

## مثلات

۲۰۱. عبارت  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \frac{3\pi}{2}) + \sin(\alpha + \pi)$  برابر است با:

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳)  $\cos \alpha$   
(۴)  $-2 \sin \alpha$

۲۰۲. طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه، ۱۲ و کسینوس یکی از زاویه‌های آن برابر  $\frac{1}{4}$  است. محیط این

مثلث کدام است؟

- (۱)  $3(15 + 3\sqrt{5})$   
(۲)  $3(5 + \sqrt{15})$   
(۳)  $3(5 + 3\sqrt{5})$   
(۴)  $3(15 + \sqrt{15})$

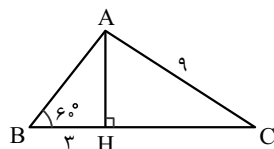
۲۰۳. حاصل عبارت  $\cos^2 \theta \tan^2 \theta + \sin^2 \theta \cot^2 \theta$  کدام است؟ ( $\sin x, \cos x \neq 0$ )

- (۱) ۱  
(۲)  $\sin \theta$   
(۳)  $\sin \theta + \cos \theta$   
(۴)  $\cos \theta$

۲۰۴. حاصل  $\sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta \cos \theta$  کدام است؟

- (۱) صفر  
(۲) ۱  
(۳)  $-\tan \theta$   
(۴)  $\tan \theta$

۲۰۵. در شکل زیر، اندازه‌ی  $BH = 3$ ،  $\hat{B} = 60^\circ$  و  $AC = 9$  و ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  است.



اندازه‌ی  $\tan \hat{C}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
(۲)  $\frac{1}{2}$   
(۳)  $\sqrt{2}$   
(۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۰۶. طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۲۰ سانتی‌متر و کسینوس یکی از زاویه‌های آن  $\frac{4}{5}$  است. مساحت

این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

- (۱) ۱۴۴  
(۲) ۹۶  
(۳) ۷۲  
(۴) ۴۸

۲۰۷. اگر  $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{3}$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{2 \sin(\frac{7\pi}{2} - x) + 3 \cos(11\pi + x)}{5 \cos(\frac{17\pi}{2} + x) + 4 \sin(8\pi + x)}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{7}$   
(۲)  $-\frac{9}{7}$   
(۳)  $\frac{5}{3}$   
(۴)  $\frac{3}{5}$

۲۰۸. دوره‌ی تناوب  $y = 2 \cos^3 x + 1$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2\pi}{3}$   
(۲)  $\frac{3\pi}{2}$   
(۳)  $\frac{3\pi}{2} + 1$   
(۴)  $\frac{2\pi}{3} + 1$

۲۰۹. عبارت  $3 \tan 30^\circ + 2 \sin 30^\circ - \cot 45^\circ$  برابر است با:

(۱)  $\tan 60^\circ$  (۲)  $\tan 30^\circ$

(۳)  $3\sqrt{3}$  (۴) صفر

۲۱۰. اگر  $\sin x \cdot \cos x > 0$  باشد، کدام گزینه‌ی زیر همواره صحیح می‌باشد؟

(۱)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > 0$  (۲)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) < 0$

(۳)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) > 0$  (۴)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > 0$

۲۱۱. اگر  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$  باشد، آن‌گاه مقدار  $\sin x + \cos x$  کدام است؟

(۱)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\pm 1$

(۳)  $\pm \sqrt{2}$  (۴)  $\pm 2$

۲۱۲. بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار عبارت  $A = 1 + \cos x$  به ترتیب کدام است؟

(۱) ۰, ۲ (۲) ۱, ۱

(۳) ۰, ۱ (۴) ۱, ۲

۲۱۳. اگر  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  باشد، حاصل عبارت  $\sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)}}$  برابر است با:

(۱)  $\sin x - \cos x$  (۲)  $\sin 2x$

(۳)  $-\sin x - \cos x$  (۴)  $\sin x + \cos x$

۲۱۴. ساده شده‌ی عبارت  $\frac{(\sin a + \cos a + 1)(\sin a + \cos a - 1)}{\cos a}$ ، کدام است؟  $\cos a \neq 0$

(۱)  $\sin a$  (۲)  $\cos a$

(۳)  $2 \sin a$  (۴)  $2 \cos a$

۲۱۵. اگر  $x = \frac{2}{\sin \theta}$  و  $y = 2 \cot \theta$ ، مقدار  $9x^2$  کدام است؟

(۱)  $4 + 9y^2$  (۲)  $9 + 4y^2$

(۳)  $36 - 4y^2$  (۴)  $36 + 4y^2$

۲۱۶. حاصل عبارت  $(\cos^4 x - \sin^4 x)(1 + \tan^2 x) + \tan^2 x$ ، کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱

(۳) ۲ (۴) ۳

۲۱۷. اگر  $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} - \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{a \tan x}{\cos x}$  باشد، آن‌گاه  $a$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) ۳ (۴) ۴



۲۱۸. اگر  $f^2(x) - 1 = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}$ ، آن گاه  $f(x)$  کدام می تواند باشد؟

- (۱)  $\sin x$  (۲)  $\cos x$   
(۳)  $\tan x$  (۴)  $\cot x$

۲۱۹. اگر  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  باشد، مقدار تابع  $y = \frac{3}{2} \sin(-2x)$  در چه بازه‌ای قرار می گیرد؟

- (۱)  $(0, \frac{3}{2}]$  (۲)  $[\frac{-3}{2}, 0)$   
(۳)  $[\frac{3}{2}, 2]$  (۴)  $(-2, \frac{-3}{2})$

۲۲۰. دوره‌ی تناوب تابع  $y = 3 \sin \frac{4\pi}{3} x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{2\pi}{3}$   
(۳)  $\frac{3\pi}{2}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۲۲۱. دوره‌ی تناوب اصلی تابع  $y = \sin \frac{3\pi x}{a}$  برابر ۱ است. مقدار  $a$  کدام می تواند باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$   
(۳)  $\frac{2}{3}$  (۴) ۳

۲۲۲. اگر  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، مقدار تابع  $y = \frac{5}{2} \cos(-2x)$  در چه بازه‌ای قرار می گیرد؟

- (۱)  $[\frac{-5}{2}, \frac{5}{2}]$  (۲)  $[\frac{-5}{2}, 0)$   
(۳)  $(\frac{-5}{2}, \frac{5}{2})$  (۴)  $(\frac{-5}{2}, 0]$

۲۲۳. هرگاه  $\tan 35^\circ = 2a - 1$ ، آن گاه  $\frac{\sin 145^\circ - \sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}$  کدام است؟

- (۱)  $2a$  (۲)  $4a$   
(۳)  $2a - 1$  (۴)  $4a - 2$

۲۲۴. حاصل  $\cos(\frac{\pi}{4} + 5\pi) + \sin(\frac{\pi}{4} - 7\pi)$ ، کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{2}$  (۲) صفر  
(۳) ۱ (۴)  $\sqrt{2}$

۲۲۵. حاصل  $\sin \frac{19\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
(۳) صفر (۴)  $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\log_{\Delta} \Delta - \log_{\Delta} \Delta \xrightarrow{\Delta/\Delta=1} \log_{\Delta} \frac{\Delta}{1} - \log_{\Delta} \Delta = (\log_{\Delta} \Delta - \log_{\Delta} 1) - \log_{\Delta} \Delta = -\log_{\Delta} 1 = -1$$

۱۹۶- گزینهی «۳»

$$\begin{aligned} \log_{\Delta}^{\Delta} + \log_{\Delta}^{\frac{1}{\Delta}} + \log_{\Delta}^{\Delta} + \log_{\Delta}^{\sqrt{\Delta}} &= \log_{\Delta}^{\Delta} + \log_{\Delta}^{\Delta^{-1}} + \log_{\Delta}^{\Delta} + \log_{\Delta}^{\Delta^{\frac{1}{2}}} \\ &= 3 \log_{\Delta}^{\Delta} - 1 \log_{\Delta}^{\Delta} + \underbrace{\log_{\Delta}^{\Delta}}_0 + \frac{1}{2} \log_{\Delta}^{\Delta} = 3 - 1 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

۱۹۷- گزینهی «۴»

۱۹۸- گزینهی «۴» با توجه به این که  $\log 2 = a$  و  $\log 3 = b$  است، داریم:

$$\log_{\Delta}^{\Delta} = \log 8 - \log 9 = \log 2^3 - \log 3^2 = 3 \log 2 - 2 \log 3 = 3a - 2b$$

$$\log_{\Delta}^{x(x+1)} = \log_{\Delta}^{\Delta} \Rightarrow x(x+1) = \Delta \Rightarrow x = 2 \text{ و } x = -3 \text{ غ ق ق}$$

۱۹۹- گزینهی «۲»

$$x^2 - 3x > 0 \quad y = x(x-3) > 0 \quad \text{جواب } (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

۲۰۰- گزینهی «۴»

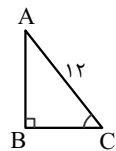
	۰	۳	
x	-	+	+
x-3	-	-	+
y	+	-	+

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin \alpha, \quad \sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

۲۰۱- گزینهی «۳»

$$\cos \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha = \cos \alpha$$

۲۰۲- گزینهی «۲» برای این مسأله یک شکل فرضی رسم می‌کنیم.



$$\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{12} = \frac{1}{4} \rightarrow BC = 3$$

$$\text{فیناغورث: } AC^2 = AB^2 + BC^2 \rightarrow (12)^2 = AB^2 + (3)^2 \rightarrow AB^2 = 144 - 9 = 135$$

$$AB = \sqrt{135} = \sqrt{9 \times 15} = 3\sqrt{15}$$

$$\Delta ABC \text{ محیط} = AB + BC + AC = 3\sqrt{15} + 3 + 12 = 15 + 3\sqrt{15} = 3(5 + \sqrt{15})$$

۲۰۳- گزینهی «۱»

$$\cancel{\cos^2 \theta} \frac{\sin^2 \theta}{\cancel{\cos^2 \theta}} + \cancel{\sin^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{\cancel{\sin^2 \theta}} = \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_1 = 1$$

$$\sin \theta - \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \cos \theta = \frac{\sin^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{1-1}{\sin \theta} = 0$$

۲۰۴- گزینهی «۱»

$$\Delta ABH: \tan B = \tan 60^\circ = \frac{AH}{3} = \sqrt{3} \rightarrow AH = 3\sqrt{3}$$

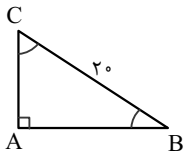
۲۰۵- گزینهی «۴»

$$\Delta AHC: \text{فیناغورث: } AC^2 = AH^2 + HC^2 \rightarrow 9^2 = (3\sqrt{3})^2 + HC^2 \rightarrow HC^2 = 81 - 27 = 54$$

$$\rightarrow HC = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \quad \tan \hat{C} = \frac{AH}{HC} = \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

می‌دانیم کسینوس هر زاویه برابر است با طول ضلع مجاور به طول وتر

۲۰۶- گزینه‌ی «۲»



$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AB}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow AB = 16$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow 20^2 = AC^2 + 16^2 \Rightarrow AC = 12$$

$$\text{مساحت} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{12 \times 16}{2} = 96$$

۲۰۷- گزینه‌ی «۳»

$$\frac{2 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + 3 \cos(11\pi + x)}{5 \cos\left(\frac{17\pi}{2} + x\right) + 4 \sin(8\pi + x)} = \frac{-2 \cos x - 3 \cos x}{-5 \sin x + 4 \sin x} = \frac{-5 \cos x}{-\sin x} = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

دوره‌ی تناوب توابع به صورت  $y = \sin bx + c$  و  $y = a \cos bx + c$ ،  $a \neq 0$  برابر است با  $T = \left| \frac{2\pi}{b} \right|$ . بنابراین دوره‌ی

۲۰۸- گزینه‌ی «۱»

تناوب  $y = 2 \cos 3x + 1$  برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

$$3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = \sqrt{3} + 1 - 1 = \sqrt{3}, \quad \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

۲۰۹- گزینه‌ی «۱»

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \quad \text{و} \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

۲۱۰- گزینه‌ی «۴»

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \text{و} \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

از آنجایی که  $\sin x \cos x > 0$  است، با توجه به روابط فوق و گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی «۴» صحیح می‌باشد، زیرا:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (-\cos x)(-\sin x) = \cos x \sin x > 0$$

۲۱۱- گزینه‌ی «۳»

$$A = \sin x + \cos x \xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{طرفین رابطه}}$$

$$A^2 = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + 2 \underbrace{\sin x \cos x}_{\frac{1}{2}} \rightarrow A^2 = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow A^2 = 2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} A = \pm\sqrt{2}$$

می‌دانیم:  $-1 \leq \cos x \leq 1$

۲۱۲- گزینه‌ی «۱»

$$A = 1 + \cos x$$

$\begin{matrix} \text{max}=1 \\ \uparrow \\ \text{Max}(A) = 1+1=2 \\ \downarrow \\ \text{Min}(A) = 1+(-1)=0 \\ \text{min}=-1 \end{matrix}$

۲۱۳- گزینهی «۴»

$$\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 x(1-\cos^2 x)}} \xrightarrow{1-\cos^2 x = \sin^2 x}$$

برای  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  هر دو  $\cos$  و  $\sin$  مثبت هستند.

$$\sqrt{1+2\sqrt{\cos^2 x \cdot \sin^2 x}} = \sqrt{1+2|\cos x \cdot \sin x|}$$

$$= \sqrt{1+2(\cos x \sin x)} = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2 \sin x \cos x = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x$$

۲۱۴- گزینهی «۳» ابتدا عمل ضرب را انجام داده‌ایم:

$$\frac{(\sin a + \cos a + 1)(\sin a + \cos a - 1)}{\cos a} = \frac{(\sin a + \cos a)^2 - 1}{\cos a} = \frac{2 \sin a \cos a}{\cos a} = 2 \sin a$$

۲۱۵- گزینهی «۴»

$$9x^2 = 9 \times \frac{4}{\sin^2 \theta} \quad \text{و} \quad 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$$36(1 + \cot^2 \theta) \Rightarrow 36\left(1 + \frac{y^2}{9}\right) = 36 + 4y^2$$

می‌دانیم:

۲۱۶- گزینهی «۲»

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1 - \tan^2 x + \tan^2 x = 1$$

۲۱۷- گزینهی «۴»

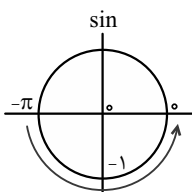
$$\frac{(1 + \sin x)^2 - (1 - \sin x)^2}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{4 \sin x}{\cos^2 x} = \frac{4 \tan x}{\cos x} \rightarrow a = 4$$

۲۱۸- گزینهی «۳»

$$\frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \tan^2 x - 1 = f^2(x) - 1 \rightarrow f(x) = \tan x$$

۲۱۹- گزینهی «۲»

با توجه به دایره‌ی مثلثاتی:



$$0 < x < \frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi < -2x < 0$$

$$-1 \leq \sin(-2x) < 0 \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} \frac{-3}{2} \leq \frac{3}{2} \sin(-2x) < 0 \rightarrow y \in \left[ \frac{-3}{2}, 0 \right)$$

۲۲۰- گزینهی «۱» دوره‌ی تناوب تابع  $y = a \sin bx + c$  برابر است با:  $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، داریم:

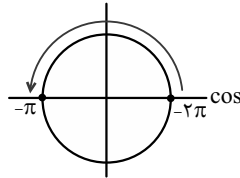
$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4\pi}} = \frac{6\pi}{4\pi} = \frac{3}{2}$$

۲۲۱- گزینهی «۳»

$$T = \left| \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{a}} \right| = \left| \frac{2a}{2} \right| = 1 \Rightarrow \frac{2a}{2} = \pm 1 \Rightarrow a = \pm \frac{2}{2}$$

۲۲۲- گزینهی «۳»

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \rightarrow -2\pi < -2x < -\pi$$



با توجه به دایره‌ی مثلثاتی:

$$-1 < \cos(-2x) < +1 \xrightarrow{\times \frac{5}{2}} \frac{-5}{2} < \frac{5}{2} \cos(-2x) < \frac{+5}{2} \rightarrow y \in \left( \frac{-5}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

۲۲۳- گزینهی «۱»

$$\frac{\sin(18^\circ - 35^\circ) - \sin(27^\circ - 35^\circ)}{\cos(36^\circ - 35^\circ)} = \frac{\sin 35^\circ + \cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}$$

تقسیم صورت نسبت به مخرج  $\rightarrow \tan 35^\circ + 1 = 2a - 1 + 1 = 2a$

۲۲۴- گزینهی «۱»

$$\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

۲۲۵- گزینهی «۳»

$$\sin\left(\frac{18\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) + \cos \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{19\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) + \cos \frac{\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = 0$$

۲۲۶- گزینهی «۲»

$$2X + 2A = B \Rightarrow 2X = B - 2A \Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 0+6 & 3+2 \\ 2-2 & 0+0 \\ -4-9 & -1-12 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 0 \\ -13 & -13 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 2.5 \\ -0.5 & 0 \\ -6.5 & -6.5 \end{bmatrix}$$

۲۲۷- گزینهی «۴»

$$AB = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (AB)^{-1} = \frac{1}{2a-1-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2a-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2a-1 \end{bmatrix} \\ (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow \frac{2a-1}{2a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$