

تعريف تابع: یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای است که هر عضو از A را دقیقاً به یک عضو از B تبدیل می‌کند. مجموعه‌ی A را دامنه‌ی تابع (ورودی‌های تابع) و مجموعه‌ی خروجی‌ها را برد می‌نامیم که زیر مجموعه‌ای از B یا خود B است.

ضابطه‌ی تابع: اگر $x \in A$ و f نام تابع باشد، خروجی مربوط به x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم $y = f(x)$ ، که آن را قاعده یا قانون یا ضابطه‌ی تابع می‌نامیم. در این رابطه x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است.

تذکر: دامنه‌ی تابع، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای است که ضابطه‌ی تابع روی آن مجموعه تعریف شده است.

تذکر: یک رابطه برحسب x و y زمانی یک تابع y برحسب x را نشان می‌دهد که به ازای هر x مجاز فقط یک مقدار برای y به دست آید.

مثال: ضابطه‌ی $x = y^2$ یک تابع y برحسب x نمی‌باشد، زیرا به ازای $x = 1$ دو مقدار $y = \pm 1$ به دست می‌آید. اما ضابطه‌ی $x = y^3$ یک تابع y برحسب x است زیرا به ازای هر x فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

مدل سازی با تابع: یافتن یک رابطه بین دو متغیر که یکی مستقل و دیگری به آن وابسته است را مدل‌سازی با تابع می‌نامیم. برای این کار متغیر یا متغیرهای مسأله را شناسایی می‌کنیم و با توجه به ارتباط بین آن‌ها، تابع آن را می‌نویسیم.

مثال: مدل حجم یک مکعب را برحسب طول ضلع آن بنویسید.

اگر طول ضلع مکعب را x در نظر بگیریم و حجم آن را با V نشان دهیم، با توجه به این که حجم مکعب برابر توان سوم طول ضلع آن است، داریم:

$$V(x) = x^3$$

یادآوری و تکمیل از تابع

تساوی دو تابع: دو تابع f و g را مساوی گوئیم هر گاه دو شرط زیر باهم برقرار باشند:

(۱) دامنه‌ی دو تابع با هم برابر باشند.

(۲) به ازای هر x از دامنه‌ی f یا دامنه‌ی g داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

تذکر: در دو تابع مساوی، نمودار دو تابع روی هم منطبق می‌شوند.

تذکر: اگر دو تابع به صورت زوج مرتب بیان شده باشند، در صورتی با هم مساوی هستند که مجموعه‌ی زوج‌های مرتب دو تابع دقیقاً مانند هم باشند.

توابع چند ضابطه‌ای:

در حالت کلی یک تابع چند ضابطه‌ای دارای چند شاخه است که در هر شاخه ضابطه‌ی معینی با یک دامنه‌ی مشخص وجود دارد. دقت شود که در این تابع اشتراک دو به دوی دامنه‌ها باید تهی باشد، در غیر این صورت باید به ازای تمام مقادیر مشترک بین دو دامنه، مقادیر ضابطه‌ی دو شاخه با هم برابر شوند.

مثال: رابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ x & x \leq 1 \end{cases}$ یک تابع چند ضابطه‌ای است، زیرا به ازای مقدار مشترک دامنه‌ی دو شاخه (یعنی $x = 1$)، مقادیر ضابطه‌ی دو شاخه با هم برابر است.

تذکر: در توابع چند ضابطه‌ای برای محاسبه $f(x_0)$ باید با توجه به دامنه‌ی هر شاخه، مشخص کنیم x_0 در دامنه‌ی کدام شاخه قرار دارد و آن گاه مقدار ضابطه‌ی آن شاخه به ازای x_0 را تعیین کنیم.

مثال: در مثال قبل داریم:

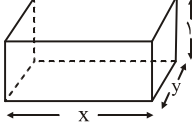
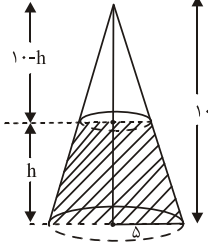
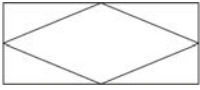
$$f(2) = \text{شاخه‌ی بالا} \quad f(0) = \text{شاخه‌ی پایین} \quad f(0) = 3, f(2) = 2(2) - 1 = 3$$

آزمون سوم

پیشنهاد ما برای تدریس معلمان و مطالعه‌ی دانش‌آموزان (در کلاس یا به صورت خودآموزی)

سوال‌های تشریحی

یادآوری و تکمیل تابع

۸۱. تابع $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ تعریف شده است. مجموعه‌ی A را پیدا کنید.
۸۲. آکواریوم مکعب مستطیل شکل با حجم ۱۰۰۰ واحد مکعب و ارتفاع ۱۰ واحد داده شده است. سطح جانبی آکواریوم را برحسب طول سطح مقطع آن یعنی x بنویسید.
- 
۸۳. یک مخروط به ارتفاع ۱۰ واحد و شعاع قاعده ۵ واحد را در نظر بگیرید. تابعی بنویسید که حجم ناحیه‌ی هاشور خورده را به h نسبت دهد. (حجم مخروط یک سوم مساحت قاعده ضرب در ارتفاع است.)
- 
۸۴. در مستطیلی به عرض w و محیط ۴۰ متر یک لوزی محاط شده است. هر راس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.
- 
۸۵. اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچک‌تر بیان کنید.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۸۶. اگر $f: [2, +\infty) \rightarrow B$ ، آن گاه B کدام گزینه‌ی زیر می‌تواند باشد؟
 $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$
- (۱) $[4, +\infty)$ (۲) $(2, +\infty)$
 (۳) $[2, +\infty)$ (۴) $[3, +\infty)$
۸۷. تمام دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y = \sqrt{|x+1| + |x-3|} - 6$ کدام است؟
- (۱) $\mathbb{R} - (-2, 4)$ (۲) $\mathbb{R} - [-2, 4]$
 (۳) $[-2, 4]$ (۴) $(-2, 4)$
۸۸. در دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{|x-1| + |x+3|} - 7$ ، چند عدد صحیح قرار نمی‌گیرد؟
- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷
۸۹. برد تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x > \frac{1}{2} \\ x^2 & ; -2 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ شامل چند عدد صحیح است؟
- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار
۹۰. مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۴ سانتی‌متر مربع است. ضابطه‌ی طول وتر مثلث به عنوان تابعی از یک ضلع آن (x) کدام است؟

(۱) $\sqrt{\frac{x^4+16}{x^2}}$ (۲) $\sqrt{\frac{x^4+64}{x^2}}$ (۳) $\sqrt{\frac{x^4+8}{x^2}}$ (۴) $\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}$

سوال های تشریحی

۹۱. تساوی دو تابع را در هر مورد زیر بررسی کنید.

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \\ g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}} \end{cases} \text{ (ب)} \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \\ g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \end{cases} \text{ (الف)}$$

۹۲. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in Z \\ x^2, & x \notin Z \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مقدارهای $f(0)$ و $f(\frac{1}{4})$ و $f(1)$

و $f(-1)$ را بیابید و تابع را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

۹۳. کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می کند؟

(الف) $x^2 + y^2 = 1$ (ب) $|x| + |y| = 4$ (ج) $y = \begin{cases} x+2, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$

(د) $y = \begin{cases} x+2, & x < 3 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$ (ه) $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 0$

۹۴. آیا دو تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$ با هم مساوی اند؟

۹۵. کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می کند:

(الف) $x^2 + y^2 = 25$ (ب) $x = |y| + 1$ (پ) $y = |x| + 1$

پرسش های چهارگزینه ای

۹۶. کدام یک از جفت توابع زیر با هم مساوی اند؟

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-2x}{x} \\ g(x) = x-2 \end{cases} \text{ (۲)} \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-2} \\ g(x) = \sqrt{x^2-2x} \end{cases} \text{ (۱)}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3+2x^2} \\ g(x) = |x| \sqrt{x+2} \end{cases} \text{ (۴)} \quad \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3+2x^2} \\ g(x) = x\sqrt{x+2} \end{cases} \text{ (۳)}$$

۹۷. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & ; \text{ زوج } |x| \\ \frac{x^2}{2} & ; \text{ اگر } |x| \text{ فرد} \end{cases}$ باشد، مقدار عددی $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + f(-2\sqrt{2})$ کدام است؟ ([]) ،

نماد جزء صحیح است.

(۱) ۱۷ (۲) $\frac{17}{4}$ (۳) ۵ (۴) $\frac{65}{4}$

۹۸. دامنه ی تعریف $f(x) = \begin{cases} \frac{5x+1}{x+2}, & x > 0 \\ \frac{\sqrt{4-x}}{x-3}, & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) R (۲) $R - \{0\}$ (۳) $R - \{-3, 3\}$ (۴) $(2, +\infty)$

۹۹. رابطه ی $R = \{(x, y) | x, y \in Z, |x| + |y| = 2\}$ ، چند عضو زوج مرتب دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰۰. چه تعداد از روابط زیر y را تابعی بر حسب x توصیف نمی کند؟

(الف) $x^2 - 2y = |x-1| + \sqrt{y^3-2y}$ (ب) $xy = x$ (پ) $x = \sqrt{4-y^2} + \sqrt{y-2}$ (ت) $\sin y = x^2 + 3$

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

نگاه به آینده

ترمودینامیک

موضوع علم ترمودینامیک روش‌های استفاده از انرژی گرمایی برای تولید انرژی مکانیکی می‌باشد. برای این عمل از انبساط گازها استفاده می‌کنیم. می‌دانیم انبساط گازها در اثر یک مقدار گرما نسبت به بقیه حالت‌های ماده بیش‌تر است. هرگاه مقداری گاز را گرم کنیم تا منبسط شود و این انبساط را به یک پیستون ارتباط دهیم، پیستون جابه‌جا شده و از پیستون کار می‌گیریم. پس به گاز گرما داده‌ایم و از آن کار گرفته‌ایم. حالت یک مقدار گاز با سه کمیت P, V, T مشخص می‌شود و رابطه بین این سه کمیت به شکل $PV = nRT$ می‌باشد که P فشار برحسب پاسکال، V حجم بر حسب متر مکعب و n تعداد مول است و از رابطه $n = \frac{m}{M}$ به دست می‌آید که m جرم گاز و M جرم مولی گاز می‌باشد. R ثابت عمومی گازها و T دما برحسب درجه‌بندی کلوین می‌باشد. اگر جرم گاز ثابت باشد n نیز ثابت است و با تغییر

$$P, V, T \text{ مقدار } \frac{PV}{T} \text{ ثابت می‌ماند.}$$

$$PV = nRT \rightarrow nR = \frac{PV}{T} \rightarrow \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

اگر جرم گاز تغییر کند مثلاً n_1 مول از گاز A را با n_2 مول از گاز B مخلوط کنیم (گازها نسبت به هم اثر شیمیایی ندارند) رابطه‌ی بین

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_1 V_1}{T_1} + \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

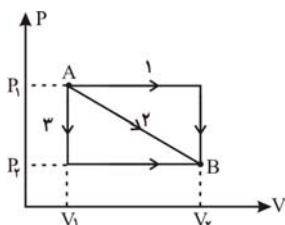
فشار و دما و حجم گازهای اولیه و مخلوط به شکل زیر می‌باشد.

وقتی گاز از وضعیت A با مشخصات P_1, V_1, T_1 به وضعیت B با مشخصات P_2, V_2, T_2 تغییر می‌کند گاز یک فرایند را طی می‌کند و

$$Q = nC_M \Delta T, W = -P \Delta V$$

مقدار کار و گرما در این فرایند از روابط مقابل به دست می‌آید.

در این روابط C_M ظرفیت گرمایی مولی گاز می‌باشد. در علم ترمودینامیک گاز داخل ظرف را دستگاه و کل محیط خارج را محیط می‌نامیم. هرگاه به دستگاه (گاز) گرما یا کار بدهیم Q, W مثبت و در غیر این صورت منفی می‌باشد. با توجه به رابطه بالا هرگاه حجم زیاد شود ($\Delta V > 0$) کارمندی و اگر ($\Delta V < 0$) کار مثبت می‌باشد. اگر نمودار فشار نسبت به حجم را رسم کنیم اندازه مساحت زیر نمودار کار دستگاه را نشان می‌دهد.



قانون اول ترمودینامیک: هرگاه گاز طی فرایندی از حالت $A(P_1, V_1, T_1)$ به حالت

$B(P_2, V_2, T_2)$ تغییر وضعیت دهد این فرایند می‌تواند در مسیرهای متفاوت انجام شود. در

شکل زیر سه مسیر احتمالی نشان داده شده است. در این سه مسیر مقدار کار و گرما متفاوت است (مساحت زیر نمودار و در نتیجه کار دستگاه فرق می‌کند) بنابراین می‌توان گفت کار و گرما به مسیر فرایند بستگی دارد، ولی جمع جبری این دو مقدار را که تغییرات انرژی درونی می‌گوییم در فرایندهای مختلف به مسیر طی شده بستگی ندارد. (قانون اول ترمودینامیک) می‌توان ثابت کرد که انرژی درونی گاز به دمای گاز بستگی دارد و برای گاز کامل تک اتمی

$$\Delta U = Q + W = \frac{3}{2} nR \Delta T$$

برابر است با:

در چهار فرایند زیر مقادیر کار و گرما و تغییرات انرژی درونی گاز محاسبه شده است.

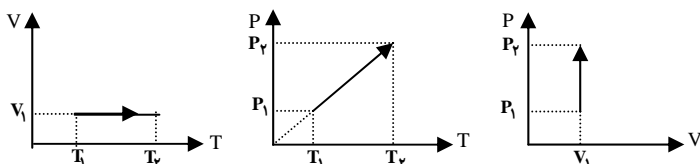
فرایند هم حجم: اگر به مقداری گاز که در یک ظرف قرارداد و درب ظرف قفل شده است (حجم ثابت است) گرما بدهیم انرژی مولکول‌های گاز افزایش می‌یابد و در نتیجه فشار گاز زیاد می‌شود. در فرایند فوق مقادیر گرما (باتوجه به ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت برای گاز کامل تک

اتمی $C_V = \frac{3}{2} nR$) و کار (با توجه به $\Delta V = 0$) و انرژی درونی و نمودارهای $P-V, P-T, V-T$ به شکل زیر می‌باشد.

$$W = -P \Delta V = 0$$

$$\Delta Q = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} nR \left(\frac{P_2 V_2}{nR} - \frac{P_1 V_1}{nR} \right) = \frac{3}{2} V \Delta P$$

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{W=0} \Delta U = \frac{3}{2} nR (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} V \Delta P$$

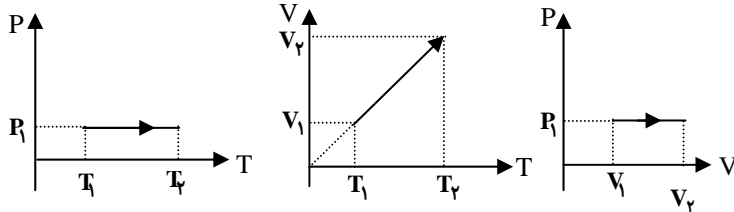


فرایند هم فشار: اگر پیستونی که روی یک ظرف گاز قرار دارد بتواند به راحتی جابه‌جا شود فشار داخل و خارج با هم برابر است و با دادن گرما به گاز آن قدر پیستون جابه‌جا می‌شود تا باز هم فشار داخل و خارج با هم برابر شوند. در این حالت گاز یک فرایند هم‌فشار را طی می‌کند. برای محاسبه مقادیر کار و گرما و تغییر انرژی درونی برای گاز کامل تک اتمی داریم:

$$\Delta W = -P\Delta V = -P(V_f - V_i) \xrightarrow{V = \frac{nRT}{P}} \Delta W = -nR(T_f - T_i) = -nR\Delta T$$

$$\Delta Q = nC_p\Delta T = \frac{5}{2}nR(T_f - T_i) = \frac{5}{2}nR\left(\frac{P_f V_f}{nR} - \frac{P_i V_i}{nR}\right) = \frac{5}{2}P(V_f - V_i) = \frac{5}{2}P\Delta V$$

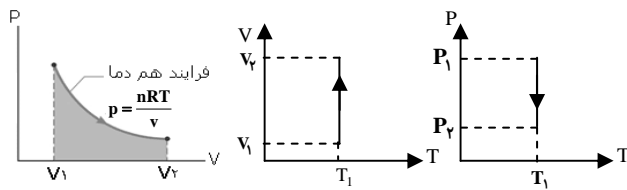
$$\Delta U = Q + W = \frac{5}{2}P\Delta V - P\Delta V = \frac{3}{2}P\Delta V = \frac{3}{2}nR\Delta T$$



فرایند هم‌دما: در این فرایند علی‌رغم این که به گاز گرما می‌دهیم دما تغییر نمی‌کند. این عمل زمانی اتفاق می‌افتد که گاز با یک چشمه گرمایی در تماس باشد. در این فرایند به علت این که تغییرات دما صفر می‌باشد تغییرات انرژی درونی نیز صفر می‌باشد.

برای محاسبه کار گرما و تغییر انرژی درونی این فرایند داریم:

$$\Delta U = 0 \rightarrow \Delta Q + \Delta W = 0 \rightarrow \Delta Q = -\Delta W$$



فرایند بی‌دررو: اگر حجم یک ظرف محتوی گاز را که کاملاً عایق بندی شده است کم یا زیاد کنیم دمای گاز تغییر می‌کند. در این فرایندها بدون این که به گاز گرما بدهیم دمای گاز تغییر می‌کند. این گونه فرایندها بی‌دررو می‌باشند و در این فرایندها داریم:

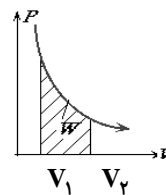
$$Q = 0, \Delta T \neq 0$$

برای محاسبه کار، گرما و تغییر انرژی درونی گاز در فرایند بی‌دررو با توجه به این که انرژی درونی گاز فقط به دمای گاز بستگی دارد، برای گاز کامل تک اتمی می‌توان نوشت:

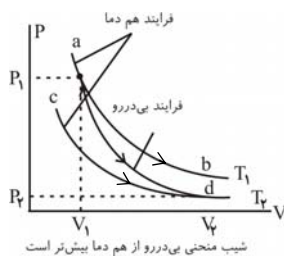
$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}nR(T_f - T_i)$$

$$\Delta Q = 0 \rightarrow \Delta U = \Delta W$$

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\left(\frac{P_f V_f}{nR} - \frac{P_i V_i}{nR}\right) = \frac{3}{2}(P_f V_f - P_i V_i)$$



نمودار فشار-حجم فرایند بی‌دررو شبیه نمودار هم‌دما



همان طور که مشاهده می‌کنید، در فرایندهای هم‌دما و بی‌دررو نمودار $P-V$ تقریباً شبیه هم می‌باشد. باید دقت کنید که علیرغم مشابهت ظاهری دو فرایند معادلات حاکم بر این دو فرایند متفاوت می‌باشد و از لحاظ ظاهری نیز شیب منحنی بی‌دررو از شیب منحنی هم‌دما بیش‌تر می‌باشد.

چرخه: هرگاه مقداری گاز که دارای شرایط اولیه $A(P_1, V_1, T_1)$ می‌باشد طی فرایندهای متفاوت باز هم به همان نقطه‌ی اولیه برگردد، گاز یک چرخه را طی کرده است. چون وضعیت ابتدایی و انتهایی گاز یکسان می‌باشد بنابراین انرژی درونی گاز در ابتدا و انتها برابر است و تغییرات انرژی درونی برابر صفر می‌باشد. کار مبادله شده بین گاز و محیط برابر با سطح محصور در زیر نمودار فشار برحسب حجم می‌باشد.

آزمون اول

پیشنهاد ما برای تدریس معلمان و مطالعه‌ی دانش‌آموزان (در کلاس یا به صورت خودآموزی)

سوال های تشریحی

متغیرهای ترمودینامیکی، معادله حالت گاز کامل

۱۲۱. تعیین کنید که در شرایط متعارفی (فشار یک اتمسفر، دمای صفر درجه سلسیوس) در اتاقی به ابعاد

$$4 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 3 \text{ m} \quad \text{چند مول هوا وجود دارد؟} \quad \left(R = 8/3 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \right)$$

۱۲۲. درون یک مخزن، ۳ مول گاز کامل با فشار ۶ اتمسفر وجود دارد. شیر مخزن را باز می‌کنیم تا یک مول

گاز خارج شود در صورت ثابت بودن دما، فشار گاز باقی‌مانده‌ی درون مخزن چند اتمسفر خواهد شد؟

۱۲۳. جرم ۸/۳ لیتر هلیوم در فشار $6 \times 10^5 \text{ Pa}$ و دمای 27°C چند گرم است؟

$$\left(M_{\text{He}} = 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, \quad R = 8/3 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \right)$$

۱۲۴. مقداری گاز کامل زیر پیستونی به وزن W و سطح مقطع $2 \cdot \text{cm}^2$ قرار دارد. وقتی وزنه‌ی $3W$ روی

پیستون قرار می‌دهیم، حجم گاز نصف می‌شود. اگر فشار هوای خارج 10^5 پاسکال باشد، با فرض

ثابت بودن دما، W چند نیوتون است؟

۱۲۵. فرایند ترمودینامیکی را تعریف کنید.

پرسش های چهارگزینه ای

۱۲۶. حجم مقدار معینی گاز کامل در فشار 10^5 Pa و دمای 27°C برابر با 1 cm^3 است. تعداد

مولکول‌های گاز کدام است؟ $\left(R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \right)$ و 6×10^{23} = عدد آووگادرو)

$$(1) \quad 2/5 \times 10^{21} \quad (2) \quad 2/5 \times 10^{19}$$

$$(3) \quad \frac{10^{23}}{24} \quad (4) \quad \frac{10^{23}}{24}$$

۱۲۷. حجم ۸ گرم گاز کامل اکسیژن در دمای 27°C و فشار ۱ اتمسفر، چند برابر حجم ۸ گرم گاز کامل

هیدروژن در دمای 300 K و فشار $1/2$ اتمسفر است؟ $\left(M_{\text{O}_2} = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \right)$ و $\left(M_{\text{H}_2} = 2 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \right)$

$$(1) \quad \frac{1}{40} \quad (2) \quad \frac{3}{40} \quad (3) \quad \frac{2}{5} \quad (4) \quad \frac{1}{20}$$

۱۲۸. در یک مخزن گاز با ظرفیت ۶۰ لیتر، مقداری گاز کامل هیدروژن با فشار 11 atm و دمای 57°C

وجود دارد. اگر با خارج شدن مقداری از این گاز، فشار و دمای گاز داخل مخزن به 4 atm و

27°C برسد، جرم گاز خارج شده چند گرم است؟ $\left(M_{\text{H}_2} = 2 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \right)$ و $\left(R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \right)$

$$(1) \quad 15 \quad (2) \quad 20 \quad (3) \quad 30 \quad (4) \quad 50$$

۱۲۹. می‌دانیم حجم یک مول اکسیژن در شرایط متعارفی (فشار یک جو و دمای صفر درجه سلسیوس)

برابر $22/4$ لیتر است. جرم $5/6$ لیتر گاز اکسیژن در فشار ۲ جو و دمای 91°C چند گرم است؟

$$(1) \quad 8 \quad (2) \quad 12 \quad (3) \quad 16 \quad (4) \quad 24$$

۱۳۰. در یک ظرف به حجم ۱۰۰ لیتر، ۸ گرم گاز کامل هیدروژن، ۱۶ گرم گاز کامل اکسیژن و ۱۴

گرم گاز کامل نیتروژن در دمای 27°C وجود دارد. با فرض عدم واکنش این گازها با یکدیگر،

فشار مخلوط گازهای داخل این مخزن، چند کیلو پاسکال است؟

$$\left(M_{\text{O}_2} = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, \quad M_{\text{H}_2} = 2 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, \quad M_{\text{N}_2} = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, \quad R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \right)$$

$$(1) \quad 60000 \quad (2) \quad 60 \quad (3) \quad 120000 \quad (4) \quad 120$$

سوال های تشریحی

فرایند هم فشار و هم حجم

۱۳۱. ۰/۲۵ مول گاز کامل تک اتمی، در فشار یک اتمسفر و دمای 27°C در اختیار است.

الف) حجم گاز را بر حسب لیتر به دست آورید.

ب) اگر در حجم ثابت دمای گاز را به 87°C برسانیم، فشار گاز چند پاسکال می شود؟

$$(R \approx 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$$

۱۳۲. حجم ۰/۵ مول از یک گاز کامل تک اتمی $8/3$ لیتر و فشار آن $1/5$ اتمسفر است اگر حجم گاز را

از طریق یک فرایند هم فشار نصف کنیم، کار و گرمای مبادله شده را برای این فرایند محاسبه کنید.

$$(C_p = \frac{5}{2}R)$$

۱۳۳. ۳۲ گرم اکسیژن در دمای 27°C و فشار 2atm را در فشار ثابت گرم می کنیم تا حجمش ۲

برابر شود.

الف) تعداد مول گاز را تعیین کنید.

ب) کار و گرمای مبادله شده در این فرایند را به دست آورید.

$$(C_p = \frac{5}{2}R, M_{O_2} = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}, R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$$

۱۳۴. ۲۰g گاز کامل H_2 با جرم مولی $2 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ را در حجم ثابت ۲۵.lit، گرم می کنیم. فشار گاز

2atm زیاد می شود گرمای داده شده به گاز و تغییر دمای گاز را به دست آورید.

$$(R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \text{ و } C_v = \frac{5}{2}R \frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$$

۱۳۵. جمله ای «در فرآیندهای ترمودینامیکی، کار به مسیر بستگی دارد.» را توضیح دهید.

۱۳۶. حجم ۰/۵ مول از یک گاز کامل تک اتمی برابر با ۸/۳ لیتر و فشار آن برابر با ۱/۵ اتمسفر است. اگر طی یک فرایند هم‌حجم، مقداری گرما به این گاز بدهیم تا فشار آن دو برابر شود، کار و گرمای مبادله شده در این فرایند به ترتیب از راست به چپ بر حسب ژول کدام است؟

$$(C_V = \frac{3}{2}R, R = 8/3 \frac{J}{mol.K})$$

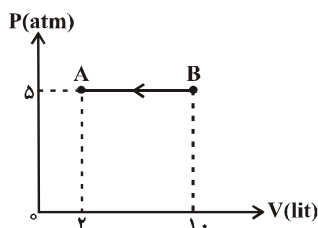
- (۱) صفر، ۳۷۳۵
 (۲) ۱۲۴۵، ۳۷۳۵
 (۳) صفر، ۱۸۶۷/۵
 (۴) ۱۸۶۷/۵، ۱۲۴۵

۱۳۷. در یک فرایند هم‌فشار، یک لیتر گاز کامل O_۲ در دمای ۳۰۰ K، مقداری گرما از دست می‌دهد و حجم آن در فشار یک اتمسفر به ۰/۹ حجم اولیه‌اش می‌رسد. دمای نهایی گاز بر حسب کلوین و کار انجام شده روی گاز بر حسب ژول، به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

- (۱) ۳۰۰ و ۲۰
 (۲) ۲۷۰ و ۱۰
 (۳) ۳۰۰ و ۱۰
 (۴) ۲۷۰ و ۲۰

۱۳۸. مطابق شکل زیر، مقدار معینی گاز کامل دو اتمی فرایند BA را طی می‌کند. طی این فرایند انرژی

$$C_P = \frac{5}{2}R$$



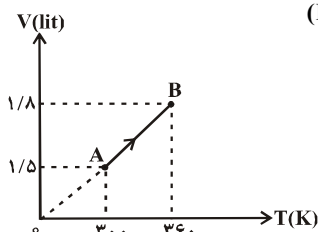
- (۱) -۴
 (۲) -۶
 (۳) -۱۰
 (۴) -۱۴

۱۳۹. کدام مطلب در مورد ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت، صحیح می‌باشد؟

- (۱) ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت، مقدار گرمایی است که در حجم ثابت به واحد جرم یک گاز داده می‌شود تا دمای آن یک کلوین بالا رود.
 (۲) ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت، مقدار گرمایی است که به یک گاز داده می‌شود، تا دمای آن یک کلوین بالا رود.
 (۳) ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت، برای گازهای تک‌اتمی، دو اتمی و چند اتمی یکسان نیست.
 (۴) هر سه گزینه صحیح است.

۱۴۰. در شکل زیر، نمودار V-T برای ۰/۵ مول گاز کامل تک اتمی رسم شده است. کار انجام شده بر

$$(R = 8 \frac{J}{mol.K})$$



- (۱) ۲۴۰
 (۲) ۱۸۰
 (۳) -۲۴۰
 (۴) -۱۸۰

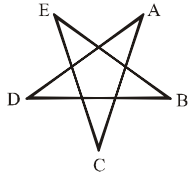
هندسه و استدلال

۳۴۱. دو زاویه A و B متمم هستند. اندازهی زاویهی A برابر $\frac{4}{9}$ اندازهی مکمل زاویهی B است. زاویهی

A چند درجه است؟

- (۱) 27° (۲) 36° (۳) 63° (۴) 72°

۳۴۲. در شکل مقابل مجموع زوایای A و B و C و D و E کدام است؟



- (۱) 180°
(۲) 270°
(۳) کم‌تر از 180°
(۴) بین 180° و 270°

۳۴۳. یکی از زوایای مثلث متساوی‌الساقینی برابر 10° است. نیم‌ساز خارجی یکی از زاویه‌ها امتداد ضلع

مقابل را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

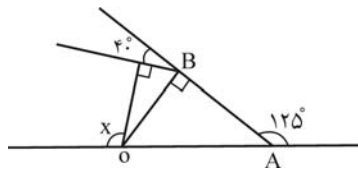
- (۱) 25° (۲) 30° (۳) 35° (۴) 40°

۳۴۴. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نیم‌ساز خارجی \hat{A} و نیم‌ساز داخلی \hat{B} در

نقطه‌ی D تلاقی دارند، طول پاره‌خط AD برابر کدام جزء مثلث است؟

- (۱) AC (۲) طول نیم‌ساز داخلی زاویهی B
(۳) BC (۴) شعاع دایره‌ی محیطی

۳۴۵. در شکل مقابل $\hat{A} = 125^\circ$ ، $\hat{B} = 40^\circ$ است، زاویهی x چند درجه است؟



- (۱) 105°
(۲) 110°
(۳) 115°
(۴) 125°

۳۴۶. در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($\hat{A} = 32^\circ, AB = AC$) قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا

نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. زاویه‌ی \hat{ADC} چند درجه است؟

- (۱) 36° (۲) 33° (۳) 37° (۴) 39°

۳۴۷. اگر در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، طول نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی B برابر طول قاعده‌ی BC

باشد، زاویه‌ی A برابر است با:

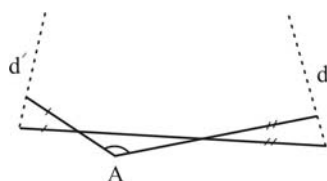
- (۱) $\frac{2\pi}{5}$ (۲) $\frac{\pi}{5}$ (۳) $\frac{3\pi}{10}$ (۴) $\frac{\pi}{10}$

۳۴۸. در مثلث ABC بر روی ضلع BC پاره‌خطهای $BM = BA$ و $CN = CA$ را جدا می‌کنیم، اگر

زاویه $\hat{A} = 72^\circ$ باشد، زاویه \hat{MAN} چند درجه است؟

- (۱) 54° (۲) 52° (۳) 48° (۴) 42°

۳۴۹. در شکل زیر دو مثلث کناری متساوی‌الساقین‌اند. زاویه‌ی $\hat{A} = 10^\circ$ ، دو خط d و d' با زاویه‌ی



چند درجه متقاطع‌اند؟

- (۱) 20° (۲) 40°
(۳) 45° (۴) 50°

۳۵۰. در مثلث قائم‌الزاویه‌ای زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر برابر 26° است. کوچک‌ترین

زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟

- ۲۴ (۱) ۲۸ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴)

۳۵۱. کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) اگر در یک چهارضلعی قطرهای یک‌دیگر را نصف کنند، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.
 (۲) اگر در یک چهارضلعی قطرهای با یک‌دیگر برابر باشند، چهار ضلعی مستطیل است.
 (۳) اگر در یک چهارضلعی قطرهای بر هم عمود باشند، چهار ضلعی لوزی است.
 (۴) اگر در یک چهارضلعی اضلاع برابر باشند، چهار ضلعی مربع است.

۳۵۲. تعداد قطرهای یک چندضلعی محدب از تعداد اضلاع آن ۴۲ واحد بیش‌تر است، تعداد قطرهای کدام

است؟

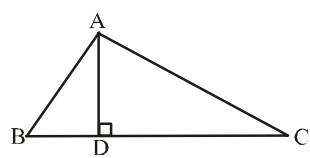
- ۴۵ (۱) ۴۸ (۲) ۵۲ (۳) ۵۴ (۴)

۳۵۳. در صفحه‌ی یک مثلث، چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آن‌ها به یک

فاصله باشد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

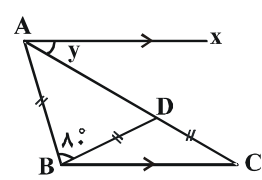
۳۵۴. در شکل زیر $\frac{CD}{AD} = \sqrt{3}$ ، $\frac{AC}{AD} = 2$ ، $\frac{AB}{AD} = \sqrt{2}$ ، زاویه‌ی \hat{BAC} چند برابر زاویه‌ی



\hat{ACD} است؟

- ۳ (۱) ۲ (۲)
 $\frac{7}{3}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴)

۳۵۵. مطابق شکل زیر اگر $Ax \parallel BC$ ، $\hat{ABD} = 8^\circ$ و $AB = BD = DC$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی y کدام است؟



- ۲۰° (۱)
 ۲۵° (۲)
 ۳۰° (۳)
 ۳۵° (۴)

۳۵۶. چه تعداد از عبارتهای زیر شرط کافی برای هم‌نهشتی دو مثلث است؟

- (الف) اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند.
 (ب) اگر سه زاویه از مثلثی با سه زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث هم‌نهشت هستند.
 (ج) اگر محیط مثلثی با محیط مثلث دیگر برابر باشد، دو مثلث هم‌نهشت هستند.
 (د) اگر مساحت مثلثی با مساحت مثلث دیگر برابر باشد، دو مثلث هم‌نهشت هستند.

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۵۷. چه تعداد از شکل‌های زیر (حروف الفبای انگلیسی مشخص شده) خم ساده‌ی بسته هستند؟

- P, S, D, C, B, A ۱ (۲) صفر (۱)
 ۳ (۴) ۲ (۳)

۳۵۸. در مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ ، روی ضلع AC و روی امتداد ضلع AB (از

سمت B)، به ترتیب نقاط D و E را طوری در نظر می‌گیریم که $BE = CD$ باشد. اگر DE ،

قاعده‌ی BC را در نقطه‌ی F قطع کند، کدام گزینه درست است؟

- $DC = 2BF$ (۴) $BF = DF$ (۳) $DF = FE$ (۲) $DF = \frac{1}{2}AB$ (۱)

نگاه به گذشته

۸۰- گزینهی «۳» چون $x \leq 0$ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$x = -(\sqrt{-x})^2 \Rightarrow (\sqrt{-x})^2 + 3\sqrt{-x} + 18 > 0 \Rightarrow (\sqrt{-x})^2 - 3\sqrt{-x} - 18 < 0 \Rightarrow (\sqrt{-x} - 6)(\sqrt{-x} + 3) < 0$$

عبارت $\sqrt{-x} + 3$ همواره مثبت است. بنابراین:

$$\sqrt{-x} - 6 < 0 \Rightarrow \sqrt{-x} < 6 \Rightarrow -x < 36 \Rightarrow x > -36$$

پس اعداد صحیح منفی متعلق به مجموعه‌ی جواب نامعادله عبارت‌اند از: $\{-35, -34, \dots, -1\}$

۸۱- مجموعه‌ی A یعنی دامنه‌ی تابع پس: $4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow A = [-2, 2]$

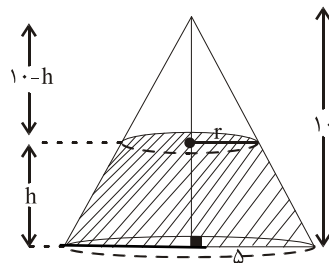
۸۲- سطح جانبی یعنی سطح مقطع و سطح بالایی آکواریوم را در نظر بگیریم فقط سطح‌های چهار مستطیل اطراف آکواریوم را با هم جمع می‌کنیم.

$$S = 1 \cdot y + 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot x = 2 \cdot (x + y)$$

اما حجم مکعب مستطیل ۱۰۰۰ واحد مکعب است و از آن‌جا که $V = 1 \cdot xy$ پس:

$$1000 = 1 \cdot xy \Rightarrow xy = 1000 \Rightarrow y = \frac{1000}{x} \Rightarrow S = 2 \cdot \left(x + \frac{1000}{x}\right) = 2 \cdot x + \frac{2000}{x}$$

۸۳- رابطه‌ی تالس: $\frac{r}{\delta} = \frac{10-h}{10} \Rightarrow 10 \cdot r = \delta \cdot (10-h) \Rightarrow r = \delta - \frac{1}{2}h$



$$\text{حجم هاشور خورده} = \text{حجم مخروط کوچک بالا} - \text{حجم کل مخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 (10-h) - \frac{1}{3} \pi (5)^2 (10)$$

$$\text{حجم هاشور خورده} = \frac{25 \cdot \pi}{3} - \frac{1}{3} \pi \left(\delta - \frac{1}{2}h\right)^2 (10-h)$$

$$\text{حجم هاشور خورده} = \frac{\pi}{12} (1000 - (10-h)^3) = \frac{\pi}{12} h(h^2 - 3 \cdot h + 30)$$

۸۴- با توجه به شکل قطر بزرگ لوزی برابر طول مستطیل و قطر کوچک آن برابر عرض مستطیل است. اگر d_1 و d_2 به ترتیب قطر بزرگ و کوچک لوزی باشند، داریم:

$$S = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$

از طرفی اگر فرض کنیم طول مستطیل برابر L باشد، داریم:

$$P_{\text{مستطیل}} = 2(L + W) = 40 \Rightarrow L + W = 20 \Rightarrow L = 20 - W$$

$$d_1 = L, d_2 = W$$

$$\Rightarrow S_{\text{لوزی}} = \frac{1}{2} L \times W = \frac{1}{2} (20 - W) \times W = 10 \cdot W - \frac{1}{2} W^2$$

۸۵- اگر عدد کوچک‌تر را x و عدد بزرگ‌تر را y فرض کنیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} D &= xy \\ y - x &= 12 \Rightarrow y = x + 12 \end{aligned} \right\} D = x \times (x + 12) \Rightarrow D = x^2 + 12x$$

۸۶- گزینه‌ی «۳» مجموعه‌ی B، باید مجموعه‌ای انتخاب شود که $R_f \subseteq B$ ، لذا برد تابع را می‌یابیم:

$$x \geq 2 \rightarrow x - 1 \geq 1 \rightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \rightarrow \sqrt{x-1} + 1 \geq 2 \rightarrow f(x) \geq 2 \rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

بنابراین برای مجموعه‌ی B، گزینه‌ی (۳) می‌تواند باشد.

$$|x+1|+|x-3|-6 \geq 0$$

۸۷- گزینهی «۱» باید زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

با توجه به ریشه‌های داخل قدرمطلق ضابطه‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{cases} x < -1: -x-1-x+3-6 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \Rightarrow (-\infty, -2] \\ -1 \leq x \leq 3: x+1-x+3-6 \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0 \quad \text{غیرممکن} \\ x > 3: x+1+x-3-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow [4, +\infty) \end{cases}$$

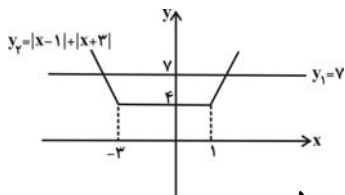
$$D_y = \mathbb{R} - (-2, 4)$$

از اجتماع جواب‌ها خواهیم داشت:

$$f(x) = \sqrt{|x-1|+|x+3|}-7$$

۸۸- گزینهی «۴»

$$|x-1|+|x+3|-7 \geq 0 \Rightarrow |x-1|+|x+3| \geq 7$$



نمودارهای $y_2 = |x-1|+|x+3|$ و $y_1 = 7$ را رسم می‌کنیم.

ابتدا مقادیری از x را می‌یابیم که در آن $y_2 < y_1$ است.

اگر $-3 < x < 1$ باشد، همواره $y_2 < y_1$ است.

اگر $x \geq 1$ باشد، $y_2 = 2x+2$ بنابراین داریم:

$$y_2 < y_1 \Rightarrow 2x+2 < 7 \Rightarrow x < \frac{5}{2} \xrightarrow{x \geq 1} x = \{1, 2\}$$

اگر $x \leq -3$ باشد، $y_2 = -2x-2$ ، بنابراین داریم:

$$-2x-2 < 7 \Rightarrow -2x < 9 \Rightarrow x > -4 \frac{1}{2} \xrightarrow{x \leq -3} x = \{-3, -4\}$$

بنابراین هفت مقدار صحیح $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ در دامنه‌ی تابع قرار نمی‌گیرد.

۸۹- گزینهی «۳»

$$\left. \begin{cases} x > \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 2 \\ -2 < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x^2 < 4 \end{cases} \right\} \text{اجتماع} \rightarrow R_f = [0, 4)$$

پس برد تابع شامل چهار عدد صحیح است.

$$S = \frac{xy}{2} = 4 \Rightarrow y = \frac{8}{x}$$

۹۰- گزینهی «۲»

$$\text{اندازه‌ی وتر} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{8}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{64}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 64}{x^2}}$$

$$D_f: \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \quad \text{(الف)}$$

۹۱-

$$D_g: x-1 \geq 0, x+1 > 0 \Rightarrow [1, +\infty) \cap (-1, +\infty) = [1, +\infty)$$

$\Rightarrow D_f \neq D_g$ پس دو تابع مساوی نیستند.

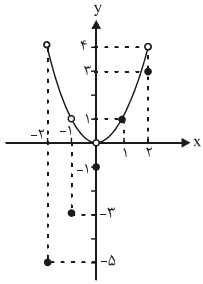
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
1-x	+	+	0	-
x+1	-	0	+	+
$\frac{1-x}{x+1}$	-	+	0	-

$$\frac{1-x}{x+1} \geq 0 \Rightarrow D_f = (-1, 1] \quad \text{(ب)}$$

$$D_g: 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1, \quad x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow (-\infty, 1] \cap (-1, +\infty) = (-1, 1] \Rightarrow D_f = D_g$$

$$\forall x \in (-1, 1]: f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}} = g(x)$$

دامنه‌ها برابرند و دو تابع برابرند.



$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \in \mathbb{Z} \\ x^2, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$f(0) \stackrel{0 \in \mathbb{Z}}{=} 2 \times 0 - 1 = -1 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \stackrel{\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{نمودار } f \text{ در } [-2, 2]$$

$$f(1) \stackrel{1 \in \mathbb{Z}}{=} 2 \times 1 - 1 = 1 \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}}{=} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) \stackrel{-1 \in \mathbb{Z}}{=} 2 \times (-1) - 1 = -3$$

توجه داشته باشید نمودار x^2 در نقاط به طول صحیح (به غیر از $x=1$) توخالی است و نقاط توپر روی خط $y=2x-1$ قرار دارند (چرا؟)

$$x^2 + y^2 = 1, x=0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1, y = -1 \quad \text{الف)}$$

به ازای $x=0$ دو مقدار برای y به دست آمد پس رابطه‌ی فوق تابع نیست.

$$|x| + |y| = 4, x=0 \Rightarrow |y| = 4 \Rightarrow y = 4, y = -4 \quad \text{ب)}$$

تابع نیست

$$y = \begin{cases} x+2, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{ج)}$$

هر کدام از ضابطه‌ها تابع هستند و دامنه‌ها اشتراک ندارند پس y یک تابع است.

$$y = \begin{cases} x+2, & x < 3 \\ x-1, & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{د)}$$

دامنه‌ها اشتراک دارند. یک نقطه از اشتراک مثل $3/5$ را انتخاب می‌کنیم. برای $3/5$ دو مقدار y داریم:

$$y(3/5) = 4/5, \quad y(3/5) = 1/5$$

پس رابطه‌ی فوق تابع نیست.

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 0 \Rightarrow x-2=0, y+4=0 \Rightarrow x=2, y=-4 \Rightarrow f = \{(2, -4)\} \quad \text{ه)}$$

بنابراین رابطه‌ی فوق یک تابع است. توجه کنید اگر جمع چند عبارت نامنفی صفر شود باید هر یک از آن‌ها مساوی صفر باشند

(چرا؟)

دو تابع f و g زمانی با هم مساویند، که اولاً دامنه‌ی دو تابع برابر باشد. ثانیاً ضابطه‌ی دو تابع به ازای تمام مقادیر دامنه با هم برابر باشند.

در این سؤال دامنه‌ی هر دو تابع برابر R است. در مورد ضابطه‌ی $g(x)$ داریم:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} \frac{x(x-2)}{x-2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

بنابراین دو تابع با هم برابرند.

یک معادله‌ی y برحسب x زمانی تابع است که به ازای هر مقدار x حداکثر یک مقدار را برای y نتیجه شود.

الف) $x^2 + y^2 = 25 \quad x=0 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5$

ب) $x = |y| + 1 \quad x=2 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

پ) $y = |x| + 1$

فقط ضابطه‌ی (ب) تابع است چون به ازای هر x ، فقط یک مقدار برای y به دست می‌آید.

۹۶- گزینهی «۴»

$$\text{گزینهی «۱» : } \begin{cases} D_f = [2, +\infty) \\ D_g = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$$\text{گزینهی «۲» : } \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

$$\text{گزینهی «۳» : } D_f = D_g = [-2, +\infty)$$

$$\begin{cases} f(-1) = 1 \\ g(-1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \neq g(-1)$$

$$\text{گزینهی «۴» : } \begin{cases} D_f = D_g = [-2, +\infty) \\ f(x) = \sqrt{x^2(x+2)} = |x| \sqrt{x+2} = g(x) \end{cases}$$

۹۷- گزینهی «۲»

$$[-\frac{\sqrt{2}}{2}] = -1: \text{ فرد} \Rightarrow f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2} = \frac{1}{4}$$

$$[-2\sqrt{2}] = -3: \text{ فرد} \Rightarrow f(-2\sqrt{2}) = \frac{(-2\sqrt{2})^2}{2} = 4 \Rightarrow 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

۹۸- گزینهی «۲»

در ضابطه‌ی بالا، تابع در $x = -2$ تعریف نمی‌شود با توجه به این که در ضابطه‌ی بالا $x > 0$ است. پس دامنه‌ی ضابطه‌ی بالا $x > 0$ است.

در ضابطه‌ی پایین، باید $4 - x > 0$ و $x < 4$ ، با توجه به این که $x < 0$ است لذا دامنه‌ی ضابطه‌ی پایین همان $x < 0$ است. اما تابع در $x = 0$ تعریف نشده است پس:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

۹۹- گزینهی «۴»

از تساوی $|x| + |y| = 2$ ؛ $x, y \in \mathbb{Z}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که مجموع دو عدد صحیح نامنفی برابر ۲ شده است و این در صورتی امکان‌پذیر است که یکی از حالات زیر رخ دهد:

$$|x| = 0, |y| = 2 \rightarrow (0, 2), (0, -2) \in \mathbb{R}$$

$$|x| = 1, |y| = 1 \rightarrow (1, 1), (-1, -1), (-1, 1), (1, -1) \in \mathbb{R}$$

$$|x| = 2, |y| = 0 \rightarrow (2, 0), (-2, 0) \in \mathbb{R}$$

پس رابطه‌ی \mathbb{R} دارای ۸ عضو است.

۱۰۰- گزینهی «۲»

$$x = \sqrt{4-y^2} + \sqrt{y-2} \Rightarrow \begin{cases} 4-y^2 \geq 0 \Rightarrow |y| \leq 2 \\ y-2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} y = 2$$

تابع شامل یک نقطه: $y = 2 \Rightarrow x = 0$

$$|x-1| + \sqrt{y^3-2y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y^3 - 2y = 0 \Rightarrow y(y^2-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases} \text{ به‌ازای یک } x, \text{ سه } y \text{ داریم، پس تابع نیست.}$$

$$\sin y = x^2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \sin y \leq 1 \\ x^2 + 3 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع تهی است.}$$

$$xy - x = 0 \Rightarrow x(y-1) = 0$$

اگر $x = 0$ باشد، y هر مقداری می‌تواند داشته باشد، بنابراین تابع نیست.

پاسخ تشریحی فیزیک (۳) ریاضی

$$V = 4 \times 3 \times 3 = 36 \text{ m}^3$$

$$PV = nRT \Rightarrow 1 \times 10^5 \times 36 = n \times 8 / 3 \times 273 \Rightarrow n \approx 1589 \text{ mol}$$

-۱۲۱

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{n_1 T_1}{n_2 T_2} \xrightarrow{T_2=T_1} \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

-۱۲۲

$$V_2 = V_1$$

یادآوری: چون رابطه، مقایسه‌ای است، پس نیازی به تبدیل یکا به SI نیست.

$$\frac{6 \times V_1}{P_2 \times V_1} = \frac{3}{2} \Rightarrow P_2 = \frac{2 \times 6}{3} = 4 \text{ atm}$$

$$PV = nRT \Rightarrow 6 \times 10^5 \times 8 / 3 \times 10^{-3} = n \times 8 / 3 \times 300 \Rightarrow n = 2 \text{ mol}$$

-۱۲۳

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow 2 = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 8 \text{ g}$$

$$A = 2 \cdot \text{cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad V_2 = \frac{1}{2} V_1 \quad P_0 = 10^5 \text{ Pa} \quad T = \text{مقدار ثابت} \quad W = ? \text{ N}$$

-۱۲۴

$$P_1 = P_0 + P_{\text{وزنه}} \rightarrow P_1 = 10^5 + \frac{W}{2 \cdot 10^{-4}} \quad (1)$$

$$P_2 = P_0 + P'_{\text{وزنه}} \rightarrow P_2 = 10^5 + \frac{W + 3W}{2 \cdot 10^{-4}} \quad (2)$$

$$T_1 = T_2 \Rightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2 \rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2} \rightarrow P_2 = 2P_1 \quad (3)$$

$$(3) \text{ و } (2) \text{ و } (1) \Rightarrow 10^5 + \frac{4W}{2 \cdot 10^{-4}} = 2 \times \left(10^5 + \frac{W}{2 \cdot 10^{-4}} \right) \Rightarrow \frac{2W}{2 \cdot 10^{-4}} = 10^5 \rightarrow W = \frac{2 \cdot 10^{-4} \times 10^5}{2} \Rightarrow W = 10 \text{ N}$$

هنگامی که دستگاه از یک حالت به حالت دیگر می‌رود، می‌گوییم که یک فرایند ترمودینامیکی انجام شده است.

-۱۲۵

-۱۲۶ گزینیه «۲»

با استفاده از معادله‌ی حالت گازهای کامل، ابتدا تعداد مول‌های موجود در گاز کامل را حساب می‌کنیم. داریم:

$$PV = nRT \xrightarrow{P=10^5 \text{ Pa}, T=273+27=300 \text{ K}} \xrightarrow{V=1 \text{ cm}^3=10^{-6} \text{ m}^3, R=8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}}$$

$$10^5 \times 10^{-6} = n \times 8 \times 300 \Rightarrow n = \frac{1}{24 \times 10^3} \text{ mol}$$

در هر مول گاز کامل، به اندازه‌ی عدد آووگادرو یعنی 6×10^{23} مولکول از آن گاز کامل وجود دارد، بنابراین تعداد مولکول‌های موجود در این گاز کامل برابر است با:

$$\text{تعداد مولکول‌ها} = \frac{6 \times 10^{23}}{24 \times 10^3} = 2.5 \times 10^{19}$$

۷۵ درصد دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ دادند و ۶۸ درصد پاسخ‌شان صحیح بود

-۱۲۷ گزینیه «۲»

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow \begin{cases} n_{O_2} = \frac{\lambda}{32} = \frac{1}{4} \text{ mol} \\ n_{H_2} = \frac{\lambda}{2} = 4 \text{ mol} \end{cases}$$

ابتدا تعداد مول‌های اکسیژن و هیدروژن را حساب می‌کنیم:

از معادله‌ی حالت گاز کامل می‌توان نوشت:

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P_{O_2} V_{O_2}}{P_{H_2} V_{H_2}} = \frac{n_{O_2} T_{O_2}}{n_{H_2} T_{H_2}} \Rightarrow \frac{1 \times V_{O_2}}{1/2 \times V_{H_2}} = \frac{1 \times (273 + 27)}{4 \times 300} \Rightarrow \frac{V_{O_2}}{V_{H_2}} = \frac{3}{4}$$

۴۴ درصد دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ دادند و ۳۵ درصد پاسخ‌شان صحیح بود

۱۲۸- گزینهی «۳» در ابتدا با استفاده از معادله‌ی حالت گاز کامل، تعداد مول‌های موجود در هر مرحله را تعیین کرده و با استفاده از تفاوت تعداد آن‌ها، جرم گاز خارج شده را به صورت زیر می‌یابیم:

$$n_1 = \frac{P_1 V}{RT_1} \quad P_1 = 11 \times 10^5 \text{ Pa}, V = 6 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}, T_1 = 273 + 57 = 330 \text{ K}$$

$$n_1 = \frac{11 \times 10^5 \times 6 \times 10^{-3}}{8 \times 330} \Rightarrow n_1 = 25 \text{ mol}$$

$$n_2 = \frac{P_2 V}{RT_2} \quad P_2 = 4 \times 10^5 \text{ Pa}, V = 6 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}, T_2 = 273 + 27 = 300 \text{ K}$$

$$n_2 = \frac{4 \times 10^5 \times 6 \times 10^{-3}}{8 \times 300} \Rightarrow n_2 = 1 \text{ mol}$$

تعداد مول‌های خارج شده: $n = n_1 - n_2 \Rightarrow n = 15 \text{ mol}$

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow m = nM = 15 \times 2 \Rightarrow m = 30 \text{ g}$$

۱۵ درصد دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ دادند و ۷ درصد پاسخ‌شان صحیح بود

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P'V'}{PV} = \frac{n'T'}{nT} \Rightarrow \frac{2 \times 5 / 6}{1 \times 22 / 4} = \frac{n' \times (273 + 91)}{1 \times (273 + 0)} \Rightarrow n' = \frac{273}{2 \times 364}$$

۱۲۹- گزینهی «۲»

از طرف دیگر می‌دانید که تعداد مول‌های m گرم از یک گاز با جرم مولی M برابر است با:

$$n = \frac{m}{M} \Rightarrow \frac{273}{2 \times 364} = \frac{m}{32} \Rightarrow m = 12 \text{ g}$$

۱۳۰- گزینهی «۴» با توجه به این که تعداد مول‌های مخلوط گازها، برابر با مجموع تعداد مول‌های اجزای تشکیل‌دهنده‌ی آن می‌باشد (فرض عدم واکنش گازها با هم) و با استفاده از معادله‌ی حالت گازهای کامل، می‌توان نوشت:

$$n_{\text{کل}} = n_{O_2} + n_{H_2} + n_{N_2}$$

$$n_{\text{کل}} = \frac{P_{\text{کل}} V_{\text{کل}}}{RT_{\text{کل}}} \Rightarrow \frac{P_{\text{کل}} V_{\text{کل}}}{RT_{\text{کل}}} = n_{O_2} + n_{H_2} + n_{N_2}$$

$$\Rightarrow P_{\text{کل}} = \frac{RT_{\text{کل}}}{V_{\text{کل}}} (n_{O_2} + n_{H_2} + n_{N_2})$$

$$\frac{n}{M} \Rightarrow P_{\text{کل}} = \frac{8 \times (27 + 273)}{100 \times 10^{-3}} \times \left(\frac{16}{32} + \frac{8}{2} + \frac{14}{28} \right)$$

$$\Rightarrow P_{\text{کل}} = \frac{8 \times 300}{100} \times 5 = 12000 \text{ Pa} \Rightarrow P_{\text{کل}} = 120 \text{ kPa}$$

۳۵ درصد دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ دادند و ۷ درصد پاسخ‌شان صحیح بود

۱۳۱-

$$\frac{pV}{T} = nR \Rightarrow \frac{1 \times 10^5 \times v}{300} = \frac{25}{100} \times 8 \Rightarrow v = 6 \times 10^{-3} = 6 \text{ lit} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \frac{1 \times 10^5}{300} = \frac{p_2}{360} \Rightarrow p_2 = 1/2 \times 10^5 \text{ pa}$$

(ب) فرایند حجم ثابت است داریم:

کار و گرما در فرآیندهای هم‌فشار به صورت زیر محاسبه می‌شود.

۱۳۲-

$$W = -P\Delta V = -1/5 \times 10^5 (4/15 \times 10^{-3} - 8/3 \times 10^{-3}) = +622/5 \text{ J}$$

$$Q = nC_{MP}\Delta T = nC_{MP}(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} nR \left(\frac{P_2 V_2}{nR} - \frac{P_1 V_1}{nR} \right) = \frac{5}{2} P\Delta V$$

$$Q = \frac{5}{2} \times 1/5 \times 10^5 (4/15 \times 10^{-3} - 8/3 \times 10^{-3}) = -1556/25 \text{ J}$$

علامت‌های کار و گرما نشان‌دهنده این است که در این فرآیند بر روی گاز کار انجام شده و از آن گرما گرفته‌ایم.

$$M_{O_2} = 32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

(الف)

-۱۳۳

$$m = 32\text{g} \rightarrow n = \frac{m}{M} = \frac{32}{32} = 1 \text{ mol}$$

$$\theta_1 = 27^\circ\text{C} \rightarrow T_1 = 273 + 27 = 300 \text{ K}$$

(ب)

$$P_1 = P_2 = 2 \times 10^5 \text{ Pa} \quad V_2 = 2V_1 \quad T_2 = ?$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \xrightarrow{P \text{ ثابت}} \frac{V_1}{T_1} = \frac{2V_1}{T_2} \Rightarrow \frac{1}{300} = \frac{2}{T_2} \Rightarrow T_2 = 600 \text{ K}$$

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{1 \times 8.314 \times 300}{2 \times 10^5} = 12 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 12 \text{ Lit} \quad V_2 = 2V_1 = 2 \times 12 = 24 \text{ Lit}$$

$$W = -P\Delta V = -2 \times 10^5 (24 - 12) \times 10^{-3} = -2400 \text{ J} \quad \text{و} \quad Q = nC_p \Delta T = 1 \times \left(\frac{5}{2} \times 8\right) \times (600 - 300) = 8400 \text{ J}$$

$$m = 20 \text{ g} \quad M = 20 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad V_1 = V_2 = 25 \text{ Lit} = 25 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

-۱۳۴

$$C_V = \frac{5}{2} R \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \quad Q = ? \text{ J} \quad \Delta T = ? \text{ K}$$

$$PV = nRT \rightarrow T = \frac{PV}{nR}$$

$$Q = nC_V \Delta T \xrightarrow{C_V = \frac{5}{2} R} Q = n \left(\frac{5}{2} R\right) (T_2 - T_1) \xrightarrow{T = \frac{PV}{nR}} Q = n \left(\frac{5}{2} R\right) \left(\frac{P_2 V}{nR} - \frac{P_1 V}{nR}\right)$$

$$Q = \frac{5}{2} V (P_2 - P_1)$$

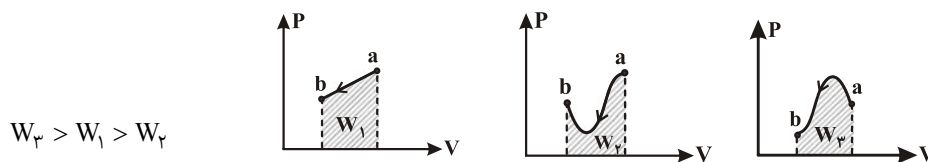
$$Q = \frac{5}{2} \times (25 \times 10^{-3}) \times (10^5 - 10^6) = 12500 \text{ J}$$

$$\Delta T = ? \text{ K}, \quad Q = nC_V \Delta T \rightarrow \Delta T = \frac{Q}{nC_V}, \quad n = \frac{m}{M} = \frac{20}{20} = 1 \text{ mol}$$

$$\Delta T = \frac{12500}{1 \times \left(\frac{5}{2} \times 8\right)} = \frac{12500}{10 \times 20} = 62.5 \text{ K}$$

در یک فرآیند ترمودینامیکی، کار به مسیر فرآیند انجام شده بین دو حالت بستگی دارد. به نمودارهای داده شده توجه کنید: با وجود آن که در سه نمودار مختصات ترمودینامیکی (فشار - حجم - دما) حالت اولیه و ثانویه دستگاه یکسان است ولی سطح زیر نمودار که برابر کار انجام شده بر روی دستگاه می‌باشد یکسان نیست.

-۱۳۵



$$W_3 > W_1 > W_2$$

گزینه‌ی «۳» کار انجام شده در یک فرآیند هم‌حجم برابر صفر است. برای محاسبه‌ی گرمای مبادله شده، داریم:

-۱۳۶

$$Q_V = nC_V \Delta T = \frac{3}{2} nR \Delta T$$

$$\xrightarrow{nR \Delta T = \Delta(PV)} Q_V = \frac{3}{2} \Delta(PV) \xrightarrow{V \text{ ثابت}} \frac{3}{2} V \Delta P \Rightarrow Q_V = \frac{3}{2} \times 8 \times 10^{-3} \times (3 - 1/5) \times 10^5 = 1867/5 \text{ J}$$

۳۵ درصد دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ دادند و ۶۵ درصد پاسخ‌شان صحیح بود

۱۳۷- گزینه‌ی «۲»

از معادله‌ی حالت گاز کامل برای مقدار معینی گاز کامل، داریم:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \xrightarrow{P_1=P_2, \text{ ثابت}} \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{1}{300} = \frac{0.9}{T_2} \Rightarrow T_2 = 270 \text{ K}$$

$$W_p = -P\Delta V = -1 \times 10^5 \times (0.9 - 1) \times 10^{-3} = 10 \text{ J}$$

۴۶ درصد دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ دادند و ۳۹ درصد پاسخ‌شان صحیح بود

۱۳۸- گزینه‌ی «۳»

فرایند BA هم فشار است و می‌توان نوشت:

$$\Delta U = Q + W = nC_p \Delta T - P\Delta V$$

$$C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R, P = \text{ثابت} \Rightarrow \frac{C_p}{nR\Delta T} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P\Delta V}{R} - P\Delta V$$

$$\Delta U = \frac{5}{2} P\Delta V = \frac{5}{2} \times 5 \times 10^5 \times (-8 \times 10^{-3}) \Rightarrow \Delta U = -1000 \text{ J} = -1 \text{ kJ}$$

۴۷ درصد دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ دادند و ۳۱ درصد پاسخ‌شان صحیح بود

۱۳۹- گزینه‌ی «۳»

ظرفیت گرمایی مولی در حجم ثابت (C_V) مقدار گرمایی است که در حجم ثابت به یک مول از یک گاز داده می‌شود تا دمای آن یک کلوین بالا رود. با تقریب خوبی می‌توان نشان داد که C_V به جنس گاز بستگی ندارد و برای گازهای تک‌اتمی

$$\frac{3}{2} R, \text{ گازهای ۲ اتمی } \frac{5}{2} R \text{ و گازهای چنداتمی } \frac{\gamma}{2} R \text{ می‌باشد، بنابراین فقط گزینه‌ی «۳» صحیح است.}$$

۱۴۰- گزینه‌ی «۳»

چون امتداد نمودار $V-T$ از مبدأ مختصات عبور کرده است، فرایند AB یک فرایند هم‌فشار است. بنابراین کار انجام شده در این فرایند به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$W = -P\Delta V \xrightarrow{P\Delta V = nR\Delta T} W = -nR(T_B - T_A)$$

$$\begin{aligned} T_B &= 360 \text{ K}, T_A = 300 \text{ K} \\ n &= 0.5 \text{ mol}, R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \end{aligned}$$

$$W = -0.5 \times 8 \times (360 - 300) \Rightarrow W = -240 \text{ J}$$

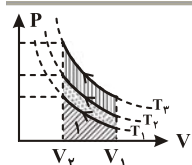
۴۰ درصد دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ دادند و ۲۹ درصد پاسخ‌شان صحیح بود

در فرآیند بی‌دررو $Q = 0$ است. با توجه به این که کار بر روی محیط انجام شده $W = -500 \text{ J}$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U = 0 - 500 \Rightarrow \Delta u = -500 \text{ J}$$

۱۴۱

در فرایند هم‌دمای هر چه دما بیشتر باشد سطح زیر نمودار بیشتر است، چون سطح زیر نمودار $P = V$ متناسب با اندازه‌ی کار انجام شده است پس اختلاف آن‌ها نماینده‌ی تفاوت کار است.



$$W_1 < W_2 < W_3$$

۱۴۲

انرژی درونی گاز طی انجام فرایند تراکم بی‌دررو افزایش می‌یابد. برای مقدار معینی گاز کامل، انرژی درونی گاز فقط تابع دمای مطلق گاز است. بنابراین با افزایش انرژی درونی گاز می‌توان نتیجه گرفت که دمای مطلق گاز نیز افزایش یافته است.

۱۴۳

$$\Delta U = Q + W \xrightarrow{Q=0, W>0} \Delta U = W > 0$$

$$\Rightarrow U_2 > U_1 \Rightarrow T_2 > T_1$$

$$T = \frac{PV}{nR} \xrightarrow{T_2 > T_1} \frac{P_2 V_2}{nR} > \frac{P_1 V_1}{nR} \Rightarrow P_2 V_2 > P_1 V_1$$

طبق معادله‌ی حالت گاز کامل داریم:

$$\xrightarrow{V_2 = \frac{1}{2} V_1} P_2 > 2P_1$$

۳۴۱- گزینهی «۴»

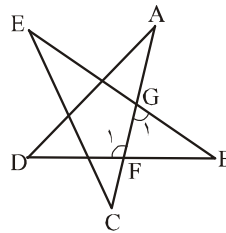
$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} &= 90^\circ \\ \hat{A} &= \frac{4}{9}(180^\circ - \hat{B}) = 80^\circ - \frac{4}{9}\hat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 80^\circ - \frac{4}{9}\hat{B} + \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \frac{5}{9}\hat{B} = 10^\circ \Rightarrow \hat{B} = 18^\circ \Rightarrow \hat{A} = 72^\circ$$

۳۴۲- گزینهی «۱»

$$\left. \begin{aligned} \Delta ADF: \hat{A} + \hat{D} + \hat{F}_1 &= 180^\circ \\ \hat{F}_1 &\Rightarrow \hat{F}_1 = \hat{G}_1 + \hat{B} \end{aligned} \right\} \text{زاویه خارجی مثلث FBG است}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{D} + \hat{G}_1 + \hat{B} &= 180^\circ \\ \hat{G}_1 &\Rightarrow \hat{G}_1 = \hat{E} + \hat{C} \end{aligned} \right\} \text{زاویه خارجی مثلث ECG است}$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{D} + \hat{E} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

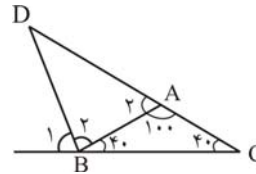


۳۴۳- گزینهی «۲» زاویهی 10° نمی‌تواند زاویه ساق‌ها با قاعده باشد، زیرا آن‌ها با هم برابرند و در نتیجه مجموع آن‌ها از 180° بیش‌تر خواهد شد، پس زاویه رأس مثلث متساوی‌الساقین 10° است.

$$\hat{A} = 100^\circ \Rightarrow \hat{A}_\gamma = 80^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{C} = 40^\circ \Rightarrow \hat{B} \text{ زاویه خارجی } = 140^\circ \xrightarrow{\text{نیم‌ساز } BD} \hat{B}_1 = \hat{B}_\gamma = 70^\circ$$

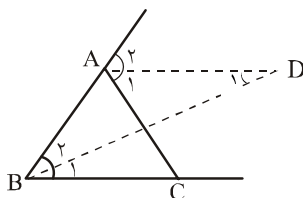
$$\hat{A}_\gamma + \hat{B}_\gamma + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow 80^\circ + 70^\circ + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} = 30^\circ$$



۳۴۴- گزینهی «۱» ابتدا توجه کنید نیم‌ساز خارجی رأس A با قاعده موازی است. زیرا:

$$\hat{A} \text{ زاویه خارجی } = \hat{A}_1 + \hat{A}_\gamma = \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow 2\hat{A}_1 = 2\hat{C} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C} \Rightarrow AD \parallel BC$$

حال بنا به خاصیت دو خط موازی و قاطع BD داریم: $\hat{D} = \hat{B}_1$ و چون $\hat{B}_1 = \hat{B}_\gamma$ پس $\hat{D} = \hat{B}_\gamma$ در نتیجه مثلث BAD متساوی‌الساقین است و لذا $AD = AB = AC$

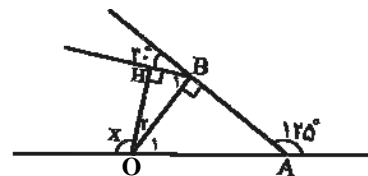


۳۴۵- گزینهی «۱»

$$OAB \text{ مثلث قائم‌الزاویهی } \hat{A} = \hat{B} + \hat{O}_1 \Rightarrow 125^\circ = 90^\circ + \hat{O}_1 \Rightarrow \hat{O}_1 = 35^\circ$$

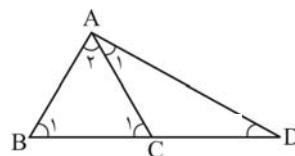
$$OBH \text{ مثلث قائم‌الزاویهی } \hat{B}_1 = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ \Rightarrow \hat{O}_\gamma = 40^\circ$$

$$x = 180^\circ - (\hat{O}_1 + \hat{O}_\gamma) = 180^\circ - (35^\circ + 40^\circ) = 105^\circ$$



۳۴۶- گزینهی «۳»

$$\hat{A} = 32^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \frac{180^\circ - 32^\circ}{2} = 74^\circ$$



از طرفی مثلث ACD متساوی‌الساقین است. در نتیجه: $\hat{A}_1 = \hat{D}$ بنابراین داریم: $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 + \hat{D} \Rightarrow 74^\circ = 2\hat{D} \Rightarrow \hat{D} = 37^\circ$

$\hat{B} \Rightarrow BD \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_\gamma$

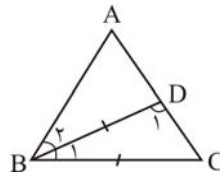
$BD = BC \Rightarrow \hat{C} = \hat{D}_1$

$\Delta ABC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ متساوی الساقین

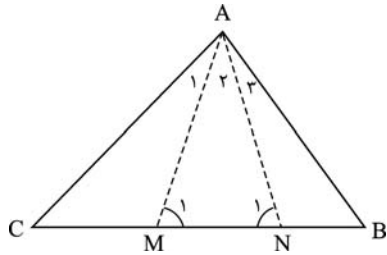
$ABD \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{B}_\gamma$ مثلث خارجی زاویه

$\hat{D}_1 = \hat{C} = \hat{B} = \hat{A} + \hat{B}_\gamma \Rightarrow \hat{B} = \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 2\hat{A}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2(2\hat{A}) = 180^\circ \Rightarrow 5\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ = \frac{\pi}{5}$



گزینه ۲ - ۳۴۷



$\Delta ACN \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{A}_1 + \hat{A}_\gamma$ متساوی الساقین است.

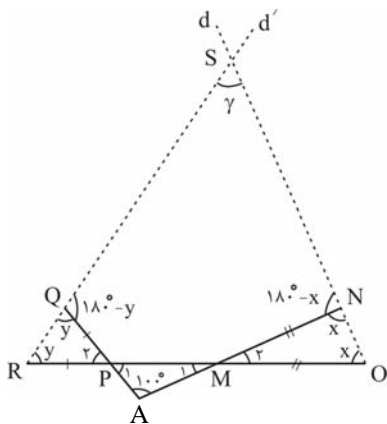
$\Delta ABM \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A}_\gamma + \hat{A}_\psi$ متساوی الساقین است.

در مثلث AMN داریم:

$\hat{M}_1 + \hat{N}_1 + \hat{A}_\gamma = 180^\circ \Rightarrow (\hat{A}_1 + \hat{A}_\gamma) + (\hat{A}_\gamma + \hat{A}_\psi) + \hat{A}_\gamma = 180^\circ$

$\Rightarrow (\hat{A}_1 + \hat{A}_\gamma + \hat{A}_\psi) + 2\hat{A}_\gamma = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 2\hat{A}_\gamma = 180^\circ \Rightarrow 72^\circ + 2\hat{A}_\gamma = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}_\gamma = 54^\circ$

گزینه ۱ - ۳۴۸



در چهارضلعی ANSQ، مجموع زاویه‌های داخلی 360° است، پس:

$100^\circ + (180^\circ - x) + \gamma + (180^\circ - y) = 360^\circ$

$\Rightarrow \gamma = (x + y) - 100^\circ$ (*)

در دو مثلث متساوی الساقین MNO و PQR، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_\gamma = 180^\circ - 2x \\ \hat{P}_1 = \hat{P}_\gamma = 180^\circ - 2y \end{cases}$$

و همچنین در مثلث AMP، داریم:

$\hat{A} + \hat{M}_1 + \hat{P}_1 = 180^\circ \Rightarrow 100^\circ + (180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y) = 180^\circ \Rightarrow x + y = 140^\circ$

و نهایتاً از رابطه‌ی (*) نتیجه می‌شود: $\gamma = 140^\circ - 100^\circ = 40^\circ$.

گزینه ۲ - ۳۴۹

$$\begin{cases} \hat{B} - \hat{C} = 26^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = 58^\circ, \hat{C} = 32^\circ$$

گزینه ۳ - ۳۵۰

هر چهارضلعی که اقطارش منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

تشریح سایر گزینه‌ها:

مثال نقض برای گزینه ۲، دوزنقه متساوی الساقین است.



مثال نقض برای گزینه ۳، کایت یا شبه لوزی است.



مثال نقض برای گزینه ۴، لوزی است.



گزینه ۱ - ۳۵۱

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 42 \Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} - n = 42 \Rightarrow n(n-3) - 2n = 84$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n = 84 \Rightarrow n(n-5) = 12 \times 7 \Rightarrow n = 12$$

$$\text{تعداد قطر ها} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = 54$$

۳۵۲- گزینهی «۴»

در هر مثلث نقطه‌ی تلاقی نیم‌سازهای داخلی از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و نقطه‌ی تلاقی نیم‌سازهای دو زاویه‌ی خارجی و نیم‌ساز زاویه‌ی داخلی غیر مجاور در آن‌ها از یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر به یک فاصله می‌باشد و چون در صفحه‌ی مثلث سه نقطه وجود دارد که محل تلاقی نیم‌سازهای دو زاویه‌ی خارجی و نیم‌ساز داخلی غیر مجاور می‌باشد، پس جمعاً ۴ نقطه با شرایط خواسته شده در تست وجود دارد.

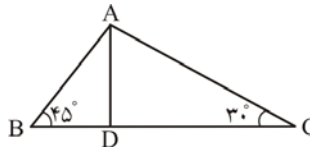
۳۵۳- گزینهی «۴»

$$AC = 2AD \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

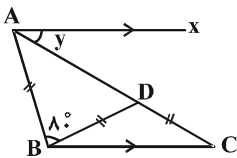
$$AB = \sqrt{2}AD \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ$$

$$\hat{BAC} = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$$

$$\frac{\hat{BAC}}{\hat{ACD}} = \frac{105^\circ}{30^\circ} = \frac{7}{2}$$



۳۵۴- گزینهی «۴»



۳۵۵- گزینهی «۲»

$$Ax \parallel BC \text{ و مورب } AC \Rightarrow \hat{DCB} = y \xrightarrow{BD=DC} \hat{DBC} = y$$

\hat{ADB} زاویه‌ی خارجی مثلث BCD است، بنابراین داریم:

$$\hat{ADB} = \hat{DBC} + \hat{DCB} = y + y = 2y$$

از طرفی با توجه به این که مثلث ABD متساوی‌الساقین است، $\hat{DAB} = 2y$ خواهد بود و داریم:

$$\triangle ABD: 2y + 2y + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow 4y = 100^\circ \Rightarrow y = 25^\circ$$

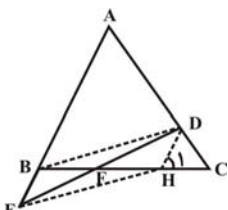
۳۵۶- گزینهی «۱» با توجه به گزینه‌ها، فقط گزاره‌ی «الف» شرط کافی برای هم‌نهشتی دو مثلث است. نادرستی سایر گزینه‌ها را به عنوان تمرین بررسی کنید.

۳۵۶- گزینهی «۱»

۳۵۷- گزینهی «۲» S و C خم ساده هستند اما بسته نیستند. P، B و A خم ساده نیستند (چرا؟). فقط D خم ساده‌ی بسته است.

۳۵۷- گزینهی «۲»

۳۵۸- گزینهی «۲» DH را موازی AB رسم می‌کنیم. مثلث DHC متساوی‌الساقین است، زیرا $\hat{C} = \hat{B} = \hat{H}$. پس:



$$\left. \begin{array}{l} DC = DH \\ DC = BE \end{array} \right\} \Rightarrow BE = DH$$

از طرفی $DH \parallel BE$ ، پس چهارضلعی BDHE متوازی‌الاضلاع است (زیرا اضلاع مقابل، موازی و مساویند). در متوازی‌الاضلاع، قطرهای همدیگر را نصف می‌کنند، پس F وسط DE است، بنابراین $DF = EF$.

۳۵۸- گزینهی «۲»