

توازن و تناسب در این کتاب

ضریب توازن و تناسب

تعداد سوال موجود در کتاب به ازای هر تست کنکور را ضریب توازن و تناسب آن کتاب می‌نامیم. این توازن در مباحث داخلی کتاب نیز باید رعایت شود. به عبارت دیگر، تعداد سؤال‌های هر مبحث نباید به طور تصادفی کم یا زیاد باشند، بلکه هدفمند و متناسب با بودجه‌بندی همان مبحث تعیین شده باشد.

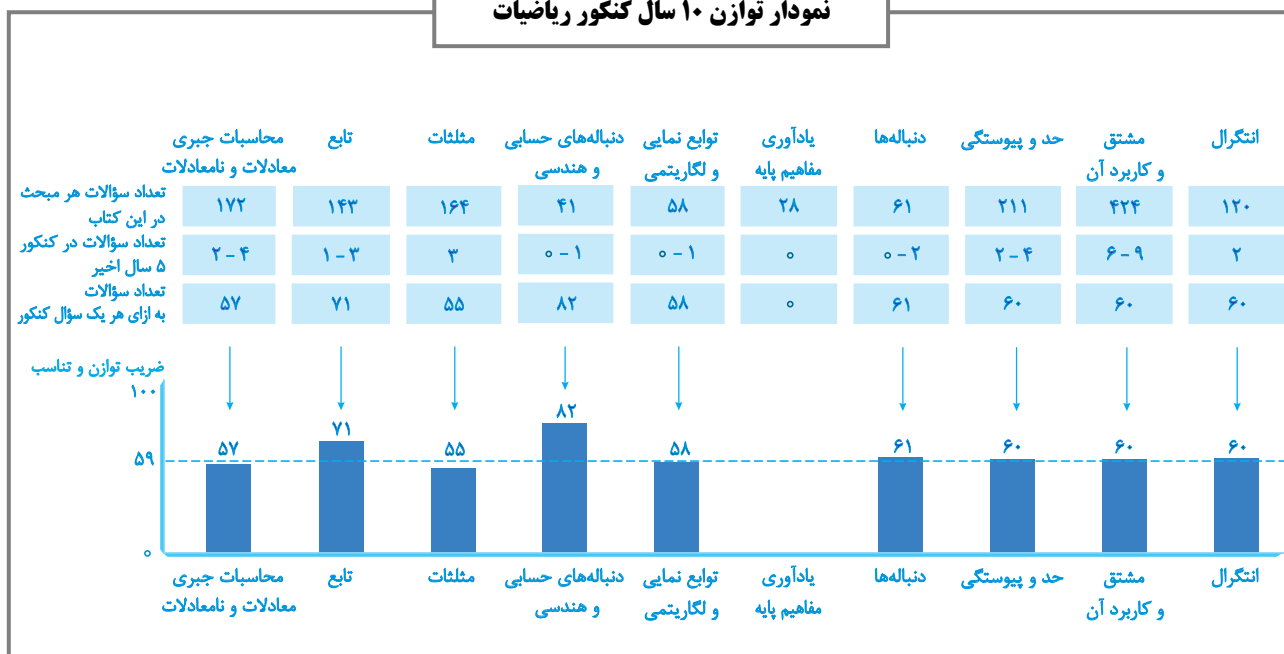
رعایت این تناسب و توازن، تعداد سؤالات را بهینه و بازدهی مطالعاتی شما را به حداکثر خواهد رساند. ضریب توازن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\text{ضریب توازن و تناسب این کتاب} = \frac{\text{تعداد کل سؤالات این کتاب}}{\text{بودجه‌بندی مباحث این کتاب در کنکور}} = \frac{1422}{24} = 59$$

ضریب و نمودار توازن و تناسب در مباحث این کتاب

این کتاب شامل ۱۴۲۲ تست طبقه‌بندی شده است؛ با توجه به این‌که از کتاب‌های درسی ریاضیات ۲، حسابان و حساب دیفرانسیل و انتگرال، ۲۴ تست در کنکور ریاضیات رشته‌ی ریاضی مطرح می‌شود، می‌توان گفت به ازای هر سؤال کنکور حدوداً ۵۹ تست در این کتاب موجود است. رعایت این توازن در مباحث ۱۰ گانه، در نمودار زیر نشان داده شده است. خط‌چین معرف این ضریب توازن (۵۹) است، و عددهای بالای ستون‌ها معرف تعداد سؤال آن مبحث به ازای هر تست کنکور از آن مبحث است (ضریب توازن مبحث)، بنابراین نزدیکی ارتفاع ستون‌ها به این خط‌چین (خط نرمال) نشان‌دهنده رعایت این تناسب و توازن در هر یک از این مباحث است.

نمودار توازن ۱۰ سال کنکور ریاضیات



محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات



سال برگزاری کنکور	۹۶	۹۵	۹۴	۹۳	۹۲
تعداد سؤال‌های این مبحث در کنکورهای سراسری ۵ سال اخیر	۲	۴	۲	۲	۳

تعداد تیپ	موضوع	آبی	سبز	زرد
۵	تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵	۱. تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری (۱۷ تست)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵	۲. بسط دوجمله‌ای و مثلث خیام - پاسکال (۱۳ تست)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳	معادله‌ی درجه‌ی دوم	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳	تابع درجه‌ی دوم	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	تعیین علامت و حل نامعادله‌ی درجه‌ی دوم	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲	معادلات چندجمله‌ای	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	نامعادلات چندجمله‌ای	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳	معادلات گویا	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	نامعادلات گویا	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	ریشه‌گیری و توان‌رسانی با توان گویا و حقیقی	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴	معادلات و نامعادلات گنگ	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	قدر مطلق و ویژگی‌های آن	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	نمودار توابع قدرمطلق	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴	معادلات و نامعادلات قدر مطلق	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	تعریف جزء صحیح و ویژگی‌های آن	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	نمودار توابع شامل جزء صحیح	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	معادلات و نامعادلات شامل جزء صحیح	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
-	دوره‌ی تناوب توابع شامل جزء صحیح	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	حل معادلات به روش هندسی	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱	حل نامعادلات به روش هندسی	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
 آبی: مسلطم.
 سبز: نسبتاً مسلطم.
 زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

۱۷۲ تست شناسنامه‌دار، شامل:
 ۷۶ تست از کنکورهای سراسری
 ۴۶ تست منتخب آزمون‌های کانون
 از موضوعاتی که تاکنون در کنکورهای سراسری سؤال مطرح نشده یا کمتر مطرح شده است.
 ۲۸ تست از تمرین‌های کتاب درسی که قابلیت تبدیل به تست چهارگزینه‌ای و مطرح شدن در کنکورها را دارند.
 ۱۷ تست تالیفی از محتوای کتاب درسی جهت پوشش کامل مطالب
۵ تست از دانشگاه آزاد که ایده‌های مناسب و خاص دارند.

مؤلف در نامه، تبیین و تنظیم تست‌های این فصل: فریاد حامی

۱. تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

◆ تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای و تعیین خارج قسمت ◆

تعریف رابطه‌ی تقسیم: اگر چندجمله‌ای $P(x)$ از درجه‌ی n را بر چندجمله‌ای $D(x)$ (مخالف صفر) از درجه‌ی m ($n > m$) تقسیم کنیم، دو چندجمله‌ای $Q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند که، داشته باشیم:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

که $P(x)$ را مقسوم، $D(x)$ را مقسوم علیه، $Q(x)$ از درجه‌ی $n - m$ را خارج قسمت و $R(x)$ را که درجه‌ی آن از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر است، باقی‌مانده‌ی تقسیم می‌نامیم.

به عنوان مثال هرگاه چندجمله‌ای $P(x)$ ، از درجه‌ی ۴ را بر چندجمله‌ای $D(x)$ ، از درجه‌ی ۲ تقسیم کنیم، خارج قسمت، یک چندجمله‌ای از درجه‌ی ۲، یعنی $Q(x) = ax^2 + bx + c$ خواهد بود و باقی‌مانده، یک دوجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی ۱، یعنی $R(x) = mx + n$ می‌تواند باشد و رابطه‌ی تقسیم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P(x) = D(x) \cdot (ax^2 + bx + c) + mx + n$$

۱) تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x - a$: اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x - a$ ، برابر است با $R = P(a)$. زیرا با استفاده از قاعده‌ی تقسیم $P(x) = (x - a)Q(x) + R$ ، اگر در این رابطه به جای x ، a قرار دهیم $P(a) = (a - a)Q(a) + R$ ، آنگاه $P(a) = R$.

■ مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عبارت $3x^4 - 5x^2 + 2x - 1$ بر $x + 1$ را بیابید.

$$P(-1) = 3(-1)^4 - 5(-1)^2 + 2(-1) - 1 = -5 \Rightarrow R = -5$$

◀ حل: کافی است $P(-1)$ را بیابیم.

◀ نتیجه‌ی (۱): برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ ، کافی است $P\left(\frac{-b}{a}\right)$ را تشکیل دهیم.

◀ نتیجه‌ی (۲): هرگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ صفر باشد، آنگاه $P(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است، در این حالت $x - a$ را یک عامل یا فاکتور $P(x)$ می‌نامیم و a یک ریشه‌ی معادله‌ی $P(x) = 0$ خواهد بود.

به عنوان مثال $(x - 1)$ یک عامل چندجمله‌ای $2x^3 - 5x^2 + x + 2$ و $x = 1$ ، یک ریشه‌ی معادله‌ی $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$ است.

۲) بخش‌پذیری $f(x)$ بر $(x - a)^n$ ، $n \in \mathbb{N}$: اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x - a)^n$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه $f(x)$ و مشتقات متوالی آن تا مرتبه‌ی $(n - 1)$ ام بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است.

۳) بخش‌پذیری چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $P(x)$: به‌طور کلی چندجمله‌ای $f(x)$ ، بر چندجمله‌ای $P(x)$ بخش‌پذیر است، هرگاه:

$$f(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

در این صورت $Q(x)$ و $P(x)$ ، عامل‌های $f(x)$ نامیده می‌شوند.

۴) تعیین باقیمانده‌ی چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $P(x)$: به‌طور کلی برای تعیین باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ ، بر چندجمله‌ای $P(x)$ ، ابتدا $P(x)$ را برابر صفر قرار داده و جمله با بزرگترین درجه‌ی آن را برحسب جملات با درجات پایین‌تر یافته و سپس در $f(x)$ جایگزین می‌کنیم تا زمانی که درجه‌ی باقیمانده از درجه‌ی مقسوم علیه کمتر گردد.

◆ ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها ◆

تعیین ب.م.م و ک.م.م دو عدد: ابتدا هر یک از دو عدد a و b را به عامل‌های اول تجزیه کرده و آن‌ها را به‌صورت حاصل‌ضرب عامل‌های اول توان‌دار می‌نویسیم، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها، از ضرب عامل‌های مشترک دو عدد با کوچک‌ترین نما در هم به‌دست می‌آید، این عدد بزرگترین عددی است که هر دو عدد a و b بر آن بخش‌پذیرند، ب.م.م دو عدد را با نماد (a, b) نمایش می‌دهیم. کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b ، از ضرب عامل‌های مشترک و غیر مشترک، با بزرگ‌ترین نما در هم حاصل می‌شود، این عدد، کوچکترین عددی است که بر هر دو عدد بخش‌پذیر است، ک.م.م دو عدد را با نماد $[a, b]$ نمایش می‌دهیم.

ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها: در چندجمله‌ای‌ها، ابتدا با استفاده از فاکتورگیری، دسته‌بندی مناسب یا اتحادها، عبارت را به حاصل‌ضرب عوامل اول تجزیه می‌کنیم، سپس همانند روش یافتن ب.م.م و ک.م.م اعداد، ب.م.م و ک.م.م آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری $P(x)$ بر $x - a$ | تیپ ۱ | حسابان: صفحه‌های ۶ تا ۸

۱- عبارت $x^4 + 2bx^2 + 4ax^2 + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟ (حسابان - صفحه ۱۰ - مشابه مسأله‌ی ۴) و (سراسری ریاضی - ۸۶)

$$(1) -\frac{15}{8} \quad (2) -\frac{17}{16} \quad (3) \frac{17}{16} \quad (4) \frac{15}{8}$$

۲- به ازای مقداری از a ، چند جمله‌ای $ax^3 - 8x^2 + ax^3 - 8x$ بر $f(x) = x^2 + 2$ بخش‌پذیر است. کوچکترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۹۴)

$$(1) 1 - \sqrt{3} \quad (2) 1 - \sqrt{5} \quad (3) -1 - \sqrt{3} \quad (4) -1 - \sqrt{5}$$

بخش‌پذیری $P(x)$ بر $(x-a)^n$	تیپ ۲	حسابان: صفحه‌های ۶ تا ۱۰		
۳- اگر عبارت $x^4 + ax^2 - bx + 4$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر باشد، b کدام است؟	۳ (۱)	۴ (۲)	۵ (۳)	۶ (۴)
۴- اگر عبارت $a - 14x + 4x^2 + ax^3$ بر سه جمله‌ای $x^2 - 2x + 1$ بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟	۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
استفاده از رابطه‌ی تقسیم در تعیین باقیمانده	تیپ ۳	حسابان: صفحه‌های ۶ تا ۱۰		
۵- اگر عبارت $k + 5x^3 - 5x^5 + x^{2n+1} + 2x^{2n} + x$ به ازای هر عدد طبیعی n بر دو جمله‌ای $x + 2$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقیمانده‌ی تقسیم آن بر $x^2 - 1$ کدام است؟	۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)

آزمون‌های کانون و سایر منابع

استفاده از دسته‌بندی مناسب در تعیین باقیمانده	تیپ ۴	حسابان: صفحه‌های ۶ تا ۱۰		
۶- اگر باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - x$ برابر $x + 1$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $xf(x)$ بر $x^2 - x$ کدام است؟	۲ (۱)	۳ (۲)	۴ (۳)	۵ (۴)
۷- ضریب جمله‌ی فاقد x در خارج‌قسمت تقسیم $10x^2 - 3x^3 - 1$ بر $3x - 1$ کدام است؟	۱ (۱)	۲ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
۸- در تقسیم $11 - 2x + x^3 + x^{15}$ بر $x + 1$ ، مجموع ضرایب خارج‌قسمت تقسیم کدام است؟	۴ (۱)	۱۸ (۲)	۱۶ (۳)	۱۴ (۴)
۹- اگر مجموع ضرایب خارج‌قسمت تقسیم چند جمله‌ای $1 - ax + 3x^2 - 5x^4$ بر $x + 1$ برابر 7 باشد، a کدام است؟	۴ (۱)	۵ (۲)	۶ (۳)	۷ (۴)
۱۰- مجموع ضرایب خارج‌قسمت تقسیم $11 - 2x + x^3 + x^{15}$ بر $x - 1$ ، برابر کدام است؟	۲۰ (۱)	۱۸ (۲)	۱۶ (۳)	۱۴ (۴)

تعیین ب.م.م و ک.م.م دو چندجمله‌ای	تیپ ۶	حسابان: صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴		
۱۱- می‌خواهیم ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی کنیم، چنانچه گنجایش شیشه‌ها برحسب لیتر عدد طبیعی باشد، حداقل تعداد شیشه کدام است؟ (همه‌ی شیشه‌ها کاملاً پر می‌شوند.)	۱۸ (۱)	۱۶ (۲)	۲۰ (۳)	۲۲ (۴)
۱۲- در یک کیسه بین ۸۰۰ تا ۹۰۰ مهره وجود دارد. اگر آنها را پنج تا پنج تا، هفت تا هفت تا، سه تا سه تا و بالاخره چهار تا چهار تا بشماریم، همواره دو مهره باقی می‌ماند، تعداد مهره‌ها چندتاست؟	۸۰۷ (۱)	۸۴۲ (۲)	۸۵۶ (۳)	۸۹۵ (۴)
۱۳- سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلفی وجود دارد. اولین زنگ در هر ۱۸ دقیقه، دومین زنگ در هر ۲۴ دقیقه و سومین زنگ در هر ۳۲ دقیقه زنگ می‌زنند، بعد از اولین بار که با هم زنگ می‌زنند، حداقل چند دقیقه می‌گذرد تا آن‌ها دوباره با هم زنگ بزنند؟	۲۴۲ (۱)	۲۵۲ (۲)	۲۸۸ (۳)	۳۱۲ (۴)

۱۴- اگر باقیمانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ بر $x - 1$ برابر 4 باشد و بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد، $\frac{a}{b}$ کدام است؟	۴ (۱)	۴ (۲)	$-\frac{1}{4}$ (۳)	$\frac{1}{4}$ (۴)
۱۵- اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای و نمودار تابع $y = x + f(x)$ محور x ها را در نقاط $x = 1$ و $x = 2$ قطع کند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ کدام است؟	x (۱)	$-x$ (۲)	$x + 1$ (۳)	$1 - x$ (۴)
۱۶- هرگاه سه جمله‌ای $x^2 + px - 1$ بر $x - \alpha$ و $x - \beta$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه مقدار $4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2$ برابر کدام است؟	۴ (۱)	-۴ (۲)	p^2 (۳)	$-p^2$ (۴)
۱۷- اگر $ax + b$ ، یک مقسوم‌علیه مشترک دو عبارت $x^3 + cx^2 + 2$ و $9x^2 - 6x + 1$ باشد، c کدام است؟	۲ (۱)	$-\frac{55}{3}$ (۲)	$-\frac{5}{3}$ (۳)	$-\frac{2}{3}$ (۴)

۲. بسط دو جمله‌ای و مثلث خیام - پاسکال

◆ بسط دو جمله‌ای ◆

بسط دو جمله‌ای با توان طبیعی n را به صورت‌های زیر نمایش می‌دهیم:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n \quad (1)$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n, \quad k, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R} \quad (2)$$

جمله $(n+1)$ ام جمله $(k+1)$ ام جمله دوم جمله اول

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

به عنوان مثال:

۱. خواص بسط دو جمله‌ای:

الف- بسط آن $(n+1)$ جمله دارد، که اولین جمله آن a^n و آخرین جمله آن b^n است. توان a یک واحد یک واحد، کاهش و توان b یک واحد یک واحد، افزایش می‌یابند. به عنوان مثال $(a+b)^5$ دارای ۶ جمله است.

◀ نتیجه‌ی (۱): بسط‌های $(a+b)^n$ و $(a-b)^n$ هر یک، دارای $(n+1)$ جمله هستند، که جملات ردیف زوج آن‌ها قرینه‌ی یکدیگرند.

به عنوان مثال در بسط چندجمله‌ای $(a+2)^5 + (a-2)^5$ ، جملات ردیف زوج دو چندجمله‌ای قرینه‌اند، بنابراین چندجمله‌ای، ۴ جمله خواهد داشت. ب- مجموع توان‌های a و b در بسط $(a+b)^n$ در هر جمله، برابر n است.

ج- در بسط $(a+b)^n$ ، ضرایب جملات با فاصله‌ی مساوی از طرفین برابر است. یعنی $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ و $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$ و $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$ و ... در

$$\text{حالت کلی} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

د- برای تعیین مجموع ضرایب بسط $(a+b)^n$ ، کافی است به جای حروف a و b عدد ۱ را قرار دهیم. بنابراین در رابطه‌ی (۲) خواهیم داشت:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

◀ نتیجه‌ی (۲): با توجه به (ج)، در بسط $(a+b)^n$ ، مجموع ضرایب جملات با ردیف زوج و مجموع ضرایب جملات با ردیف فرد برابر 2^{n-1} هستند.

۲. جمله‌ی عمومی بسط دو جمله‌ای: جمله $(k+1)$ ام بسط $(a+b)^n$ ، برابر است با:

$$\text{جمله } (k+1) \text{ ام} = \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

به عنوان مثال در بسط $(a+b)^8$ ، جمله پنجم برابر $\binom{8}{4}a^4b^4$ است.

■ مثال: در بسط $(a-2x)^7$ ، ضریب x^4 را بیابید. (a مقداری ثابت است).

◀ حل: جمله $(k+1)$ ام را می‌نویسیم و توان x در آن را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$\text{جمله } (k+1) \text{ ام} = \binom{7}{k} \cdot a^{7-k} \cdot (-2x)^k \Rightarrow k = 4$$

و از آنجا، ضریب جمله پنجم را می‌یابیم:

$$\text{ضریب جمله } 5 \text{ ام} = \binom{7}{4} \cdot a^3 \cdot (-2)^4 = 560 a^3$$

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

جمله عمومی بسط دو جمله‌ای تیپ ۷ حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

(سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۷)

۱۸- در بسط عبارت $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^8$ ، ضریب جمله شامل x^3 کدام است؟

۳- (۴)

$\frac{7}{2}$ (۳)

۶- (۲)

۷- (۱)

۱۹- اگر n یک عدد طبیعی باشد و $(1+\sqrt{2})^{2n} = 99 + b\sqrt{2}$ ، آیا نتیجه می‌شود که $99 - b\sqrt{2} = (3-2\sqrt{2})^n$ ، در صورت نتیجه‌گیری، عدد b کدام است؟

(سراسری ریاضی - ۹۱)

(۱) نتیجه نمی‌شود. (۲) ۷۰ (۳) ۷۲ (۴) ۷۴

جمله‌ی فاقد x بسط دوجمله‌ای | تیپ ۸ | حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

(سراسری تجربی - ۸۴)

۲۰- ضریب جمله‌ی مستقل از x در بسط $(x^2 + \frac{2}{x})^6$ کدام است؟

(۱) ۲۳۰ (۲) ۲۳۴ (۳) ۲۳۸ (۴) ۲۴۰

آزمون‌های کانون و سایر منابع

ضرایب و رابطه‌ی بین آن‌ها در بسط دوجمله‌ای | تیپ ۹ | حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

(حسابان - فصل ۱ - صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۲۱- حاصل $\binom{7}{0} + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6}$ برابر است با:

(۱) ۱۲۸ (۲) ۶۴ (۳) ۳۲ (۴) ۱۶

تعیین تعداد جمله‌های بسط دوجمله‌ای | تیپ ۱۰ | حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

(آزاد غیرپزشکی - ۸۷)

۲۲- بسط $(x+3)^7 + (2x+1)^5$ ، چند جمله دارد؟

(۱) ۸ جمله (۲) ۱۲ جمله (۳) ۷ جمله (۴) ۹ جمله

تعیین تعداد جمله‌های گویای بسط دوجمله‌ای | تیپ ۱۱ | حسابان: صفحه‌های ۸ تا ۱۰

(آزمون کانون ریاضی - ۹۲)

۲۳- چه تعداد از جملات بسط $(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2}})^{16}$ گویاست؟

(۱) ۵ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

(حسابان - فصل ۱ - صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۲۴- بسط $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^{64}$ شامل چند جمله‌ی گویاست؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) هیچ

(حسابان - فصل ۱ - صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۲۵- در تساوی $(1+\sqrt{2})^5 = 41 + a\sqrt{2}$ ، a کدام است؟

(۱) ۲۹ (۲) ۲۷ (۳) ۲۳ (۴) ۲۱

(آزمون کانون ریاضی - ۹۱)

۲۶- در بسط $(a+b)^n$ ضریب جمله‌های سوم و چهارم برابر است. n کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۵

(حسابان - فصل ۱ - صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۲۷- اگر جمله‌ی چهارم بسط $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2})^n$ به صورت $\binom{n}{3} x^5$ باشد، n کدام است؟

(۱) ۳۳ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

(حسابان - فصل ۱ - صفحه‌های ۸ تا ۱۰)

۲۸- ضریب $\frac{1}{x}$ در عبارت $(1+x)^4 (1+\frac{1}{x})^4$ برابر است با:

(۱) ۵۶ (۲) ۳۲ (۳) ۴۸ (۴) ۶۸

۲۹- اگر ضرایب جمله‌ی وسط در بسط‌های دوجمله‌ای‌های $(1+\alpha x)^4$ و $(1-\alpha x)^4$ با هم برابر باشند ($\alpha \neq 0, \alpha \in \mathbf{R}$)، آنگاه α کدام است؟

(آزمون کانون ریاضی - ۸۹)

(۱) $-\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $-\frac{3}{10}$ (۴) $\frac{10}{3}$

(آزمون کانون ریاضی - ۹۱)

۳۰- ضریب جمله‌ی x^5 در بسط $(\sqrt{x}+x)^4 (\sqrt{x}+1)^7$ کدام است؟

(۱) $\binom{11}{5}$ (۲) $\binom{11}{2}$ (۳) $\binom{11}{3}$ (۴) $\binom{11}{4}$

معادله‌ی درجه‌ی دوم

۳. عبارات درجه‌ی دوم

◆ حل معادله‌ی درجه‌ی دوم ◆

فرمول کلی حل معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) به صورت رویه‌روست: $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ که در آن $\Delta = b^2 - 4ac$ ، مبین (دلالتی) معادله نامیده می‌شود. اگر $\Delta \geq 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

◆ تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم و روابط بین ریشه‌ها ◆

۱ تشکیل معادله با استفاده از S و P : اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه:

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a} \quad (\text{مجموع ریشه‌ها}) \quad P = x'x'' = \frac{c}{a} \quad (\text{حاصلضرب ریشه‌ها})$$

و معادله به شکل $x^2 - Sx + P = 0$ تبدیل خواهد شد. از طرفی با توجه به ریشه‌های معادله، به رابطه‌ی $|x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ خواهیم رسید.

■ مثال: معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش ۵ و ۹ باشد.

◀ حل: از آنجایی که $S = 5 + 9 = 14$ و $P = 5 \times 9 = 45$ پس معادله به شکل $x^2 - 14x + 45 = 0$ خواهد بود.

۲ محاسبه‌ی مقادیر بر حسب ریشه‌ها: با استفاده از اتحادهای جبری و محاسبه‌ی S و P ، می‌توانیم بدون محاسبه‌ی ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم، مقادیر مختلفی را بر حسب ریشه‌ها بیابیم، به چند اتحاد زیر توجه کنید (فرض کنید α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ هستند).

$$\begin{aligned} (1) \quad a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \\ (2) \quad a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS \\ (3) \quad (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2 &= a + b \pm 2\sqrt{ab} \Rightarrow (\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})^2 = S \pm 2\sqrt{P} \quad , a, b, \alpha, \beta > 0 \end{aligned}$$

◆ تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید ◆

اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مفروض باشد و بخواهیم معادله‌ی درجه‌ی دومی بیابیم که ریشه‌هایش با ریشه‌های معادله‌ی اول رابطه‌ی معینی داشته باشد، به دو روش زیر می‌توانیم عمل کنیم:

روش اول: ریشه‌ی معادله‌ی قدیم را x و ریشه‌ی معادله‌ی جدید را y فرض می‌کنیم، رابطه‌ی بین x و y را می‌نویسیم، x را بر حسب y می‌یابیم و در معادله‌ی اول جاگذاری می‌کنیم و سپس با عملیات جبری معادله را می‌یابیم.

■ مثال: معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که، ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد.

◀ حل: با توجه به خواسته‌ی مسأله $y = x^2$ ، پس $x = \pm\sqrt{y}$ ، با قرار دادن به جای x در معادله بر حسب y ، خواهیم داشت:

$$(\pm\sqrt{y})^2 - 3(\pm\sqrt{y}) + 1 = 0 \Rightarrow y + 1 = \pm 3\sqrt{y} \xrightarrow{\text{توان } y^2} (y+1)^2 = 9y \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 9y \Rightarrow y^2 - 7y + 1 = 0 \quad (\text{معادله‌ی مطلوب})$$

روش دوم: S و P معادله‌ی جدید را نوشته و معادله را با استفاده از $x^2 - Sx + P = 0$ می‌یابیم.

در مثال بالا، اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، آنگاه α^2 و β^2 ریشه‌های معادله‌ی جدید هستند، پس:

$$\left. \begin{aligned} S &= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2(1) = 7 \\ P &= \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (1)^2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - 7x + 1 = 0 \quad (\text{معادله‌ی مطلوب})$$

◆ تعداد و علامت ریشه‌های معادله ◆

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، با توجه به شرایط Δ ، $-\frac{b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و $\frac{c}{a}$ (حاصلضرب ریشه‌ها) در مورد تعداد و علامت ریشه‌ها، می‌توانیم نظر دهیم.

$$(1) \quad \Delta > 0 \rightarrow \text{معادله دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز دارد} \rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} > 0: & \text{دو ریشه‌ی متحدالعلامه دارد.} \\ \frac{c}{a} < 0: & \text{دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه دارد.} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0: & \text{دو ریشه‌ی مثبت:} \\ -\frac{b}{a} < 0: & \text{دو ریشه‌ی منفی:} \end{cases}$$

$$(2) \quad \Delta = 0 \rightarrow \text{معادله ریشه‌ی مضاعف دارد} \rightarrow x' = x'' = \frac{-b}{2a} \quad (\text{معادله به یک مربع کامل تبدیل می‌شود})$$

$$(3) \quad \Delta < 0 \rightarrow \text{معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد}$$

■ مثال: بدون حل معادله، در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 7x + 1 = 0$ نظر دهید.

◀ حل: با توجه به $\Delta = (-7)^2 - 4(2)(1) = 33 > 0$ ، از آن جایی که $\Delta > 0$ است، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد، از طرفی $\frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$ ، بنابراین معادله دو ریشه‌ی متحدالعلامه خواهد داشت، از طرفی $\frac{-b}{a} = \frac{7}{2} > 0$ ، لذا هر دو ریشه‌ی معادله مثبت‌اند.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

محاسبه مقادیر با استفاده از S و P | تیپ ۱۲ | حسابان: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷

۳۱- به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۴)

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳

۳۲- به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟ (سراسری تجربی - ۹۳)

(۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ (۴) $\frac{9}{5}$ و -1

۳۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۵)

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۳۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x(5x+3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟ (سراسری ریاضی - ۹۰)

(۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

۳۵- در معادله‌ی $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه‌ی دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۷)

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵

۳۶- در معادله‌ی $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه‌ی دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۱)

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۳۷- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه‌ی دیگر است، مجموع دو ریشه‌ی مثبت کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۴)

(۱) $\frac{3}{5}$ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۵

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم جدید | تیپ ۱۳ | حسابان: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷

۳۸- اگر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله‌ی $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۶)

(۱) -۱۴ (۲) -۱۲ (۳) -۸ (۴) -۶

۳۹- ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیش‌تر است. b کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۷)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۴۰- ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + ax + b = 0$ ، از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 4x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر است. b کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۶)

(۱) -۵ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۴۱- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟ (سراسری تجربی - ۹۴)

(۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۴۲- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله‌ی $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۴۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟

(حسابان - صفحه‌ی ۲۳ - مشابه تمرین ۶) و (سراسری ریاضی - ۹۲)

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (4) \quad 4x^2 - 5x - 1 = 0 \quad (3) \quad 4x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (2) \quad 4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (1)$$

تعداد و علامت ریشه‌ها تیپ ۱۴ حسابان: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷

۴۴- به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ ، معکوس یکدیگرند؟

$$2 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad -2 \quad (1)$$

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۴۵- در ضرب دو عدد طبیعی که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است؛ اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می‌شود. برای آزمایش، حاصلضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می‌کنند. خارج قسمت ۳۹ و باقیمانده‌ی آن ۲۲ می‌شود. مجموع این دو عدد کدام است؟

(حسابان - صفحه‌ی ۲۳ - مسأله‌ی ۱۰)

$$72 \quad (4) \quad 31 \quad (3) \quad 29 \quad (2) \quad 62 \quad (1)$$

۴۶- مردی در نیمه‌ی اول قرن نوزدهم متولد شد (بین سال‌های ۱۸۰۰ تا ۱۸۵۰). وقتی او x سال داشت، x^2 سال بود. او در چه سالی متولد شده است؟

(حسابان - صفحه‌ی ۲۳ - مشابه مسأله‌ی ۸)

$$1809 \quad (4) \quad 1806 \quad (3) \quad 1810 \quad (2) \quad 1820 \quad (1)$$

۴۷- اگر معادله‌ی $x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = 0$ ریشه‌ی حقیقی و مثبت داشته باشد، حاصل $\alpha \cos^2 x'$ کدام است؟ (x' ریشه‌ی معادله است.)

(آزمون کانون ریاضی - ۸۷)

$$3 \quad (4) \quad \text{صفر} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۴۸- اگر $a > 0$ و $b > a$ و $x_1 < x_2$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x + 1 = 0$ باشند حاصل $bx_1 + ax_2$ کدام است؟

$$a^2 + b^2 \quad (4) \quad a^2 b^2 \quad (3) \quad a + b \quad (2) \quad ab \quad (1)$$

۴۹- اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - mx + 2 = 0$ و $a + \frac{1}{b}$ و $b + \frac{1}{a}$ ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - px + q = 0$ باشند، آنگاه q برابر است با:

$$\frac{9}{2} \quad (4) \quad 4 \quad (3) \quad \frac{7}{2} \quad (2) \quad \frac{5}{2} \quad (1)$$

۵۰- هرگاه a و b عددهای اول و معادله‌ی $x^2 - ax + b = 0$ دارای ریشه‌های صحیح و مثبت متمایز باشد، مجموع ریشه‌ها کدام است؟

(حسابان - فصل ۱ - صفحه‌های ۱۶ تا ۲۳)

$$6 \quad (4) \quad 5 \quad (3) \quad 7 \quad (2) \quad 3 \quad (1)$$

۵۱- در معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - (m+1)x - 8 = 0$ ، اگر یکی از جواب‌ها نصف مربع جواب دیگر باشد، m کدام است؟

$$-2 \quad (4) \quad -1 \quad (3) \quad -4 \quad (2) \quad 2 \quad (1)$$

۵۲- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا، $-1 + \sqrt{3}$ باشد، مجموع مکعبات دو ریشه‌ی این معادله کدام است؟

$$-20 \quad (4) \quad 20 \quad (3) \quad -4 \quad (2) \quad 4 \quad (1)$$

۵۳- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x + 1 = 0$ و $\alpha > \beta$ ، آنگاه معادله‌ای که ریشه‌هایش 5α و 4β باشد کدام است؟

$$x^2 + 15x + 9 = 0 \quad (4) \quad x^2 - 7x + 10 = 0 \quad (3) \quad x^2 + 7x + 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 - 15x + 9 = 0 \quad (1)$$

۵۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد، به ازای کدام مقدار m مجموعه جواب‌های معادله‌ی $4x^2 - 6x + m = 0$ به صورت $\beta + 2\alpha$ و

(آزمون کانون ریاضی - ۷ فروردین ۹۴)

$$-2 \quad (4) \quad 2 \quad (3) \quad -1 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۵۵- اگر a و c دو عدد گویای مخالف صفر و $ax^2 - 2\sqrt{2}x + c = 0$ صفر باشد، آنگاه ریشه‌های معادله:

$$2 \quad \text{گنگ هستند.} \quad (2) \quad 3 \quad \text{صحیح هستند.} \quad (3) \quad 4 \quad \text{طبیعی هستند.} \quad (4)$$

تابع درجه‌ی دوم

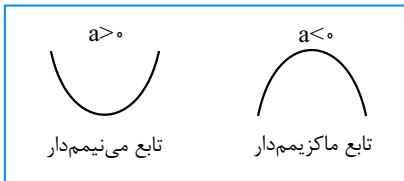
۳. عبارات درجه‌ی دوم

تعیین علامت و حل نامعادله‌ی درجه‌ی دوم

◆ تابع درجه‌ی دوم ◆

۱) ماکزیمم (می‌نیمم) تابع درجه‌ی دوم: هر تابع به شکل $y = ax^2 + bx + c$ (با شرط $a \neq 0$)، یک تابع درجه‌ی دوم یا سهمی قائم نامیده می‌شود، با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای خواهیم داشت:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \Rightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$



از آنجایی که همواره $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ ، اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه $f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$ یعنی برد تابع

$\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$ و تابع دارای می‌نیمم و مقدار آن $\frac{4ac - b^2}{4a}$ است و اگر $a < 0$ باشد،

آن‌گاه $f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$ یعنی برد تابع بازه‌ی $\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ و تابع دارای ماکزیمم و مقدار

آن $\frac{4ac - b^2}{4a}$ است. خط $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ همواره بر منحنی مماس است. وقتی $a > 0$ ، تابع ختم شونده به نواحی اول و دوم و وقتی $a < 0$ ، تابع ختم شونده به نواحی سوم و چهارم است.

◀ نتیجه‌ی (۱): اگر ضابطه‌ی تابع به شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، مختصات نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ است.

◀ نتیجه‌ی (۲): اگر ضابطه‌ی تابع به شکل $f(x) = a(x-h)^2 + k$ باشد، مختصات نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) $S(h, k)$ است.

◀ نتیجه‌ی (۳): اگر ضابطه‌ی تابع به شکل $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ باشد، مختصات نقطه‌ی ماکزیمم (می‌نیمم) $S\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ است.

۲) محور تقارن تابع درجه‌ی دوم: خط به معادله‌ی $x = -\frac{b}{2a}$ ، محور تقارن تابع است.

■ مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = -mx^2 + (m^2 - 6)x + 1$ در نقطه به طول $-\frac{1}{4}$ دارای ماکزیمم است، بیشترین مقدار تابع را بیابید.

◀ حل: طول نقطه‌ی ماکزیمم $-\frac{1}{4}$ است، پس: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{m^2 - 6}{-2m} = -\frac{1}{4} \Rightarrow m = 6 - m^2 \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow m = -3, m = 2$

با توجه به ماکزیمم‌دار بودن تابع، باید ضریب x^2 منفی باشد، بنابراین $-m < 0$ و از آن‌جا $m > 0$. با توجه به دو مقدار به‌دست آمده برای m ، فقط $m = 2$ قابل قبول است، حال ماکزیمم تابع با ضابطه‌ی $y = -2x^2 - 2x + 1$ را می‌یابیم:

$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4 - (-8)}{4(-2)} = \frac{3}{2}$$

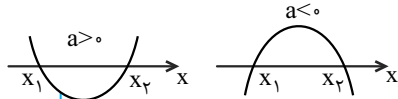
۳) نمودار تابع درجه‌ی دوم: نمودار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با توجه به علامت‌های Δ ی معادله و ضریب x^2 به شکل‌های زیر است.

وضعیت Δ	نمودار	تعیین علامت
(۱) $\Delta > 0$		با توجه به نمودار، بین دو ریشه، علامت تابع همواره مخالف علامت a و خارج فاصله‌ی بین دو ریشه، همواره موافق علامت a است.
(۲) $\Delta = 0$		با توجه به نمودار، همواره علامت تابع موافق علامت a است. توجه: اگر $a > 0$ یا $a < 0$ باشد، آن‌گاه تابع همواره بالای (پایین) محور x یا بر آن مماس است.
(۳) $\Delta < 0$		با توجه به نمودار، همواره علامت تابع موافق علامت a است. توجه: اگر $a > 0$ یا $a < 0$ باشد، آن‌گاه تابع همواره بالای (پایین) محور x هاست.

■ مثال: به ازای چه حدودی از a ، تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + 2x + a$ ، همواره بالای محور x هاست؟
 ◀ حل: باید $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد، پس:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 2^2 - 4a \times a < 0 \Rightarrow a^2 > 1 \Rightarrow a > 1 \cup a < -1 \xrightarrow{a > 0} a > 1 \end{cases}$$

◆ تعیین علامت و حل نامعادله‌ی درجه دوم



با توجه به نمودار، بین دو ریشه، مخالف علامت a و خارج فاصله‌ی آن‌ها، موافق علامت a است.

الف- تعیین علامت $P = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($x_1 < x_2$)

یا $P = ax^2 + bx + c$ با شرط $\Delta > 0$:

- ۱- با توجه به نمودار، اگر $a \times P < 0$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی جواب، فاصله‌ی بین دو ریشه است.
- ۲- با توجه به نمودار، اگر $a \times P > 0$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی جواب، خارج فاصله‌ی بین دو ریشه است.

ب- اگر $\Delta = 0$ باشد، عبارت دارای ریشه‌ی مضاعف است و علامت آن (غیر از در نقطه‌ی ریشه) همواره با علامت a یکسان خواهد بود.

ج- اگر $\Delta < 0$ ، عبارت فاقد ریشه است و علامت آن همواره موافق علامت a است، در این حالت اگر $a > 0$ ، عبارت همواره مثبت و اگر $a < 0$ ، عبارت همواره منفی است.

کنکورهای سراسری داخل و خارج کشور

تیب ۱۵ حسابان: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹

ماکزیم (می‌نیم) تابع درجه‌ی دوم

۵۶- منحنی توابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادله $y = 7$ مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۵)

تیب ۱۶ حسابان: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹

وضعیت نمودار با محور x ها

۵۷- اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

- (۱) $m > 3$
- (۲) $3 < m < 4$
- (۳) $3 < m < 5$
- (۴) $4 < m < 5$ (سراسری ریاضی - ۸۷)

۵۸- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

- (۱) $a < -9$
- (۲) $a < -3$
- (۳) $a > -1$
- (۴) $-3 < a < 0$ (سراسری ریاضی خارج کشور - ۹۲)

۵۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

- (۱) $m > 2$
- (۲) $-1 < m < 2$
- (۳) هر مقدار m
- (۴) هیچ مقدار m (سراسری ریاضی - ۹۵)

۶۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m+2)x^2 + 3x + 1 - m$ ، محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

- (۱) $m > 1$ یا $m < -2$
- (۲) $-2 < m < 1$
- (۳) فقط $m < -2$
- (۴) فقط $m > 1$ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۵)

۶۱- به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع با ضابطه $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره در زیر محور x هاست؟

- (۱) $m < -\frac{1}{4}$
- (۲) $-\frac{1}{4} < m < 1$
- (۳) $1 < m < \frac{3}{4}$
- (۴) $m > \frac{3}{4}$ (سراسری ریاضی - ۸۵)

۶۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x هاست؟

- (۱) $a < -1$
- (۲) $a > 1$
- (۳) $a > 2$
- (۴) $1 < a < 2$ (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۸۹)

۶۳- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ ، بر نیمساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

- (۱) -۴
- (۲) ۴ و -۱۲
- (۳) -۴ و ۱۲
- (۴) ۱۲ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)

تیب ۱۷ حسابان: صفحه‌های ۱۸ و ۱۹

نمودار تابع درجه دوم

۶۴- نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیرمنفی

- (۱) ۱
- (۲) ۱/۵
- (۳) ۲
- (۴) ۳ (سراسری تجربی خارج از کشور - ۹۳)

۶۵- به ازای کدام مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه‌ی دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی - ۸۹)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $a > -2$ (۳) $a > 0$ (۴) $-2 \leq a < 0$

۶۶- به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (سراسری ریاضی - ۹۲)

- (۱) $a \leq 2$ (۲) $0 < a \leq 2$ (۳) $2 < a < 3$ (۴) $0 < a < 3$

تعیین علامت عبارت درجه‌ی دوم | تیپ ۱۸ | ریاضیات ۲: صفحه‌های ۷۶ تا ۸۴

۶۷- به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

(ریاضیات ۲- صفحه‌ی ۸۴- مشابه مسأله‌ی ۶) و (سراسری ریاضی خارج از کشور - ۹۰)

- (۱) $m < -2$ (۲) $m > 2/5$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $1 < m < 2/5$

۶۸- اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

(ریاضیات ۲- صفحه‌ی ۸۴- مشابه مسأله‌ی ۷) و (سراسری ریاضی - ۹۱)

- (۱) $\{a : 1 < a < 5\}$ (۲) $\{a : a < 1\}$ (۳) \emptyset (۴) \mathbb{R}

۶۹- مقادیر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ ، در بازه‌ی (a, b) بزرگتر از $\frac{7}{4}$ است. بیشترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۹)

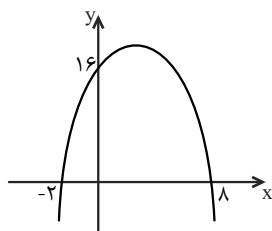
- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۵/۵ (۴) ۶

آزمون‌های کانون و سایر منابع

۷۰- کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{2}{x}$ به ازای مقادیر مثبت x کدام است؟ (حسابان - صفحه‌ی ۲۴- مسأله‌ی ۱۲)

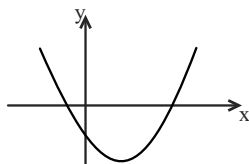
- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $4\sqrt{2}$

۷۱- اگر نمودار تابع درجه‌ی دومی به صورت مقابل باشد، مجموع ضرایب این تابع کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۹۱)



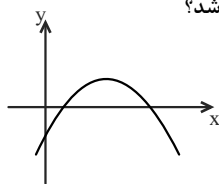
- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

۷۲- در شکل زیر سهمی به معادله‌ی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. کدام گزینه صحیح است؟ (حسابان - صفحه‌ی ۱۹- مسأله‌ی ۲-ب)



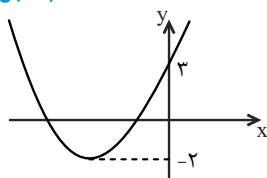
- (۱) $b - c > 0$ (۲) $b + c > 0$ (۳) $abc < 0$ (۴) $abc > 0$

۷۳- نمودار تابع $f(x) = mx^2 + 8x - 2$ به شکل مقابل است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟ (آزمون کانون ریاضی - ۱۰ بهمن ۹۳)



- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۷۴- در تابع درجه دوم $P(x) = \frac{5}{4}x^2 + bx + c$ که مربوط به شکل زیر است مقدار $\frac{c}{b}$ کدام است؟ (حسابان - صفحه‌ی ۲۴- مسأله‌ی ۱۳-ب)



- (۱) $-5/8$ (۲) $5/8$ (۳) $5/6$ (۴) $-5/6$

۷۵- به ازای کدام مقدار یا مقادیر m ، تابع می‌نیم‌دار $y = mx^2 + (3-m)x + 1$ در نقطه‌ای به طول مثبت بر محور x ها مماس است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۸۸)

- (۱) ۸ (۲) ۱ و ۹ (۳) فقط (۹) (۴) فقط (۱)

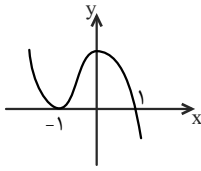
۷۶- تابع با ضابطه‌ی $y = ax^2 - 2ax + a + 1$ بر خط ثابتی مماس است. معادله‌ی این خط کدام است؟ (آزمون کانون ریاضی - ۸۹)

- (۱) $y = 0$ (۲) $x = 1$ (۳) $y = 1$ (۴) $y = x + 1$

۴. معادلات و نامعادلات چندجمله‌ای

۵. معادلات و نامعادلات گویا

◆ معادلات چندجمله‌ای ◆



صفرهای تابع: در تابع $y = f(x)$ جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ را (در صورت وجود)، صفرهای تابع f می‌نامیم، صفرهای تابع f آن مقادیری از x هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود، در واقع صفرهای تابع f ، محل تلاقی منحنی تابع با محور x هاست. در این حالت ریشه‌ی ساده‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ ، محل تقاطع تابع f با محور x هاست هم‌چنین ریشه‌ی مکرر از مرتبه‌ی زوج یا فرد معادله‌ی $f(x) = 0$ ، محل تماس تابع f با محور x هاست، در صورتی که نمودار محور x ها را قطع نکند، معادله‌ی $f(x) = 0$ ، فاقد ریشه خواهد بود.

به عنوان مثال اگر نمودار تابع $y = f(x)$ ، شکل بالا باشد، آنگاه معادله‌ی $f(x) = 0$ ، دارای ریشه‌ی ساده‌ی ۱ و ریشه‌ی مضاعف (تکراری) -۱ خواهد بود.

■ مثال: در معادله‌ی $(x-4)^2(x-3)^2(x-2)^3(x-1) = 0$ ، ریشه‌ی ساده، $x=4$ و $x=3$ و ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج و $x=2$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد هستند. توجه کنید که $x=3$ را ریشه‌ی مضاعف نیز می‌نامیم.

۱ حل معادلات چندجمله‌ای: برای حل یک معادله‌ی چندجمله‌ای، با دسته‌بندی مناسب و فاکتورگیری، استفاده از اتحادها یا تجزیه، عبارت را به حاصل ضرب عامل‌های اول تبدیل کرده و سپس هر کدام از عامل‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه‌ها را می‌یابیم.

■ مثال: معادله‌ی $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ را حل کنید.

$$\text{حل: } x^2(x-1) - (x-1) = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x-1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1, x=-1$$

۲ معادلات دومجذوری: در بعضی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، می‌توان معادله را به یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل کرد و آن را حل و بحث نمود. به این‌گونه معادلات، معادله‌ی دومجذوری می‌گوئیم.

■ مثال: تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^4 - 4x^2 - 7 = 0$ را بیابید.

◀ حل: با انتخاب $x^2 = t \geq 0$ ، به معادله‌ی $t^2 - 4t - 7 = 0$ خواهیم رسید، در این معادله $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} = \frac{-7}{1} < 0$ پس معادله برحسب t ، یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد، از آنجایی که $x^2 = t \geq 0$ ، پس دو جواب قرینه برای معادله به‌دست می‌آید.

◆ نامعادلات چندجمله‌ای ◆

برای حل یک نامعادله‌ی چندجمله‌ای، ابتدا همه‌ی متغیرها را به یک طرف منتقل کرده و عبارت را به حاصل ضرب عامل‌های اول تبدیل می‌کنیم (در صورت نیاز از فاکتورگیری یا تجزیه استفاده می‌کنیم)، ریشه‌های هر عامل را می‌یابیم و در یک جدول سطری به ترتیب صعودی قرار می‌دهیم، در دو طرف ریشه‌های ساده (به عنوان مثال $x-2$) و مکرر مرتبه‌ی فرد (به عنوان مثال $(x-2)^3$) تغییر علامت خواهیم داشت و در دو طرف ریشه‌های مکرر مرتبه‌ی زوج (به عنوان مثال $(x-2)^4$ یا $(x-2)^2$) تغییر علامت نخواهیم داشت، همچنین عبارات همواره مثبت در تعیین علامت بی‌اثرند (به عنوان مثال x^2+1). باید علامت یکی از بازه‌ها را معلوم کنیم، از آخرین بازه‌ی جدول، یک عدد امتحانی انتخاب کرده و علامت عبارت را در آن بازه تعیین کرده، سپس علامت‌ها را در هر یک از بازه‌ها مشخص می‌کنیم.

■ مثال: نامعادله‌ی $(x-7)^4(x-3)^6(1-x) < 0$ را حل کنید.

◀ حل: ریشه‌ها ۱، ۳ و ۷ هستند که در $x=3$ تغییر علامت نداریم. در آخرین بازه با انتخاب عدد ۸، مقدار عبارت منفی است، پس جدول تعیین علامت به‌صورت زیر است.

x	$-\infty$	۱	۳	۷	$+\infty$
P(x)	-	+	+	-	-

بنابراین مجموعه‌ی جواب $(-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ خواهد بود.

◆ معادلات گویا ◆

معادله‌هایی که از عبارت‌ها گویا ساخته شده باشند، معادله‌های گویا می‌نامیم، برای حل این‌گونه معادلات، ابتدا دامنه‌ی تعریف متغیر را می‌یابیم، سپس بین کسرهای داده شده مخرج مشترک می‌گیریم (معمولاً ک.م.م مخرجها انتخاب می‌شود) و در انتها، عبارت جبری به‌دست آمده را حل کرده و جواب‌های به‌دست آمده را در صورتی که مخرج کسرهای معادله‌ی اولیه را صفر نکنند، به عنوان جواب معادله انتخاب می‌کنیم.

■ مثال: معادله‌ی $\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2} = 2$ را حل کنید.

◀ حل: ک.م.م مخرج‌ها $x(x+2)$ است، با ضرب طرفین در ک.م.م خواهیم داشت:

$$3(x+2) + 5x = 2x(x+2) \Rightarrow 8x+6 = 2x^2+4x \Rightarrow 2x^2-4x-6=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \\ \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=3 \text{ یا } x=-1$$

که هر دو جواب قابل قبول هستند.