

حسابان

محل محاسبات

تابع یک به یک و وارون - تابع متناوب - تابع جزء صحیح

توابع مثلثاتی - اتحادهای مثلثاتی

معادلات مثلثاتی - وارون توابع مثلثاتی

مفهوم حد توابع - حد چپ و راست و همسایگی یک نقطه

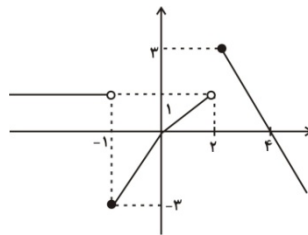
قضایای حد توابع

۴۶۱- با رسم نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$ به سؤال های زیر پاسخ دهید:

الف) آیا با نزدیک شدن مقدار x به صفر، مقدار تابع به عدد مشخصی نزدیک می شود؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، این عدد را مشخص کنید.

ب) آیا با نزدیک شدن مقدار x به عدد -3 ، مقدار تابع به عدد مشخصی نزدیک می شود؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، اگر فاصله ی x از -3 برابر 0.1 باشد فاصله ی مقدار تابع از این عدد مشخص، چه قدر خواهد بود؟ اگر فاصله ی x از -3 برابر 0.01 باشد، فاصله ی مقدار تابع از این عدد مشخص چه قدر خواهد بود؟

۴۶۲- نمودار تابع f به شکل زیر است. با توجه به نمودار، حاصل حدهای زیر را به دست آورید؟



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (الف)

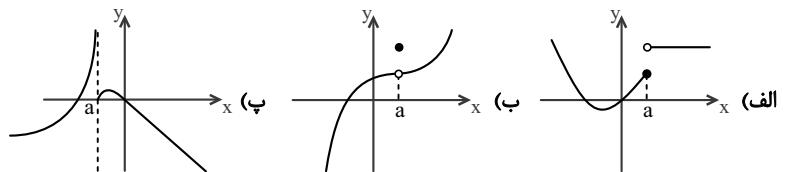
ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (ب)

پ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ (پ)

ت) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ (ت)

ث) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ (ث)

۴۶۳- با ذکر دلیل، مشخص کنید که کدامیک از توابع زیر در $x = a$ دارای حد است و کدامیک در این نقطه دارای حد نیست؟



۴۶۴- با رسم نمودار تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{x}{[x]}$ ، ابتدا مقدار حد چپ و راست این تابع را در

$x = -2$ محاسبه کرده و سپس با ذکر دلیل مشخص کنید که آیا این تابع در $x = -2$ دارای

حد است یا خیر؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۴۶۵- تابع f با ضابطه ی $f(x) = a[x] + [x+1]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود باشد. ([] نماد جزء صحیح است.)

۴۶۶- آیا $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x^2 - 1}$ معنا دارد؟ چرا؟

محل محاسبات

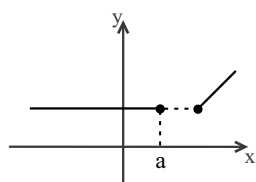
۴۶۷- آیا $\lim_{x \rightarrow \delta^+} \frac{x-5}{[x-5]}$ وجود دارد؟ چرا؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۴۶۸- حاصل حد روبه‌رو را بیابید:

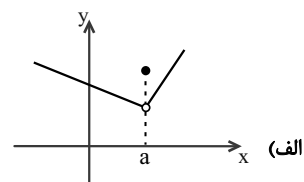
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$$

۴۶۹- با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{1-x} + 1$ ، مقدار حد را در اطراف نقطه‌ی $a = 1$ بررسی کنید.

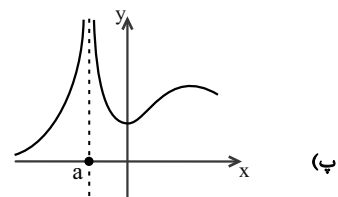
۴۷۰- با ذکر دلیل، مشخص کنید که کدامیک از تابع‌های زیر در $x = a$ دارای حد است و کدام یک در این نقطه دارای حد نیست.



(ب)



(الف)



(پ)

۴۷۱- کدامیک از حدهای زیر وجود ندارد؟

(۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x + \sqrt{x}}$

(۱) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2}$

(۴) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

(۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [x]$

۴۷۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{6}} \cot(x - \frac{2\pi}{3})$ کدام است؟

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۴) $-\sqrt{3}$

(۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

۴۷۳- در تابع $y = \left[\frac{1}{x} \right]$ ، حد چپ در نقطه‌ی $x = -\frac{1}{5}$ کدام است؟

(۲) -۴

(۱) ۴

(۴) -۵

(۳) ۵

محل محاسبات

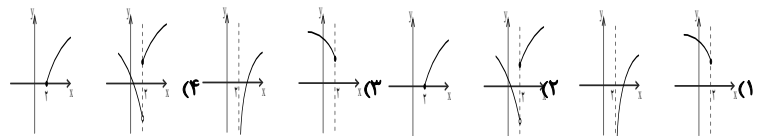
۴۷۴- در تابع $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right] - [-2x]$ مجموع حد چپ و راست وقتی $x \rightarrow 4$ کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است.

- (۱) ۱۹
(۲) ۲
(۳) ۱۸
(۴) ۲۰

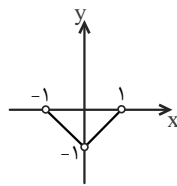
۴۷۵- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x]^2 - 9}{x^2 - 9}$ وقتی $x \rightarrow 3^+$ کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است.

- (۱) ۰
(۲) ۱
(۳) $+\infty$
(۴) حد ندارد

۴۷۶- در کدام یک از نمودارهای زیر، تابع در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده است اما در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد؟



۴۷۷- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{f(x)} \right]$ کدام است؟



- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) ۱
(۴) وجود ندارد

۴۷۸- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sin x} \right]$ وقتی $x \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟

- (۱) -۱
(۲) -۲
(۳) صفر
(۴) ۱

۴۷۹- تابع با ضابطه $f(x) = [x^2]$ در نقطه $x = a$ حد ندارد. اگر a عددی منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ کدام است؟ [] علامت جزء صحیح است.

- (۱) صفر
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) -۱

۴۸۰- مجموعه‌ی همی نقاطی که تابع با ضابطه $f(x) = \tan x \cot x$ در آن‌ها حد ندارد، کدام است؟

- (۱) \emptyset
(۲) $\left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
(۳) $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
(۴) $\left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

فیزیک ۳

محل محاسبات

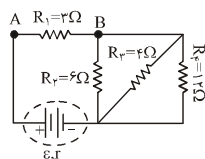
مدارهای خازن

مدارهای مقاومت

مدار تک حلقه

به هم بستن مقاومت‌ها و مدارهای چند حلقه

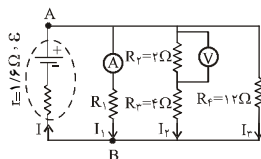
مغناطیس



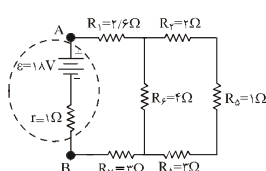
۶۶۱- در مدار شکل مقابل، نیروی محرکه‌ی هر مولد برابر ۶ ولت و مقاومت درونی هر کدام برابر ۰/۵ اهم است. مطلوب است:

- الف) مقاومت معادل مدار
- ب) شدت جریان هر شاخه و شدت جریان کل مدار
- ج) اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_2
- د) توان مصرفی در مقاومت R_2
- هـ) توان تولیدی کل مولدها
- و) بازدهی مولد

۶۶۲- در مدار شکل زیر، اگر آمپرسنج و ولتسنج ایده‌آل به ترتیب ۲A و ۴V را نشان دهند، مطلوب است:

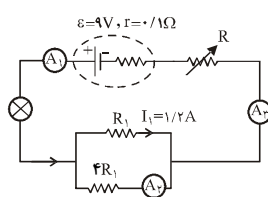


- الف) نیروی محرکه مولد
- ب) مقاومت R_1



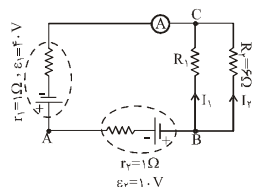
۶۶۳- در مدار شکل زیر، مطلوب است:

- الف) مقاومت معادل مدار.
- ب) شدت جریان کل مدار.
- ج) توان مصرفی در مدار.



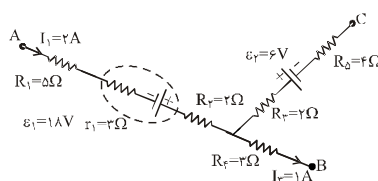
۶۶۴- در مدار شکل زیر:

- الف) هریک از آمپرسنجهای ایده‌آل چند آمپر را نشان می‌دهند؟
- ب) توان مفید مولد چند وات است؟



۶۶۵- مطابق شکل، آمپرسنج ایده‌آل جریان ۵A را نشان می‌دهد.

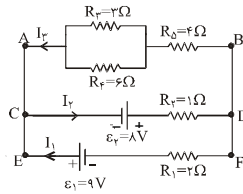
- الف) مقاومت R_1 چند اهم است؟
- ب) جریان‌های I_1 و I_2 را به دست آورید.



۶۶۶- مطابق شکل، $V_A - V_B$ چه قدر است؟

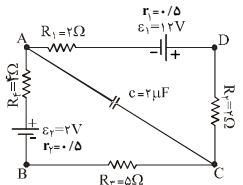
محل محاسبات

۶۶۷- در مدار داده شده، مطلوب است:



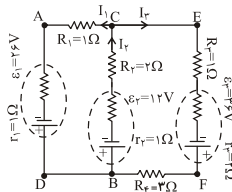
الف) جریان در هر شاخه
ب) توان مصرفی کل مقاومت‌های R_4 و R_5 ، R_3

۶۶۸- در مدار داده شده، مطلوب است:



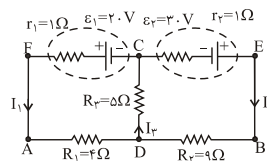
الف) شدت جریان عبوری از مدار
ب) انرژی ذخیره شده در خازن

۶۶۹- در مدار داده شده، مطلوب است:



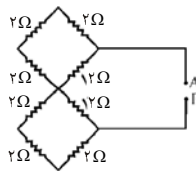
الف) شدت جریان هر شاخه
ب) $V_A - V_B$

۶۷۰- در مدار داده شده، مطلوب است:



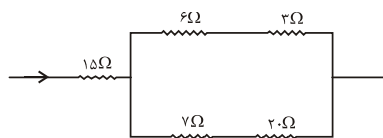
الف) شدت جریان هر شاخه
ب) توان مفید مولد ϵ_2

۶۷۱- در شکل مقابل، مقاومت معادل بین دو نقطه‌ی A و B چند اهم است؟



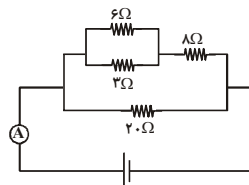
- ۱) ۸
- ۲) ۲
- ۳) $\frac{3}{2}$
- ۴) $\frac{3}{4}$

۶۷۲- در مدار زیر، توان مصرفی مقاومت ۳ اهمی چند برابر توان مصرفی مقاومت ۱۵ اهمی است؟



- ۱) $\frac{9}{80}$
- ۲) $\frac{3}{20}$
- ۳) $\frac{80}{9}$
- ۴) $\frac{20}{3}$

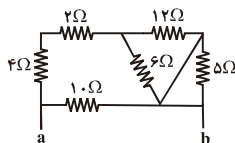
۶۷۳- در شکل زیر، آمپرسنج ایده‌آل $\frac{3}{6}A$ را نشان می‌دهد. شدت جریان گذرا از مقاومت ۶ اهمی چند آمپر است؟



- ۱) $\frac{1}{2}$
- ۲) $\frac{2}{4}$
- ۳) $\frac{3}{6}$
- ۴) $\frac{0}{8}$

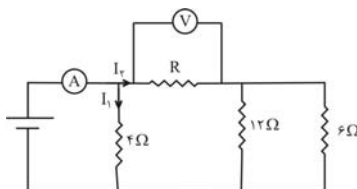
محل محاسبات

۶۷۴- مقاومت معادل بین a و b چند اهم است؟



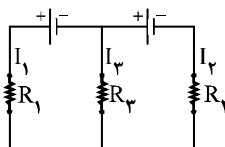
- (۱) ۵
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۵
- (۴) ۲۰

۶۷۵- در مدار زیر، ولتسنج عدد ۲۰V و آمپرسنج عدد ۱۳A را نشان می‌دهد. مقاومت R چند اهم است؟



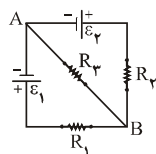
- (۱) ۲
- (۲) ۵
- (۳) ۱/۲
- (۴) ۱/۵

۶۷۶- در مدار زیر $R_1 = R_2 = R_3$ و دو باتری یکسان‌اند. کدام یک از رابطه‌های زیر صحیح است؟



- (۱) $I_1 = I_2 = I_3$
- (۲) $I_1 = I_2 = 2I_3$
- (۳) $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3$
- (۴) $I_1 = I_2, I_3 = 0$

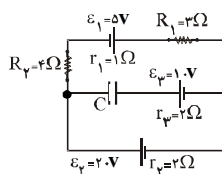
۶۷۷- در شکل زیر $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 6V$ و $R_1 = R_2 = R_3 = 20\Omega$ و مقاومت درونی مولدها ناچیز است.



شدت جریانی که از شاخه‌ی وسطی AB می‌گذرد چه قدر است؟

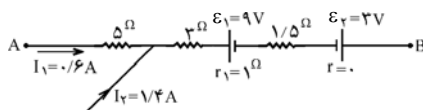
- (۱) ۰/۲ آمپر
- (۲) ۰/۱ آمپر
- (۳) صفر
- (۴) ۳/۶ آمپر

۶۷۸- در مدار شکل زیر بار الکتریکی ذخیره شده روی صفحه‌های خازن ۱۰ میکروفارادی چند میکروکولن است؟



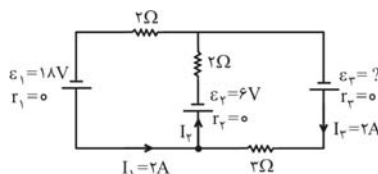
- (۱) ۵۰
- (۲) ۱۷۰
- (۳) ۱۰۰
- (۴) ۱۵۰

۶۷۹- در شکل مقابل اختلاف پتانسیل بین نقاط A و B ($V_A - V_B$) چند ولت است؟



- (۱) ۴۵
- (۲) ۲۰
- (۳) ۲۶
- (۴) ۸

۶۸۰- در شکل زیر ϵ_3 برابر چند ولت است؟



- (۱) ۲۴
- (۲) ۲۰
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۸

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \cot^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos^2\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3}\right) + \tan^2\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4}$$

۴۵۸- گزینهی «۳»

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۴۵۹- گزینهی «۴»

دقت کنید که با توجه به برد $y = \cos^{-1} x$ در ربع اول است.

$$\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (1)$$

۴۶۰- گزینهی «۲»

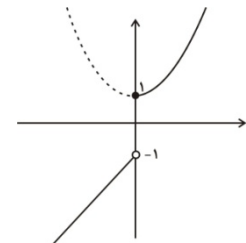
$$\cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}} = \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

بنابراین باید حاصل عبارت $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{5}}$ یعنی $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} + \alpha = 2\alpha$ را به دست آوریم، داریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2} = \frac{2 \times \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}}{1 - \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\alpha = \tan^{-1} \frac{2}{3}$$

مفهوم حد توابع - حد چپ و راست و همسایگی یک نقطه



ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

۴۶۱-

الف) خیر، با توجه به نمودار اگر x با مقادیر بیش از صفر به آن نزدیک شود آن‌گاه مقدار تابع به ۱ و اگر x با مقادیر کم‌تر از صفر به آن نزدیک شود آن‌گاه مقدار تابع به -۱ نزدیک می‌شود. یعنی با نزدیک شدن x به صفر مقدار تابع به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود.

ب) مطابق شکل با نزدیک شدن مقدار x به (-۳) مقدار تابع به (-۷) نزدیک می‌شود. حال داریم:

$$|x - (-3)| = 0/1 \Rightarrow |x + 3| = 0/1, \quad |f(x) - (-7)| = |2x - 1 + 7| = |2x + 6| = 2|x + 3| = 2 \times 0/1 = 0/2$$

$$|x - (-3)| = 0/01 \Rightarrow |x + 3| = 0/01$$

$$|f(x) - (-7)| = |2x - 1 + 7| = |2x + 6| = 2|x + 3| = 2 \times 0/01 = 0/02$$

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$

۴۶۲-

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

پ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -3$

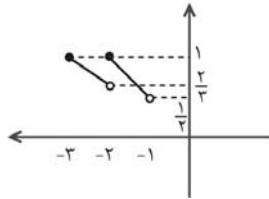
ث) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1$

الف) تابع در $x = a$ حد ندارد زیرا حد راست و چپ تابع در این نقطه با هم برابر نیستند.

۴۶۳-

ب) تابع در $x = a$ دارای حد است.

پ) تابع در $x = a$ حد ندارد زیرا $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$



نمودار تابع را در بازه‌ی $[-3, -1]$ رسم می‌کنیم.

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow y = \frac{x}{-3}$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = \frac{x}{-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \frac{2}{3}$$

با توجه به نمودار $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \frac{2}{3}$ با توجه به نمودار $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 1$ ، چون حد چپ و راست تابع در نقطه‌ی $x = -2$ با هم برابر نیستند پس تابع f در $x = -2$ حد ندارد.

-۴۶۴

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a[x] + [x+1]) = a+2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a[x] + [x+1]) = 0+1=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

-۴۶۵

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

کافی است دامنه‌ی تابع را به دست آوریم:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$$

x	-1	1
$x^2 - 1$	$+$	0
	$-$	$+$

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

با توجه به دامنه‌ی تابع، مقادیر بیشتر از $(-1)^+$ برای x تعریف نشده است و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x^2 - 1}$ معنا ندارد.

-۴۶۶

$$|x - 5| = 0 \Rightarrow 0 \leq x - 5 < 1 \Rightarrow 5 \leq x < 6 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [5, 6)$$

ابتدا دامنه‌ی عبارت را پیدا می‌کنیم:

پس اگر $x \rightarrow 5^+$ مقادیر بیش از 5 برای تابع تعریف نشده است پس حد مورد نظر وجود ندارد.

-۴۶۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)}{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1)} = \frac{(1+1+\dots+1)}{(1+1+\dots+1)} = \frac{n(1)}{m(1)} = \frac{n}{m}$$

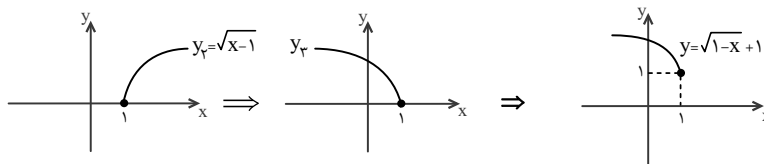
-۴۶۸

$$y = \sqrt{-(x-1)} + 1$$

برای رسم تابع $y = \sqrt{1-x} + 1$ با استفاده از تابع $y_1 = \sqrt{x}$ خواهیم داشت:

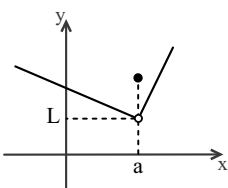
ابتدا تابع y_1 را یک واحد به راست انتقال می‌دهیم به تابع $y_2 = \sqrt{x-1}$ می‌رسیم، سپس نمودار y_2 را نسبت به خط $x=1$ تقارن می‌دهیم و به تابع $y_3 = \sqrt{-(x-1)}$ می‌رسیم و در انتها تابع y_3 را یک واحد به بالا انتقال می‌دهیم.

-۴۶۹



دامنه‌ی تابع $D_y = (-\infty, 1]$ است، پس تابع فقط در همسایگی چپ نقطه‌ی 1 تعریف شده است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{1-x} + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{1-x} + 1) = 0 + 1 = 1$$



الف) با توجه به نمودار: $\lim_{x \rightarrow a^+} y = \lim_{x \rightarrow a^-} y = L$ ، پس تابع در $x = a$ دارای حد است و $\lim_{x \rightarrow a} y = L$.

-۴۷۰

ب) با توجه به نمودار، تابع در همسایگی راست $x = a$ تعریف نشده است ولی حد چپ تابع در این نقطه موجود است. پس حد تابع در نقطه‌ی $x = a$ برابر حد چپ تابع و در نتیجه موجود است.

پ) با نزدیک شدن x به a ، مقدار تابع بیشتر تر و بیشتر می‌شود و به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود، پس تابع در $x = a$ حد ندارد.

۴۷۱- گزینهی «۴» $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ وجود ندارد زیرا اگر $x \rightarrow 0$ ، مقدار مشخصی برای $\sin \frac{1}{x}$ به دست نمی‌آید و همواره $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$.

۴۷۲- گزینهی «۲» $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} \cot(x - \frac{2\pi}{3}) = \cot(\frac{-\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}) = \cot(\frac{-5\pi}{6}) = -\cot \frac{5\pi}{6} = -\cot(\pi - \frac{\pi}{6}) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

۴۷۳- گزینهی «۴» وقتی $x \rightarrow (\frac{-1}{\delta})^-$ یعنی $x < \frac{-1}{\delta}$ و $\frac{1}{x} > -\delta$ پس $[\frac{1}{x}] = -\delta$

۴۷۴- گزینهی «۴»

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} \left[\frac{x}{2} \right] - [-2x] &= \left[\frac{4^+}{2} \right] - [-2(4^+)] = [2^+] - [(-8)^-] = 2 - (-9) = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} \left[\frac{x}{2} \right] - [-2x] &= \left[\frac{4^-}{2} \right] - [-2(4^-)] = [2^-] - [(-8)^+] = 1 - (-8) = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 11 + 9 = 20$$

۴۷۵- گزینهی «۱» $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x|^2 - 9}{x^2 - 9} = \frac{|3^+|^2 - 9}{(3^+)^2 - 9} = \frac{9 - 9}{9^+ - 9} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$

۴۷۶- گزینهی «۴» در نمودار گزینهی (۱) تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده اما در ۲ حد ندارد، پس این گزینه نیز حذف می‌شود. در نمودار گزینهی (۲) تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده اما در ۲ حد ندارد، پس این گزینه نیز حذف می‌شود. در تابع گزینهی (۳) تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده پس این گزینه نیز حذف می‌شود.

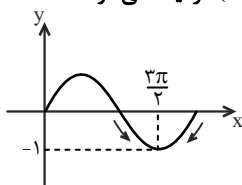
۴۷۷- گزینهی «۲» با توجه به نمودار وقتی x از دو طرف به صفر نزدیک می‌شود، $f(x)$ با مقادیر بیش‌تر از (-1) به (-1) نزدیک می‌شود پس:

$$-1 < f(x) \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < -1$$

لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{f(x)} \right] = [-2, -1] \text{ عددی بین } -2 \text{ و } -1$$

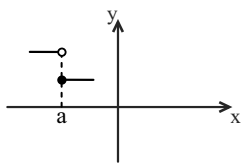
۴۷۸- گزینهی «۲» با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ در همسایگی نقطه‌ی $x = \frac{3\pi}{2}$ ، تابع با مقادیر بیش‌تر از (-1) به (-1) نزدیک می‌شود، لذا:



$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \left[\frac{1}{\sin x} \right] = \left[\frac{1}{(-1)^+} \right] = [-1/\dots] = -2$$

۴۷۹- گزینهی «۴» با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [f(x)]$ ، اگر تابع در نقطه‌ی a حد نداشته باشد، آنگاه قدر مطلق اختلاف حد چپ و راست در این نقطه ۱ است، از آنجایی که تابع $y = x^2$ به ازای x های منفی، نزولی است پس حد چپ از حد راست بزرگتر است و در نتیجه:

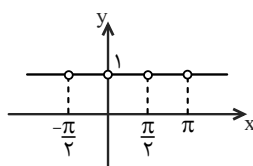
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1$$



۴۸۰- گزینهی «۱» از آنجایی که $\tan x \cdot \cot x = 1$ ، $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) پس نمودار تابع به صورت مقابل خواهد بود:

$$f(x) = 1, x \neq \frac{k\pi}{2}$$

این تابع در هر نقطه‌ی دلخواهی حد دارد و حد آن ۱ است.



۶۵۷- گزینهی «۱»

با توجه به نمودار، با افزایش شدت جریان الکتریکی، اندازه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر مولد A افزایش و اندازه‌ی اختلاف پتانسیل دو سر مولد B کاهش می‌یابد.

بنابراین $V_A = \mathcal{E}_A + r_A I$ و $V_B = \mathcal{E}_B - r_B I$ است. با توجه به رابطه‌های فوق و اعداد روی نمودار می‌توان نوشت:

$$\frac{I=0}{V_A=12V} \rightarrow 12 = \mathcal{E}_A + 0 \Rightarrow \mathcal{E}_A = 12V$$

$$\frac{I=0}{V_B=12V} \rightarrow 12 = \mathcal{E}_B - 0 \Rightarrow \mathcal{E}_B = 12V$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} V_A = 12 + r_A I \xrightarrow{\frac{I=2A}{V_A=17V}} 17 = 12 + 2r_A \Rightarrow r_A = 2/5 \Omega \\ V_B = 12 - r_B I \xrightarrow{\frac{I=2A}{V_B=5V}} 5 = 12 - 2r_B \Rightarrow r_B = 3/5 \Omega \end{cases}$$

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{2/5}{3/5} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{2}{3}$$

در نتیجه:

$$r = 0/5 \Omega, \quad R_1 = 4 \Omega, \quad R_2 = 2 \Omega, \quad \frac{I_2}{I_1} = ?$$

۶۵۸- گزینهی «۳»

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1+r} \xrightarrow{R_1=4\Omega, r=0/5\Omega} I_1 = \frac{\mathcal{E}}{4+0/5} \\ I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2+r} \xrightarrow{R_2=2\Omega} I_2 = \frac{\mathcal{E}}{2+0/5} \end{cases} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{4/5}{2/5} = 2$$

با کاهش مقاومت R، بنا به رابطه $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ جریان در مدار افزایش می‌یابد و آمپرسنج عدد بزرگ‌تری را نشان می‌دهد و بنا به رابطه $V = \mathcal{E} - Ir$ ، با افزایش جریان، اختلاف پتانسیل دو سر مولد کاهش می‌یابد و بنابراین ولت‌سنج عدد کم‌تری را نشان می‌دهد.

۶۵۹- گزینهی «۲»

ابتدا شدت جریان مدار را محاسبه می‌کنیم:

$$R_T = R + 2R = 3R, \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R_T + r} = \frac{6}{3R + 0} = \frac{2}{R} A$$

۶۶۰- گزینهی «۳»

و سپس از نقطه‌ی B و در جهت جریان به نقطه‌ی O می‌رویم و تغییر پتانسیل هر جزء را می‌نویسیم. با توجه به این که نقطه‌ی O به زمین وصل است. $V_O = 0$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$V_B - 2RI = V_O \Rightarrow V_B - 2R \times \frac{2}{R} = 0 \Rightarrow V_B = 4$$

به هم بستن مقاومت‌ها و مدارهای چند ملقه

۶۶۱-

(الف) مقاومت R_2 ، R_3 و R_4 به صورت موازی به یکدیگر متصل شده‌اند و لذا مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \Rightarrow R' = 2 \Omega$$

مقاومت معادل R' با مقاومت R_1 به صورت متوالی به یکدیگر بسته شده است و لذا داریم:

$$R_T = R_1 + R' \Rightarrow R_T = 3 + 2 = 5 \Omega$$

$$I_{\text{کل}} = \frac{\Sigma \mathcal{E}}{R_T + \Sigma r} = \frac{6 + 6}{5 + (0/5 + 0/5)} = 2 A$$

(ب) برای محاسبه‌ی شدت جریان کل مدار داریم:

$$\frac{I_2}{I_{2,4}} = \frac{R_{2,4}}{R_2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_{2,4}} = \frac{3}{6}, \quad I_2 + I_{2,4} = 2 A \Rightarrow I_2 = \frac{2}{3} A$$

و برای محاسبه‌ی جریان عبوری از شاخه‌ها می‌توان نوشت:

$$\frac{I_3}{I_2} = \frac{R_2}{R_3} \Rightarrow \frac{I_3}{2/3} = \frac{6}{12} \Rightarrow I_3 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} A$$

$$I_2 + I_3 + I_4 = 2 A \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + I_4 = 2 A \Rightarrow I_4 = 1 A$$

$$V_1 = I_{\text{کل}} R_1 = 2 \times 3 = 6 V \quad (\text{ج})$$

$$P_2 = I_2^2 R_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 6 = \frac{4}{9} \times 6 = \frac{24}{9} W \quad (\text{د})$$

$$P = I_{\text{کل}}^2 R = (2)^2 \times 5 = 20 W \quad (\text{ه})$$

(و) بنابر تعریف بازدهی یک مولد، نسبت توان مفید (توان مصرفی کل در مدار) به توان تولیدی آن است و داریم:

$$Ra = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{تولیدی}}} = \frac{R_T I^2}{\varepsilon I} = \frac{5 \times 2^2}{12 \times 2} = \frac{5}{6}$$

$$I_T = \frac{V}{R_T} = \frac{4}{2} = 2A$$

(الف) ابتدا با توجه به مقاومت R_T و ولتاژ دو سر آن جریان I_T را به دست می‌آوریم:

-۶۶۲

$$I_T = 2A$$

چون R_T و R_T متوالی هستند.

$$\frac{I_T}{I_T} = \frac{R_T + R_T}{R_T} \Rightarrow \frac{I_T}{I_T} = \frac{2+4}{2} \Rightarrow I_T = 1A$$

با توجه به قانون تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی داریم:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow I_T = 2+2+1 = 5A$$

شدت جریان کل عبوری برابر است با:

$$V_T = R_T I_T \Rightarrow V_T = 12 \times 1 = 12V$$

ولتاژ دو سر مقاومت‌ها در هر شاخه با ولتاژ کل برابر است با:

$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow 12 = \varepsilon - 5 \times 1 / 6 \Rightarrow \varepsilon = 20V$$

(ب) چون جریان گذرا از شاخه‌های وسطی و شاخه‌ی سمت چپ با هم برابر است، بنابر قانون تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی،

$$R_1 = R_2 + R_3 \Rightarrow R_1 = 2 + 4 = 6\Omega$$

مقاومت این شاخه‌ها هم با هم برابرند و داریم:

$$R' = R_T + R_D + R_A \Rightarrow R' = 2 + 1 + 3 = 6\Omega$$

(الف)

-۶۶۳

$$\frac{1}{R''} = \frac{1}{R_T} + \frac{1}{R'} \Rightarrow \frac{1}{R''} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \Rightarrow R'' = 3\Omega$$

$$R_T = R'' + R_1 + R_2 = 3 + 2 + 3 = 8\Omega$$

$$I_T = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{18}{8+1} = 2A$$

(ب)

$$P_T = I_T^2 R_T = (2)^2 \times 8 = 32W$$

(ج)

(الف) ابتدا با استفاده از قانون تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی، جریان گذرا از آمپرسنج A_T را به دست می‌آوریم:

-۶۶۴

$$\frac{I_1}{I_T} = \frac{4R_1}{R_1} \Rightarrow \frac{1/2}{I_T} = 4 \Rightarrow I_T = 0.125A$$

بنابراین آمپرسنج A_T جریان 0.125 آمپر و آمپرسنج‌های A_1 و A_2 جریان کل مدار که برابر $1/5A$ است را نشان می‌دهند.

$$P_{\text{مفید}} = \varepsilon I - r I^2 = 9 \times 1/5 - (1/5)^2 \times 0.1 = 13/250W$$

(ب)

(الف) ابتدا از رابطه‌ی شدت جریان اصلی، مقاومت کل را به دست می‌آوریم:

-۶۶۵

$$I = \frac{\Sigma \varepsilon}{R_T + r} \Rightarrow I = \frac{40-10}{R_T+2} \Rightarrow 5 = \frac{30}{R_T+2} \Rightarrow R_T+2=6 \Rightarrow R_T=4\Omega$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{12} \Rightarrow R_1 = 12\Omega$$

بنابراین برای محاسبه‌ی R_1 داریم:

(ب)

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 &= 5A \\ \frac{I_2}{I_1} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{12}{6} \Rightarrow I_2 = 2I_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2I_1 + I_1 = 5A \Rightarrow I_1 = \frac{5}{3}A, I_2 = \frac{10}{3}A$$

از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B حرکت می‌کنیم و پتانسیل اجزاء مدار را جمع جبری می‌کنیم. بنابراین داریم:

-۶۶۶

$$V_A - I_1 R_1 - I_2 r + \varepsilon_1 - I_1 R_2 - I_2 R_3 = V_B$$

$$V_A - V_B = 2 \times 5 + 2 \times 3 - 18 + 2 \times 2 + 1 \times 3 = 5V$$

(الف) با دور زدن هر یک از حلقه‌های CEFD و CDBA و جمع جبری اجزاء مدار دو معادله به دست می‌آید و با توجه به قانون شدت

-۶۶۷

$$V_C + \varepsilon_2 - I_2 R_3 - I_1 R_D - I_2 R_{3,4} = V_C \Rightarrow 8 = 6I_2 + I_1$$

جریان در گره C داریم:

$$V_C - \varepsilon_1 + I_1 R_1 + I_2 R_2 - \varepsilon_2 = V_C \Rightarrow 17 = 2I_1 + I_2$$

$$I_2 = I_1 + I_3 \Rightarrow \begin{cases} 8 = 6I_2 + I_1 & I_1 = 5/55A \\ 17 = 2I_1 + I_2 & I_2 = 0/35A \end{cases}$$

$$I_2 = 5/55 + 0/35 = 5/9A$$

$$R_{3,4} = \frac{3 \times 6}{3+6} = 2\Omega \quad P = RI^2 \Rightarrow P = 6(0.25)^2 = 0.375W$$

$$R_{3,4,5} = 4+2 = 6\Omega$$

الف) بدون در نظر گرفتن خازن شدت جریان در مدار را حساب می‌کنیم: $I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R + \sum r} \Rightarrow I = \frac{2+12}{2+2+5+4+0/5+0/5} = 1A$ -۶۶۸

ب) اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر با اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ی A و C است. بنابراین داریم:

$$V_A - IR_1 - I r_1 + \varepsilon_1 - IR_2 = V_C \Rightarrow V_C - V_A = -1 \times 2 - 1 \times 0/5 + 12 - 1 \times 2 = 7/5V$$

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{-6} \times (7/5)^2 = 56/25 \times 10^{-6} J$$

الف) ابتدا هر یک از حلقه‌ها را یک بار دور می‌زنیم و پتانسیل اجزاء را جمع جبری می‌کنیم (دو معادله) و با توجه به قانون شدت جریان‌ها در نقطه‌ی C داریم:

$$V_C - I_1 R_1 + \varepsilon_1 - I_2 r_1 - \varepsilon_2 - I_3 r_2 - I_4 R_2 = V_C \Rightarrow 14 = 2I_1 + 3I_2$$

$$V_C - I_4 R_2 - I_3 r_2 + \varepsilon_2 - I_5 R_2 - \varepsilon_1 - I_2 r_2 - I_4 R_2 = V_C \Rightarrow 24 = 6I_2 + 3I_4$$

$$I_2 = I_3 + I_4 \Rightarrow \begin{cases} 14 = 5I_1 + 3I_2 & I_1 = 1/5A \\ 8 = I_1 + 2I_2 & I_2 = 13/6A \end{cases} \quad I_2 = \frac{3}{2} + \frac{13}{6} = \frac{11}{3}A$$

ب)

$$V_B - \varepsilon_2 - I_3 r_2 - I_4 R_2 - I_1 R_1 = V_A \Rightarrow V_A - V_B = -12 - \frac{11}{3} \times 1 - \frac{11}{3} \times 2 - \frac{3}{2} \times 1$$

$$V_A - V_B = -24/5V$$

الف) ابتدا هر یک از حلقه‌ها را یک بار دور می‌زنیم و پتانسیل اجزاء مدار را جمع جبری می‌کنیم و شدت جریان‌ها در گره C داریم:

$$V_C + \varepsilon_1 - I_1 r_1 - I_2 R_1 - I_3 R_2 = V_C \Rightarrow 20 = 5I_1 + 5I_2$$

$$V_C + \varepsilon_2 - I_4 r_2 - I_5 R_2 - I_3 R_2 = V_C \Rightarrow 30 = 10I_2 + 5I_3$$

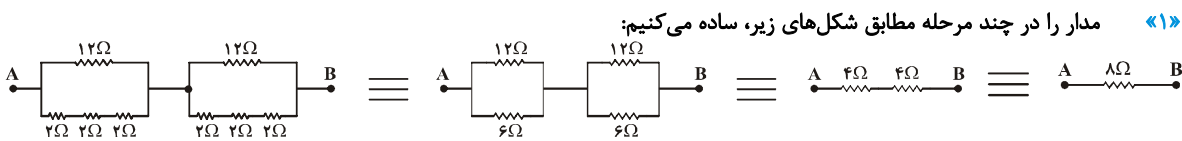
$$I_3 = I_4 + I_5 \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2I_1 + I_2 \\ 6 = I_1 + 2I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = \frac{4}{5} = 1/6A \\ I_1 = \frac{6}{5} = 1/2A \end{cases}$$

ب)

$$I_3 = 1/6 + 1/2 = 2/3A$$

$$P = \varepsilon_2 I_3 - r_2 I_3^2 \Rightarrow P = 30 \times 1/6 - 1 \times (1/6)^2 = 45/4W$$

۶۷۱- گزینه‌ی «۱»



۶۷۲- گزینه‌ی «۱»

مقاومت معادل شاخه‌ی بالایی برابر $R_1 = 6+3 = 9\Omega$ و شاخه‌ی پایینی $R_2 = 7+20 = 27\Omega$ است. اگر فرض کنیم جریان شاخه‌ی پایینی I باشد، جریان شاخه‌ی بالایی که مقاومت آن $\frac{1}{3}$ مقاومت شاخه‌ی پایینی می‌شود برابر $3I$ خواهد شد. در نتیجه جریان مقاومت 15 اهمی برابر $I' = I + 3I = 4I$ می‌شود. بنابراین طبق رابطه‌ی $P = RI^2$ می‌توان نوشت:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow 9I_1 = 27I_2 \Rightarrow I_1 = 3I$$

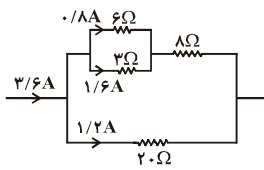
$$I' = I + 3I = 4I$$

$$\frac{P_2}{P_{15}} = \frac{R_2}{R_{15}} \times \left(\frac{I_2}{I'}\right)^2 \Rightarrow \frac{P_2}{P_{15}} = \frac{3}{15} \times \left(\frac{3I}{4I}\right)^2 \Rightarrow \frac{P_2}{P_{15}} = \frac{1}{5} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{80}$$

۶۷۳- گزینه‌ی «۴»

مقاومت معادل دو مقاومت موازی 6 اهمی و 3 اهمی برابر 2 اهم است، بنابراین کل مقاومت معادل شاخه‌ی بالایی برابر 10Ω می‌شود و بنابر قانون تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی داریم:

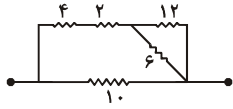
$$\frac{I_{\text{بالایی}}}{I_{\text{پایینی}}} = \frac{20}{10} = 2, \quad I_{\text{بالایی}} + I_{\text{پایینی}} = 3/6A \Rightarrow I_{\text{بالایی}} = 2/4A, \quad I_{\text{پایینی}} = 1/2A$$



اکنون جریان $2/4 A$ بین دو مقاومت ۶ و ۳ اهمی تقسیم می‌شود و داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_p}{I_p} = \frac{R_p}{R_p} \Rightarrow \frac{I_p}{I_p} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ I_p + I_p = 2/4 A \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_p = 0/8 A, I_p = 1/6 A$$

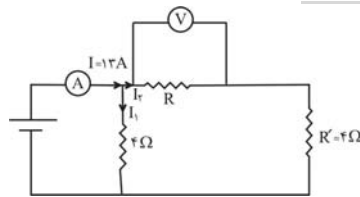
دو سر مقاومت ۵ اهمی اتصال کوتاه است و این مقاومت از مدار حذف می‌گردد. سپس دو مقاومت ۱۲ و ۶ با هم موازی می‌شوند که حاصل آن‌ها با مقاومت‌های ۲ و ۴ متوالی و سپس مجموعه با مقاومت ۱۰ موازی می‌گردد.



$$R' = 4 + 2 + \frac{6 \times 8}{6 + 8} = 10 \Omega$$

$$R_T = \frac{10 \times 10}{10 + 10} = 5 \Omega$$

۶۷۴- گزینه‌ی «۱»



ابتدا مدار را به صورت زیر ساده می‌کنیم در این حالت می‌توان نوشت:

$$R' = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 4 \Omega$$

$$4I_1 = (R + R')I_p \Rightarrow 4I_1 = RI_p + R'I_p \xrightarrow{RI_p = 20V, R' = 4\Omega}$$

$$4I_1 = 20 + 4I_p \Rightarrow I_1 - I_p = 5 \quad (1)$$

از طرف دیگر $I_1 + I_p = 13$ است. بنابراین داریم:

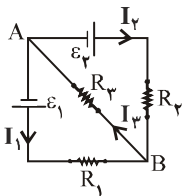
$$\begin{cases} I_1 - I_p = 5 \\ I_1 + I_p = 13 \end{cases} \Rightarrow 2I_1 = 18 \Rightarrow I_1 = 9A, I_p = 13 - 9 = 4A$$

$V = RI_p \Rightarrow 20 = R \times 4 \Rightarrow R = 5 \Omega$

۶۷۵- گزینه‌ی «۲»

با توجه به تقارن مدار، شدت جریان I_1 برابر I_p است و با توجه به این که این دو جریان در مقاومت R_p در خلاف جهت هم هستند بنابراین شدت جریان I_p برابر صفر خواهد بود.

۶۷۶- گزینه‌ی «۴»



ابتدا جهت جریان‌ها را مشخص می‌کنیم و با توجه به قانون‌های کیرشهف داریم:

$$V_A + \varepsilon_2 - I_p R_2 - I_p R_3 = V_A \Rightarrow \varepsilon_2 = 20I_p + 20I_p$$

$$V_A + \varepsilon_1 - I_1 R_1 - I_p R_3 = V_A \Rightarrow \varepsilon_1 = 20I_1 + 20I_p$$

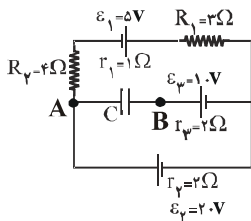
$$\begin{cases} I_p = I_1 + I_2 \\ \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 20(I_p + I_1) + 40I_p \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 20I_p + 40I_p$$

$$6 = 60I_p \Rightarrow I_p = 0/1 A$$

۶۷۷- گزینه‌ی «۲»

مقاومت خازن پر شده بی‌نهایت است بنابراین جریان عبوری از شاخه‌ی آن صفر است مدار را بدون در نظر گرفتن خازن دور می‌زنیم و پتانسیل اجزاء مدار را جمع می‌زنیم، اختلاف پتانسیل دو سر خازن برابر اختلاف پتانسیل دو نقطه‌ی A و B است داریم:

$$V_A - IR_p + \varepsilon_1 - Ir_1 - IR_1 - Ir_2 + \varepsilon_2 = V_B$$



$$I = \frac{5 + 20}{4 + 1 + 3 + 2} = 2/5 A$$

$$V_A - IR_p + \varepsilon_1 - Ir_1 - IR_1 + \varepsilon_2 = V_B$$

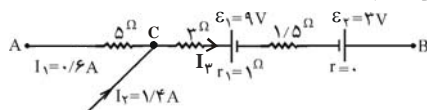
$$V_A - V_B = 2/5 \times 4 - 5 + 1 \times 2/5 + 2/5 \times 3 - 10 = 5V$$

$$q = CV_{AB} = 10 \times 5 = 50 \mu C$$

۶۷۸- گزینه‌ی «۱»

با توجه به قانون شدت جریان در گره، شدت جریان در شاخه‌ی CB را به دست می‌آوریم:

۶۷۹- گزینه‌ی «۲»



$$I_p = I_1 + I_2 = 1/4 + 0/6 = 2A$$

$$V_A - 0/6 \times 5 - 3 \times 2 - 9 - 1 \times 2 - 1/5 \times 2 + 3 = V_B$$

$$V_A - V_B = 3 + 6 + 9 + 2 + 3 - 3 = 20V$$

$$+2I_p + r_p I_p - \varepsilon_3 - 2I_1 + \varepsilon_1 + r_1 I_1 = 0$$

از دور زدن مدار بیرونی و جمع اجزاء مدار داریم:

۶۸۰- گزینه‌ی «۲»

$$3 \times 2 + 0 - \varepsilon_3 - 2 \times 2 + 18 + 0 = 0 \Rightarrow \varepsilon_3 = 20V$$