرکت کنندگان۱۹۶۹۰نفر۹۴)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) هیچ

۵- دامنه‌ی تابع ثابت با ضابطه‌ی $f(x)=x^4-5x^2+2$ ، حداکثر چند عضو می‌تواند داشته باشد؟

(٪۳۶ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ٪۹ پاسخ صحیح دادند.)(۷فروردین۹۱- شرکت کنندگان۱۰۲۹۰نفر۹۰)

۱) صفر   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) بی‌شمار

۶- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|\sin x|\ge|x|$ کدام است؟

(٪۳۵ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ٪۱۵ پاسخ صحیح دادند.)(۲۰آبان ۹۰- شرکت کنندگان۱۸۹۳۰نفر۸۷)

۱) $\mathbf{R}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ۴) جواب حقیقی ندارد.

۷- کدام گزینه در مورد تعداد جواب‌های معادله‌ی $4x-\sqrt{1-2x}=2$ ، درست است؟

(٪۳۵ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ٪۱۵ پاسخ صحیح دادند.)(۱۰آبان۹۲- شرکت کنندگان۱۵۰۰۰نفر۸۶)

۱) دو جواب متمایز هم علامت   ۲) دو جواب متمایز با علامت‌های متفاوت

۳) فقط یک جواب مثبت   ۴) فقط یک جواب منفی

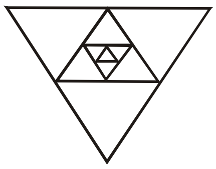
۸- اگر $f(x)=\begin{cases}2x^2 & ; \quad [x] \text{ زوج} \\ \dfrac{x^2}{2} & ; \quad [x] \text{ فرد}\end{cases}$ باشد، مقدار عددی $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})+f(-2\sqrt{2})$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

(٪۳۴ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ٪۹ پاسخ صحیح دادند.)(۱۰آذر۹۱- شرکت کنندگان۱۶۴۰۰نفر۸۲)

۱) ۱۷   ۲) $\frac{17}{4}$ ۳) ۵   ۴) $\frac{65}{4}$

۹- مطابق شکل زیر، وسط‌های اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع یک واحد را به هم وصل کرده، سپس مثلث‌های کناری را حذف کرده و این کار را در مورد مثلث باقی‌مانده تکرار می‌کنیم. پس از حداقل چند مرحله، ۰/۹۹۹ مساحت مثلث اولیه کنار گذاشته می‌شود؟

(۳۰٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۶مهر ۹۲- شرکت کنندگان۱۳۴۱۰نفر۵۴)



۱) ۴

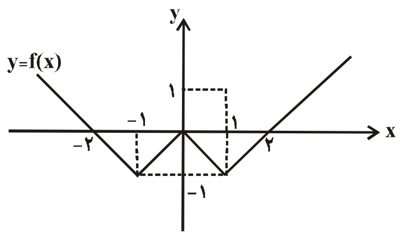
۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

۱۰- نمودار $y = f(x)$ به‌صورت زیر است. مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(x-۲)f(x) \geq ۰$ کدام است؟

(۲۶٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۲٪ پاسخ صحیح دادند.)(۴آذر ۹۰- شرکت کنندگان۱۷۵۰۰نفر۹۵)



۱) $[-۲, +\infty)$

۲) $[-۲, ۲]$

۳) $(-\infty, -۲]$

۴) $[۰, +\infty)$

۱۱- اگر باقیمانده‌ی تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^۲ + ۲x + ۵$ به‌ترتیب برابر $x - ۱$ و x باشند، آنگاه باقیمانده‌ی تقسیم $f(x).g(x)$ بر $x^۲ + ۲x + ۵$ کدام است؟

(۲۵٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۶٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۰آبان ۹۰- شرکت کنندگان۱۸۹۴۰نفر۸۴)

۱) ۵ ۲) $۳x - ۵$ ۳) $x(x-۱)$ ۴) $-۳x - ۵$

فصل ۱ حسابان | سؤال‌های دشوار | محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۴ سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۵(یا ۶) سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۷ سوال پاسخ دهند.

۱۲- اگر $a + b + c < ۰$ و معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ فاقد ریشه‌ی حقیقی باشد، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

(۲۴٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۶٪ پاسخ صحیح دادند.)(۶آبان ۹۰- شرکت کنندگان۱۸۱۰۸نفر۸۷)

۱) $a > ۰$ ۲) $b > ۰$ ۳) $c < ۰$ ۴) $b < ۰$

۱۳- به ازای کدام مقادیر k نمودار تابع $y = x^۲ - x + k$ از ناحیه‌ی چهارم نمی‌گذرد؟

(۲۴٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۲٪ پاسخ صحیح دادند.)(۶آبان ۹۰- شرکت کنندگان۱۸۱۰۰نفر۸۵)

۱) امکان ندارد. ۲) $k \leq \frac{۱}{۴}$ ۳) $k > -\frac{۱}{۴}$ ۴) $k \geq \frac{۱}{۴}$

۱۴- اگر $x^۲ + ۲$ یک عامل عبارت $f(x) = x^۴ + ax^۳ - ۲x - b$ باشد، بزرگ‌ترین جواب معادله‌ی $f(x) = ۰$ کدام است؟

(۲۴٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۶ مهر ۹۲- شرکت کنندگان۱۳۴۱۵نفر۶۱)

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) معادله جواب ندارد.

۱۵- در تقسیم عبارت $۲x^{۱۵} + ۳x^۸ + x^۳ + ۵x - ۱$ بر $(x+۱)$، مجموع ضرایب خارج‌قسمت کدام است؟

(۲۲٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۸٪ پاسخ صحیح دادند.)(۱۲ آبان ۹۱- شرکت کنندگان۱۴۸۰۰نفر۸۷)

۱) -۶ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) -۸

۱۶- تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی $(2-\frac{x+2}{x-3})(1+\frac{x+2}{x-8}) = x^2 - 7$ ، کدام است؟

(۲۱٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۰٪ پاسخ صحیح دادند.)(۷ فروردین ۹۲- شرکت کنندگان ۱۳۰۰۰نفر۸۶)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) هیچ

۱۷- معادله‌ی $\frac{3x-1}{4x^2+1}+\frac{4x^2+1}{3x-1}=\frac{1}{3}$ ، چند جواب حقیقی دارد؟

(۲۱٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۸٪ پاسخ صحیح دادند.)(۱۰ آبان ۹۲- شرکت کنندگان ۱۵۰۰۰نفر۸۸)

۱) بی‌شمار　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) صفر

۱۸- حد مجموع مربعات جملات یک دنباله‌ی هندسی غیرثابت، متناهی و برابر با حد مجموع مکعبات این دنباله است. جمله‌ی اول دنباله به کدام بازه‌ی زیر متعلق است؟

(۲۰٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۸٪ پاسخ صحیح دادند.)(۱۸آذر ۹۰- شرکت کنندگان ۲۲۱۰۰نفر۸۱)

۱) $(-4,0)$　　۲) $(0,1)$　　۳) $(1,+\infty)$　　۴) $(-\infty,-4)$

۱۹- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha^2\beta+\beta}$ کدام است؟

(۲۰٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۳٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۱فروردین۹۱- شرکت کنندگان ۱۵۰۰۰نفر۶۸)

۱) ۳　　۲) $\sqrt{3}$　　۳) ۱　　۴) ۲

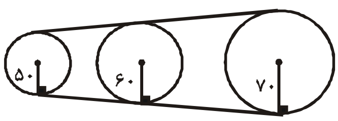
۲۰- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات هفتم و بیست و سوم برابر ۲۰ است، مجموع جملات دهم تا بیستم کدام است؟

(۲۰٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند.)(۱۰ آذر۹۱- شرکت کنندگان ۱۶۴۰۰نفر۱۰۰)

۱) ۱۱۰　　۲) ۱۲۰　　۳) ۱۳۰　　۴) ۱۴۰

۲۱- نوار نقاله‌ای در یک کارخانه به‌وسیله‌ی ۳ غلطک به شعاع‌های ۵۰ ، ۶۰ و ۷۰ سانتی‌متر به‌صورت زیر، به حرکت در می‌آید. اگر در لحظه روشن شدن نقاله، سه علامت در یک امتداد باشند، هنگامی که برای دومین بار این ۳ علامت در همان امتداد قرار می‌گیرند، غلطک بزرگ چند دور زده است؟

(۱۹٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۲٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۶ مهر ۹۲- شرکت کنندگان۱۳۴۱۵نفر۶۶)



۱) ۴۲
۲) ۳۵
۳) ۳۰
۴) ۲۵

۲۲- هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر x^2-5x برابر $x+8$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $xf(x)$ بر x^2-5x کدام است؟

(۱۸٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۲مهر ۹۰- شرکت کنندگان۱۵۲۹۴نفر۶۸)

۱) $5x$　　۲) $x+13$　　۳) $13x$　　۴) $x+5$

۲۳- به‌ازای چند مقدار از $k \in N$ عدد ۲ بین ریشه‌های $f(x)=-x^2+5x-2^k$ قرار می‌گیرد؟

(۱۸٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۷٪ پاسخ صحیح دادند.)(۶آبان ۹۰- شرکت کنندگان ۱۸۱۰۰نفر۸۶)

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) بی‌شمار

۲۴- معادله‌ی $|\log_{10} x|-|\sin x|=0$ چند ریشه دارد؟

(۱۸٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۳٪ پاسخ صحیح دادند.)(۴آذر ۹۰- شرکت کنندگان ۱۷۵۰۰نفر۹۸)

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶

۲۵- اگر بدانیم معادله‌ی $|ax^2+3x-2|=3$ دقیقاً ۳ جواب دارد، مقادیر a کدام است؟

(۱۸٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۳٪ پاسخ صحیح دادند.)(۸آذر ۹۲- شرکت کنندگان۱۸۹۸۶نفر۸۴)

۱) $\frac{9}{4}$ و $-\frac{9}{4}$　　۲) $-\frac{9}{4}$ و $\frac{9}{20}$　　۳) $\frac{9}{4}$ و $\frac{9}{20}$　　۴) $\frac{9}{4}$ و $-\frac{9}{20}$

۲۶- مجموعه جواب معادله‌ی $|x-3|+|x+1|=m$ به‌صورت $[a,b]$ است. بازه‌ی $(a-m,b+m)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۱۸٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۹٪ پاسخ صحیح دادند.)(۸آذر ۹۲- شرکت کنندگان ۱۸۹۸۰نفر۸۶)

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۲۷- در دنباله‌های حسابی $\begin{cases} A=1,5,9,... \\ B=3,10,17,... \end{cases}$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

(۱۷٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۲مهر ۹۰- شرکت کنندگان ۱۵۳۰۰نفر۷۰)

۱) ۳۲ ۲) ۳۴ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

فصل ۱ حسابان — سؤال‌های دشوارتر — محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۴(یا ۵) سوال پاسخ دهند.
انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۶ سوال پاسخ دهند.

۲۸- به‌ازای کدام مقدار n، جمله‌ی دهم بسط $\frac{(2x^8-3)^n}{x^{4n}}$ مستقل از x است؟

(۱۶٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۱۱٪ پاسخ صحیح دادند.)(۱۸آذر ۹۰- شرکت کنندگان ۲۲۱۰۰نفر۸۲)

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

۲۹- مجموع جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{4}{x^2+x+1} \le 3-x-x^2$ کدام است؟ (۱۳٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۴٪ پاسخ صحیح دادند.)(۱۰آذر ۹۱- شرکت کنندگان ۱۶۴۰۰نفر۹۳)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

۳۰- اگر $f(2x-1)=2x^3+3x^2+5x+2$ باشد، به چند جمله‌ای $f(x)$ چند واحد اضافه کنیم تا نمودار حاصل شده، محور xها را در نقطه‌ای به طول -3 قطع کند؟

(۱۳٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۷٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۴آذر ۹۱- شرکت کنندگان ۱۷۷۰۳نفر۹۲)

۱) ۲ ۲) ۱۲ ۳) ۴۰ ۴) ۹۸

۳۱- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-4x^2-x+4 \;\; ; \;\; x>-1$، در بازه‌ی $(a\,,\,b)$ زیر محور x هاست. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(۱۳٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۷٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۲آذر ۹۲- شرکت کنندگان ۱۹۹۰۰نفر۹۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۲- اگر $(2+\sqrt{3})^n=A+B\sqrt{3}$، آنگاه حاصل عبارت $\frac{A^3-3B^2A}{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}$ کدام است؟ (n عددی طبیعی و A و B اعدادی صحیح هستند.)

(۱۲٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند اما ۷٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۲مهر ۹۰- شرکت کنندگان ۱۵۳۰۰نفر۶۶)

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۳۳- تعداد جواب‌های معادله‌ی $1=\frac{x^2+x}{x^3-2x-1}-\frac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+1}$ برابر است با:

(۱۱٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند اما ۴٪ پاسخ صحیح دادند.)(۱۲ آبان ۹۱- شرکت کنندگان ۱۴۸۰۰ نفر۸۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴- اگر به‌ازای هر مقدار حقیقی x داشته باشیم $\left|\frac{x^2+kx+1}{x^2+x+1}\right|<3$، آنگاه حدود k کدام است؟

(۱۱٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند اما ۵ ٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۶ آبان ۹۱- شرکت کنندگان ۱۹۹۳۷ نفر۸۸)

۱) $-1<k<5$

۲) $-11<k<-1$

۳) $5<k<7$

۴) $k \in R$

۳۵- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n = an^3+(a+b)n^2+2n$ به‌دست می‌آید. اگر جمله‌ی چهارم این دنباله برابر ۹ باشد، b کدام است؟

(۱۱٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند اما ۴ ٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۶ آبان ۹۱- شرکت کنندگان ۱۹۹۳۷ نفر۷۲)

۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{11}{7}$

۴) $\frac{5}{7}$

۳۶- اگر باقیمانده‌ی تقسیم $f(x+1)$ بر $(x-1)^2$ برابر $x+10$ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم $(x+1)f(x)$ بر x^2-x-2 کدام است ؟

(۱۰٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۱ مهر ۹۱- شرکت کنندگان ۱۳۷۶۰نفر۶۶)

۱) $7x+8$

۲) $8x+7$

۳) $11x+11$

۴) $10x+13$

۳۷- مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x+3\sqrt{-x}+18>0$ شامل چند عدد صحیح منفی است؟

(۹٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند.)(۱۰آذر ۹۱- شرکت کنندگان ۱۶۴۰۰نفر۹۶)

۱) ۱۷

۲) ۱۸

۳) ۳۵

۴) ۳۶

۳۸- اگر α و β دو عدد متمایز باشند و $\alpha^2=5\alpha-3$ و $\beta^2=5\beta-3$، آنگاه $\frac{\alpha}{\beta}$ و $\frac{\beta}{\alpha}$ ریشه‌های کدام یک از معادله‌های زیر هستند؟

(۸ ٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۴٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۲مهر۹۰- شرکت کنندگان ۱۵۳۰۰ نفر۶۹)

۱) $3x^2-19x+3=0$

۲) $3x^2+19x-3=0$

۳) $3x^2-19x-3=0$

۴) $3x^2-5x+3=0$

۳۹- اگر $a \le y_0 \le b$، آنگاه خطی به معادله‌ی $y=y_0$، نمودار تابع به معادله‌ی $y=2x+\frac{|x-2|}{x-2}$ را قطع نمی‌کند. بیش‌ترین مقدار $b-a$ کدام است؟

(۸٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۵٪ پاسخ صحیح دادند.)(۷بهمن ۹۰- شرکت کنندگان ۱۹۷۰۰نفر۹۵)

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۴۰- مجموعه جواب نامعادله‌ی $(\frac{1}{2})^{x^2} \le (\frac{1}{2})^{|\sin\frac{\pi x}{2}|}$ به‌صورت بازه‌ی $[a,b]$ است. حاصل $b-a$ کدام است؟

(۷٪ شرکت‌کنندگان به این سؤال پاسخ دادند و ۴٪ پاسخ صحیح دادند.)(۲۴آبان ۹۲- شرکت کنندگان ۱۳۰۰۰نفر۸۶)

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی

فصل ۱: محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

۱- گزینه‌ی «۲»

$$x \ge 1 \Rightarrow |2x - x + 1| = |x + 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$x < 1 \Rightarrow |2x + x - 1| = |3x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ غ ق ق} \\ 3x - 1 = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای ۲ جواب است.

(حسابان، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۲- گزینه‌ی «۳»

دو عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج همواره نامنفی هستند و حاصل جمع آن‌ها زمانی صفر می‌شود که هر دوی آن‌ها همزمان صفر شوند. بنابراین ابتدا جواب‌های معادله‌ای که راحت‌تر حل می‌شود را می‌یابیم.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

که هر دو جواب به دست آمده، عبارت رادیکالی $\sqrt{x^3 - 5x^2 - 2x + 24}$ را نیز صفر می‌کنند، پس معادله دو جواب دارد.

(حسابان- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۳- گزینه‌ی «۱»

ابتدا دامنه‌ی معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} 2x + 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge -2 \\ 1 - x \ge 0 \Rightarrow x \le 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2 \le x \le 1$$

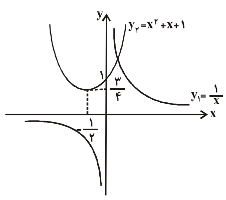
اعداد صحیح واقع در دامنه‌ی معادله، شامل $\{-2, -1, 0, 1\}$ هستند که در بین آن‌ها فقط $x = -1$ در معادله صدق می‌کند.

(حسابان- صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۴- گزینه‌ی «۱»

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 + x = 1$$

$$\Rightarrow x(x^2 + x + 1) = 1 \xrightarrow{x \ne 0} x^2 + x + 1 = \frac{1}{x}$$



نمودار دو تابع به معادله‌های $y_1 = \frac{1}{x}$ و $y_2 = x^2 + x + 1$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، تعداد نقاط برخورد این دو منحنی، همان تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ است.

(حسابان- صفحه‌های ۳۱ تا ۳۳)

۵- گزینه‌ی «۳»

مسئله از ما حداکثر تعداد نقاط برخورد خط افقی به معادله‌ی $y_1 = k$ و منحنی $y_2 = f(x)$ را می‌خواهد.

$$x^4 - 5x^2 + 2 = k \Rightarrow x^4 - 5x^2 + (2 - k) = 0$$

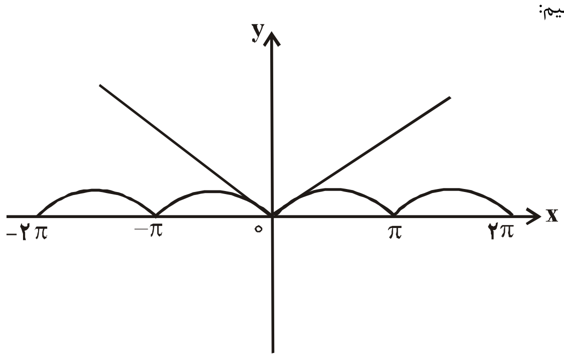
$$\xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 5t + (2 - k) = 0$$

معادله‌ی فوق حداکثر دو جواب دارد که اگر هر دوی آنها مثبت باشد، معادله‌ی $f(x) = k$ چهار جواب خواهد داشت؛ به عبارت دیگر، حداکثر ۴ نقطه با طول‌های مختلف می‌توان یافت که عرض‌های آن برابر مقدار ثابت k باشد. بنابراین دامنه‌ی تابع ثابت با ضابطه‌ی $f(x)$ حداکثر چهار عضو می‌تواند داشته باشد.

(حسابان- صفحه‌های ۲۱ و ۳۱ تا ۳۳)

۶- گزینه‌ی «۲»

نمودار دو تابع $y = |x|$ و $y = |\sin x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، همواره $|\sin x| \le |x|$، پس $|\sin x| \ge |x|$ فقط در $x = 0$ رخ می‌دهد.

(حسابان- صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

۷- گزینه‌ی «۳»

$$۴x-\sqrt{۱-۲x}=۲ \Rightarrow ۴x-۲=\sqrt{۱-۲x} \Rightarrow -۲(۱-۲x)=\sqrt{۱-۲x}$$

با فرض $\sqrt{۱-۲x}=t$، داریم: $-۲t^۲=t \Rightarrow ۲t^۲+t=\circ \Rightarrow t(۲t+۱)=\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=\circ \Rightarrow \sqrt{۱-۲x}=\circ \Rightarrow ۱-۲x=\circ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ t=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sqrt{۱-۲x}=-\frac{۱}{۲}<\circ \quad \text{(غیرقابل قبول)} \end{cases}$$

توجه کنید که $x=\frac{۱}{۲}$ در معادله‌ی اولیه، یعنی $۴x-\sqrt{۱-۲x}=۲$ صدق می‌کند، پس آن را به عنوان ریشه‌ی معادله می‌پذیریم.

(حسابان، صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۸- گزینه‌ی «۲»

$$[\frac{-\sqrt{۲}}{۲}]=-۱:\ \text{فرد} \Rightarrow f(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=\frac{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$[-۲\sqrt{۲}]=-۳:\ \text{فرد} \Rightarrow f(-۲\sqrt{۲})=\frac{(-۲\sqrt{۲})^۲}{۲}=۴$$

$$\Rightarrow ۴+\frac{۱}{۴}=\frac{۱۷}{۴}$$

(حسابان- صفحه‌های ۵۰ و ۵۱)

۹- گزینه‌ی «۲»

مساحت مثلث اولیه برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ است. مساحت قسمت کنار گذاشته شده در مرحله‌ی اول برابر $۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴})$، در مرحله‌ی دوم برابر $۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴})^۲$، در مرحله‌ی سوم برابر $۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴})^۳$ و ... است.

بنابراین مساحت‌های کنار گذاشته شده در مراحل مختلف، دنباله‌ای هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ می‌سازند و می‌خواهیم مجموع جملات این دنباله بزرگ‌تر از $\frac{۹۹۹}{۱۰۰۰}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ باشد. پس داریم:

$$\frac{\frac{۳\sqrt{۳}}{۱۶}((\frac{۱}{۴})^n-۱)}{\frac{۱}{۴}-۱}>\frac{۹۹۹}{۱۰۰۰}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۴^n}<\frac{۱}{۱۰۰۰} \Rightarrow n\geq ۵$$

(حسابان- صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱۰- گزینه‌ی «۱»

ابتدا نامعادله‌ی $(x-۲)f(x)>\circ$ را حل می‌کنیم سپس جواب‌های معادله‌ی $(x-۲)f(x)=\circ$ را به مجموعه‌ی جواب اضافه می‌کنیم، برای این‌که نامعادله‌ی بالا برقرار باشد، باید یا $\begin{cases} x-۲>\circ \\ f(x)>\circ \end{cases}$ و یا $\begin{cases} x-۲<\circ \\ f(x)<\circ \end{cases}$ باشد، با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} x-۲>\circ \Rightarrow x>۲ \\ f(x)>\circ \Rightarrow x>۲ \text{ یا } x<-۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>۲ \quad (I)$$

$$\begin{cases} x-۲<\circ \Rightarrow x<۲ \\ f(x)<\circ \Rightarrow x\in(-۲,۲)-\{\circ\} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\in(-۲\,,\,۲)-\{\circ\} \quad (II)$$

اجتماع جواب‌های I و II برابر است با $(-۲\,,+\infty)-\{\circ\,,۲\}$.

$$(x-۲)f(x)=\circ \Rightarrow x=\pm۲,\circ$$

در نهایت جواب نامعادله برابر $[-۲,+\infty)$ می‌شود.

(حسابان- صفحه‌ی ۴۱ و ۴۲)

۱۱- گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=Q'(x)(x^۲+۲x+۵)+x \\ f(x)=Q(x)(x^۲+۲x+۵)+(x-۱) \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\times} f(x).g(x)=(x^۲+۲x+۵)((x^۲+۲x+۵)Q'(x)Q(x)+(x-۱)Q'(x)+xQ(x))+x(x-۱)$$

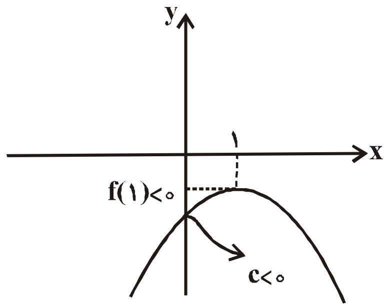
لذا برای تعیین باقیمانده، کافیست $x(x-۱)$ را بر $x^۲+۲x+۵$ تقسیم کنیم:

$$x^۲-x=(x^۲+۲x+۵)\underbrace{-۳x-۵}_{\text{باقیمانده}}$$

(حسابان- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۲- گزینه‌ی «۳»

تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ را در نظر می‌گیریم. چون $a+b+c<۰$ پس $f(۱)<۰$ و چون $f(x)$ فاقد ریشه است، پس نمودار آن به شکل تقریبی زیر است، بنابراین $a<۰$ و همچنین $f(۰)<۰$، یعنی $c<۰$.



(حسابان- صفحه‌های ۱۸ تا ۲۴)

۱۳- گزینه‌ی «۴»

با توجه به این‌که $a=۱>۰$ است، بنابراین تابع می‌نیمم دارد. برای این‌که تابع از ناحیه‌ی چهارم نگذرد، سه حالت به‌وجود می‌آید:

۱- تابع دو ریشه‌ی نامثبت داشته باشد. $(\Delta>۰)$

۲- تابع ریشه‌ی مضاعف داشته باشد. $(\Delta=۰)$

۳- تابع ریشه نداشته باشد. $(\Delta<۰)$

اگر $\Delta>۰$ باشد، با توجه به این‌که $\frac{-b}{a}=۱>۰$ است، بنابراین تابع نمی‌تواند دو ریشه‌ی نامثبت داشته باشد. بنابراین نتیجه می‌شود: $\Delta\leq۰$

$$\Delta\leq۰\Rightarrow ۱-۴k\leq۰\Rightarrow k\geq\frac{۱}{۴}$$

(حسابان- صفحه‌های ۱۵ تا ۲۴)

۱۴- گزینه‌ی «۳»

چون $x^{۲}+۲$ یک عامل عبارت $f(x)$ است، بنابراین باقیمانده‌ی تقسیم f بر $x^{۲}+۲$ برابر صفر است. در نتیجه:

فرض می‌کنیم: $x^{۲}+۲=۰\Rightarrow x^{۲}=-۲$

پس $f(x)$ را بر حسب توان $x^{۲}$ مرتب می‌کنیم:

$$\Rightarrow f(x)=(x^{۲})^{۲}+ax^{۲}(x)-۲x-b$$

$$\xrightarrow{x^{۲}=-۲} R=(-۲)^{۲}-۲ax-۲x-b=۰$$

$$\Rightarrow ۴-۲ax-۲x-b=۰\Rightarrow(۴-b)-۲x(a+۱)=۰\quad\Rightarrow\begin{cases}b=۴\\a=-۱\end{cases}$$

پس تابع f به‌صورت $f(x)=x^{۴}-x^{۳}-۲x-۴$ است و با تقسیم آن بر $x^{۲}+۲$، خارج‌قسمت برابر $x^{۲}-x-۲$ به دست می‌آید و داریم:

$$\Rightarrow f(x)=(x^{۲}+۲)(x^{۲}-x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow(x^{۲}+۲)(x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow x=۲\ ,\ \ x=-۱$$

پس بزرگ‌ترین جواب معادله‌ی $f(x)=۰$، برابر ۲ است.

(حسابان- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۵- گزینه‌ی «۲»

$$(۲x^{۱۵}+۳x^{۸}+x^{۳}+۵x-۱)=(x+۱)Q(x)+R$$

$$x=-۱\Rightarrow R=-۲+۳-۱-۵-۱=-۶$$

$$\Rightarrow ۲x^{۱۵}+۳x^{۸}+x^{۳}+۵x-۱=(x+۱)Q(x)-۶$$

مجموع ضرایب خارج‌قسمت همان $Q(۱)$ می‌باشد، پس کافی است $x=۱$ را قرار دهیم:

$$۲+۳+۱+۵-۱=۲Q(۱)-۶\Rightarrow Q(۱)=۸$$

(حسابان- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۱۶– گزینه‌ی «۱»

$$(2-\frac{x+2}{x-3})(1+\frac{x+2}{x-8})=x^2-7 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow (\frac{2(x-3)-(x+2)}{x-3})(\frac{(x-8)+(x+2)}{x-8})=x^2-7$$

$$\Rightarrow (\frac{x-8}{x-3})(\frac{2(x-3)}{x-8})=x^2-7 \Rightarrow 2=x^2-7$$

$$\Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

اما $x=3$، در معادله‌ی $(*)$ ریشه‌ی مخرج کسر است، پس آن را قبول نمی‌کنیم.

(حسابان – صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۷– گزینه‌ی «۴»

$$\frac{3x-1}{4x^2+1}+\frac{4x^2+1}{3x-1}=\frac{1}{3} \xrightarrow{a=\frac{3x-1}{4x^2+1}} a+\frac{1}{a}=\frac{1}{3} \quad (*)$$

اگر $a>0$، $a+\frac{1}{a}\geq 2$ و اگر $a<0$، $a+\frac{1}{a}\leq -2$ است. بنابراین معادله‌ی $(*)$ فاقد جواب حقیقی است.

(حسابان، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۱۸– گزینه‌ی «۳»

با توجه به متناهی بودن حد مجموع داریم $|q|<1$.

جملات دنباله: $a, aq, aq^2, \ldots$

مربعات جملات دنباله: $a^2, a^2q^2, a^2q^4, \ldots$

مکعبات جملات دنباله: $a^3, a^3q^3, a^3q^6, \ldots$

$$\frac{a^2}{1-q^2}=\frac{a^3}{1-q^3} \Rightarrow \frac{1}{(1-q)(1+q)}=\frac{a}{(1-q)(1+q+q^2)}$$

$$\Rightarrow a=\frac{1+q+q^2}{1+q}=1+\frac{q^2}{1+q}$$

$$|q|<1 \Rightarrow -1<q<1 \Rightarrow 0<q+1<2$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{q+1}>0 \Rightarrow 1+\frac{q^2}{q+1}>1 \Rightarrow a>1$$

بنابراین a متعلق به بازه‌ی $(1,+\infty)$ است.

(حسابان – صفحه‌های ۲ تا ۶)

۱۹– گزینه‌ی «۲»

با توجه به معادله‌ی $x^2-3x+1=0$، داریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=1$$

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=3$$

$$\sqrt{\alpha^2\beta+\beta}=\sqrt{(\alpha\beta)\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{3}$$

(حسابان – صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۲۰– گزینه‌ی «۱»

$$a_7+a_{23}=(a_1+6d)+(a_1+22d)=20$$
$$\Rightarrow 2a_1+28d=20 \Rightarrow a_1+14d=10 \Rightarrow a_{15}=10 \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{10}+a_{11}+\ldots+a_{20}=S_{20}-S_9 \\ S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \\ S_9=\frac{9}{2}(2a_1+8d)=9a_1+36d \\ S_{20}=20a_1+190d \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow S_{20}-S_9=11a_1+154d=11(a_1+14d)=11\times a_{15} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow S_{20}-S_9=11\times 10=110$$

(حسابان – صفحه‌های ۲ تا ۶)

۲۱– گزینه‌ی «۳»

ابتدا ک.م.م شعاع استوانه‌ها را می‌یابیم:

$$\left.\begin{array}{l} 50=5^2\times 2 \\ 60=2^2\times 3\times 5 \\ 70=2\times 5\times 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ک.م.م}=2^2\times 5^2\times 3\times 7$$

تعداد دور غلطک بزرگ $\Rightarrow \frac{2100}{70}=30$

(حسابان – صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵)

۲۲- گزینه‌ی «۳»

$$f(x) = (x^2 - 5x)Q(x) + (x+8)$$

$$\Rightarrow xf(x) = x(x^2 - 5x)Q(x) + x(x+8)$$

$$\Rightarrow xf(x) = x(x^2 - 5x)Q(x) + x^2 + 8x$$

۱۳x را در سمت راست تساوی اضافه و کم می‌کنیم، داریم:

$$xf(x) = x(x^2 - 5x)Q(x) + x^2 + \underbrace{8x - 13x}_{-5x} + 13x$$

$$\Rightarrow xf(x) = x(x^2 - 5x)Q(x) + x^2 - 5x + 13x$$

$$\Rightarrow xf(x) = (x^2 - 5x)(\underbrace{xQ(x)+1}_{Q'(x)}) + 13x$$

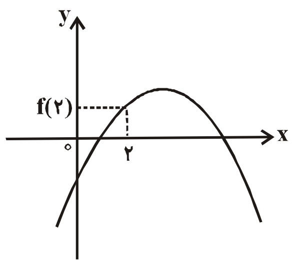
$$\Rightarrow xf(x) = (x^2 - 5x)Q'(x) + 13x \Rightarrow R = 13x$$

(حسابان-صفحه‌های ۶ تا ۸)

۲۳- گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} = 2^k > 0 \\ \dfrac{-b}{a} = 5 > 0 \end{cases}$$

با توجه به این‌که $a < 0$ است، بنابراین شکل تابع به‌صورت تقریبی زیر می‌شود.



بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

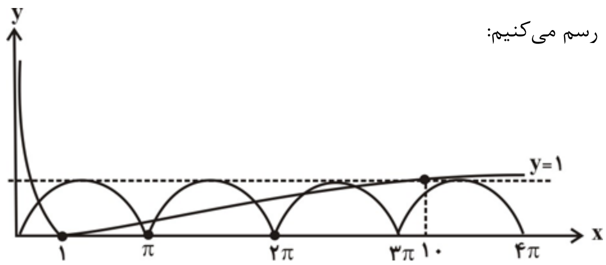
$$f(2) > 0 \Rightarrow -4 + 10 - 2^k > 0 \Rightarrow 2^k < 6 \xrightarrow{k \in N} k = 1, 2$$

(حسابان- صفحه‌های ۱۵ تا ۱۹)

۲۴- گزینه‌ی «۴»

$$|\log_{10} x| - |\sin x| = 0 \Rightarrow |\log_{10} x| = |\sin x|$$

چون حل معادله مشکل است برای یافتن تعداد ریشه‌ها نمودارهای $y_1 = |\log_{10} x|$ و $y_2 = |\sin x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



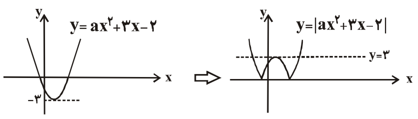
با توجه به شکل، تعداد نقاط برخورد ۶تاست، پس این معادله ۶ ریشه دارد.

(حسابان- صفحه‌های ۳۹ تا ۴۲)

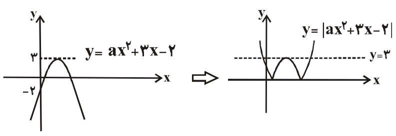
۲۵- گزینه‌ی «۴»

برای آن‌که این معادله ۳ جواب داشته باشد دو حالت زیر را داریم.

حالت اول :



حالت دوم :



در حالت اول مقدار a مثبت است و مینیمم تابع به‌ازای $x = \frac{-b}{2a}$ برابر ۳- است.

در حالت دوم مقدار a منفی است و ماکزیمم تابع به‌ازای $x = -\frac{b}{2a}$ برابر ۳ است.

نکته: مقدار تابع به‌ازای $x = \frac{-b}{2a}$، برابر با $\frac{-\Delta}{4a}$ می‌باشد.

حالت اول: $a > 0, f(\frac{-b}{2a}) = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{9+8a}{4a} = -3$

$$\Rightarrow 9 + 8a = 12a \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

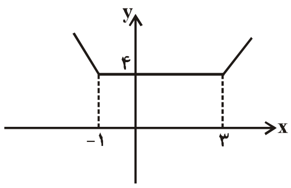
حالت دوم: $a < 0, f(\frac{-b}{2a}) = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{9+8a}{4a} = 3$

$$\Rightarrow 9 + 8a = -12a \Rightarrow a = -\frac{9}{20}$$

(حسابان، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۹)

۲۶– گزینه‌ی «۳»

نمودار تابع $y=|x-۳|+|x+۱|$ به شکل مقابل است:



واضح است که خط $y=۴$ در بی‌شمار نقطه نمودار را قطع می‌کند و معادله‌ی $|x-۳|+|x+۱|=۴$ دارای بی‌شمار جواب است که همان بازه‌ی $[-۱,۳]$ است. بنابراین داریم:

$$m=۴, b=۳, a=-۱$$

و بازه‌ی $(a-m, b+m)$ به‌صورت $(-۵,۷)$ است که شامل ۱۱ عدد صحیح است.

(حسابان، صفحه‌های ۳۱ تا ۳۹)

۲۷– گزینه‌ی «۳»

با توجه به این‌که در تصاعد حسابی A، قدر نسبت برابر ۴ و در تصاعد حسابی B، قدر نسبت برابر ۷ است، بنابراین قدرنسبت دنباله‌ی جمله‌های مشترک این دو تصاعد، برابر کوچک‌ترین مضرب مشترک ۴ و ۷ یعنی ۲۸ است و داریم:

$$\begin{cases} A=۱,۵,۹,۱۳,۱۷,... \\ B=۳,۱۰,۱۷,... \end{cases} \Rightarrow \text{اولین جمله‌ی مشترک} = ۱۷$$

بنابراین این دنباله، دنباله‌ای با جمله‌ی اول ۱۷ و قدر نسبت ۲۸ است:

$$\text{جمله‌ی عمومی} = ۱۷+(n-۱)۲۸$$

$$۱۰۰ \le ۱۷+(n-۱)۲۸ < ۱۰۰۰ \Rightarrow ۸۳ \le (n-۱)۲۸ < ۹۸۳$$

$$\Rightarrow ۲/.... \le n-۱ < ۳۵/.... \Rightarrow ۳ \le n-۱ \le ۳۵ \Rightarrow ۴ \le n \le ۳۶$$

بنابراین ۳۳ عدد سه رقمی مشترک در دنباله‌های A و B وجود دارد.

(حسابان – صفحه‌ی ۱۵)

۲۸– گزینه‌ی «۲»

$$\frac{(۲x^۸-۳)^n}{x^{۴n}} = (\frac{۲x^۸-۳}{x^۴})^n = (۲x^۴-\frac{۳}{x^۴})^n = (۲x^۴-۳x^{-۴})^n$$

جمله‌ی مستقل از x، جمله‌ی دهم بسط دو جمله‌ای است بنابراین:

$$\text{جمله‌ی دهم}: \binom{n}{۹}(۲x^۴)^{n-۹}(-۳x^{-۴})^۹$$

$$= \binom{n}{۹}(۲)^{n-۹}(-۳)^۹(x)^{۴n-۳۶}x^{-۳۶}$$

$$= \binom{n}{۹}(۲)^{n-۹}(-۳)^۹x^{۴n-۳۶-۳۶} = \binom{n}{۹}۲^{n-۹}(-۳)^۹x^{۴n-۷۲}$$

$$۴n-۷۲=۰ \Rightarrow n=۱۸$$

نکته: جمله‌ی $(k+۱)$ام بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ به‌صورت $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ است.

(حسابان– صفحه‌های ۸ تا ۱۱)

۲۹– گزینه‌ی «۳»

$$\frac{۴}{x^۲+x+۱}+x^۲+x-۳ \le ۰$$

اگر فرض کنیم $x^۲+x+۱=A$ داریم:

$$\frac{۴}{A}+A-۴ \le ۰$$

با توجه به این‌که $A>۰$ است $(a>۰, \Delta<۰)$ دو طرف نامعادله را در A ضرب می‌کنیم:

$$A^۲-۴A+۴ \le ۰ \Rightarrow (A-۲)^۲ \le ۰ \Rightarrow A=۲ \Rightarrow x^۲+x+۱=۲$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۱=۰ \Rightarrow S=\frac{-b}{a}=-۱$$

(حسابان– صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۳۰– گزینه‌ی «۱»

برای این‌که نمودار $m+f(x)$ محور xها را در -۳ قطع کند، باید $f(x)+m$ بر $(x+۳)$ بخش‌پذیر باشد.

$$f(x)+m=(x+۳)Q(x)\xrightarrow{x=-۳}f(-۳)+m=۰\Rightarrow m=-f(-۳)$$

$$f(۲x-۱)=۲x^۳+۳x^۲+۵x+۲\xrightarrow{x=-۱}$$

$$f(-۳)=-۲+۳-۵+۲=-۲\Rightarrow m=۲$$

(حسابان– صفحه‌های ۶ تا ۸)

۳۱– گزینه‌ی «۲»

ابتدا چندجمله‌ای مربوط به ضابطه‌ی تابع f را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$f(x)=x^۳-۴x^۲-x+۴=(x^۳-x)+(۴-۴x^۲)$$

$$=x(x^۲-۱)-۴(x^۲-۱)=(x-۴)(x^۲-۱)\;=(x-۴)(x-۱)(x+۱)$$

حال، ضابطه‌ی تابع f را به‌ازای xهای مختلف، مطابق جدول زیر تعیین علامت می‌کنیم:

x		-۱		۱		۴	
$f(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$

پس تابع f به ازای $x>-۱$ در فاصله‌ی $(۱\,,\,۴)$ پایین محور xها قرار دارد،

بنابراین: $\quad Max(b-a)=۴-۱=۳$

(حسابان، صفحه‌های ۳۹، ۴۰ و ۴۲)

۳۲– گزینه‌ی «۲»

نکته: $(۲+\sqrt{۳})^n=A+B\sqrt{۳}\xrightarrow[A,B\in Z]{n\in N}(۲-\sqrt{۳})^n=A-B\sqrt{۳}$

از ضرب و جمع طرفین دو معادله‌ی $\begin{cases}(۲+\sqrt{۳})^n=A+B\sqrt{۳}\\(۲-\sqrt{۳})^n=A-B\sqrt{۳}\end{cases}$، داریم:

$$A^۲-۳B^۲=۱\,,\;(۲+\sqrt{۳})^n+(۲-\sqrt{۳})^n=۲A$$

$$\Rightarrow \text{عبارت موردنظر}=\frac{A(A^۲-۳B^۲)}{۲A}=\frac{A\times ۱}{۲A}=\frac{۱}{۲}$$

(حسابان–صفحه‌های ۶ تا ۱۱)

۳۳– گزینه‌ی «۲»

با توجه به این‌که به‌ازای $x=۱$ مخرج کسر اول صفر و به‌ازای $x=-۱$ مخرج کسر دوم صفر می‌شود، این دو مخرج به‌ترتیب بر $(x-۱)$ و $(x+۱)$ بخش‌پذیرند.

$$\frac{x^۲+۴x-۵}{x^۳-۲x^۲+۱}-\frac{x^۲+x}{x^۳-۲x-۱}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{(x-۱)(x+۵)}{(x-۱)(x^۲-x-۱)}-\frac{x(x+۱)}{(x+۱)(x^۲-x-۱)}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{x+۵-x}{x^۲-x-۱}=۱\Rightarrow x^۲-x-۱=۵\Rightarrow x^۲-x-۶=۰$$

$$(x-۳)(x+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=-۲\end{cases}$$

جواب‌های به‌دست آمده در معادله‌ی اصلی صدق می‌کنند، پس معادله‌ی گویای داده شده دو جواب دارد.

(حسابان– صفحه‌های ۲۴ تا ۲۷)

۳۴– گزینه‌ی «۱»

با توجه به این‌که $x^۲+x+۱$ همواره مثبت است. پس

$$|x^۲+x+۱|=x^۲+x+۱$$

$$|x^۲+kx+۱|<۳x^۲+۳x+۳$$

$$\Rightarrow -۳x^۲-۳x-۳<x^۲+kx+۱<۳x^۲+۳x+۳$$

$$x^۲+kx+۱<۳x^۲+۳x+۳\Rightarrow ۲x^۲+(۳-k)x+۲>۰$$

$$\begin{cases}b^۲-۴ac=(۳-k)^۲-۱۶<۰\Rightarrow -۴<۳-k<۴\Rightarrow -۷<-k<۱\\\Rightarrow -۱<k<۷\\a>۰\end{cases}$$

$$x^۲+kx+۱>-۳x^۲-۳x-۳\Rightarrow ۴x^۲+(k+۳)x+۴>۰$$

$$\begin{cases}b^۲-۴ac=(k+۳)^۲-۶۴<۰\Rightarrow -۸<k+۳<۸\Rightarrow -۱۱<k<۵\\a>۰\end{cases}$$

چون باید دو نامعادله برقرار باشد، از دو مجموعه‌ی جواب اشتراک می‌گیریم.

$$(-۱,۷)\cap(-۱۱,۵)=(-۱,۵)\Rightarrow -۱<k<۵$$

(حسابان– صفحه‌های ۳۱ تا ۳۹ و ۱۶ و ۱۷)

۳۵- گزینه‌ی «۱»

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) = a_۱ n + \frac{n^۲ d}{۲} - \frac{nd}{۲}$$

یعنی S_n درجه‌ی ۲ است، بنابراین ضریب جمله‌ی درجه‌ی ۳ آن باید صفر باشد.

$$\Rightarrow a = ۰ \Rightarrow S_n = bn^۲ + ۲n$$

$$a_۴ = S_۴ - S_۳ \Rightarrow ۹ = (۱۶b + ۸) - (۹b + ۶)$$

$$\Rightarrow ۷b + ۲ = ۹ \Rightarrow b = ۱$$

(حسابان- صفحه‌های ۲ تا ۶)

۳۶- گزینه‌ی «۳»

$$f(x+۱) = (x-۱)^۲ Q(x) + (x+۱۰)$$

به جای تمام x ها عبارت $(x-۱)$ می‌گذاریم:

$$f(x) = (x-۲)^۲ Q(x-۱) + (x+۹)$$

حال طرفین رابطه‌ی به‌دست آمده را در $x+۱$ ضرب می‌کنیم:

$$(x+۱)f(x) = (x+۱)(x-۲)^۲ Q(x-۱) + (x+۱)(x+۹)$$

با توجه به این‌که $(x+۱)(x-۲)^۲$ بر $x^۲ - x - ۲$ بخش‌پذیر است، کافیست باقیمانده‌ی عبارت $(x+۱)(x+۹)$ را بر $x^۲ - x - ۲$ بیابیم:

$$x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = x + ۲ \qquad (*)$$

$$(x+۱)(x+۹) = x^۲ + ۱۰x + ۹ \overset{(*)}{=\!=} ۱۱x + ۱۱ = R(x)$$

(حسابان- صفحه‌های ۶ تا ۸)

۳۷- گزینه‌ی «۳»

چون $x \le ۰$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x = -(\sqrt{-x})^۲$$

$$-(\sqrt{-x})^۲ + ۳\sqrt{-x} + ۱۸ > ۰ \Rightarrow (\sqrt{-x})^۲ - ۳\sqrt{-x} - ۱۸ < ۰$$

$$\Rightarrow (\sqrt{-x} - ۶)(\sqrt{-x} + ۳) < ۰$$

عبارت $\sqrt{-x} + ۳$ همواره مثبت است. بنابراین:

$$\sqrt{-x} - ۶ < ۰ \Rightarrow \sqrt{-x} < ۶ \Rightarrow -x < ۳۶ \Rightarrow x > -۳۶$$

پس اعداد صحیح منفی متعلق به مجموعه‌ی جواب نامعادله عبارت‌اند از:

$$\{-۳۵, -۳۴, \ldots, -۱\}$$

(حسابان- صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

۳۸- گزینه‌ی «۱»

$$\alpha^۲ - ۵\alpha + ۳ = ۰ \,,\ \beta^۲ - ۵\beta + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{۵ \pm \sqrt{۱۳}}{۲} \,,\ \beta = \frac{۵ \pm \sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$\xrightarrow{\alpha \ne \beta} \alpha = \frac{۵ + \sqrt{۱۳}}{۲} \,,\ \beta = \frac{۵ - \sqrt{۱۳}}{۲}$$

معادله‌ی مورد نظر $: x^۲ - (\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha})x + (\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha}) = ۰$

$$\Rightarrow x^۲ - (\frac{\alpha^۲ + \beta^۲}{\alpha\beta})x + ۱ = ۰$$

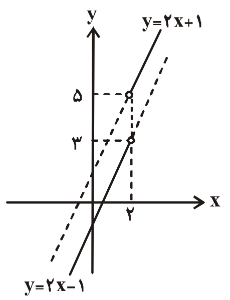
$$\alpha^۲ + \beta^۲ = \frac{۵۰ + ۲۶}{۴} = ۱۹ \,,\ \alpha\beta = \frac{۲۵ - ۱۳}{۴} = ۳$$

$$x^۲ - \frac{۱۹}{۳}x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۹x + ۳ = ۰$$

(حسابان-صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷)

۳۹- گزینه‌ی «۲»

$$y = ۲x + \frac{|x-۲|}{x-۲} \Rightarrow y = \begin{cases} ۲x+۱ & ; \ x > ۲ \\ ۲x-۱ & ; \ x < ۲ \end{cases}$$



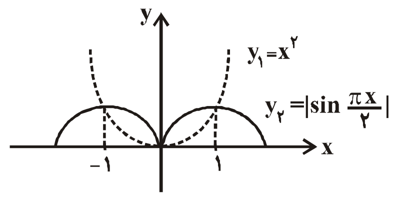
اگر خط به معادله‌ی $y = y_۰$ نمودار تابع را قطع نکند، آنگاه بیش‌ترین مقدار $y_۰$ برابر پنج و کم‌ترین مقدار آن برابر سه است، پس با توجه به صورت سؤال، بیش‌ترین مقدار $b - a$ برابر است با $۵ - ۳ = ۲$.

(حسابان، صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹)

۴۰– گزینه‌ی «۱»

می‌دانیم $۰ < \frac{۱}{۲} < ۱$، پس: $(\frac{۱}{۲})^{|\sin\frac{\pi x}{۲}|} \le (\frac{۱}{۲})^{x^۲} \Rightarrow |\sin\frac{\pi x}{۲}| \ge x^۲$

نمودارهای $y_۱ = x^۲$ و $y_۲ = |\sin\frac{\pi x}{۲}|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



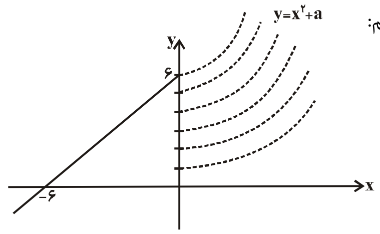
با توجه به دو نمودار مجموعه جواب نامعادله به‌صورت $-۱ \le x \le ۱$ در می‌آید، پس: $b - a = ۲$

(حسابان، صفحه‌های ۴۱ و ۴۲)

فصل ۲ : تابع

۴۱– گزینه‌ی «۱»

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



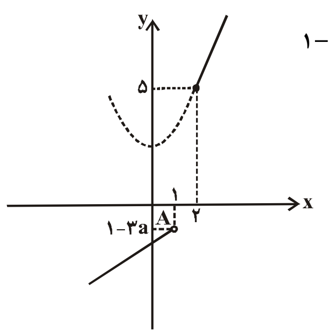
برای این‌که تابع معکوس‌پذیر نباشد، باید تابع یک‌به‌یک نباشد. پس اگر $a \ge ۶$ باشد، تابع یک‌به‌یک است و اگر a مقادیر طبیعی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را اختیار کند، یک‌به‌یک نیست و در نتیجه معکوس‌پذیر هم نمی‌باشد.

(حسابان– صفحه‌های ۸۵ تا ۹۴)

۴۲– گزینه‌ی «۳»

نمودار تابع را رسم می‌کنیم، برای آن‌که تابع f صعودی باشد، باید عرض نقطه A از عرض نقطه‌ی $(۲,۵)$ بیش‌تر نباشد، بنابراین:

$$۱-۳a \le ۵ \Rightarrow ۳a \ge -۴ \Rightarrow a \ge \frac{-۴}{۳}$$



(حسابان– صفحه‌ی ۸۰)

۴۳– گزینه‌ی «۱»

$$\begin{cases} \frac{۱}{|x-۱|} \le ۱ \xrightarrow{x\neq ۱} |x-۱| \ge ۱ \\ \frac{۱}{|x-۲|} \le ۱ \xrightarrow{x\neq ۲} |x-۲| \ge ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۱ \le -۱ \text{ یا } x-۱ \ge ۱ \\ x-۲ \le -۱ \text{ یا } x-۲ \ge ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le ۰ \text{ یا } x \ge ۲ \\ x \le ۱ \text{ یا } x \ge ۳ \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_y = (-\infty, ۰] \cup [۳, +\infty)$$

(حسابان– صفحه‌های ۱۲۴ تا ۱۲۷)

۴۴– گزینه‌ی «۳»

با توجه به ضابطه‌ی تابع، برد تابع برابر است با:

$$R_f = (-\infty, a^۳ + ۲] \cup (۳a + ۴, +\infty)$$

بنابراین برای این‌که برد تابع برابر R باشد باید:

$$۳a + ۴ \le a^۳ + ۲ \Rightarrow a^۳ - ۳a - ۲ \ge ۰ \Rightarrow a^۳ - a - ۲a - ۲ \ge ۰$$

$$\Rightarrow a(a-۱)(a+۱) - ۲(a+۱) \ge ۰ \Rightarrow (a+۱)(a^۲ - a - ۲) \ge ۰$$

$$\Rightarrow (a+۱)^۲(a-۲) \ge ۰$$

$$\xrightarrow{(a+۱)^۲ \ge ۰} a \in [۲, +\infty) \cup \{-۱\} \Rightarrow \min\{a\} = -۱$$

(حسابان– صفحه‌های ۴۴ تا ۴۷ و ۵۰ تا ۵۱)

۴۵– گزینه‌ی «۳»

نمودار تابع $y = k\cos x$ را وقتی $\frac{\pi}{۲}$ واحد به راست منتقل می‌کنیم، نمودار تابع $y = k\sin x$ به‌دست می‌آید.

$$y = k\cos x \xrightarrow{\frac{\pi}{۲} \text{ واحد به راست}} y = k\cos(x - \frac{\pi}{۲}) = k\sin x$$

با توجه به این‌که نقطه‌ی $(\frac{\pi}{۵}, ۱)$ بر روی نمودار $y = k\cos x$ قرار دارد، داریم:

$$y = k\sin(\frac{۳\pi}{۱۰}) \Rightarrow y = k\cos(\frac{۳\pi}{۱۰} - \frac{\pi}{۲})$$

$$= k\cos(-\frac{\pi}{۵}) = k\cos\frac{\pi}{۵} = ۱$$

(حسابان– صفحه‌های ۵۴ تا ۶۴)