دنباله

۵۲۱- گزینه‌ی «۲» $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \times \cos\frac{1}{\infty} = \infty \times \cos 0 = \infty \to$ واگرا و بی‌کران

صعودی $n \to \frac{1}{n}$ نزولی $\to 0 < \frac{1}{n} \le 1$ در ربع اول نزولی $\cos$ $\to \cos\frac{1}{n}$ صعودی با جملات مثبت

صعودی با جملات مثبت $n \to$ حاصلضرب دو دنباله‌ی صعودی با جملات مثبت خود دنباله‌ی صعودی است

نکته: در صورتی که دنباله‌ی a_n و b_n هر دو نزولی و مثبت باشند، دنباله‌ی a_nb_n صعودی خواهد بود.

۵۲۲- گزینه‌ی «۴» گزینه‌ی «۱»: چون ریشه مخرج بزرگ‌تر از ۱ است پس دنباله غیریکنواست.

گزینه‌ی «۲»: $a_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1} = \frac{2n^2+2+1}{n^2+1} = 2 + \frac{1}{n^2+1} \to n^2+1$ صعودی $\to 2 + \frac{1}{n^2+1}$ نزولی

گزینه‌ی «۳»: $a_1 = 2 \quad a_2 = \frac{4}{2} = 2 \; , a_3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \; , \ldots \; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ نزولی

گزینه‌ی «۴»: $a_n = \frac{n^3+1}{n^3+2} = \frac{n^3+2-1}{n^3+2} = 1 - \frac{1}{n^3+2} \to n^3+2$ صعودی $\to \frac{1}{n^3+2}$ نزولی $\to 1 + \frac{-1}{n^3+2} \to$ صعودی

۵۲۳- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (1)^\infty \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{a\times n} \times \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^4\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n\right)^a$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)}\right)^a = (e^2)^a = e^{2a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e} \to e^{2a} = \frac{1}{e} \to e^{2a+1} = 1 \to 2a+1 = 0 \to a = \frac{-1}{2}$$

۵۲۴- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L \to L = \sqrt{2L-1} \to L^2 = 2L-1 \to L^2 - 2L + 1 = 0 \to L = 1$$

۵۲۵- گزینه‌ی «۱»

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+n^2+1-n^4-n^2-5}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4+n^2+5}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4}{\infty} = 0$ همگرا

$$a_n = \frac{-4}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4+n^2+5}}$$

دنباله‌های $\sqrt{n^4+n^2+1}$ و $\sqrt{n^4+n^2+5}$ هر دو صعودی بوده پس مجموعشان هم صعودی است $\leftarrow$

صعودی $\frac{-4}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4+n^2+5}} \leftarrow$ نزولی $\frac{4}{\sqrt{n^4+n^2+1}+\sqrt{n^4+n^2+5}}$

۵۲۶- گزینه‌ی «۴»

$$a_n = \left\{\frac{3n+4}{2n-7}\right\}$$

$\begin{cases} a_1 = \frac{-7}{5} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2} \\ \text{ریشه‌ی مخرج} = 3/5 \nearrow a_3 = -13 ,\ \searrow a_4 = 16 \end{cases} \to -13 \le a_n \le 16 \to k = \max\{|-13|, 16\} = 16$

۵۲۷- گزینه‌ی «۴»

$$4n^2 - 28n + 50 = (2n-7)^2 + 1$$

دقت شود که در دنباله‌ی فوق از جمله‌ی اول تا جمله‌ی سوم دنباله نزول می‌کند و جمله‌ی سوم و چهارم برابر و از جمله‌ی چهارم به بعد دنباله صعود می‌کند پس این دنباله از جمله‌ی سوم به بعد صعودی است و در نتیجه داریم: از جمله‌ی سوم به بعد: $4n^2 - 28n + 50$ صعودی

$\Rightarrow \frac{۱}{۴n^۲-۲۸n+۵۰}$ نزولی $\Rightarrow a_n=\log\left(\frac{۱}{۴n^۲-۲۸n+۵۰}\right)$ نزولی

نکته: ترکیب دو دنباله‌ی صعودی (نزولی)، صعودی است و ترکیب یک دنباله‌ی صعودی و نزولی، نزولی است.

۵۲۸- گزینه‌ی «۴»

گزینه‌ی «۱»: $\frac{a_{n+۱}}{b_n}=\frac{\sin\frac{(n+۱)\pi}{۲}}{\cos\frac{n\pi}{۲}}=\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right)}{\cos\frac{n\pi}{۲}}=\frac{\cos\frac{n\pi}{۲}}{\cos\frac{n\pi}{۲}}=۱\rightarrow$ همگرا (دنباله ثابت)

گزینه‌ی «۲»: $a_n\times b_n=\sin\frac{n\pi}{۲}\times\cos\frac{n\pi}{۲}=\frac{۱}{۲}\sin n\pi=۰\rightarrow$ همگرا (دنباله ثابت)

گزینه‌ی «۳»: $a_n+b_{n+۱}=\sin\frac{n\pi}{۲}+\cos\left(\frac{n\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\right)=\sin\frac{n\pi}{۲}-\sin\frac{n\pi}{۲}=۰\rightarrow$ همگرا (دنباله ثابت)

گزینه‌ی «۴»: $a_{۲n}+b_{۲n}=\sin n\pi+\cos n\pi=۰+(-۱)^n\rightarrow$ واگرا

۵۲۹- گزینه‌ی «۴»

گزینه‌ی «۱»: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^۲+\cos n}{n^۲+\sin n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^۲\left(۱+\frac{\cos n}{n^۲}\right)}{n^۲\left(۱+\frac{\sin n}{n^۲}\right)}=\frac{۱+۰}{۱+۰}=۱$ همگرا به ۱

گزینه‌ی «۲»: $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(۴n-۱)\frac{\pi}{۲}=۰$ ، $a_۱=\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰$ ، $a_۲=\cos\frac{۷\pi}{۲}=۰$ ، $a_۳=\cos n\left(\frac{۱۱\pi}{۲}\right)=۰$ دنباله‌ی ثابت $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=۰$ همگرا

گزینه‌ی «۳»: $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(n!\times\frac{\pi}{۳}\right)=۱$ ، $a_۱=\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$ ، $a_۲=\cos\frac{۲\pi}{۳}=\frac{-۱}{۲}$ ، $a_۳=\cos ۲\pi=۱$

$a_۴=\cos ۸\pi=۱\rightarrow$

از این به بعد کمان‌ها همگی مضارب زوج عدد π می‌باشند که کسینوس تمامی این کمان‌ها برابر عدد ۱ است. پس همگرا به ۱ است.

گزینه‌ی «۴»: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{((-۱)^n)^{۲n-۱}}{n}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(-۱)^{۲n^۲-n}}{n}\right]$

$\xrightarrow[\text{فرد}]{۲n^۲-n}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{-۱}{n}\right]=[۰^-]=-۱$

$\xrightarrow[\text{زوج}]{۲n^۲-n}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{۱}{n}\right]=[۰^+]=۰$

$\rightarrow$ واگرا

۵۳۰- گزینه‌ی «۲»

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{۲n^۲+۴-۱}{n^۲+۲}\right]+\left[\frac{۸n^۳+۲۰-۱}{۲n^۳+۵}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[۲-\frac{۱}{n^۲+۲}\right]+\left[۴-\frac{۱}{۲n^۳+۵}\right]=[۲^-]+[۴^-]=۱+۳=۴$

۵۳۱- گزینه‌ی «۲»

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+۳-n-a}{\sqrt{n+۳}+\sqrt{n+a}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{۳-a}{\sqrt{n+۳}+\sqrt{n+a}}\right]=-۱$

برای آن‌که حد براکت عدد ۱- باشد، لازم است که حد عبارت درون براکت صفر منفی باشد و این در صورتی امکان‌پذیر است که صورت کسر منفی گردد. $۳-a<۰\rightarrow a>۳$

۵۳۲- گزینه‌ی «۱»

اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ی داده شده را با توجه به جملات آن یعنی $a_۱=۲/۴۹$ و $a_۲=۲/۴۹۹$ و $a_۳=۲/۴۹۹۹$ و ... به صورت $a_n=۲/۴\underbrace{۹۹۹...۹}_{\text{n تا}}$ در نظر بگیریم در این صورت جمله‌ی پنجم آن به صورت زیر است:

$a_۵=۲/۴\underbrace{۹۹۹...۹}_{\text{۵ تا}}$

همچنین جملات این دنباله طبق فرض سؤال به عدد ثابت و گویای زیر که کسر مولد نامیده می‌شود نزدیک یا همگرا می‌شوند.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=۲/۴\bar{۹}=\frac{\text{کل عدد} - \text{غیر تکرار}}{\text{به تعداد تکرار نُه می‌نویسیم و به تعداد غیر تکرار پس از ممیز صفر می‌نویسیم}}=\frac{۲۴۹-۲۴}{۹۰}=\frac{۲۲۵}{۹۰}=\frac{۲۵}{۱۰}=۲/۵$

جمله‌ی پنجم - عدد ثابت $=۲/۵-۲/۴\underbrace{۹۹۹...۹}_{\text{۵ تا}}=۰/\underbrace{۰۰۰۰۰}_{\text{۵ تا}}۱=۱۰^{-۶}$

۵۳۳- گزینه‌ی «۱»

اگر n فرد $\to a_{n+2}\,,\,a_{n+4} \xrightarrow{\text{فرداند}} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+4} = 1 \to \lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+2} - a_{n+4}) = 0$

اگر n زوج $\to a_{n+2}\,,\,a_{n+4} \xrightarrow{\text{زوج‌اند}} \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+4} = \frac{1}{3} \to \lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+2} - a_{n+4}) = 0$

۵۳۴- گزینه‌ی «۴»

وقتی نقاط نمودار روی خطی به موازات محور xها باشد، یعنی دنباله باید دنباله‌ی ثابت باشد. در واقع بررسی می‌کنیم کدام‌یک از دنباله‌ها ثابت است.

گزینه (۱): $\frac{\sin n}{n} = \frac{\text{عددی بین ۱- تا ۱+}}{n} = \begin{cases} \frac{\text{عددی بین صفر تا ۱-}}{n} = 0^- \Rightarrow [0^-] = -1 \\ \frac{\text{عددی بین صفر تا ۱+}}{n} = 0^+ \Rightarrow [0^+] = 0 \end{cases}$

در نتیجه دنباله ثابت نیست،

گزینه (۲): $\left[\cos\frac{n\pi}{2}\right] = 0, -1, 0, 1, \ldots \Rightarrow$ دنباله غیرثابت

گزینه (۳): $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin^3\frac{7\pi}{6} = (-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$

$\xrightarrow{n\in N} \left[(-\frac{1}{8})^{n^2-n}\right] = \begin{cases} 1 & ;n=1 \\ [0^+] = 0 & ;n\neq 1 \end{cases} \Rightarrow$ دنباله غیرثابت

گزینه (۴): $\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \left[(\cos^3\frac{7\pi}{6})^{n^2+n}\right] = [0^+] = 0 \Rightarrow$ دنباله‌ی ثابت

۵۳۵- گزینه‌ی «۳»

$\frac{4}{10} < a_n < \frac{6}{10} \to \frac{4}{10} - \frac{1}{2} < a_n - \frac{1}{2} < \frac{6}{10} - \frac{1}{2} \to \frac{-1}{10} < a_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{10}$

$\to \left|\frac{n+(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10} \to \left|\frac{\cancel{2n} + 2(-1)^n - \cancel{2n} - 1}{2(2n+1)}\right| < \frac{1}{10} \to \left|\frac{2(-1)^n - 1}{2n+1}\right| < \frac{1}{5}$

$\xrightarrow{n \text{ زوج}} \left|\frac{1}{2n+1}\right| < \frac{1}{5} \to 2n+1 > 5 \to n > 2 \to \min(n) = \underset{\text{زوج}}{4}$

$\xrightarrow{n \text{ فرد}} \left|\frac{-3}{2n+1}\right| < \frac{1}{5} \to 2n+1 > 15 \to 2n > 14 \to n > 7 \to \min(n) = 9$

مشاهده می‌شود که جملات دنباله‌ی a_n از جمله‌ی هشتم به بعد در این بازه‌اند. ولی این بدان معنا نمی‌باشد که ۷ جمله‌ی اول خارج از بازه باشد. چون جملات زوج از جمله‌ی a_4 و a_6 در بازه‌اند. پس جملات خارج از بازه عبارتند از: a_1, a_2, a_3, a_5, a_7

۵۳۶- گزینه‌ی «۱»

$a_0 = 1$

$a_1 = -\cos\frac{x}{2}$

$a_2 = -\cos\frac{x}{2} \times \cos\frac{x}{4}$

$a_3 = \cos\frac{x}{2} \times \cos\frac{x}{4} \times \cos\frac{x}{8}$

$\vdots$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n-2} = -\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^{n-2}} = \frac{-\sin x}{2^{n-2} \times \sin(\frac{x}{2^{n-2}})} \overset{n\to\infty}{=} \frac{-\sin x}{x} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{2\pi} \\ a_n = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \times \sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \end{array}\right\} \to a_n - a_{n-2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} - (-\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

۵۳۷- گزینه‌ی «۱» نکته: $۱^۳+۲^۳+...+n^۳=\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲$

$a_۱=۱$

$n=۱\to a_۲=a_۱+\frac{۱}{۳}=۱+\frac{۱}{۳}$

$n=۲\to a_۳=a_۲+\frac{۲^۳}{۳}=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۲^۳}{۳}=۱+\frac{۱^۳+۲^۳}{۳}$

$n=۳\to a_۴=a_۳+\frac{۳^۳}{۳}=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۲^۳}{۳}+\frac{۳^۳}{۳}=۱+\frac{۱^۳+۲^۳+۳^۳}{۳}$

$\to a_n=۱+\frac{۱^۳+۲^۳+...+(n-۱)^۳}{۳}\to a_{۱۰}=۱+\frac{۱^۳+۲^۳+...+۹^۳}{۳}=۱+\frac{\left(\frac{۹\times ۱۰}{۲}\right)^۲}{۳}=۱+\frac{(۴۵)^۲}{۳}$

۵۳۸- گزینه‌ی «۴» چون a_n صعودی و بی‌کران است پس واگرا به $+\infty$ است.

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۳^{۲a_n}+۴^{a_n}}{۹^{a_n+۱}}=\frac{\infty}{\infty}\xrightarrow{\text{رشد بیشتر}}\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۳^{۲a_n}}{۹^{a_n+۱}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۹^{a_n}}{۹^{a_n}\times ۹}=\frac{۱}{۹}$ همگراست و کران بالا و پایین دارد.

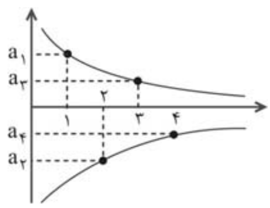
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{\cos n\pi}{a_n}\right]=\left[\frac{(-۱)^{+\infty}}{+\infty}\right]=\begin{cases}[۰^+]=۰\\ [۰^-]=-۱\end{cases}$ واگرا به چند عدد است و کران بالا و پایین دارد.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\log a_n=\log(+\infty)=+\infty$ واگرا به $+\infty$ است و فقط کران پایین دارد.

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{۴}=\begin{cases}۰=a_n\times ۰\\ +\infty\times\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\pm\infty\\ +\infty\times\pm ۱=\pm\infty\end{cases}$ واگراست و کران بالا و پایین ندارد.

۵۳۹- گزینه‌ی «۲» $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\log\frac{۱}{n}=\log\frac{۱}{+\infty}=\log_{۱۰}^{۰^+}=-\infty\to$ دنباله واگراست و فقط کران بالا دارد.

۵۴۰- گزینه‌ی «۱» $a_n=(-۱)^{n+۱}\times(a)^{n+۱},۰<a<۱\longrightarrow a^{n+۱}\to$ یک دنباله‌ی نزولی است



اختلاف بزرگترین و کوچکترین جمله $=\underset{\max(a_n)}{a_۱}-\underset{\min(a_n)}{a_۲}$

حد

۵۴۱- گزینه‌ی «۴» چون تابع f در $x=۱$ فاقد حد است و در $x=۱$ دارای مقادیر متفاوتی در چپ و راست این نقطه می‌باشد پس باید دنباله‌ای را انتخاب نمود که حد آن مقادیر متفاوتی باشد.

گزینه‌ی «۱»: $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{n-۱}{n+۱}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(۱-\frac{۲}{n+۱}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(۱^-)=۲\to$ نامناسب

گزینه‌ی «۲»: $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{n^۲+۳}{n^۲+۲}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(۱+\frac{۱}{n^۲+۲}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f(۱^+)=۳\to$ نامناسب

گزینه‌ی «۳»: $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\sqrt{n^۲+۲n}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{\cancel{n^۲}+۲n-\cancel{n^۲}}{\sqrt{(n+۱)^۲-۱}+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{۲n}{|n+۱|+n}\right)=f(۱^-)=۲\to$ نامناسب

گزینه‌ی «۴»: $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{n+(-۱)^n}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(۱+\frac{(-۱)^n}{n}\right)$ $\begin{cases}\xrightarrow{n\text{ زوج}}f(۱+۰^+)=f(۱^+)=۳\\ \xrightarrow{n\text{ فرد}}f(۱+۰^-)=f(۱^-)=۲\end{cases}\to$ واگرا

۸۳۸- گزینه‌ی «۲» با استفاده از معادله‌ی سرعت می‌توان نوشت:

$$V=-gt+v_0 \xrightarrow{v_0=30\frac{m}{s}} V=-10t+30$$

$$\begin{cases} t_1=3s \rightarrow v_1=-10\times 3+30=0 \\ t_2=6s \rightarrow v_2=-10\times 6+30=-30\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\bar{V}=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{0-30}{2} \Rightarrow \bar{V}=-15\frac{m}{s}$$

۸۳۹- گزینه‌ی «۴» با استفاده از معادله‌ی مکان- زمان و با فرض این‌که جهت پایین مثبت باشد معادله‌ی مکان هر کدام از گلوله‌ها را نوشته و سپس اختلاف آن‌ها را برابر ۷۵ متر قرار می‌دهیم.

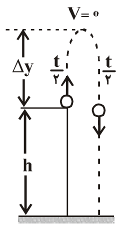
$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t \xrightarrow[t_2=t_1-3]{v_{01}=v_{02}=0} \begin{cases} y_1=5t_1^2 \\ y_2=5(t_1-3)^2 \end{cases}$$

چون گلوله‌ی اول زودتر رها شده است $y_1>y_2$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$y_1-y_2=75 \Rightarrow 5t_1^2-5(t_1-3)^2=75 \Rightarrow 5t_1^2-5t_1^2+30t_1-45=75 \Rightarrow 30t_1=120 \Rightarrow t_1=4s$$

۸۴۰- گزینه‌ی «۱» با توجه به شکل، گلوله‌ی اول قسمت بالای نمودار را در مدت ۱ ثانیه طی کرده است که نصف این مدت زمان در موقع رفت و نصف دیگر آن در موقع برگشت بوده است. بنابراین گلوله‌ی دوم از نقطه‌ی اوج تا ارتفاع h را که دو گلوله به هم می‌رسند در مدت $\frac{1}{2}$ ثانیه طی کرده است. در این حالت می‌توان نوشت:

$$\Delta y=\frac{1}{2}gt^2+V_0t \Rightarrow \Delta y=\frac{1}{2}g(\frac{1}{2})^2+0=1/25m$$



حرکت در دو بعد و پرتابه

۸۴۱- گزینه‌ی «۲» با مشتق گرفتن از معادله‌ی مکان ـ زمان نسبت به زمان، معادله‌ی سرعت ـ زمان و با مشتق‌گیری دوباره، معادله‌ی شتاب ـ زمان حرکت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{r}=(\frac{4}{3}t^3-4t)\vec{i}+(t^3+\frac{9}{4}t)\vec{j}$$

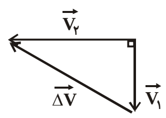
$$\Rightarrow \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(4t^2-4)\vec{i}+(3t^2+\frac{9}{4})\vec{j} \Rightarrow \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(8t\vec{i}+6t\vec{j})$$

$$|a|=\sqrt{(8t)^2+(6t)^2}=10t=5 \Rightarrow t=0/5s$$

$$\xrightarrow{t=0/5s} \vec{v}=(4\times 0/5^2-4)\vec{i}+(3\times 0/5^2+\frac{9}{4})\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v}=-3\vec{i}+3\vec{j} \Rightarrow |\vec{v}|=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}=3\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

۸۴۲- گزینه‌ی «۱» دو بردار سرعت را از یک نقطه رسم می‌کنیم و اندازه‌ی ΔV را به دست می‌آوریم:



$$|\Delta V|=\sqrt{(V_1)^2+(V_2)^2}=\sqrt{(6)^2+(8)^2}=10\frac{m}{s}$$

$$\bar{a}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{10}{4-2}=5\frac{m}{s^2}$$

۸۴۳- گزینه‌ی «۲» در لحظه‌ی برخورد، مختصات مکان دو متحرک یکسان است.

$$\begin{cases} x_A=x_B \\ y_A=y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2+1=2t^2-3 \\ t+2=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2=4 \\ t=2s \end{cases} \Rightarrow t=2s$$

بنابراین در لحظه‌ی $t=2s$ دو متحرک به هم برخورد می‌کنند و مختصات نقطه‌ی برخورد $M\left|\begin{matrix}5m\\4m\end{matrix}\right.$ است.

$$\vec{v}_A=\frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_A=(2t)\vec{i}+\vec{j} \xrightarrow{t=2s} \vec{v}_A=4\vec{i}+\vec{j}\ (\frac{m}{s})$$

۸۴۴- گزینه‌ی «۱» ابتدا با مشتق گرفتن از معادله‌های مکان برحسب زمان، معادله‌های سرعت و سپس با مشتق‌گیری دوباره، معادله‌های شتاب حرکت جسم را به‌دست آورده و بردارهای آن را در لحظه‌ی $t=۱s$ تعیین می‌کنیم.

$$x=۲۰t^{۲}\Rightarrow v_x=\frac{dx}{dt}=۴۰t\Rightarrow a_x=\frac{dv_x}{dt}=۴۰\frac{m}{s^{۲}}$$

$$y=-۵t^{۳}\Rightarrow v_y=\frac{dy}{dt}=-۱۵t^{۲}\Rightarrow a_y=\frac{dv_y}{dt}=-۳۰t$$

$$\xrightarrow{t=۱s} v_x=۴۰\frac{m}{s}\ ,\ v_y=-۱۵\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \tan\theta=\frac{v_y}{v_x}=\frac{-۱۵}{۴۰}=\frac{-۳}{۸}\Rightarrow \hat{\theta}=-۲۰^\circ$$

$$\xrightarrow{t=۱s} a_x=۴۰\frac{m}{s^{۲}}\ ,\ a_y=-۳۰\frac{m}{s^{۲}}$$

$$\Rightarrow \tan\theta'=\frac{a_y}{a_x}=\frac{-۳۰}{۴۰}=\frac{-۳}{۴}\Rightarrow \widehat{\theta'}=-۳۷^\circ$$

بنابراین زاویه‌ی بین دو بردار سرعت و شتاب جسم در لحظه‌ی $t=۱s$ برابر با ۱۷°

۸۴۵- گزینه‌ی «۳» ابتدا کل زمان حرکت گلوله را به‌دست می‌آوریم، داریم:

$$t_A+t_B=۲t_{\text{اوج}}=t_{\text{کل}}\Rightarrow t_{\text{کل}}=۳+۵=۸s$$

در راستای افقی حرکت گلوله با سرعت ثابت در مسیری مستقیم است، بنابراین داریم:

$$\Delta x=v_{\circ x}\Delta t\Rightarrow \Delta x=v_\circ\cos\alpha\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x_{AB}}{R}=\frac{\Delta t_{AB}}{\Delta t_{\text{کل}}}\Rightarrow \frac{۱۰}{R}=\frac{۲}{۸}\Rightarrow R=۴۰m$$

۸۴۶- گزینه‌ی «۴» تانژانت زاویه‌ی بردار سرعت با افق برابر نسبت $\tan\alpha=\frac{V_y}{V_x}$ است. با توجه به این‌که اندازه‌ی مؤلفه‌ی بردار سرعت در راستای قائم کاهش می‌یابد اندازه‌ی زاویه‌ی α نیز کاهش خواهد یافت. با توجه به این‌که زاویه‌ی بین بردار شتاب و سرعت برابر با $۹۰+\alpha$ می‌باشد، بنابراین با کاهش زاویه‌ی α زاویه‌ی بین بردار شتاب و سرعت پیوسته کاهش می‌یابد.

۸۴۷- گزینه‌ی «۲» با توجه به رابطه‌ی برد و ارتفاع اوج با زاویه‌ی پرتاب داریم:

$$\frac{H_s}{R}=\frac{\frac{V_\circ^{۲}\sin^{۲}\alpha}{۲g}}{\frac{V_\circ^{۲}\sin ۲\alpha}{g}}=\frac{\frac{\sin^{۲}\alpha}{۲}}{۲\sin\alpha\cos\alpha}\Rightarrow \frac{H_s}{R}=\frac{۱}{۴}\tan\alpha$$

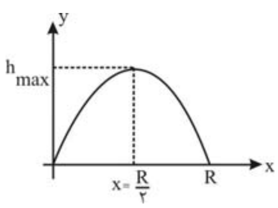
$$\frac{۱۰}{۴۰}=\frac{۱}{۴}\tan\alpha\Rightarrow \tan\alpha=۱\Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$$

۸۴۸- گزینه‌ی «۴» کم‌ترین سرعت متحرک در طول مسیر در نقطه‌ی اوج پرتاب است که برابر با $V_\circ\cos\alpha$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$V_{min}=V_\circ\cos ۳۰\Rightarrow V_{min}=۱۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۵\sqrt{۳}\frac{m}{s}$$

$$K_{min}=\frac{۱}{۲}mV^{۲}_{min}\Rightarrow K_{min}=\frac{۱}{۲}\times ۲(۵\sqrt{۳})^{۲}=۷۵\,J$$

۸۴۹- گزینه‌ی «۲» از معادله‌ی مسیر مشتق می‌گیریم و آن‌را مساوی صفر قرار می‌دهیم. مختصات بیشینه‌ی نمودار که در واقع همان $x=\frac{R}{۲}$ و $y=h_{max}$ است را به‌دست می‌آوریم.



$$y=-x^{۲}+۲۰x\Rightarrow y'=-۲x+۲۰=۰\Rightarrow x=۱۰m$$

$$x=\frac{R}{۲}\Rightarrow R=۲x=۲\times ۱۰\Rightarrow R=۲۰m$$

$$x=۱۰m\to h_{max}=y=-۱۰^{۲}+۲۰\times ۱۰\Rightarrow h_{max}=۱۰۰m$$

۸۵۰- گزینه‌ی «۲» چون سرعت گلوله در بالاترین نقطه‌ی مسیر صفر نیست، پس تحت زاویه‌ای نسبت به افق پرتاب شده است. داریم:

$$t=\frac{v_\circ\sin\alpha}{g}\Rightarrow ۳=\frac{v_\circ\sin\alpha}{۱۰}\Rightarrow v_\circ\sin\alpha=۳۰\quad(۱)$$

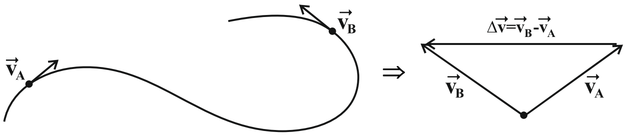
از طرفی سرعت گلوله در بالاترین نقطه‌ی مسیر (سرعت افقی گلوله) برابر است با:

$$v_\circ\cos\alpha=۴۰\quad(۲)$$

از تقسیم روابط (۱) و (۲) بر هم داریم: $\tan\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 37^\circ$

برای محاسبه‌ی سرعت اولیه‌ی پرتاب گلوله، داریم: $v_\circ \sin\alpha = 30 \Rightarrow v_\circ \times 0/6 = 30 \Rightarrow v_\circ = 50\frac{m}{s}$

۸۵۱- گزینه‌ی «۲» خط مماس بر مسیر حرکت متحرک در هر لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک در آن لحظه را نشان می‌دهد. از طرفی با استفاده از تعریف شتاب متوسط $(\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1})$، بردار شتاب متوسط بین دو لحظه هم‌جهت با تغییرات سرعت بین آن دو لحظه است. بنابراین خواهیم داشت:



بنابراین گزینه‌ی «۲» پاسخ صحیح است.

۸۵۲- گزینه‌ی «۱» ابتدا یک بار از معادله‌ی مکان مشتق گرفته، تا معادله‌ی سرعت به‌دست آید و سپس با استفاده از آن شتاب متوسط را حساب می‌کنیم.

$$\vec{r} = (t^3)\vec{i} + (t^2 + t)\vec{j}$$

$$\vec{V} = 3t^2\vec{i} + (2t+1)\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{j} \\ t_2 = 1s \Rightarrow \vec{V}_2 = 3\vec{i} + 3\vec{j} \end{cases}$$

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \Rightarrow \Delta\vec{V} = 3\vec{i} + (3-1)\vec{j} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

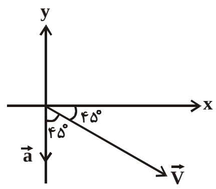
$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \Rightarrow \bar{\vec{a}} = \frac{3\vec{i} + 2\vec{j}}{1} \Rightarrow \bar{\vec{a}} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

۸۵۳- گزینه‌ی «۱» ابتدا با مشتق‌گیری بردارهای سرعت و شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \vec{r} = 20t\vec{i} + (-5t^2)\vec{j}$$

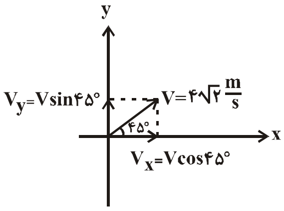
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{V} = 20\vec{i} + (-10t)\vec{j} \xrightarrow{t=2s} \vec{V} = 20\vec{i} - 20\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = 0\vec{i} - 10\vec{j} = -10\vec{j}$$



چون بردار شتاب در راستای قائم است، بنابراین زاویه‌ی بردار سرعت با راستای قائم برابر با زاویه‌ی آن با بردار شتاب می‌باشد. زاویه‌ی بردار سرعت با راستای قائم برابر است با: $\tan\alpha = |\frac{-20}{20}| = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$

۸۵۴- گزینه‌ی «۱» بردار سرعت مماس بر مسیر حرکت است. با توجه به این‌که شیب نمودار برابر ۱ است، زاویه‌ی نمودار با راستای افقی برابر 45° است و داریم:



$$\begin{cases} V_x = V_\circ \cos 45 \Rightarrow V_x = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\frac{m}{s} \\ V_y = V_\circ \sin 45 \Rightarrow V_y = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

۸۵۵- گزینه‌ی «۱» با توجه به این‌که در نقطه‌ی اوج مؤلفه‌ی قائم بردار سرعت برابر صفر است، می‌توان نوشت:

$$V_y = -gt + V_\circ y \Rightarrow 0 = -10 \times 3 + V_\circ y \Rightarrow V_\circ y = 30\frac{m}{s}$$

$$H_s = \frac{V_{\circ y}^2}{2g} \Rightarrow H_s = \frac{(30)^2}{2 \times 10} = 45m$$

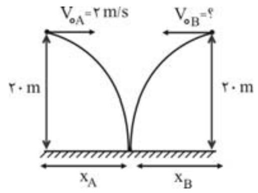
۸۵۶- گزینه‌ی «۴» چون به ازای زاویه‌ی 45° برد پرتابه بیشینه است، تا قبل از ۴۵ درجه با افزایش زاویه‌ی پرتاب، برد پرتابه زیاد می‌شود و با عبور از آن با افزایش زاویه‌ی پرتاب، برد کاهش می‌یابد. همچنین به ازای زاویه‌ی ۵۰ درجه که متمم زاویه‌ی پرتاب است، برد گلوله برابر برد حالت اول خواهد بود، بنابراین هر سه حالت می‌تواند صحیح باشد.

۸۵۷- گزینه‌ی «۱» با استفاده از رابطه‌ی تکانه با نیرو و با توجه به این‌که فقط نیروی وزن بر گلوله وارد می‌شود. داریم:

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}\xrightarrow{F=mg\,,\,\Delta p=m\Delta v} mg=\frac{m\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow \Delta v=g.\Delta t\xrightarrow{\Delta t=۳s\,,\,g=۱۰\frac{m}{s^{۲}}}\Delta v=۱۰\times ۳=۳۰\frac{m}{s}$$

۸۵۸- گزینه‌ی «۴» با توجه به شکل، مجموع جابه‌جایی‌های افقی دو گلوله برابر ۱۲m است. چون هر دوگلوله از ارتفاع ۲۰ متری پرتاب شده‌اند زمان رسیدن آن به زمین برابر است با:

$$y=\frac{۱}{۲}gt^{۲}+v_{\circ A}\sin\alpha t\rightarrow ۲۰=۵t^{۲}+۰\Rightarrow t=۲s$$



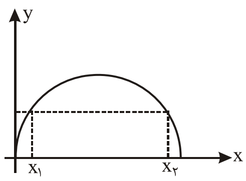
در این مدت جابه‌جایی گلوله‌ی A برابر است با:

$$x_A=(v_{\circ A}\cos\alpha)t=(۲\times\cos(۰))\times ۲\Rightarrow x_A=۴m$$

$$x_A+x_B=۱۲m\rightarrow ۴+x_B=۱۲\Rightarrow x_B=۸m$$

$$x_B=(v_{\circ B}\cos\alpha)t\Rightarrow ۸=(v_{\circ B}\times\cos ۰)\times ۲\Rightarrow v_{\circ B}=۴\frac{m}{s}$$

۸۵۹- گزینه‌ی «۱» با توجه به مسیر حرکت گلوله که در شکل زیر رسم شده است، می‌توان نوشت:



$$x_۱=v_{\circ x}t_۱\xrightarrow{t_۱=۳s}x_۱=۳v_{\circ x}$$

$$x_۲=v_{\circ x}t_۲\xrightarrow{t_۲=۵s}x_۲=۵v_{\circ x}$$

$$x_۲-x_۱=۶۰\Rightarrow ۵v_{\circ x}-۳v_{\circ x}=۶۰\Rightarrow v_{\circ x}=۳۰\frac{m}{s}$$

از طرف دیگر داریم:

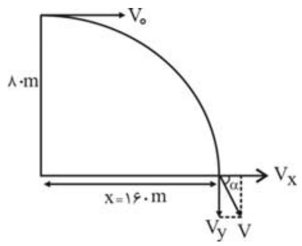
$$v_{\circ y}=\frac{۱}{۲}g(t_۱+t_۲)=۵\times(۳+۵)=۴۰\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت اولیه برابر است با:

$$v_{\circ}=\sqrt{v_{\circ x}^{۲}+v_{\circ y}^{۲}}=\sqrt{۹۰۰+۱۶۰۰}\Rightarrow v_{\circ}=۵۰\frac{m}{s}$$

۸۶۰- گزینه‌ی «۲» با فرض این که جهت پایین مثبت باشد، ابتدا زمان رسیدن گلوله به زمین را حساب می‌کنیم.

$$y=\frac{۱}{۲}gt^{۲}+(v_{\circ}\sin\alpha)t\xrightarrow{y=۸۰m\,,\,\alpha=۰}۸۰=۵t^{۲}+۰\Rightarrow t=۴s$$



اکنون v_x و v_y را حساب می‌کنیم.

$$x=v_xt\xrightarrow[t=۴s]{x=۱۶۰m}۱۶۰=v_x\times ۴\Rightarrow v_x=۴۰\frac{m}{s}$$

$$v_y=gt+v_{\circ}\sin\alpha\xrightarrow{t=۴s\,,\,\alpha=۰}v_y=۱۰\times ۴+۰\Rightarrow v_y=۴۰\frac{m}{s}$$

در نهایت زاویه‌ی α برابر است با:

$$\tan\alpha=\frac{v_y}{v_x}=\frac{۴۰}{۴۰}=۱\Rightarrow\alpha=۴۵^{\circ}$$

دینامیک

۸۶۱- گزینه‌ی «۳» طبق قانون دوم نیوتون شتاب مجموعه با برایند نیروهای وارد بر جسم رابطه‌ی مستقیم و با جرم جسم رابطه‌ی عکس دارد. بیش‌ترین مقدار نیروی برایند در حالتی رخ می‌دهد که نیروها با هم، هم‌جهت باشند.

$$F_{max}=۳+۷+۵=۱۵N\Rightarrow a_{max}=\frac{F_{max}}{m}=\frac{۱۵}{۱}=۱۵\frac{m}{s^{۲}}$$

با توجه به این‌که این ۳ نیرو می‌توانند اضلاع یک مثلث را تشکیل بدهند، بنابراین برایند آنها می‌تواند صفر شود، لذا داریم:

$$F_{min}=۰\Rightarrow a_{min}=۰$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$a_{max}-a_{min}=۱۵-۰=۱۵\frac{m}{s^{۲}}$$

۸۶۲- گزینه‌ی «۲» ابتدا شتاب جسم را به دست می‌آوریم.

$$V_{\circ}=۰\quad,\quad t=۵s\quad,\quad V=۲۰\frac{m}{s}\quad,\quad a=?$$

$$V=at+v_{\circ}\Rightarrow ۲۰=۵a+۰\Rightarrow a=۴\frac{m}{s^{۲}}$$

برایند نیروهای وارد بر جسم برابر است با:

$$\sum F=ma\Rightarrow\sum F=۲\times ۴=۸N$$

با توجه به برابر بودن دو نیرو داریم:

$$\sum F=۲F\cos\frac{\alpha}{۲}\Rightarrow ۸=۲\times F\cos\frac{۱۲۰}{۲}\Rightarrow F=۸N$$