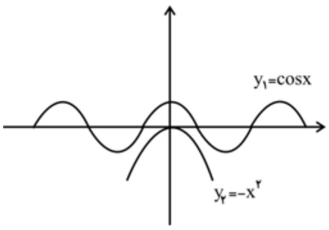
۴۵۶- گزینه‌ی «۴» ابتدا صورت کسر را به حاصل‌ضرب تبدیل می‌کنیم. داریم:

$$\frac{۲\sin\frac{۳x-x}{۲}\cos\frac{۳x+x}{۲}}{\cos ۲x}=۱\Rightarrow\frac{۲\sin x\times\cos ۲x}{\cos ۲x}=۱\xrightarrow{\cos ۲x\neq ۰}۲\sin x=۱\Rightarrow\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}\ ,\ x=\frac{۵\pi}{۶}$$

۴۵۷- گزینه‌ی «۱» ابتدا معادله را به‌صورت $\cos x=-x^۲$ تبدیل کرده و نمودار توابع $y_۱=\cos x$, $y_۲=-x^۲$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. محل برخورد دو نمودار، ریشه‌ی معادله خواهد بود.



همانطور که ملاحظه می‌کنید، دو نمودار با هم برخورد نمی‌کنند. بنابراین معادله‌ی مورد نظر فاقد ریشه است.

۴۵۸- گزینه‌ی «۳»

$$\sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\pi}{۳}\quad,\quad\cot^{-۱}(\sqrt{۳})=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\cos^۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{\pi}{۳})+\tan^۲(۲\times\frac{\pi}{۶})=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲+(\sqrt{۳})^۲=\frac{۳}{۴}+۳=\frac{۱۵}{۴}$$

۴۵۹- گزینه‌ی «۴»

$$\cos^{-۱}(\frac{۱}{۳})=\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۱}{۹}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

دقت کنید که با توجه به برد $y=\cos^{-۱}x$, $(\frac{۱}{۳},\alpha)$ در ربع اول است.

۴۶۰- گزینه‌ی «۲»

$$\sin^{-۱}\frac{۱}{\sqrt{۵}}=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\quad(۱)$$

$$\cos^{-۱}\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\beta\Rightarrow\cos\beta=\frac{۲}{\sqrt{۵}}\quad(۲)$$

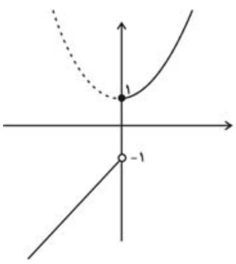
$$(۱)\ ,\ (۲)\Rightarrow\cos\alpha=\cos\beta\Rightarrow\alpha=\beta$$

بنابراین باید حاصل عبارت $\sin^{-۱}\frac{۱}{\sqrt{۵}}+\cos^{-۱}\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ یعنی $\alpha+\alpha=۲\alpha$ را به‌دست آوریم، داریم:

$$\tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{۱-(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})^۲}=\frac{۲\times\frac{\frac{۱}{\sqrt{۵}}}{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}}{۱-\left(\frac{\frac{۱}{\sqrt{۵}}}{\frac{۲}{\sqrt{۵}}}\right)^۲}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۲\alpha=\tan^{-۱}\frac{۴}{۳}$$

مفهوم حد - قضایای حد و قضیه‌ی فشردگی

۴۶۱- ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



الف) خیر، با توجه به نمودار اگر x با مقادیر بیش از صفر به آن نزدیک شود آن‌گاه مقدار تابع به ۱ و اگر x با مقادیر کم‌تر از صفر به آن نزدیک شود آن‌گاه مقدار تابع به ۱- نزدیک می‌شود. یعنی با نزدیک شدن x به صفر مقدار تابع به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود.

ب) مطابق شکل با نزدیک شدن مقدار x به (۳-) مقدار تابع به (۷-) نزدیک می‌شود. حال داریم:

$$|x-(-۳)|=۰/۱\Rightarrow|x+۳|=۰/۱\ ,\ |f(x)-(-۷)|=|۲x-۱+۷|=|۲x+۶|=۲|x+۳|=۲\times۰/۱=۰/۲$$

$$|x-(-۳)|=۰/۰۱\Rightarrow|x+۳|=۰/۰۱$$

$$|f(x)-(-۷)|=|۲x-۱+۷|=|۲x+۶|=۲|x+۳|=۲\times۰/۰۱=۰/۰۲$$

-۴۶۲

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۱$

پ) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$

ت) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)=-۳$

ث) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)=۱$

-۴۶۳

الف) تابع در $x=a$ حد ندارد زیرا حد راست و چپ تابع در این نقطه با هم برابر نیستند.

ب) تابع در $x=a$ دارای حد است.

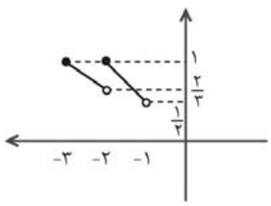
پ) تابع در $x=a$ حد ندارد زیرا $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=۰$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

-۴۶۴

نمودار تابع را در بازه‌ی (۱- و ۳-] رسم می‌کنیم.

$$-۳\le x<-۲ \Rightarrow [x]=-۳ \Rightarrow y=\frac{x}{-۳}$$

$$-۲\le x<-۱ \Rightarrow [x]=-۲ \Rightarrow y=\frac{x}{-۲}$$



با توجه به نمودار $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x)=\frac{۲}{۳}$, $\lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x)=۱$

چون حد چپ و راست تابع در نقطه‌ی $x=-۲$ با هم برابر نیستند پس تابع f در $x=-۲$ حد ندارد.

-۴۶۵

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^n-۱}{x^m-۱}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}$$

$$\to \lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+...+۱)}{(x-۱)(x^{m-۱}+x^{m-۲}+...+۱)}=\frac{\overbrace{(۱+۱+...+۱)}^{n\ \text{تا}}}{\underbrace{(۱+۱+...+۱)}_{m\ \text{تا}}}=\frac{n(۱)}{m(۱)}=\frac{n}{m}$$

-۴۶۶

ابتدا دامنه‌ی عبارت را پیدا می‌کنیم:

$$[x-۵]=۰ \Rightarrow ۰\le x-۵<۱ \Rightarrow ۵\le x<۶ \Rightarrow D_f=R-[۵,۶)$$

پس اگر $x\to ۵^+$ مقادیر بیش از ۵ برای تابع تعریف نشده است پس حد مورد نظر وجود ندارد.

-۴۶۷

با فرض $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)=L$ و با استفاده از قضایای حد داریم: (اگر $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)\ne\frac{۱}{۳}$)

$$\lim_{x\to -۲}\frac{f(x)-۲x}{۱-۳f(x)}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{\lim\limits_{x\to -۲} f(x)-۲(-۲)}{۱-۳\lim\limits_{x\to -۲} f(x)}=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{L+۴}{۱-۳L}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳L+۱۲=۱-۳L\Rightarrow ۶L=-۱۱\Rightarrow L=\frac{-۱۱}{۶}$$

-۴۶۸

حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{[x]+[-x]}{[x]-۲}=\frac{[۳^+]+[-۳^-]}{[۳^+]-۲}=\frac{۳+(-۴)}{۳-۲}=\frac{-۱}{۱}=-۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{[x]+[-x]}{[x]-۲}=\frac{[۳^-]+[-۳^+]}{[۳^-]-۲}=\frac{۲+(-۳)}{۲-۲}=\frac{-۱}{۰}$ وجود ندارد

-۴۶۹

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۲ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^+} \left|x^۲-۵x\right|+a=۲ \Rightarrow |-۶|+a=۲ \Rightarrow a=-۴ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲ \Rightarrow \dfrac{۲a+b}{۶-b}=۲ \Rightarrow \dfrac{۲(-۴)+b}{۶-b}=۲ \Rightarrow -۸+b=۱۲-۲b \Rightarrow ۳b=۲۰ \Rightarrow b=\dfrac{۲۰}{۳} \end{cases}$$

-۴۷۰ الف) طبق قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to ۰}(۱-\tan x)=\lim_{x\to ۰}\cos^۲ x=۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۰}(f(x)-۲)=۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} f(x)=۳ \Rightarrow \lim_{x\to ۰}\frac{۳-۵x}{f(x)}=\frac{۳-۵(۰)}{\lim\limits_{x\to ۰} f(x)}=\frac{۳}{۳}=۱$$

ب) می‌دانیم همواره $-۱\le \sin\dfrac{۱}{x-۳}\le ۱$ زمانی‌که $x\to ۳^+$ آن‌گاه $x^۲-۹>۰$

پس $-(x^۲-۹)\le (x^۲-۹)\sin\dfrac{۱}{x-۳}\le (x^۲-۹)$

و اگر $x\to ۳^-$ آن‌گاه $x^۲-۹<۰$ پس: $(x^۲-۹)\le (x^۲-۹)\sin\dfrac{۱}{x-۳}\le -(x^۲-۹)$

در هر دو حالت $\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۹)=\lim\limits_{x\to ۳}-(x^۲-۹)=۰$ پس طبق قضیه‌ی فشردگی داریم: $\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۹)\sin\dfrac{۱}{x-۳}=۰$.

-۴۷۱ گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=-۲\ ,\ \lim_{x\to(-۲)^+} f(x)=۳\ ,\ f(-۲)=۰ \Rightarrow \lim_{x\to(-۲)^-} f(x)+\lim_{x\to(-۲)^+} f(x)+f(-۲)=-۲+۳+۰=۱$$

-۴۷۲ گزینه‌ی «۴»

$\lim\limits_{x\to ۰}\sin\dfrac{۱}{x}$ وجود ندارد زیرا اگر $x\to ۰$، مقدار مشخصی برای $\sin\dfrac{۱}{x}$ به دست نمی‌آید و همواره $-۱\le \sin\dfrac{۱}{x}\le ۱$.

-۴۷۳ گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to\frac{-\pi}{۶}} \cot(x-\frac{۲\pi}{۳})=\cot(\frac{-\pi}{۶}-\frac{۲\pi}{۳})=\cot(\frac{-۵\pi}{۶})=-\cot\frac{۵\pi}{۶}=-\cot(\pi-\frac{\pi}{۶})=\cot\frac{\pi}{۶}=\sqrt{۳}$$

-۴۷۴ گزینه‌ی «۴»

وقتی $x\to \dfrac{-۱}{۵}^-$ یعنی $x<\dfrac{-۱}{۵}$ و $\dfrac{۱}{x}>-۵$ پس $\left[\dfrac{۱}{x}\right]=-۵$

-۴۷۵ گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to ۴^+}\left[\frac{x}{۲}\right]-[-۲x]=\left[\frac{۴^+}{۲}\right]-[-۲(۴^+)]=[۲^+]-[-۸^-]=۲-(-۹)=۱۱ \\ &\lim_{x\to ۴^-}\left[\frac{x}{۲}\right]-[-۲x]=\left[\frac{۴^-}{۲}\right]-[-۲(۴^-)]=[۲^-]-[-۸^+]=۱-(-۸)=۹ \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۱۱+۹=۲۰$$

-۴۷۶ گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{[x]^۲-۹}{x^۲-۹}=\frac{[۳^+]^۲-۹}{(۳^+)^۲-۹}=\frac{۹-۹}{۹^+-۹}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰$$

-۴۷۷ گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(۲ax+۱)=-۲a+۱$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(۲x^۲-a)=۲-a \Rightarrow (-۲a+۱)-(۲-a)=۲ \Rightarrow -۲a+۱-۲+a=۲ \Rightarrow -a=۳ \Rightarrow a=-۳$$

-۴۷۸ گزینه‌ی «۲» چون $|f|\le ۱$ یعنی f تابعی کراندار است که در هیچ نقطه‌ای حد هم ندارد. پس تابع $(x^۲-۴)f(x)$ زمانی دارای حد است که $x^۲-۴=۰$ یعنی در $x=\pm ۲$ حد تابع صفر است. تابع $(x^۲-۴)f(x)$ در هیچ نقطه‌ی دیگری دارای حد نیست.

۴۷۹- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to ۲^-} fof(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(f(x))$$

وقتی $x\to ۲^-$ آن‌گاه $f(x)\to ۰^+$ پس با جای‌گذاری داریم:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(f(x))=\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۳$$

۴۸۰- گزینه‌ی «۲» برای محاسبه‌ی حد راست تابع $f(x^۲-x)$ در $x=۰$ ابتدا علامت $x^۲-x$ را در همسایگی راست $x=۰$ بررسی می‌کنیم:

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$x^۲-x$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

بنابراین در همسایگی راست $x=۰$، مقدار $x^۲-x$ منفی است. پس طبق فرض مسئله داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x^۲-x)=\lim_{x\to ۰^+}(-\sqrt{۴+x^۲-x})=-\sqrt{۴}=-۲$$

رفع ابهام - پیوستگی در نقطه

۴۸۱-

الف) $x\to ۰^-\Rightarrow |x|=-x\Rightarrow \lim_{x\to ۰^-}\dfrac{x-۲x}{۲x-(-x)}=\lim_{x\to ۰^-}\dfrac{-x}{۳x}=\dfrac{-۱}{۳}$

ب) $\lim_{x\to -۳}\dfrac{x^۲-۹}{x^۳+۲۷}=\lim_{x\to -۳}\dfrac{(x-۳)(x+۳)}{(x+۳)(x^۲-۳x+۹)}=\lim_{x\to -۳}\dfrac{x-۳}{x^۲-۳x+۹}=\dfrac{-۶}{۲۷}=\dfrac{-۲}{۹}$

۴۸۲-

الف) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{x+\sqrt[۳]{x}}{x^۲-۲\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}{\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{x^۵}-۲)}=\lim_{x\to ۰}\dfrac{\sqrt[۳]{x^۲}+۱}{\sqrt[۳]{x^۵}-۲}=\dfrac{-۱}{۲}$

ب) $\lim_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{x+۱}-۲}{x^۲-۹}\times\dfrac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲}=\lim_{x\to ۳}\dfrac{x+۱-۴}{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}=\lim_{x\to ۳}\dfrac{۱}{(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}=\dfrac{۱}{۶\times ۴}=\dfrac{۱}{۲۴}$

۴۸۳-

الف) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos ۲x}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\dfrac{۲\sin^۲ x}{\sin^۲ x}=۲$

ب) $\lim_{x\to ۰}\dfrac{\cos x-\cos ۳x}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\dfrac{-۲\sin\dfrac{x+۳x}{۲}\sin\dfrac{x-۳x}{۲}}{\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\dfrac{-۲\sin ۲x\times(-\sin x)}{\sin^۲ x}$

$=\lim_{x\to ۰}\dfrac{۲\sin ۲x}{\sin x}=\lim_{x\to ۰}\dfrac{۴\sin x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to ۰} ۴\cos x=۴$

۴۸۴-

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۴x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۲\cos^۲ x}{۲\sin ۲x\times\cos ۲x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۲\cos^۲ x}{۴\sin x\cos x\cos ۲x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۲\cos x}{۴\sin x\cos ۲x}=\frac{۲\times ۰}{۴\times ۱\times(-۱)}=۰$$

۴۸۵-

$$x-\frac{\pi}{۴}=t\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{۴}\ ,\ t\to ۰$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{۱-۲\sin^۲ x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos ۲x}{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos(۲t+\frac{\pi}{۲})}{\sin t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-\sin ۲t}{\sin t}=\lim_{t\to ۰}\frac{-۲\sin t\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to ۰}(-۲\cos t)=-۲$$

۴۸۶- با توجه به اتحاد $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$، صورت و مخرج کسر را در $\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱$ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^۲-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(x+۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{(x+۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}=\frac{۱}{۲\times ۳}=\frac{۱}{۶}$$

$$\frac{R'_T}{R}=\frac{۸R+\frac{R}{۲}}{R}=۸/۵$$

نکته: وقتی حجم سیمی ثابت بماند در اثر کشیده شدن سیم اگر قطر مقطع $\frac{۱}{n}$ شود، طول سیم $n^{۲}$ برابر می‌شود.

۶۳۵- گزینه‌ی «۴» با توجه به ثابت بودن مقاومت در دو حالت داریم:

$$\frac{P_۲}{P_۱}=(\frac{V_۲}{V_۱})^{۲}\Rightarrow\frac{P_۲}{P_۱}=(\frac{۲۰۰}{۲۴۰})^{۲}\Rightarrow P_۲=\frac{۲۵}{۳۶}P_۱$$

$$\Delta P=P_۲-P_۱=\frac{۲۵}{۳۶}P_۱-P_۱=\frac{-۱۱}{۳۶}P_۱$$

$$\frac{\Delta P}{P_۱}\times۱۰۰=\frac{-\frac{۱۱}{۳۶}P_۱}{P_۱}\times۱۰۰\simeq۳۰٪$$

۶۳۶- گزینه‌ی «۴»

$$P=RI^{۲}\Rightarrow R=\frac{P}{I^{۲}}\Rightarrow R=\frac{۶۰۰}{۵^{۲}}=۲۴\Omega$$

۶۳۷- گزینه‌ی «۲» با توجه به ثابت بودن جرم، حجم مقاومت نیز ثابت می‌ماند بنابراین داریم:

$$m_۲=m_۱$$

$$A_۲=\frac{۱}{۴}A_۱ \qquad V_۲=V_۱\Rightarrow L_۲A_۲=L_۱A_۱\Rightarrow L_۲\frac{۱}{۴}A_۱=L_۱A_۱\Rightarrow\frac{L_۲}{L_۱}=۴$$

$$\frac{R_۲}{R_۱}=\frac{\rho_۲}{\rho_۱}\times\frac{L_۲}{L_۱}\times\frac{A_۱}{A_۲}\Rightarrow\frac{R_۲}{۱۰}=۱\times۴\times\left(\frac{A_۱}{\frac{۱}{۴}A_۱}\right)\Rightarrow R_۲=۱۶۰\Omega$$

۶۳۸- گزینه‌ی «۲» با توجه به این‌که جرم A، ۳ برابر جرم B است حجم A نیز ۳ برابر حجم B خواهد بود. بنابراین داریم:

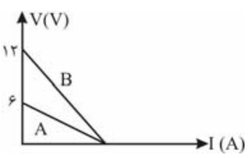
$$D_A=۲D_B$$

$$V_A=۳V_B\Rightarrow L_AA_A=۳L_BA_B\Rightarrow L_A\frac{\pi}{۴}D_A^{۲}=۳L_B\frac{\pi}{۴}D_B^{۲}\Rightarrow L_A\times۴D_B^{۲}=۳L_BD_B^{۲}$$

$$\frac{L_A}{L_B}=\frac{۳}{۴}$$

$$\frac{R_A}{R_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}\times\frac{L_A}{L_B}\times(\frac{D_B}{D_A})^{۲}\Rightarrow\frac{R_A}{R_B}=۱\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۱۶}$$

۶۳۹- گزینه‌ی «۲» چون شیب هر نمودار معرف مقاومت درونی مولد آن است، می‌توان نوشت:



$$\frac{r_B}{r_A}=\frac{\text{شیب خط B}}{\text{شیب خط A}}=\frac{\frac{-۱۲}{I_۱}}{\frac{-۶}{I_۱}}\Rightarrow\frac{r_B}{r_A}=۲$$

۶۴۰- گزینه‌ی «۱» در حالتی که لامپ به ولتاژ ۲۲۰V وصل می‌شود توان مصرفی آن ۱۵۰W بود بنابراین داریم:

$$P=۱۵۰W=۰/۱۵Kw$$

$$t=۱۰h$$

$$U=P.t\Rightarrow U=۰/۱۵\times۱۰=۱/۵Kwh$$

مقاومت و مدار تک حلقه

۶۴۱- با توجه به رابطه‌ی شدت جریان در مدار تک حلقه با یک مولد داریم:

$$R_۱=۸\Omega\ ,I_۱=۱A$$

$$R_۲=۱۲\Omega\ ,I_۲=۰/۷۵A\quad,\quad\varepsilon=?\quad,\quad r=?$$

$$I=\frac{\varepsilon}{R+r}\Rightarrow\begin{cases}۱=\frac{\varepsilon}{۸+r}\Rightarrow۸+r=\varepsilon\\ ۰/۷۵=\frac{\varepsilon}{۱۲+r}\Rightarrow۹+۰/۷۵r=\varepsilon\end{cases}\Rightarrow r=۴\Omega\quad,\quad\varepsilon=۱۲V$$

۶۴۲- الف) چون $\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲$ است بنابراین جهت جریان در مدار ساعت‌گرد می‌باشد و داریم:

$$I = \frac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲}{R_T + \sum r} = \frac{۱۸ - ۶}{۱۶ + ۲} = \frac{۲}{۳}A$$

ب) با حرکت از نقطه‌ی **A** به **B** و جمع جبری پتانسیل اجزای مدار داریم:

$$V_A - IR_۱ - IR_۲ = V_B \Rightarrow V_A - V_B = \frac{۱۶}{۳}V$$

۶۴۳- چون $\varepsilon_۱ > \varepsilon_۲$ است، جهت جریان در مدار پاد ساعت‌گرد است.

$$I = \frac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲}{R_T + \sum r} = \frac{۱۸ - ۶}{۱۰ + ۲} = \frac{۱۲}{۱۲} = ۱A$$

الف) انرژی مصرفی در مقاومت ۵ اهمی در مدت ۱۰ ثانیه برابر است با:

$$U = RI^۲t = ۵ \times (۱)^۲ \times ۱۰ = ۵۰J$$

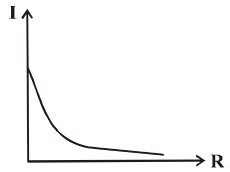
ب) توان تلف شده در مولد $\varepsilon_۱$ برابر است با:

$$P_{\text{تلف‌شده}} = r_۱I^۲ = ۱ \times ۱ = ۱W$$

ج) با حرکت از نقطه‌ی **B** به **A** در جهت جریان و جمع جبری پتانسیل اجزای مدار داریم:

$$V_B - IR_۱ - Ir_۱ + \varepsilon_۱ = V_A \Rightarrow V_A - V_B = ۱۴V$$

۶۴۴- الف) ولت‌سنج، اختلاف پتانسیل دو سر مولد و آمپرسنج جریان عبوری از مدار را نشان می‌دهد.



بنابراین با توجه به رابطه‌ی $I = \frac{\varepsilon}{R + r}$، اگر مقاومت مدار را افزایش دهیم، جریان عبوری از مدار کاهش می‌یابد و آمپرسنج عدد کوچک‌تری را نشان می‌دهد و بنا به رابطه‌ی $V = \varepsilon - Ir$، با کاهش جریان عددی که ولت‌سنج نشان می‌دهد، افزایش می‌یابد.

(ب) با افزایش مقاومت، جریان مدار کاهش می‌یابد.

(ج) اگر مقاومت مدار خیلی زیاد شود $(R \to \infty)$، جریان عبوری از مدار صفر خواهد شد و بنابر رابطه‌ی $V = \varepsilon - Ir$ و $Ir = ۰$، ولت‌سنج نیروی محرکه‌ی مولد را نشان می‌دهد $(V = \varepsilon)$

۶۴۵- با بستن کلید **k**، لامپ (۲) اتصال کوتاه شده و از مدار حذف می‌گردد، بنابراین چون لامپ‌ها به صورت متوالی به یک‌دیگر بسته شده‌اند، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد و بنابر رابطه‌ی $I = \frac{\varepsilon}{R_T + r}$، شدت جریان مدار افزایش می‌یابد. از طرفی بنا به رابطه‌ی $V = \varepsilon - Ir$، اختلاف پتانسیل دو سر مدار کاهش می‌یابد. و چون شدت نور به I بستگی دارد با افزایش شدت جریان (I) نور لامپ‌ها زیاد می‌شود.

۶۴۶- الف) با حرکت از نقطه‌ی **A** به **B** و جمع جبری پتانسیل اجزای مدار داریم:

$$V_A - IR_۱ - \varepsilon_۱ - Ir_۱ - \varepsilon_۲ - Ir_۲ - IR_۲ = V_B$$

$$V_A - V_B = I(R_۱ + R_۲ + r_۱ + r_۲) + \varepsilon_۱ + \varepsilon_۲ \Rightarrow V_A - V_B = ۳۵V$$

ب)

$$P_{\text{مصرفی}} = R_۱I^۲ = ۳ \times (۲)^۲ = ۱۲W$$

$$P_{\text{مصرفی}} = \varepsilon_۲I + r_۲I^۲ = ۸ \times ۲ + ۰/۵ \times (۲)^۲ = ۱۸W$$

۶۴۷- الف) جهت جریان را ساعت‌گرد در نظر می‌گیریم:

$$I = \frac{\varepsilon_۱ + \varepsilon_۲}{R_T + \sum r} = \frac{۸ + ۱۲}{۸/۵ + ۱/۵} = ۲A$$

ب)

$$V_A + \varepsilon_۲ - Ir_۲ - IR_۲ = V_B \Rightarrow V_A - V_B = ۳V$$

ج)

$$P_{\text{تولیدی}} = \varepsilon_۱I = ۱۲ \times ۲ = ۲۴W$$

$$P_{\text{مفید}} = \varepsilon_۱I - r_۱I^۲ = ۲۴ - ۱ \times ۲^۲ = ۲۰W$$

۶۴۸- الف) در جهت جریان از نقطه‌ی **E** تا **A**، شروع به حرکت کرده و پتانسیل هر جزء از مدار را جمع جبری می‌کنیم:

$$V_E - IR + \varepsilon_۱ - Ir_۱ = V_A \Rightarrow ۰ - ۱ \times ۱/۵ + ۱۲ - ۱ \times ۰/۵ = V_A \Rightarrow V_A = ۱۰V$$

ب) ابتدا مقاومت R' را محاسبه کرده و سپس انرژی تلف شده در آن را در مدت $۱۰۰S$ محاسبه می‌کنیم:

$$V_A - IR' - Ir_۲ - \varepsilon_۲ = V_E \Rightarrow ۱۰ - R' - ۱ - ۳ = ۰ \Rightarrow R' = ۶\Omega$$

$$U = R'I^۲t = ۶ \times ۱^۲ \times ۱۰۰ = ۶۰۰J$$

۶۴۹- با بستن کلید **k**، مقاومت **R** اتصال کوتاه شده و از مدار خارج می‌شود و چون دو مقاومت به صورت متوالی به هم بسته شده‌اند، مقاومت معادل مدار کاهش می‌یابد در نتیجه بنا به رابطه‌ی $I = \frac{\varepsilon}{R_T + r}$، جریان افزایش می‌یابد و آمپرسنج عدد بزرگ‌تری را نشان می‌دهد. از طرفی بنا به رابطه‌ی $V = \varepsilon - Ir$، با افزایش جریان، اختلاف پتانسیل دو سر مولد کاهش می‌یابد و بنابراین ولت‌سنج عدد کم‌تری را نشان می‌دهد.

۶۵۰- الف)

$$I_۱ = ۵A \ ,\ P_{۱\,\text{مفید}} = ۵W$$

$$I_۲ = ۴A \ ,\ P_{۲\,\text{مفید}} = ۱۲W$$

$$P_{\text{مفید}} = \varepsilon I - rI^۲ \Rightarrow \begin{cases} ۵ = ۵\varepsilon - ۲۵r \\ ۱۲ = ۴\varepsilon - ۱۶r \end{cases} \Rightarrow \varepsilon = ۱۱V \ ,\ r = ۲\Omega$$

ب) در حالتی که این باتری به یک سیم نازک وصل می‌شود R خارجی تقریباً صفر است و داریم: $I = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{۱۱}{۲}A$

وقتی دو سر باتری را به وسیله‌ی یک سیم عایق به هم وصل می‌کنیم از آن جریانی عبور نمی‌کند و ولت‌سنج، نیروی محرکه‌ی باتری را نشان می‌دهد.

$$V = \varepsilon = ۱۱V$$

۶۵۱- گزینه‌ی «۴» ابتدا شدت جریان مدار که پادساعتگرد است را به دست می‌آوریم و سپس از نقطه‌ی E تا نقطه‌ی B حرکت کرده و پتانسیل اجزای مدار را جمع جبری می‌کنیم:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۱۲}{۳+۱} = ۳A$$

$$V_E - ۲I = V_B \Rightarrow ۰ - ۲\times ۳ = V_B \Rightarrow V_B = -۶V$$

۶۵۲- گزینه‌ی «۲»

$$V = \varepsilon - Ir \Rightarrow ۸ = ۱۲ - I \times ۰/۵ \Rightarrow I = ۸A$$

$$V = IR \Rightarrow ۸ = ۸ \times R \Rightarrow R = ۱\Omega$$

ولت‌سنج، اختلاف‌پتانسیل دو سر مولد را که برابر با اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R است، نشان می‌دهد.

۶۵۳- گزینه‌ی «۳»

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} \to P = R\left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^۲$$

$$P_۱ = P_۲ \to \frac{۱۰^{-۲}\varepsilon^۲}{(۱۰^{-۲}+r)^۲} = \frac{۲۵\varepsilon^۲}{(۲۵+r)^۲} \to \frac{۱\times ۱۰^{-۱}}{۱۰^{-۲}+r} = \frac{۵}{۲۵+r} \to ۲/۵ + ۰/۱r = ۰/۰۵ + ۵r \to ۲/۴۵ = ۴/۹r$$

$$\to r = ۰/۵\Omega$$

۶۵۴- گزینه‌ی «۳» اگر کلید k بسته باشد مقاومت معادل مدار برابر $R_۱ = \frac{۱/۵ \times ۳}{۴/۵} = ۱\Omega$ و اگر باز باشد برابر $R_۲ = ۱/۵\Omega$ است. بنابراین با استفاده از رابطه‌های $V = RI$ و $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ می‌توان نوشت:

$$V = \frac{R\varepsilon}{R+r} \Rightarrow \begin{cases} V_۱ = \frac{۱\times\varepsilon}{۱+r} \\ V_۲ = \frac{۱/۵\times\varepsilon}{۱/۵+r} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲} = \frac{۱/۵+r}{(۱+r)\times ۱/۵} \xrightarrow{\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{۴}{۵}}$$

$$\frac{۴}{۵} = \frac{۱/۵+r}{(۱+r)\times ۱/۵} \Rightarrow ۶ + ۶r = ۷/۵ + ۵r \Rightarrow r = ۱/۵\Omega$$

۶۵۵- گزینه‌ی «۳»

$$V = IR = \frac{\varepsilon R}{R+r} \ ,\ V_۲ = \frac{۱}{۳}V_۱ \Rightarrow \frac{R_۲\varepsilon}{R_۲+r} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{R_۱\varepsilon}{R_۱+r}\right) \xrightarrow[\text{حذف می‌شود}]{\varepsilon \text{ از طرفین}}$$

$$\frac{R_۲}{R_۲+۲} = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱۵}{۱۵+۲}\right) \Rightarrow ۱۷R_۲ = ۵R_۲ + ۱۰ \Rightarrow R_۲ = \frac{۵}{۶}\Omega$$

۶۵۶- گزینه‌ی «۴» ولت‌سنجی که به طور متوالی در مدار قرار می‌گیرد چون مقاومت زیادی دارد باعث می‌شود که شدت جریان مدار تقریبا برابر صفر شود. پس اختلاف پتانسیل مقاومت‌های ۵ اهمی برابر صفر شده و در نتیجه عددی که ولت سنج نشان می‌دهد برابر اختلاف پتانسیل دوسر مولد می‌شود. پس داریم:

(عدد ولت سنج) = (اختلاف پتانسیل دو سرمولد) $\Rightarrow V = \varepsilon - Ir \Rightarrow V = ۱۲ - ۰\times ۲ \Rightarrow V = ۱۲$ ولت

۶۵۷- گزینه‌ی «۱»

$$V = \varepsilon - Ir = ۶ - ۲ = ۴V$$

$$V = IR \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{۴}{۴} = ۱\,A$$

$$Ir = ۲ \Rightarrow r = \frac{۲}{۱} = ۲\Omega$$

۶۵۸- گزینه‌ی «۳»

$r = ۰/۵\Omega \quad , \quad R_۱ = ۴\Omega \quad , \quad R_۲ = ۳\Omega \qquad \frac{I_۲}{I_۱} = ?$

با توجه به رابطه‌ی شدت جریان در مدار تک‌حلقه داریم: $I = \frac{\varepsilon}{R+r} \Rightarrow \begin{cases} I_۱ = \frac{\varepsilon}{R_۱ + r} \xrightarrow[r=۰/۵\Omega]{R_۱=۴\Omega} I_۱ = \frac{\varepsilon}{۴+۰/۵} \\ I_۲ = \frac{\varepsilon}{R_۲ + r} \xrightarrow[r=۰/۵\Omega]{R_۲=۳\Omega} I_۲ = \frac{\varepsilon}{۳+۰/۵} \end{cases} \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱} = \frac{۴/۵}{۳/۵} = \frac{۹}{۷}$

۶۵۹- گزینه‌ی «۲»

با کاهش مقاومت R، بنا به رابطه‌ی $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$ جریان در مدار افزایش می‌یابد و آمپرسنج عدد بزرگ‌تری را نشان می‌دهد و بنا به رابطه‌ی $V = \varepsilon - Ir$، با افزایش جریان، اختلاف پتانسیل دو سر مولد کاهش می‌یابد و بنابراین ولت‌سنج عدد کم‌تری را نشان می‌دهد.

۶۶۰- گزینه‌ی «۳»

ابتدا شدت جریان مدار را محاسبه می‌کنیم:

$R_T = R + ۲R = ۳R \text{ ، } I = \frac{\varepsilon}{R_T + r} = \frac{۶}{۳R + ۰} = \frac{۲}{R}A$

و سپس از نقطه‌ی B و در جهت جریان به نقطه‌ی O می‌رویم و تغییر پتانسیل هر جزء را می‌نویسیم. با توجه به این که نقطه‌ی O به زمین وصل است. $V_۰ = ۰$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$V_B - ۲RI = V_O \Rightarrow V_B - ۲R \times \frac{۲}{R} = ۰ \Rightarrow V_B = ۴$ ولت

به هم بستن مقاومت‌ها و مدارهای چند حلقه

۶۶۱- (الف) مقاومت $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ به صورت موازی به یکدیگر متصل شده‌اند و لذا مقاومت معادل آن‌ها برابر است با:

$\frac{۱}{R'} = \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳} + \frac{۱}{R_۴} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow R' = ۲\Omega$

مقاومت معادل R' با مقاومت $R_۱$ به صورت متوالی به یکدیگر بسته شده است و لذا داریم:

$R_T = R_۱ + R' \Rightarrow R_T = ۳ + ۲ = ۵\Omega$

(ب) برای محاسبه‌ی شدت جریان کل مدار داریم:

$I_{کل} = \frac{\Sigma\varepsilon}{R_T + \Sigma r} = \frac{۶+۶}{۵ + (۰/۵ + ۰/۵)} = ۲A$

و برای محاسبه‌ی جریان عبوری از شاخه‌ها می‌توان نوشت:

$\frac{I_۲}{I_{۳,۴}} = \frac{R_{۳,۴}}{R_۲} \Rightarrow \frac{I_۲}{I_{۳,۴}} = \frac{۳}{۶} \quad , \quad I_۲ + I_{۳,۴} = ۲A \Rightarrow I_۲ = \frac{۲}{۳}A$

$\frac{I_۴}{I_۲} = \frac{R_۲}{R_۴} \Rightarrow \frac{I_۴}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۶}{۱۲} \Rightarrow I_۴ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}A$

$I_۲ + I_۴ + I_۳ = ۲A \Rightarrow \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} + I_۳ = ۲A \Rightarrow I_۳ = ۱A$

(ج) $V_۱ = I_{کل} R_۱ = ۲ \times ۳ = ۶\ V$

(د) $P_۲ = I_۲^۲ R_۲ = (\frac{۲}{۳})^۲ \times ۶ = \frac{۴}{۹} \times ۶ = \frac{۲۴}{۹}W$

(هـ) $P_{تولیدی} = \varepsilon I_{کل} = (۶+۶) \times ۲ = ۲۴W$

(و) بنابر تعریف بازده‌ی یک مولد، نسبت توان مفید (توان مصرفی کل در مدار) به توان تولیدی آن است و داریم:

$Ra = \frac{P_{مفید}}{P_{تولیدی}} = \frac{R_T I^۲}{\varepsilon I} = \frac{۵ \times ۲^۲}{۱۲ \times ۲} = \frac{۵}{۶}$

۶۶۲- (الف) ابتدا با توجه به مقاومت $R_۲$ و ولتاژ دو سر آن جریان $I_۲$ را به دست می‌آوریم:

$I_۲ = \frac{V}{R_۲} = \frac{۴}{۲} = ۲A$

چون $R_۲$ و $R_۳$ متوالی هستند.

$I_۳ = ۲A$

با توجه به قانون تقسیم جریان در مقاومت‌های موازی داریم:

$\frac{I_۴}{I_۲} = \frac{R_۲ + R_۳}{R_۴} \Rightarrow \frac{I_۴}{۲} = \frac{۲+۴}{۱۲} \Rightarrow I_۴ = ۱A$

شدت جریان کل عبوری برابر است با:

$I_T = I_۱ + I_۲ + I_۳ \Rightarrow I_T = ۲ + ۲ + ۱ = ۵A$