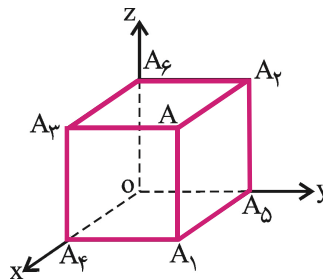


مختصات نقطه در دستگاه مختصات قائم فضای R^3

مختصات نقطه در فضای R^3 : هر نقطه در این فضا با یک سه تایی مرتب که معرف طول، عرض و ارتفاع آن است، معرفی می‌شود. ارتفاع عرض طول

$A = (x_1, y_1, z_1)$	
$A_1 = (x_1, y_1, 0)$	تصویر قائم A روی صفحه‌ی xoy
$A_2 = (0, y_1, z_1)$	تصویر قائم A روی صفحه‌ی yoZ
$A_3 = (x_1, 0, z_1)$	تصویر قائم A روی صفحه‌ی xoz
$A_4 = (x_1, 0, 0)$	تصویر قائم A روی محور x ها
$A_5 = (0, y_1, 0)$	تصویر قائم A روی محور y ها
$A_6 = (0, 0, z_1)$	تصویر قائم A روی محور z ها



تذکره:

- فاصله‌ی A از صفحه‌ی yoZ : $|AA_2| = |x_1|$
- فاصله‌ی A از صفحه‌ی xoz : $|AA_3| = |y_1|$
- فاصله‌ی A از صفحه‌ی xoy : $|AA_1| = |z_1|$
- فاصله‌ی A از محور z ها: $|AA_6| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$
- فاصله‌ی A از محور y ها: $|AA_5| = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}$
- فاصله‌ی A از محور x ها: $|AA_4| = \sqrt{y_1^2 + z_1^2}$
- فاصله‌ی A از مبدأ مختصات: $|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

فاصله‌ی بین دو نقطه (طول پاره خط)

با معلوم بودن مختصات دو نقطه‌ی A و B در فضای R^3 ، طول پاره خط AB به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مختصات نقطه‌ی وسط

اگر M نقطه‌ی وسط پاره خط AB باشد، داریم:

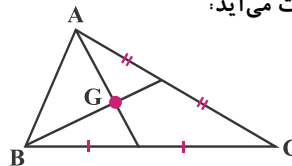
$$\begin{cases} A = (x_A, y_A, z_A) \\ B = (x_B, y_B, z_B) \end{cases} \Rightarrow M \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$



تذکره: مختصات مرکز ثقل مثلث، یعنی محل برخورد سه میانه‌ی آن در صورتی که سه نقطه‌ی A, B, C با مختصات زیر، سه رأس آن باشند، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$A = (x_A, y_A, z_A), B = (x_B, y_B, z_B), C = (x_C, y_C, z_C)$$

$$\Rightarrow G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

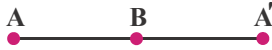


تذکره: قرینه‌ی نقطه‌ی $A = (x_1, y_1, z_1)$ نسبت به صفحات و محورهای مختصات به صورت زیر است:

$(x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} (x_1, -y_1, -z_1)$	$(x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به صفحه‌ی } xoy} (x_1, y_1, -z_1)$
$(x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} (-x_1, y_1, -z_1)$	$(x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به صفحه‌ی } yoz} (-x_1, y_1, z_1)$
$(x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } z \text{ ها}} (-x_1, -y_1, z_1)$	$(x_1, y_1, z_1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به صفحه‌ی } xoz} (x_1, -y_1, z_1)$

تذکره: قرینه‌ی نقطه‌ی $A = (x_1, y_1, z_1)$ ، نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ی $A' = (-x_1, -y_1, -z_1)$ است.

تذکره: قرینه‌ی نقطه‌ی $A = (x_1, y_1, z_1)$ ، نسبت به نقطه‌ی $B = (a, b, c)$ به صورت زیر به دست می‌آید:



از آن‌جا که نقطه‌ی B وسط پاره‌خط AA' است، داریم:

$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow a = \frac{x_1 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2a - x_1$$

و به همین ترتیب داریم: $y_{A'} = 2b - y_1$ و $z_{A'} = 2c - z_1$ ، در نتیجه مختصات نقطه‌ی A' از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$A' = (2a - x_1, 2b - y_1, 2c - z_1)$$

الگوی ۱

۱- نوع مثلثی که رأس‌هایش $A = (4, 0, 0)$ ، $B = (0, 4, 0)$ و $C = (0, 0, 4)$ باشند، کدام است؟

- (۱) متساوی‌الساقین (۲) قائم‌الزاویه (۳) متساوی‌الاضلاع (۴) غیر مشخص

۲- نقاط $A = (1, 2, 3)$ و $B = (4, 6, -3)$ مفروض‌اند. طول تصویر قائم پاره‌خط AB روی صفحه‌ی xOy ، چه قدر است؟

- (۱) $\sqrt{61}$ (۲) ۵ (۳) $5\sqrt{2}$ (۴) ۶

۳- طول تصویر قائم پاره‌خط AB که در آن $A = (1, 2, 3)$ و $B = (5, 5, 1)$ است، بر صفحه‌ی xOy برابر است با:

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۴- معادله‌ی کره‌ای که مرکز آن به مختصات $(1, 2, 3)$ است و از نقطه‌ی $(2, -1, -2)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z = 49$ (۲) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z = 49$
 (۳) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 21$ (۴) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 21$

بردار در فضای R^3

مجموع و تفاضل دو بردار، تعبیر هندسی و بردارهای یک‌ه

بردار: اگر $A = (x_1, y_1, z_1)$ نقطه‌ای در فضای R^3 و $O(0, 0, 0)$ مبدأ مختصات باشد، پاره‌خط جهت‌دار \vec{OA} که از نقطه‌ی O شروع و به

نقطه‌ی A ختم می‌شود را یک بردار می‌نامیم و آن را به صورت $\vec{OA} = a = (x_1, y_1, z_1)$ ، نشان می‌دهیم.

x_1 ، y_1 و z_1 مؤلفه‌های بردار \vec{OA} نامیده می‌شوند.

طول بردار: طول بردار $\vec{OA} = a = (x_1, y_1, z_1)$ برابر فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ مختصات، یعنی $\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ است.

مجموع و تفاضل دو بردار

تعریف: فرض می‌کنیم $a = (x_1, y_1, z_1)$ و $b = (x_2, y_2, z_2)$ دو بردار باشند. **مجموع** این دو بردار که خود یک بردار است را با $a + b$

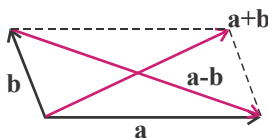
$$a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

نمایش می‌دهیم و به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

$$a - b = a + (-b) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

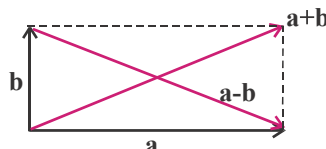
با $a - b$ را با a نمایش می‌دهیم و به صورت مقابل تعریف می‌کنیم:

تعبیر هندسی مجموع و تفاضل دو بردار



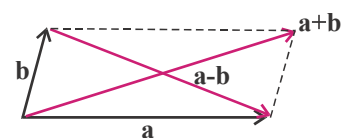
زاویه‌ی بین دو بردار **منفرجه** است.

$$|a + b| < |a - b|$$



زاویه‌ی بین دو بردار **قائمه** است.

$$|a + b| = |a - b|$$



زاویه‌ی بین دو بردار **حاده** است.

$$|a + b| > |a - b|$$

ضرب عدد در بردار

اگر r یک عدد حقیقی باشد، حاصل ضرب r در بردار a را به صورت $ra = (rx_1, ry_1, rz_1)$ تعریف می‌کنیم. $-1a$ را با $-a$ نشان می‌دهیم و به آن **قرینه‌ی a** می‌گوئیم، یعنی $-a = (-x_1, -y_1, -z_1)$.

تعبیر هندسی ضرب عدد در بردار



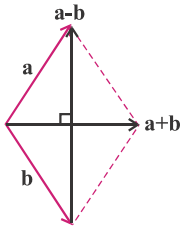
بردارهای موازی: دو بردار a و b را موازی (همراستا) گویند، هرگاه عددی حقیقی و غیرصفر مانند r موجود باشد به طوری که $b = ra$.

$$\begin{cases} a = (x_1, y_1, z_1) \\ b = (x_2, y_2, z_2) \end{cases}, \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = r \Leftrightarrow a \parallel b, (x_1, y_1, z_1 \neq 0)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

تذکر: برای هر دو بردار دلخواه a و b داریم:

اگر بردارهای غیرصفر a و b موازی و هم‌جهت باشند، آن‌گاه در رابطه‌ی بالا حالت **تساوی** برقرار می‌شود. در غیر این صورت، **نامساوی** برقرار است.



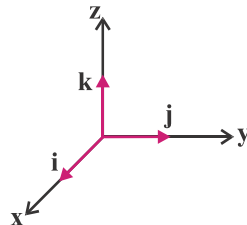
تذکر: اگر اندازه‌های دو بردار a و b با هم مساوی باشد، دو بردار $a+b$ و $a-b$ بر هم عمودند.

و از لحاظ هندسی می‌توان آن‌ها را دو قطر یک لوزی در نظر گرفت.

$$|a| = |b| \Leftrightarrow (a+b) \perp (a-b)$$

بردارهای یکه: هر برداری با طول واحد را بردار **یکه** می‌نامیم. در بین بردارهای یکه، سه بردار $i = (1, 0, 0)$ ، $j = (0, 1, 0)$ و $k = (0, 0, 1)$ از اهمیت و کاربرد بیشتری برخوردارند. هر بردار دلخواه مانند $a = (x_1, y_1, z_1)$ را می‌توانیم به صورت ترکیب بردارهای i ، j و k بنویسیم.

$$a = (x_1, y_1, z_1) = x_1 i + y_1 j + z_1 k$$



به ازای هر بردار غیرصفر a ، بردار جهت a برداری با طول واحد است که هم‌راستا و هم‌جهت با a می‌باشد. اگر بردار جهت a را با e_a نمایش

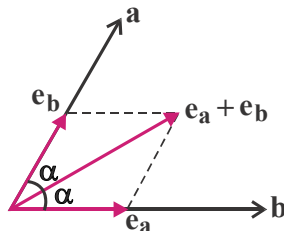
$$e_a = \frac{1}{|a|} a = \left(\frac{x_1}{|a|}, \frac{y_1}{|a|}, \frac{z_1}{|a|} \right) \Rightarrow a = |a| e_a$$

دهیم، آنگاه:

یعنی هر بردار با کمیت عددی مثبت که طول آن $(|a|)$ است و یک جهت (e_a) مشخص می‌شود.

راستای نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار: اگر a و b دو بردار دلخواه غیرصفر باشند بردار $e_a + e_b$ یا هر مضرب مثبتی از آن، راستای نیمساز زاویه‌ی

بین دو بردار a و b است.



الگوی ۲

۵- بردارهای $(x-3, x, 1)$ و $(x+1, 4, x-1)$ به ترتیب مجموع و تفاضل دو بردار غیرصفر a و b هستند. اگر زاویه بین دو بردار a و b منفرد باشد، آن گاه حدود تغییرات x کدام است؟

(آزاد - ۸۰)

$$x < \frac{4}{3} \quad (1) \quad -\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3} \quad (2) \quad x > -\frac{4}{3} \quad (3) \quad -\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3} \quad (4)$$

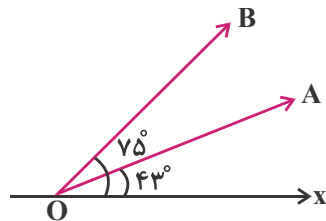
(آزاد ریاضی - ۸۱)

* ۶- اگر $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{V}_2 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ باشد، حاصل $\frac{|\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2|}{|\vec{V}_1 + 2\vec{V}_2|}$ کدام است؟

$$1 \quad (1) \quad \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (2) \quad \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (3) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

۷- دو بردار \vec{OA} و \vec{OB} به طول‌های مساوی با محور ox به ترتیب زوایای 43° و 75° می‌سازند. زاویه بردار $\vec{OA} + \vec{OB}$ با محور ox ، چند درجه است؟

(آزاد غیرپزشکی ریاضی - ۷۶)



(۱) ۶۰

(۲) ۵۸

(۳) ۵۷

(۴) ۵۹

(سراسری - ۷۱)

۸- اندازه‌ی تصویر قائم بردار $\vec{V} = (3, 1, 2)$ بر صفحه‌ی yoz ، کدام است؟

$$\sqrt{5} \quad (1) \quad \sqrt{10} \quad (2) \quad \sqrt{13} \quad (3) \quad \sqrt{14} \quad (4)$$

(سراسری - ۹۴)

۹- نقاط $A(5, -4, 1)$ ، $B(-1, 2, 4)$ و $O(0, 0, 0)$ مفروض هستند و $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ ، مقدار $|\vec{OM}|$ کدام است؟

$$\sqrt{10} \quad (1) \quad \sqrt{11} \quad (2) \quad \sqrt{13} \quad (3) \quad \sqrt{14} \quad (4)$$

الگوی ۳

(سراسری - ۷۰)

۱۰- دو بردار $\vec{V}_1 = (1, m, 3)$ و $\vec{V}_2 = (2, 4, k)$ موازیند، آن گاه:

$$k=6 \text{ و } m=6 \quad (1) \quad k=2 \text{ و } m=6 \quad (2) \quad k=3 \text{ و } m=2 \quad (3) \quad k=6 \text{ و } m=2 \quad (4)$$

* ۱۱- اگر بردار $a = (m, 2, -1)$ و $|b| = \sqrt{41}$ ، دو بردار $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۸۵)

$$3 \quad (1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4)$$

حاصل ضرب داخلی دو بردار و نامساوی کشی - شوارتس

ضرب داخلی: اگر θ زاویه بین دو بردار غیر صفر a و b باشد، ضرب داخلی آن دو، عددی حقیقی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$$

اگر یکی از دو بردار a و b و یا هر دو برابر صفر باشند، زاویه بین آن‌ها قابل تعریف نیست. در این حالت قرارداد می کنیم که: $a \cdot b = 0$ در حالتی که مؤلفه‌های دو بردار a و b مشخص باشند، حاصل ضرب داخلی آن‌ها را می توان از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$a = (x_1, y_1, z_1), b = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

تذکره: ضرب داخلی دو بردار در مجموعه‌ی بردارها خاصیت بسته بودن را ندارد، چون حاصل عمل، یک عدد است و نه یک بردار.

تذکره: خواص زیر برای بردارهای دلخواه a ، b و c برقرار است:

۱) $a \cdot b = b \cdot a$ خاصیت جابه‌جایی

۲) $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ توزیع پذیری (پخش پذیری) در جمع و تفاضل بردارها

۳) $(ra) \cdot (sb) = (rs)(a \cdot b) \quad r, s \in \mathbb{R}$

۴) $a \cdot a = |a|^2 \Rightarrow i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$

۵) $|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2a \cdot b$

۶) $|a + b + c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

نتیجه: اگر $a + b + c = 0$ باشد داریم: $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$

۷) $|a \cdot b| \leq |a| |b|$ (نامساوی کشی - شوارتس)

نتیجه: اگر مؤلفه‌های دو بردار a و b معلوم باشند، نامساوی کشی - شوارتس به صورت زیر خواهد بود:

$$a = (x_1, y_1, z_1), b = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow |x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2| \leq (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{\frac{1}{2}} (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

مثال: اگر $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ باشد، بیش‌ترین مقدار عبارت $|2a + b + 6c|$ را بیابید.

پاسخ: دو بردار $u = (a, b, 2c)$ و $v = (2, 1, 3)$ را در نظر می‌گیریم. بنا به نامساوی کشی - شوارتس، داریم:

$$|u \cdot v| \leq |u| |v| \Rightarrow |2a + b + 6c| \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 4c^2} \sqrt{4 + 1 + 9}$$

$$\Rightarrow |2a + b + 6c| \leq \sqrt{14} \Rightarrow \text{Max}(|2a + b + 6c|) = \sqrt{14}$$

۸) اگر $a \cdot b = a \cdot c$ باشد، لزومی ندارد که $b = c$ ، زیرا:

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a \cdot b - a \cdot c = 0 \Rightarrow a \cdot (b - c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{یا} \\ b = c \\ \text{یا} \\ a \perp (b - c) \end{cases}$$

الگوی ۴

۱۲- ضرب درونی بردارها در فضا کدام ویژگی را دارد؟

- (۱) بسته بودن (۲) جابه‌جایی (۳) شرکت‌پذیری (۴) عضو خنثی

(سراسری - ۶۶)

۱۳- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ باشند، حاصل ضرب داخلی آن دو بردار کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) -۸ (۴) -۴

(سراسری - ۸۰)

۱۴- حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ (O مبدأ مختصات است) و برداری به طول ۲ که با هم زاویه‌ی 60° می‌سازند، چه قدر

است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

(آزاد - ۸۰)

۱۵- اگر $\vec{V}_1 = (1, -1, 1)$ و $\vec{V}_2 = (-1, 4, -5)$ باشد، آن گاه حاصل $|\vec{V}_1 + \vec{V}_2| + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) صفر (۳) ۱۰ (۴) ۵

(سراسری - ۷۲)

۱۶*- اگر \vec{V}_1 و \vec{V}_2 دو بردار باشند و $|\vec{V}_1| = 4$ و $|\vec{V}_2| = 3$ ، حاصل ضرب داخلی $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$ چه قدر است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۱ (۴) ۲

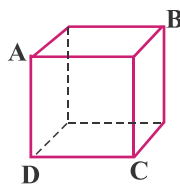
(آزاد ریاضی نوبت صبح - ۸۲)

۱۷*- اگر $|\vec{a}| = 2\sqrt{6}$ ، $|\vec{b}| = 5$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ اندازه‌ی بردار $\vec{a} - \vec{b}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷

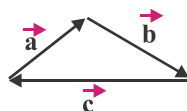
(سراسری ریاضی - ۸۳)

الگوی ۵

۱۸*- در مکعب شکل زیر به طول یال ۳ حاصل ضرب داخلی $\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{AD}$ چقدر است؟

- (۱) ۹
(۲) ۱۸
(۳) صفر
(۴) ۲۷

(آزاد ریاضی - ۸۵)

۱۹*- در شکل زیر اندازه بردارهای \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} به ترتیب برابر ۳، ۵ و ۶ است. حاصل ضرب داخلی دو بردار \vec{a} و \vec{b} کدام است؟

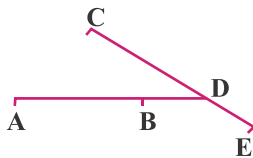
- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۱
(۴) ۲

(سراسری ریاضی - ۸۰)

۲۰- با توجه به شکل، کدام گزینه عددی بزرگ‌تر است؟

- (۱) $(\vec{AB}) \cdot (\vec{AD})$
(۲) $(\vec{AB}) \cdot (\vec{AE})$
(۳) $(\vec{AD}) \cdot (\vec{AC})$

(۴) هر سه یکسان هستند.



(آزاد ریاضی صبح - ۸۳)

۲۱- در کدام حالت، حاصل ضرب عددی بردار غیرصفر \vec{a} در مجموع دو بردار غیرصفر \vec{X} و \vec{Y} صفر نیست؟

- (۱) بردار \vec{X} قرینه‌ی بردار \vec{Y}
(۲) بردار \vec{a} فقط بر یکی از دو بردار \vec{X} یا \vec{Y} عمود.
(۳) سه بردار دو به دو عمود برهم.
(۴) بردار \vec{a} بر صفحه دو بردار \vec{X} و \vec{Y} عمود.

(سراسری ریاضی - ۸۶)

۲۲- اگر $|\vec{a}|=2$ و $|\vec{b}|=3$ و $|\vec{c}|=6$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ باشد، اندازه $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۲۳- دو نقطه‌ی ثابت $A = (1, -1, 2)$ و $B = (3, 1, -2)$ مفروض‌اند. نقطه‌ی متغیر M را در فضا طوری در نظر می‌گیریم که $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 3$ باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی M از نقطه‌ی $(2, 0, 0)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۲

(کانون فرهنگی آموزش)

* ۲۴- سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} با اندازه‌های ۳، ۴ و ۷ واحد، در رابطه‌ی $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ صدق می‌کنند. مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ کدام است؟

- (۱) -۳۷ (۲) -۱۹ (۳) ۱۹ (۴) ۳۷

(سراسری قاج از کشور - ۸۷)

* ۲۵- اگر $|\vec{a}|=2$ ، $|\vec{b}|=3$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ باشد، حاصل ضرب داخلی $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b})$ چقدر است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۵۸ (۳) ۳۰ (۴) ۵۰

(آزاد ریاضی عصر - ۸۹)

۲۶- اگر $|2\vec{a}| = |3\vec{b}| = |2\vec{a} + 3\vec{b}|$ ، آن‌گاه زاویه‌ی بین بردارهای غیر صفر \vec{a} و \vec{b} کدام است؟

- (۱) 60° (۲) 90° (۳) 120° (۴) 150°

(سراسری - ۷۴)

بردار: ضرب داخلی

زاویه‌ی بین دو بردار و شرط عمود بودن

محاسبه‌ی زاویه‌ی بین دو بردار: اگر θ زاویه‌ی بین دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} باشد، داریم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

تذکره: زاویه‌ی بین دو بردار غیر صفر را همواره زاویه‌ای بین صفر و 180° در نظر می‌گیریم. ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

شرط عمود بودن دو بردار: دو بردار غیر صفر \vec{a} و \vec{b} بر هم عمودند، اگر و فقط اگر:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \end{cases}, \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

مثال: m را طوری بیابید که بردارهای $\vec{a} = (m-1, 1, 2)$ و $\vec{b} = (3, 0, -m)$ بر هم عمود باشند.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 3m - 3 + 0 - 2m = 0 \Rightarrow m = 3$$

تذکره: \vec{i} ، \vec{j} و \vec{k} بردارهای یک‌ه‌ی دوه‌دو عمود بر هم هستند، بنابراین داریم:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

الگوی ۶

۲۷- حاصل ضرب داخلی دو بردار با اندازه‌های مساوی، برابر با مربع اندازه‌ی هر یک از دو بردار است. زاویه‌ی بین دو بردار چند درجه

است؟

- (۱) صفر (۲) ۳۰ (۳) ۴۵ (۴) ۹۰

(سراسری ریاضی - ۷۸)

* ۲۸- زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{V}_1 = (2, 3, -3)$ و $\vec{V}_2 = (3, 2, 4)$ چقدر است؟

- (۱) 120° (۲) 90° (۳) 60° (۴) 30°

(آزاد ریاضی - ۷۹)

۲۹- زاویه‌ی بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} برابر 60° درجه و $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ است. زاویه‌ی بین بردار $\vec{a} + (-\vec{b})$ و بردار \vec{a} چقدر است؟

- (۱) 30° (۲) 45° (۳) 90° (۴) 120°

(سراسری تهرانی - ۷۷)

۳۰- اگر اندازه‌ی دو بردار $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j} + 4\vec{k}$ و $\vec{V}_2 = a\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ برابر باشند، کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار کدام است؟

(۱) $\frac{16}{29}$ (۲) $\frac{24}{29}$ (۳) $\frac{4}{\sqrt{29}}$ (۴) $\frac{28}{29}$ (آزاد ریاضی - ۸۱)

۳۱- سه نقطه $A(2, 1, 0)$ ، $B(3, -1, 2)$ و $C(-1, 1, 3)$ رأس‌های مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (سراسری - ۹۳)

* ۳۲- اگر $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ باشد، آن‌گاه کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۱)

(۱) $-\sqrt{\frac{3}{17}}$ (۲) $-\sqrt{\frac{5}{17}}$ (۳) $\sqrt{\frac{3}{17}}$ (۴) $\sqrt{\frac{5}{17}}$

۳۳- بر روی دو بردار $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ متوازی‌الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی‌الاضلاع

کدام است؟ (سراسری قارج از کشور - ۹۲)

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

الگوی ۷

۳۴- دو بردار غیرصفر \vec{a} و \vec{b} بر هم عمودند اگر و تنها اگر ... (سراسری ریاضی - ۶۳)

(۱) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (۲) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ (۳) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ (۴) $\vec{a} \times \vec{b} = 1$

۳۵- دو بردار $\vec{V}_1(4, 5, n)$ و $\vec{V}_2(2, m, 3)$ بر هم عمودند. m و n کدام یک از اعداد زیر می‌توانند باشند؟ (سراسری ریاضی - ۶۶)

(۱) $m = n = 1$ (۲) $m = n = -1$ (۳) $m = n = -2$ (۴) $m = n = 2$

۳۶- دو بردار $\vec{OA} = (3, 2, 4)$ و $\vec{OB} = (2, 1, k)$ بر یک‌دیگر عمودند، k برابر است با: (آزاد ریاضی - ۶۷)

(۱) $k = 2$ (۲) $k = -2$ (۳) $k = -1$ (۴) $k = 1$

* ۳۷- دو بردار \vec{OA} و \vec{OB} مفروضند. اگر O مبدأ مختصات و $A\left|\frac{1}{m}\right|$ و $B\left|\frac{m-1}{2}\right|$ آن‌گاه شرط آن‌که دو بردار \vec{OA} و \vec{OB} بر هم عمود

باشند، آن است که: (آزاد ریاضی - ۶۹)

(۱) $m = -1$ (۲) $m = -2$ (۳) $m = 1$ (۴) $m = 2$

* ۳۸- دو بردار \vec{a} و \vec{b} با تصویرهای $(1, \alpha + 1, 2\alpha)$ و $(2, 0, -1)$ مفروضند. به ازای کدام مقادیر α ، بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ بر هم عمودند؟

(۱) $0/4$ و -1 (۲) $0/6$ و -1 (۳) $0/4$ و 1 (۴) $0/6$ و 1 (سراسری ریاضی - ۸۹)

۳۹- سه بردار $\vec{V}_1 = (1, -1, a)$ ، $\vec{V}_2 = (2, b, 1)$ و $\vec{V}_3 = (c, 3, 2)$ ، دو به دو عمود بر هم هستند. $a + b + c$ کدام است؟

(۱) 5 (۲) 6 (۳) 7 (۴) 8 (سراسری قارج از کشور - ۹۳)

* ۴۰- زاویه‌ی بین دو بردار غیرصفر \vec{a} و \vec{b} برابر 60° است. اگر دو بردار $\vec{a} - m\vec{e}_b$ و $\vec{e}_a - m\vec{e}_b$ بر هم عمود باشند آن‌گاه مقدار m کدام می‌تواند باشد؟ (کانون فرهنگی آموزش)

(۱) $3 + \sqrt{3}$ (۲) $3 + \sqrt{2}$ (۳) $2 + \sqrt{2}$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

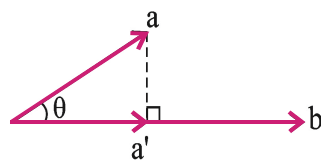
تصویر قائم یک بردار و نیز قرینه‌ی یک بردار نسبت به امتداد بردار دیگر

تصویر قائم یک بردار روی امتداد برداری دیگر: اگر a و b دو بردار دلخواه غیر صفر و a' تصویر قائم a روی امتداد b باشد، داریم:

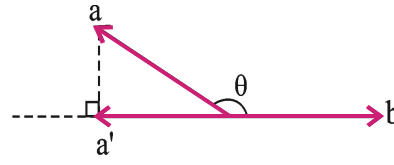
$$a' = \lambda b$$

$$a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b$$

$$|a'| = \frac{|a \cdot b|}{|b|}$$



$$(0 < \theta < 90^\circ)$$



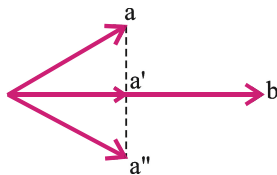
$$(90^\circ < \theta < 180^\circ)$$

تذکره: طول تصویر a روی امتداد b یعنی a' از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

قرینه‌ی یک بردار نسبت به راستای برداری دیگر: اگر قرینه‌ی بردار غیر صفر a را نسبت به

امتداد بردار غیر صفر b ، a'' بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} |a''| = |a| \\ a'' = \lambda a' - a \end{cases} \Rightarrow a'' = \frac{2a \cdot b}{|b|^2} b - a$$



الگوی ۸

(سراسری - ۸۰)

۴۱- طول تصویر قائم بردار $\vec{V}_1 = (1, 2, 2)$ بر بردار $\vec{V}_2 = (2, 1, 2)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{8}{9}$ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۸

(سراسری ریاضی - ۸۲)

* ۴۲- تصویر قائم بردار $(6, -3, 0)$ روی امتداد بردار $(-2, -1, -2)$ کدام بردار است؟

- (۱) $(-2, -1, -2)$ (۲) $(2, 1, -2)$ (۳) $(-4, -2, -4)$ (۴) $(2, 3, -1)$

الگوی ۹

(سراسری ریاضی - ۷۷)

۴۳- قرینه‌ی بردار $a = j + 3k$ به راستای بردار $b = i - k$ کدام است؟

- (۱) $-i + 3k$ (۲) $-3i - j$ (۳) $2i - j + k$ (۴) $3i + j$

(سراسری خارج از کشور - ۸۷)

۴۴- قرینه‌ی بردار $\vec{a} = (-2, 0, 1)$ نسبت به امتداد بردار $\vec{b} = (1, 2, -1)$ ، کدام بردار است؟

- (۱) $(1, -2, 0)$ (۲) $(-1, 2, 0)$ (۳) $(0, 2, 1)$ (۴) $(0, -2, 1)$

(سراسری خارج از کشور - ۸۸)

۴۵- قرینه‌ی بردار $(1, -3, 2)$ نسبت به امتداد بردار $(1, 2, 0)$ ، کدام بردار است؟

- (۱) $(-3, -1, -2)$ (۲) $(-1, -2, 2)$ (۳) $(0, 5, -2)$ (۴) $(1, 7, -2)$

* ۴۶- قرینه‌ی بردار a نسبت به امتداد بردار $2i - j + k$ برداری به تصویر $(1, -2, 5)$ است. تصویر بردار a کدام است؟

- (۱) $(-1, 5, 2)$ (۲) $(2, 5, -1)$ (۳) $(5, -1, -2)$ (۴) $(5, -2, 1)$

۴۷- دو بردار $a = 3i - 6j + 3k$ و $b = -7i + 4j + k$ نسبت به بردار c قرینه‌ی یکدیگرند. اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و c در بازه‌ی

(سراسری ریاضی - ۹۰)

$(\frac{\pi}{4}, \pi)$ باشد، آن‌گاه بردار جهت c کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}(-2i + 2j + k)$ (۲) $\frac{1}{3}(-2i - j + 2k)$ (۳) $\frac{1}{3}(2i - 2j + k)$ (۴) $\frac{1}{3}(2i + j - 2k)$

* ۴۸- بردارهای a و b مفروضند به طوری که اولاً $|b| = \frac{3}{4}|a| = 6$ ، ثانیاً دو بردار $a - b$ و a بر هم عمودند طول تصویر قائم بردار a روی

(کانون فرهنگی آموزش)

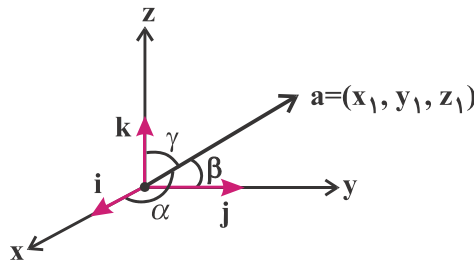
امتداد بردار b چقدر است؟

- (۱) ۴ (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{9}{4}$

کسینوس‌ها و زوایای هادی یک بردار

زوایای هادی: هر بردار غیر صفر با جهت مثبت محورهای مختصات (یا به عبارت دیگر با بردارهای i ، j و k) زوایایی می‌سازد که آن‌ها را زوایای هادی و کسینوس‌های آن‌ها را کسینوس‌های هادی آن بردار می‌نامیم. اگر $a = (x_1, y_1, z_1)$ باشد، داریم:

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad \cos \beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$



α ، β و γ به ترتیب زوایای بردار a با جهت مثبت محورهای x ، y و z هستند، بنابراین زاویه‌ی بردار a با صفحه‌های xz ، yz و xy به ترتیب $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ، $\frac{\pi}{2} - \beta$ و $\frac{\pi}{2} - \gamma$ است.

نکته ۱: اگر α ، β و γ زوایای هادی بردار a باشند، داریم:

$$1) \quad a = (|a| \cos \alpha, |a| \cos \beta, |a| \cos \gamma) \Rightarrow a = (|a| \cos \alpha, |a| \cos \beta, |a| \cos \gamma) : \text{ بردار یکه‌ی بردار } a$$

$$2) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \text{یا} \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

نکته ۲: هر برداری که مؤلفه‌های آن به صورت $a = (\alpha, \alpha, \alpha)$ باشد ($\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$)، با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد. درحالتی که $\alpha > 0$ باشد این زاویه برابر $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ و درحالتی که $\alpha < 0$ باشد این زاویه برابر $\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

مثال: تصویر قائم و قرینه‌ی بردار دلخواه $a = (x_1, y_1, z_1)$ را نسبت به برداری غیر صفر که با محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد، به دست آورید.

بردار $b = (\beta, \beta, \beta)$ را به صورت $b = (\beta, \beta, \beta)$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases} a = (x_1, y_1, z_1) \\ b = (\beta, \beta, \beta) \end{cases} \Rightarrow a' = \frac{a \cdot b}{|b|^2} b = \frac{x_1 \beta + y_1 \beta + z_1 \beta}{3\beta^2} (\beta, \beta, \beta)$$

$$\Rightarrow \text{تصویر قائم } a' = \left(\frac{x_1 + y_1 + z_1}{3}, \frac{x_1 + y_1 + z_1}{3}, \frac{x_1 + y_1 + z_1}{3} \right)$$

$$\text{قرینه } a'' = 2a' - a = \left(\frac{-x_1 + 2y_1 + 2z_1}{3}, \frac{2x_1 - y_1 + 2z_1}{3}, \frac{2x_1 + 2y_1 - z_1}{3} \right)$$

الگوی ۱۰

۴۹- کسینوس‌های هادی بردار $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ کدام‌اند؟

(کانون فرهنگی آموزش)

(۱) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (۲) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{45}\right)$ (۳) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (۴) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

۵۰- خطی که با محورهای x و y به ترتیب زوایای 45° و 60° می‌سازد، با محور z کدام زاویه را می‌سازد؟

(سراسری - ۷۲)

(۱) 90° (۲) 60° (۳) 45° (۴) 30°

* ۵۱- اگر بردار $\vec{a} = (1, -1, m)$ ، با محور z زاویه 45° درجه بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور x ها کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (سراسری خارج از کشور - ۱۵)

۵۲- هر سه مؤلفه‌ی بردار غیرصفر a، اعدادی نامنفی‌اند. اگر این بردار با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی 60° و با بردار $\vec{b} = (1, 1, 0)$

(سنجش - ۸۰)

زاویه‌ی 45° بسازد، آن‌گاه بردار جهت a کدام است؟

(۱) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (۳) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (۴) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

* ۵۳- دو بردار هم‌اندازه‌ی $\vec{a} = (m, \sqrt{2}, 1)$ و $\vec{b} = (1, -\sqrt{2}, n)$ مفروضند. برای آن که $\vec{e}_{\vec{a}+\vec{b}} = \vec{e}_{\vec{a}} + \vec{e}_{\vec{b}}$ باشد، n کدام مقادیر زیر را

(سنجش - ۸۱)

می‌تواند بپذیرد؟

(۱) ± 1 (۲) ± 2 (۳) $\pm 2\sqrt{2}$ (۴) $\pm \sqrt{2}$