



منطق و گزاره

کارت ۱

فصل ۱

منطق ریاضی: عده‌ای به آن منطق نمادین می‌گویند که همان دستور زبان ریاضی یا مطالعه‌ی ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود.

استدلال: استدلال از چند جمله‌ی خبری به دست می‌آید که شامل مفروضات استدلال و نتیجه‌ی استدلال است.

گزاره: به جمله‌ی خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست باشد، گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره‌ی درست را با «د» یا «T» و ارزش گزاره‌ی نادرست را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: یک استدلال ریاضی مثال بنزید و مفروضات و نتیجه‌ی آن را مشخص کنید.

مثال ۲: چند جمله‌ی زیر گزاره است؟

(آ) لطفاً درس‌هایتان را مطالعه کنید.

(ب) پرتقال از سیب خوش‌مزه‌تر است.

(پ) آیا عدد ۵ زوج است؟

(ت) $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

(ث) ۲ از ۵ بزرگ‌تر است.



ه) هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



منطق و گزاره

کارت ۱

فصل ۱

پاسخ ۱: در بازی نیمه‌نهایی بین ایران و ژاپن برنده به فینال راه پیدا می‌کند. ژاپن به فینال نرسید. نتیجه: ایران ژاپن را برده است. در این استدلال دو جمله‌ی خبری اول مفروضات مسئله هستند و جمله‌ی خبری سوم نتیجه‌ی استدلال است.

پاسخ ۲: گزینه‌ی «۳»؛ موارد (ت)، (ث) و (ه) گزاره هستند. اگرچه درستی یا نادرستی آن‌ها مشخص نباشد ولی تنها یک ارزش دارند.

در مورد (آ) جمله دستوری در مورد (ب) ارزش جمله سلیقه‌ای و در مورد (پ) جمله پرسشی است. بنابراین هیچ یک گزاره محسوب نمی‌شوند.



جدول ارزش گزاره‌ها

کارت ۲
فصل ۱

p

د

ن

* هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است. بنابراین هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول مقابل دارد.

ارزش گزاره‌های ترکیبی: برای دو گزاره‌ی p و q طبق جدول مقابل چهار حالت وجود دارد.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

مثال ۱: جدول ارزش سه گزاره‌ای را رسم کنید.

مثال ۲: برای ۵ گزاره، جدول ارزش گزاره‌ها چند حالت دارد؟

۳۲ (۴) ۲۵ (۳) ۱۶ (۲) ۸ (۱)



مثال ۳: اگر به n گزاره یک گزاره‌ی دیگر اضافه شود به جدول ارزش گزاره‌ها ۸ حالت اضافه می‌شود. مقدار n کدام است؟

۶ (۴

۵ (۳

۴ (۲

۳ (۱



جدول ارزش گزاره‌ها

کارت ۲
فصل ۱

پاسخ ۱:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

پاسخ ۲: گزینه‌ی «۴»؛ هر گزاره دو ارزش دارد، پس برای ۵ گزاره تعداد حالت ارزش‌دهی برابر است با:

$$\text{حالت } 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

پاسخ ۳: گزینه‌ی «۱»

$$2^{n+1} = 2^n + 8$$

$$\Rightarrow 2^{n+1} - 2^n = 8 \Rightarrow 2^n (2 - 1) = 8$$

$$\Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$$



گزاره‌نما

کارت ۳ فصل ۱

گزاره‌نما: هر جمله‌ی خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

مثال ۱: در گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس احتمال آن که پیشامد A رخ دهد $\frac{1}{2}$ است.» به جای A چه عبارتی قرار گیرد تا گزاره‌های درست به دست آید؟ (دو مثال بزنید).

مثال ۲: گزاره‌نمای « $a^3 \geq a^2$ » به ازای کدام مقدار ارزش نادرست دارد؟

(۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}-1$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

مثال ۳: کدام گزینه یک گزاره‌نما است؟

(۱) معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + c = 0$ دو ریشه دارد.

(۲) معادله‌ی $x^2 = 1$ دو ریشه‌ی قرینه دارد.

(۳) $3x = 6$ یک ریشه دارد.



۴) توان دوم عدد (-2) برابر 4 است.



گزاره‌نما

کارت ۳
فصل ۱

پاسخ ۱: $A = \{2, 4, 6\}$ یا $A = \{1, 2, 3\}$

تذکره: مجموعه‌های A باید ۳ عضو از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ را داشته باشد تا گزاره‌نما درست باشد.

پاسخ ۲: گزینه‌ی «۲»

زمانی ارزش گزاره‌نمای $a^3 \geq a^2$ نادرست است که $a < 1$ باشد. پس چون $1 < \sqrt{2} - 1$ است، به ازای $a = \sqrt{2} - 1$ ارزش گزاره‌نما نادرست است.

پاسخ ۳: گزینه‌ی «۱»

گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» یک گزاره هستند و می‌توان ارزش هر گزاره را تعیین کرد.





دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما

کارت ۴

فصل ۱

دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما: به مجموعه‌ی مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار داد تا این که گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

مجموعه‌ی جواب: در هر گزاره‌نما به مجموعه‌ی عضوهایی از دامنه‌ی متغیر که به ازای آن‌ها گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه‌ی جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم:

$$S \subseteq D$$

مثال ۱: دامنه‌ی متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هر یک از آن‌ها را مشخص کنید.

(آ) x مضرب ۸ است. ($D = N$)

(ب) $3x^2 - 2x - 1 = 0$. ($D = R$)

مثال ۲: در کدام گزینه دامنه‌ی متغیر و مجموعه جواب برابرند؟

(۱) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$, $D = \{1, 2, \dots, 6\}$

(۲) $D = \{-1, 0, 1\}$, $x^2 + x = 0$



۳) x عددی زوج و اول است. $D = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
 ۴) سکه را برتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = 1$ ، $D = \{ \text{پ} \}$

دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما

مجموعه‌ی جواب $S = \{8, 16, 24, \dots\}$

پاسخ ۱: آ)

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

ب)

$$\Delta = 4 - 4 \times (3) \times (-1) = 16$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{6} = 1, x_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{6} = -\frac{1}{3}$$

مجموعه‌ی جواب $S = \{-\frac{1}{3}, 1\}$

پاسخ ۲: گزینه‌ی «۱»؛ اگر $\{x\}$ به صورت $\{1\}$ یا $\{2\}$ یا $\{3\}$ یا

$\{4\}$ یا $\{5\}$ یا $\{6\}$ نوشته شود آن‌گاه

$$p(\{x\}) = \frac{1}{6} \text{ است، پس:}$$

مجموعه‌ی جواب $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = D$

مجموعه‌ی جواب سایر گزینه‌ها:



گزینه‌ی (۲): $\{-1, 0\}$

گزینه‌ی (۳): $\{2\}$

گزینه‌ی (۴): در گزینه‌ی (۴) D دو عضوی ولی مجموعه

جواب یک عضوی انقیض یک گزاره

نقیض گزاره: نقیض گزاره‌ی P به صورت $(\neg P)$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که P » می‌خوانیم. ارزش گزاره‌ی $(\neg P)$ دقیقاً خلاف ارزش گزاره‌ی P است یعنی اگر P درست باشد $\neg P$ نادرست و اگر P نادرست باشد $\neg P$ درست است.

مثال ۱: نقیض هر گزاره را بنویسید و ارزش نقیض گزاره را مشخص کنید.

(آ) مستطیلی که دو ضلع مجاور برابر دارد یک مربع است.

(ب) عدد $\frac{1}{5}$ از عدد $\frac{1}{6}$ کوچک‌تر است.

(پ) عدد $\sqrt{2}$ به توان ۲ بزرگ‌تر از خودش است.

مثال ۲: نقیض چند گزاره به درستی بیان شده است؟

(آ) گزاره: ۵ عددی اول است. نقیض گزاره: ۵ عددی غیر اول است.



(ب) گزاره: عدد حقیقی a گویاست. نقیض گزاره: عدد حقیقی a گنگ است.

(پ) گزاره: هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است. نقیض گزاره: هر متوازی‌الاضلاع یک لوزی نیست.

(ت) گزاره: تهران پایتخت ایران است. نقیض گزاره: تهران پایتخت ایران نیست.

(۱) ۱ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۴

مثال ۳: جدول ارزش گزاره‌ی $(P \rightarrow Q)$ را با گزاره‌ی P مقایسه کنید.

نقیض یک گزاره

پاسخ ۱: (آ) مستطیلی که دو ضلع مجاور برابر دارد، مربع نیست. (نادرست)

(ب) عدد $\frac{1}{5}$ از عدد $\frac{1}{6}$ کوچک‌تر نیست. (درست)

(پ) عدد $\sqrt{2}$ به توان ۲ بزرگ‌تر از خودش نیست. (نادرست)

پاسخ ۲: گزینه‌ی «۳»؛ نقیض گزاره، ارزشی خلاف ارزش گزاره دارد. (آ) گزاره ارزش درست دارد و ۵ عددی غیراول است نادرست است.



ب) اعداد حقیقی یا گویا یا گنگ هستند پس اگر $a \in \mathbb{Q}$ باشد و دارای ارزش درست باشد، گزاره‌ی عدد a گنگ است نادرست است و بر عکس.

پ) در مورد (پ) هر دو گزاره‌ی داده شده ارزش درست دارند.

ت) گزاره‌ی داده شده درست و تهران پایتخت ایران نیست نادرست است. پس موارد (آ)، (ب)، (ت) درست بیان شده است.

پاسخ ۳:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

$$\Rightarrow \square (\square p) \equiv p$$

نماد (\equiv) به معنای هم‌ارز بودن است.



ترکیب فصلی دو گزاره

کارت ۶

فصل ۱

ترکیب فصلی: هر گاه p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب $(p \vee q)$ را که به صورت $(p \vee q)$ می‌نویسند ترکیب فصلی دو گزاره می‌گویند. به رابطه‌ی منطقی (\vee) فاصل گفته می‌شود.

جدول ارزش گزاره‌ی $p \vee q$:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال: چند گزاره‌ی زیر نادرست است؟

$$(آ) \quad 2^5 = 25 \text{ یا } 5^2 = 25$$

(ب) عدد $\sqrt{3}$ گویاست یا 3^2 عددی گنگ است

(پ) یک پنجم عدد ۵ بزرگ‌تر از یک است یا $\frac{5}{4}$ بزرگ‌تر از یک است.

(ت) ۵ عددی زوج است یا ۱۵ عددی اول است.



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)



ترکیب فصلی دو گزاره

کارت ۶
فصل ۱

پاسخ: گزینه‌ی «۲»؛ در ترکیب فصلی زمانی که هر دو گزاره‌ی p و q نادرست باشند ارزش ترکیب فصلی نیز نادرست است و در بقیه‌ی موارد ارزش ترکیب درست است.

(آ) چون $2^5 = 32$ ، پس: $2^5 = 25 \equiv F$

$$5^2 = 25 \equiv T$$

$$\Rightarrow T \vee F \equiv T$$

(ب)

$$\sqrt{3} \equiv F \Rightarrow F \vee F \equiv F$$

$$3^2 = 9 \equiv F$$

(پ) یک پنجم عدد ۵ بزرگ‌تر از یک است. (نادرست) و

$$\Rightarrow T \vee F \equiv T \quad \left(\frac{5}{4} \text{ بزرگ‌تر از یک است. (درست)}\right)$$

(ت) ۵ عددی زوج است. (نادرست) ۱۵ عددی اول است. (نادرست)

$$\Rightarrow F \vee F \equiv F$$

پس دو مورد (ب) و (ت) نادرست هستند.



ترکیب عطفی دو گزاره

کارت ۷

فصل ۱

ترکیب عطفی: هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره‌ی مرکب « $p \wedge q$ » را که « p و q » خوانده می‌شود؛ ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « \wedge » عاطف گفته می‌شود.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

جدول ارزش گزاره‌ی $p \wedge q$:

مثال: ارزش چند گزاره‌ی عطفی زیر درست است؟

$$(آ) \quad 3^5 = 125 \quad \text{و} \quad 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

(ب) هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد.

(پ) $\sqrt{49}$ عددی اول است و عدد ۲ مرکب است.

(ت) عدد ۳۹ بر ۱۳ بخش‌پذیر است و یک مضرب ۵ است.



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)