

فصل اول

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

مؤلفان: فرهاد حامی، علیرضا زواره، فرهاد وفایی
ویراستار: میثم حمزه‌لویی

مجموع جمله‌های دنباله‌های حسابی و هندسی

مجموع جمله‌های دنباله‌ی حسابی

۱- در عبارت‌های زیر، حاصل را به‌دست آورید.

۱) $1 + 2 + 3 + \dots + n \quad (n \in \mathbb{N})$

راه‌های حل: دنباله‌ی داده شده، یک دنباله‌ی حسابی است با جمله‌ی اول $a = 1$ و قدر نسبت $d = 1$. از رابطه‌ی $S_n = na + \frac{n(n-1)}{2} \times d$ استفاده کنید.

۲) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) \quad (n \in \mathbb{N})$

راه‌های حل: دنباله‌ی داده شده، یک دنباله‌ی حسابی است با جمله‌ی اول $a = 1$ و قدر نسبت $d = 2$.

۳) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 98^2 - 99^2 + 100^2$

راه‌های حل: با استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت داده شده را به مجموع جملات دنباله‌ی حسابی تبدیل کنید.

۴) $7 + 11 + 15 + \dots + 35$

راه‌های حل: دنباله‌ی داده شده یک دنباله‌ی حسابی است با جمله‌ی اول $a = 7$ و قدر نسبت $d = 4$. ابتدا تعداد جملات را به‌دست آورده، سپس مجموع آن‌ها را حساب کنید.



$$5) 3 + (3 + 0/25) + (3 + 0/5) + \dots + (3 + 2/5)$$

راهنمای حل: ابتدا قدر نسبت دنباله را بیابید و سپس با استفاده از فرمول $a_n = a + (n-1)d$ ، تعداد جملات را بیابید و پس از آن، از فرمول مجموع استفاده کنید.

۲- در دنباله‌های حسابی زیر، با توجه به شرایط داده شده، مجموع جملات (S_n) موردنظر را بیابید:

$$1) a = 4, d = 2, n = 10$$

راهنمای حل: از فرمول $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ استفاده کنید.

$$2) a_7 = 8, a_8 = 9/5, n = 15$$

راهنمای حل: ابتدا قدر نسبت را با داشتن a_7 و a_8 بیابید، سپس از فرمول S_n استفاده کنید.

۳- مجموع همه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۵ را بیابید.

راهنمای حل: ابتدا اولین و آخرین عدد دو رقمی مضرب ۵ را بیابید و سپس با یافتن قدر نسبت از رابطه $a_n = a + (n-1)d$ تعداد جملات را پیدا کنید و در نهایت از فرمول $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$ استفاده کنید.

۴- مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که باقی مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۱۱ برابر ۷ باشد را بیابید.

راهنمای حل: اگر باقی مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی a بر b برابر c باشد، آن‌گاه $a = bk + c$ ، $(k \in W)$ ، باید اولین و آخرین عدد را پیدا کرده و سپس تعداد جملات را بیابید و در نهایت از فرمول S_n استفاده کنید.

۵- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای $a_n = 3 - 4(n-1)$ است، مجموع ۹ جمله‌ی اول آن را بیابید.

راهنمای حل: جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به صورت کلی $a_n = A + Bn$ داریم که در آن، B قدرنسبت دنباله است.

۶- در یک دنباله‌ی عددی مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌ی $S_n = n(\Delta n + 1)$ به دست می‌آید. جمله‌ی نهم را بیابید.

راهنمای حل: در یک دنباله‌ی عددی $a_n = S_n - S_{n-1}$ ، که در آن مجموع n جمله‌ی اول و S_{n-1} مجموع $(n-1)$ جمله‌ی اول و a_n جمله‌ی n ام است.

۷- در دنباله‌ی حسابی $\dots, 14, 10, 6, 2$ حداقل چند جمله را با هم جمع کنیم تا عدد حاصل از ۲۰۰ بیش‌تر شود؟

راهنمای حل: جمله‌ی اول و قدر نسبت را بیابید و نامعادله‌ی $S_n > 200$ را برحسب n حل کنید و کوچک‌ترین مقدار n را بیابید.

۸- جمله‌ی یازدهم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۵۰ است. مجموع ۲۱ جمله‌ی اول این دنباله را بیابید.

راهنمای حل: می‌دانیم $a_{11} = 50$ پس $a_1 + 10d = 50$ ، حال رابطه‌ی مجموع ۲۱ جمله‌ی اول را نوشته و در آن رابطه، $a_1 + 10d$ را ایجاد کرده و به جای آن عدد ۵۰ قرار دهید.

۹- اگر مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی $S_n = 3n^2 - 8n$ باشد، قدر نسبت این دنباله را به دست آورید.

راهنمای حل: می‌دانیم $a_1 = S_1$ ، $a_2 = S_2 - S_1$ و $d = a_2 - a_1$.

۱۰- پدر بزرگ ارسلان هشت نوه دارد. پدر بزرگ او به کوچکترین نوه‌ی خود ۴ سکه‌ی ۵۰ تومانی و به نوه‌های دیگر به ترتیب سن از کوچک به بزرگ ۲ سکه بیشتر از قبلی عیدی می‌دهد. در ضمن هیچ‌کدام از نوه‌ها هم‌سن نیستند. پدر بزرگ ارسلان در مجموع چند تومان عیدی به نوه‌های خود می‌دهد؟

راهنمای حل: مبلغ عیدی‌ای که پدر بزرگ ارسلان به هر یک از نوه‌های خود می‌دهد یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a = 4 \times 50 = 200$ و قدر نسبت $d = 2 \times 50 = 100$ می‌باشد.

۱۱- یک کارمند در ماه اول سال ۳۰۰۰۰۰ تومان حقوق می‌گیرد. هر ماه ۱۰ هزار تومان به حقوق او اضافه می‌شود. مجموع حقوق دریافتی این کارمند در سال اول را بیابید.

راهنمای حل: حقوق دریافتی این کارمند در هر ماه یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a = 300000$ و قدر نسبت $d = 10000$ می‌باشد. باید مجموع دوازده جمله‌ی اول را حساب کنید.



۱۲- در یک جلسه، تعدادی دانش آموز و معلم شرکت دارند. معلمین با دانش آموزان به این صورت مصاحبه می کنند: یکی از معلم ها با ۷ دانش آموز، معلم دوم با ۱۰ دانش آموز دیگر، معلم سوم با ۱۳ دانش آموز دیگر و به همین ترتیب بقیه ی معلم ها با سایر دانش آموزان مصاحبه می کنند. اگر تعداد معلم ها ۲۰ باشد، تعداد کل دانش آموزان مصاحبه شده را به دست آورید.

راهنمای حل: تعداد دانش آموزان مصاحبه شونده با هر معلم یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول $a = 7$ و قدر نسبت $d = 3$ می باشد. باید مجموع بیست جمله ی اول این دنباله را حساب کنید.

۱۳- رضا در ماه اول ۲۰۰۰ تومان و در ماه دوم ۲۵۰۰ تومان و در ماه سوم ۳۰۰۰ تومان پس انداز می کند. او به همین ترتیب و با همین روند در ماه های بعدی نیز پس انداز می کند. رضا در نظر دارد یک موتورسیکلت به مبلغ ۴۹۵۰۰۰ تومان خریداری کند. پس از گذشت چند ماه او می تواند با استفاده از پس انداز خود این موتورسیکلت را خریداری کند؟

راهنمای حل: پس انداز رضا در هر ماه یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول $a = 2000$ و قدر نسبت $d = 500$ است. از رابطه ی S_n استفاده کنید.

۱۴- طول پله های یک نردبان به طور یکنواخت از پایین به بالا، از ۴۰ سانتی متر به ۳۰ سانتی متر کاهش می یابد، اگر مجموع طول پله ها $5/25$ متر باشد، تعداد پله ها را بیابید.

راهنمای حل: از آن جایی که جمله ی اول و آخر دنباله را داریم از رابطه ی $S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$ استفاده کنید.

مجموع جمله های دنباله ی هندسی

۱۵- مجموع ۱۰ جمله ی اول دنباله ی هندسی ... ، ۲۰ ، ۱۰ ، -۱۰ ، ۵ را حساب کنید.

راهنمای حل: در این دنباله ی هندسی $a = 5$ و $q = -2$ است. با استفاده از رابطه ی $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$ مجموع ده جمله ی اول آن را حساب کنید.

۱۶- مجموع عبارت‌های داده شده را بیابید:

$$۱) ۱ - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots - \frac{1}{512}$$

$$۲) ۳ + ۳\left(\frac{1}{4}\right) + ۳\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + ۳\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

راهنمای حل: ابتدا قدر نسبت را از $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ بیابید و سپس با داشتن اولین و آخرین جمله از رابطه $a_n = aq^{n-1}$ ، تعداد جملات را بیابید و در نهایت از $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ استفاده کنید.

۱۷- در یک دنباله هندسی، جمله عمومی از رابطه $a_n = \frac{1}{4^n}$ به دست می‌آید. مجموع پنج جمله اول را بیابید.

راهنمای حل: جمله عمومی یک دنباله هندسی را به صورت $a_n = A(B)^n$ می‌نویسیم که در آن B قدر نسبت دنباله است.

۱۸- در یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\sqrt{3}$ مجموع هشت جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟

راهنمای حل: با توجه به رابطه $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ و این که $q = \sqrt{3}$ ، حاصل $\frac{S_8}{S_4}$ را به دست آورید.

۱۹- حاصل $(1-x+x^2-\dots+x^{10})(1+x+x^2+\dots+x^{10})$ را به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست آورید.

راهنمای حل: هر پرانتز یک دنباله هندسی است با جمله اول $a=1$ و $n=11$ که در یکی $q=-x$ و دیگری $q=x$ است.



۲۰- مجموع چند جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی ... ، ۱۲- ، ۶ ، ۳- برابر ۱۰۲۳ است؟

🔗 **راهمای حل:** در این دنباله‌ی هندسی $a = -3$ و $q = -2$ است. با استفاده از رابطه‌ی $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ مقدار n را به دست آورید.

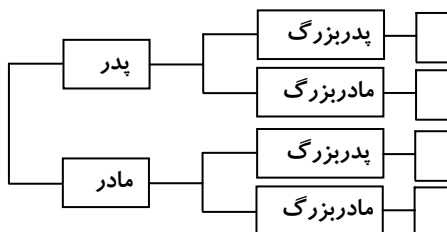
۲۱- یک شهر ۲۰۰۰۰۰ نفر جمعیت دارد. سال اول ۵۰۰۰ نفر از جمعیت این شهر کاسته می‌شود. هر سال کاهش جمعیت ۱۰ درصد بیشتر از کاهش سال قبل است. بعد از ۴ سال این شهر چند نفر جمعیت دارد؟

🔗 **راهمای حل:** تعداد جمعیت کاهش یافته در هر سال یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $a = 5000$ و قدر نسبت $q = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$ است. مجموع جمعیت کاهش یافته در چهار سال، مجموع چهار جمله‌ی اول این دنباله است.

۲۲- یک توپ را از ارتفاع ۱ متری سطح زمین رها می‌کنیم. این توپ پس از هر برخورد با زمین به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی خود به سمت بالا می‌رود. تعیین کنید این توپ پس از ۴ مرتبه برخورد با زمین، چه مسافتی را طی می‌کند؟

🔗 **راهمای حل:** مسافت‌هایی که توپ در هر مرحله برخورد با زمین به سمت پایین طی می‌کند یک دنباله‌ی هندسی با $a = 1$ و $q = \frac{1}{3}$ و مسافت‌هایی که به سمت بالا طی می‌کند یک دنباله‌ی هندسی با $a = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{1}{3}$ می‌باشد.

۲۳- درخت شجره‌نامه‌ی خانوادگی هر فردی به شکل زیر است. مجموع تعداد اجداد یک فرد از جد اول (پدر بزرگ و مادر بزرگ) تا پایان جد ششم را بیابید.



🔗 **راهمای حل:** در واقع یک دنباله‌ی هندسی داریم با جمله‌ی اول $a = 2$ و قدر نسبت $q = 2$.

۲۴- حاصل جمع زیر را بیابید:

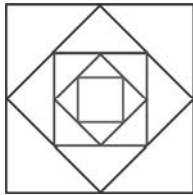
$$S = 9 + 99 + 999 + \dots + \overbrace{999\dots 9}^{100 \text{ رقم}}$$

راهنمای حل: توجه کنید که $9 = 10 - 1$ و $99 = 10^2 - 1$ و ...، با بازنویسی مجدد، عبارت را به صورت مجموع یک دنباله هندسی و یک دنباله حسابی تبدیل کنید.

۲۵- جمله دوم یک دنباله هندسی $\frac{4}{9}$ و جمله هفتم آن $\frac{27}{8}$ است. مجموع چهار جمله اول آن را حساب کنید.

راهنمای حل: با استفاده از رابطه $a_n = aq^{n-1}$ جمله اول و قدر نسبت را به دست آورده و مجموع چهار جمله اول را حساب کنید.

۲۶- اوساط اضلاع یک مربع به طول ضلع a را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی حاصل شود. این عمل را به‌طور متوالی مطابق شکل تکرار می‌کنیم. مجموع مساحت‌های پنج مربع اولیه را بیابید.



راهنمای حل: مساحت مربع‌ها را که حساب کنید متوجه می‌شوید که مساحت‌ها یک دنباله هندسی با جمله اول a^2 و قدر نسبت $\frac{1}{2}$ هستند.

حد مجموع جمله‌های دنباله هندسی

۲۷- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱) $5 + \frac{10}{3} + \frac{20}{9} + \dots$

راهنمای حل: حاصل عبارت، حد مجموع یک دنباله هندسی با $a = 5$ و $q = \frac{2}{3}$ است.

۲) $1 - \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^3 + \dots$

راهنمای حل: حاصل عبارت، حد مجموع یک دنباله هندسی با $a = 1 - \sqrt{2}$ و $q = 1 - \sqrt{2}$ است.



۳) $6 - \frac{3}{2} + \frac{3}{8} - \dots$

راهمای حل: حاصل عبارت، حد مجموع یک دنباله هندسی با $a = 6$ و $q = -\frac{1}{4}$ است.

۴) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{27} + \dots$

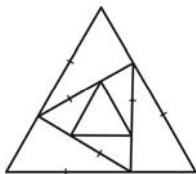
راهمای حل: جمله‌های مثبت را با هم و جمله‌های منفی را با هم در نظر بگیرید. حد مجموع دو دنباله هندسی تولید می‌شود.

۲۸- با فرض $0 < x < 1$ ، مقدار x را از تساوی $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{x}$ به دست آورید.

راهمای حل: مجموع سمت چپ، یک دنباله هندسی با جمله اول $a = 1$ و قدر نسبت $q = x$ است که حد مجموع آن از رابطه‌ی $S = \frac{a}{1-q}$

به دست می‌آید.

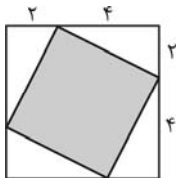
۲۹- در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳، یک سوم از هر ضلع را علامت زده و به‌طور متوالی به هم وصل می‌کنیم و این عمل را به‌طور نامتناهی ادامه می‌دهیم، مجموع محیط‌های مثلث‌های پدید آمده را بیابید.



راهمای حل: ضلع مثلث دوم را از رابطه‌ی کسینوس‌ها بیابید و از آنجایی که محیط مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $3a$ است، محیط مثلث اول

و محیط مثلث دوم را بیابید و سپس قدر نسبت را پیدا کنید و از رابطه‌ی $S = \frac{a}{1-q}$ استفاده کنید.

۳۰- اگر در شکل زیر، مربع بزرگ‌تر به ضلع ۶ واحد و مربع‌هایی به صورت شکل زیر متوالیاً در آن رسم شود، مجموع همه‌ی مساحت‌های این مربع‌ها را بیابید.



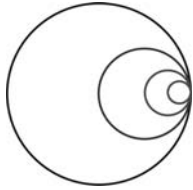
راهمای حل: ضلع مربع دوم را با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس بیابید و سپس قدر نسبت دنباله‌ی مساحت‌ها را پیدا کنید.



۳۱- یک توپ را از ارتفاع ۳ متری زمین رها می‌کنیم. این توپ پس از هر برخورد با زمین، نصف ارتفاع قبلی به سمت بالا می‌رود و همچنان به طرف بالا و پایین می‌رود تا وقتی که روی زمین متوقف شود. تعیین کنید این توپ در مجموع چه مسافتی را به طرف بالا و پایین طی می‌کند؟

راهنمای حل: مسافتی که توپ طی می‌کند از جمله‌ی دوم به بعد یک دنباله‌ی هندسی است با جمله‌ی اول $(\frac{3}{5}) \times 2$ و قدر نسبت $\frac{1}{5}$ (ضریب ۲ به خاطر بالا و پایین رفتن است). باید حد مجموع این دنباله را حساب کنید و با جمله‌ی اول جمع کنید.

۳۲- در شکل زیر شعاع بزرگ‌ترین دایره برابر a واحد و شعاع هر دایره نصف شعاع دایره ماقبل خود است. اگر تعداد دایره‌ها بی‌شمار باشد، حد مجموع مساحت‌های کل دایره‌ها را بیابید.



راهنمای حل: مساحت دایره‌ها یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول πa^2 و قدر نسبت $\frac{1}{4}$ می‌باشند. باید حد مجموع این دنباله را حساب کنید.

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری

تقسیم چند جمله‌ای بر چند جمله‌ای و تعیین خارج قسمت

۳۳- در موارد ۱ و ۲ مراحل تقسیم را انجام دهید و خارج قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

$$1) \quad 3x^5 + 2x^3 + 1 - x^2 \quad | \quad x^2 - 9$$

$$2) \quad 2x^4 - 3x^2 + 1 \quad | \quad 2x - 3$$

راهنمای حل: ابتدا مقسوم را استاندارد کنید. درجه‌ی عبارت باقی‌مانده از درجه‌ی عبارت مقسوم‌علیه کم‌تر است.

۳۴- اگر خارج قسمت تقسیم $x^2 + ax + 7$ بر $x + 3$ برابر $x - b$ و باقی‌مانده‌ی آن ۱ باشد، a و b را بیابید.

راهنمای حل: قاعده‌ی تقسیم را بنویسید و ضرایب عبارت‌های متحد را مساوی قرار دهید.

باقی مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$

۳۵- در موارد ۱ و ۲ باقی مانده‌ی تقسیم خواسته شده را بدون انجام عمل تقسیم به دست آورید.

$$1) \quad 2x^3 - 3x - 1 \quad | \quad x + 1$$

$$2) \quad 3x^2 - 7x + 1 \quad | \quad 3x - 2$$

🔗 **اهلماي مله:** برای محاسبه‌ی باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ باید $P(-\frac{b}{a})$ را حساب کنید.

۳۶- در صورتی که دو چند جمله‌ای $x^2 + 3x - 2$ و $x^3 - 4x^2 + 5x + k$ در تقسیم بر $x + 1$ هم باقی مانده باشند، k را بیابید.

🔗 **اهلماي مله:** باید مقدار دو چند جمله‌ای به ازای $x = -1$ ، برابر باشد.

۳۷- اگر $f(x) = (x + 3)(x + k)$ و باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x - 1$ برابر ۱۶ باشد، k را بیابید.

🔗 **اهلماي مله:** باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x - a$ برابر $f(a)$ است.

۳۸- اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x - 1$ و $x - 2$ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $-x^2 + 3x - 2$ را بیابید.

🔗 **اهلماي مله:** باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $-x^2 + 3x - 2$ ، یک دو جمله‌ای حداکثر از درجه‌ی یک است، یعنی $R(x) = mx + n$. قاعده‌ی تقسیم را بنویسید و از شرایط باقی مانده‌ی $f(x)$ بر عبارت‌ها استفاده کنید.

بخش پذیری چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$

۳۹- در عبارت‌های زیر نشان دهید چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - c$ به ازای c های داده شده بخش پذیر است:

$$1) \quad P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad c = 1$$

$$2) \quad P(x) = 2x^5 - 5x - 3 \quad c = -1$$

🔗 **اهلماي مله:** اگر چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر باشد $P(a) = 0$.

۴۰- در عبارت‌های زیر نشان دهید c داده شده، یک ریشه‌ی معادله است و سپس ریشه‌های دیگر معادله را با تقسیم متوالی بیابید:

۱) $P(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15$ ، $c = 3$

۲) $P(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6$ ، $c = \frac{1}{3}$ ، -2

راهمای حل: وقتی چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ و $x-b$ بخش پذیر است، آن‌گاه بر حاصل ضرب آن‌ها نیز بخش پذیر است.

۴۱- اگر چند جمله‌ای $x^4 + ax^2 + bx + 2$ بر $x^2 - 1$ بخش پذیر باشد، a و b را بیابید.

راهمای حل: وقتی چند جمله‌ای $P(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ بخش پذیر است، آن‌گاه $P(a) = 0$ و $P(b) = 0$.

۴۲- $P(x)$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۳ است که ضریب بزرگ‌ترین جمله‌ی آن ۲ می‌باشد. $P(x)$ را در شرایط زیر به دست آورید.

$P(0) = 1$ ، $P(1) = 0$ ، $P(-1) = 1$

راهمای حل: عبارت $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید و مقادیر داده شده را جایگزین کنید.

۴۳- ابتدا نشان دهید عبارت $x + 2$ یک عامل $P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ است، سپس معادله‌ی $P(x) = 0$ را حل کنید.

راهمای حل: اگر عبارت $ax + b$ یک عامل چند جمله‌ای $P(x)$ باشد، $-\frac{b}{a}$ یک ریشه‌ی $P(x) = 0$ است. برای به دست آوردن سایر ریشه‌ها، خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ را مساوی صفر قرار دهید.

استفاده از اتحادها و تجزیه در بخش پذیری

۴۴- در هر یک از موارد ۱ تا ۴ مشخص کنید که آیا عبارت درجه‌ی اول داده شده، یک عامل از چند جمله‌ای داده شده است؟


۱) $x - 1$ ، $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$



$$۲) x+1, P(x) = x^5 - x^3 + x + 1$$

$$۳) x-2, P(x) = 3x^6 - 7x^2 + 1$$

$$۴) 2x-3, P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$


 **اهم‌های مله:** عبارت $ax+b$ زمانی عامل (فاکتور) یک چند جمله‌ای است که آن چند جمله‌ای بر $ax+b$ بخش پذیر باشد.

۴۵- در هر یک از موارد ۱ تا ۳، معادله $P(x) = 0$ را حل کنید:

$$۱) P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$$

$$۲) P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

$$۳) P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$$

 **اهم‌های مله:** ابتدا کافی است از طریق امتحان کردن (اعداد ۱، -۱، ۲، -۲، ... و ...) یکی از ریشه‌ها را به دست آورید، سپس به کمک تقسیم، سایر ریشه‌ها را تعیین کنید.

۴۶- در هر یک از موارد ۱ تا ۴، با چه شرطی برای عدد طبیعی n ، چند جمله‌ای داده شده بر عبارت درجه‌ی اول داده شده، بخش پذیر است؟ در صورت امکان چند جمله‌ای را تجزیه کنید.

$$۱) x-a, P(x) = x^n - a^n$$

۲) $x + a, P(x) = x^n + a^n$

۳) $x + a, P(x) = x^n - a^n$

۴) $x - a, P(x) = x^n + a^n$

📌 **راهنمای حل:** کافی است $P(a)$ یا $P(-a)$ را حساب کنید. برای تجزیه، از تقسیم استفاده کنید.

۴۷- در هر یک از موارد ۱ تا ۳، چند جمله‌ای داده شده را تجزیه کنید.

۱) $x^7 + 128$

۲) $1 - x^8$ (به دو صورت تجزیه کنید)

۳) $x^5 - 32y^5$

📌 **راهنمای حل:** از موارد ۱ تا ۳ در سؤال قبل استفاده کنید.

۴۸- در هر یک از موارد ۱ تا ۳، کسر داده شده را به کمک تجزیه ساده نمایید.

۱)
$$\frac{(1+a+a^2+a^3+a^4+a^5)(1-a)}{(1+a+a^2)(1-a^2)}$$



$$۲) \frac{(x^2 y^5 - x^y)(x+y)}{x^6 - x^2 y^2}$$

$$۳) \frac{(1-a+a^2-a^3+\dots-a^n)(1+a^3)}{a^n - a^{n+1} + a^{n+2}}$$

راهنمای حل: از تجزیه‌ی $x^n - a^n$ و $x^n + a^n$ و فاکتورگیری استفاده کنید.

بسط دو جمله‌ای و مثلث خیام - پاسکال

در هر یک از موارد ۱ تا ۶، عبارات داده شده را بسط دهید. -۴۹

$$۱) (a+b)^6$$

$$۲) (a+b)^n$$

$$۳) (a-b)^n$$

$$۴) \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^7$$

$$۵) (2x + 3y)^5$$

$$۶) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^4$$

راهنمای حل: از بسط دو جمله‌ای استفاده کنید. عبارات کسری و رادیکالی را به صورت توانی بنویسید.

۵۰- مجموع ضرایب عددی عبارت $(x^2 - 3y)^7 + (2x + 1)^5$ را به دست آورید.

راهنمای حل: برای به دست آوردن مجموع ضرایب عددی هر بسط، کافی است به جای متغیرها عدد ۱ قرار دهید.

۵۱- در هر یک از موارد ۱ تا ۳، جمله‌ی خواسته شده از بسط را به دست آورید. (جملات برحسب بزرگترین توان x تعریف شده‌اند.)

۱) جمله‌ی پنجم $(2x^3 - x)^7$

۲) جمله‌ی سوم $(\sqrt{x} + \frac{1}{x})^6$

۳) جمله‌ی چهارم $(x - \frac{2}{x^3})^{12}$

راهنمای حل: جمله‌ی $(k+1)$ ام بسط $(a+b)^n$ به صورت $\binom{n}{k} a^{n-k} \times b^k$ است.

۵۲- در بسط $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x})^6$ جمله‌ی پنجم به ازای $x = a$ برابر $\frac{5}{9}$ است. a را به دست آورید. (جملات برحسب بزرگترین توان x تعریف شده‌اند.)

راهنمای حل: جمله‌ی $(k+1)$ ام بسط $(a+b)^n$ به صورت $\binom{n}{k} a^{n-k} \times b^k$ است.

۵۳- در هر یک از بسط‌های زیر، بزرگ‌ترین ضریب را تعیین کنید.

۱) $(x + y)^7$

۲) $(x + y)^6$

راهنمای حل: در بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ ، جمله‌ی وسط (n زوج) یا جملات وسط (n فرد) دارای بزرگ‌ترین ضریب از لحاظ عددی هستند.

۵۴- تعداد جملات هر یک از بسط‌های زیر را تعیین کنید.

۱) $(a+1)^7 + (a-1)^7$

۲) $(x+2y)^8 + (2x+y)^5$

راهنمای حل: بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ ، $n+1$ جمله دارد.



۵۵- در هر یک از عبارتهای داده شده، جملهی خواسته شده را به دست آورید.

الف) جملهی شامل x^5 در بسط $(2x + 1)^9$

ب) جملهی مستقل از x در بسط $(x^2 + \frac{1}{x})^6$

نکته (اهمتهای مله): در جملهی $(k+1)$ ام پس از ساده کردن، توان متغیر را برابر توان خواسته شده قرار دهید تا k به دست آید. در مورد جملهی مستقل از x ، پس از ساده کردن، توان متغیر را صفر قرار دهید.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

تعیین ب.م.م و ک.م.م دو یا چند عدد

۵۶- در هر یک از موارد ۱ و ۲ ب.م.م و ک.م.م اعداد داده شده را به دست آورید.

۱) ۲۵۲۰ و ۵۴ و ۱۲۰۰

۲) ۲۴۲ و ۶۱۶ و ۱۸۱۵ و ۷۷

۵۷- اگر a و b و c اعداد اول متمایز دو رقمی باشند، ب.م.م و ک.م.م عبارات زیر را به دست آورید.

$8a^7b^3c^2$, $42a^3bc^3$, $3 \cdot a^2b^2c^2$

نکته (اهمتهای مله): پس از تجزیهی اعداد به عوامل اول، ب.م.م آن‌ها حاصل ضرب عوامل مشترک با کمترین توان و ک.م.م آن‌ها حاصل ضرب عوامل مشترک و غیرمشترک با بزرگترین توان است.

۵۸- بزرگترین پیمانهای که می‌توان با آن ظرفی با گنجایش ۶۷۲ و ۳۶۰ و ۱۳۲ لیتر را پرکرد، چند لیتری است؟ با چه ظروف دیگری می‌توان این

کار را انجام داد؟ (حجم پیمان عددی طبیعی است)

نکته (اهمتهای مله): از ب.م.م استفاده کنید.



۵۹- اتاقی به ابعاد ۲۲۰، ۲۸۰ و ۳۰۰ سانتی متر را می‌خواهیم با کارتن‌های مکعب شکل هم‌اندازه پر کنیم به طوری که فضای خالی باقی نماند. طول یال بزرگ‌ترین کارتن چه قدر است؟ (طول یال مکعب عددی طبیعی است)

📌 **اِهلمای مله:** از ب.م.م استفاده کنید.

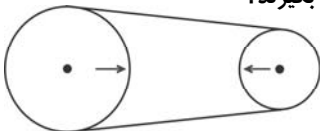
۶۰- اگر دانش‌آموزان سال سوم دبیرستانی را به گروه‌های ۳ نفری تقسیم کنیم، ۲ نفر باقی می‌مانند. اگر آن‌ها را به گروه‌های ۵ نفری و ۷ نفری هم تقسیم کنیم، باز هم ۲ نفر باقی می‌مانند. حداقل تعداد دانش‌آموزان سال سوم این دبیرستان چند نفر است؟

📌 **اِهلمای مله:** از ک.م.م استفاده کنید.

۶۱- شهرداری در فاصله‌ی ۳۶ متری از شروع یک خیابان به طول ۲ کیلومتر یک درخت کاشته است و در فاصله‌ی ۶۰ متری از شروع همین خیابان، یک پارکومتر نصب کرده است و با رعایت همین فواصل درخت‌ها و پارکومترهای بعدی را کاشته و نصب کرده است. در چند نقطه از این خیابان، درخت در کنار پارکومتر است؟ (با فرض این که در نقطه‌ی شروع یک درخت و یک پارکومتر کاشته و نصب شده است.)

📌 **اِهلمای مله:** از ک.م.م استفاده کنید.

۶۲- در شکل زیر دو چرخ با محیط‌های ۱۱۲ و ۱۲۰ سانتی‌متر توسط یک تسمه به کمک موتوری کوچک در حال چرخیدن هستند. اگر در شروع چرخش، دو علامت روبه‌روی هم باشند، هر چرخ چند دور بزند تا برای چهارمین بار علامت‌ها روبه‌روی هم قرار بگیرند؟



📌 **اِهلمای مله:** از ک.م.م استفاده کنید.

ساده کردن کسره‌های جبری با ب.م.م و ک.م.م

۶۳- در هر یک از موارد ۱ تا ۵، عبارت داده شده را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

$$۱) \frac{۲x^2 - ۷x + ۳}{x^2 - ۹} \times \frac{۳x^2 + ۱۱x + ۶}{۶x^2 + x - ۲}$$



$$۲) \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 + x - 1} \div \frac{x^2 + 6x + 8}{2x^3 - x^2 - 2x + 1}$$

$$۳) \frac{2n}{n+1} - \frac{n}{n-1}$$

$$۴) \frac{1}{x+3} - \frac{x+1}{x^2+6x+9} + \frac{2}{x^2-9}$$

$$۵) \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} - \frac{1}{x^2+4x+3} - \frac{1}{x+3}$$

📌 **راهنمای حل:** از تجزیه و ب.م.م و ک.م.م چند جمله‌ای‌ها استفاده کنید.

معادله‌ی درجه‌ی دوم

حل معادله‌ی درجه‌ی دوم و مسائل کاربردی

۶۴- در هر یک از موارد ۱ تا ۵ معادله‌ی داده شده را حل کنید.

$$۱) 3x^2 - 7x - 10 = 0$$

$$۲) x + \frac{3}{x} = 4$$

$$۳) x^3 - 5x^2 + 4x = 0$$

$$۴) x^6 + 7x^2 = 0$$

$$۵) \frac{x^2 + 1}{15} = \frac{5x + 2}{30} + \frac{1}{10}$$

نکته راهنمای حل: پس از ساده کردن معادله، از روش‌های مختلف حل معادله‌ی درجه‌ی ۲ (Δ و مربع کامل و ...) استفاده کنید.

۶۵- در هر یک از موارد ۱ تا ۴، نمودار تابع را رسم کرده و صفرهای آن را در صورت وجود، تعیین کنید.

۱) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

۲) $g(x) = x^2 + x + 1$

۳) $h(x) = -x^2 - 2x + 3$

۴) $k(x) = 3x^2 + 18x + 27$

نکته راهنمای حل: صفرهای هر تابع در واقع ریشه‌های معادله‌ی آن تابع هستند که محل برخورد نمودار تابع با محور x ها می‌باشند. برای رسم از انتقال نمودار تابع $y = x^2$ استفاده کنید.

تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دوم و روابط بین ریشه‌ها

۶۶- در هر یک از قسمت‌های زیر، معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن، اعداد داده شده باشند.

۱) ۲ و -۳

۲) $\frac{1}{3}$ و $-\frac{3}{2}$

۳) $1 \pm \sqrt{5}$

نکته راهنمای حل: S (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصلضرب ریشه‌ها) را تشکیل دهید و از رابطه‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ استفاده کنید.



۶۷- مساحت یک مثلث که مجموع طول قاعده و اندازه‌ی ارتفاع آن ۱۰ است، $\frac{21}{4}$ سانتی‌متر مربع می‌باشد. اندازه‌ی قاعده را برحسب سانتی‌متر تعیین کنید.

راهنمای حل: مساحت مثلث را برحسب طول قاعده یا ارتفاع بنویسید و معادله‌ی حاصل را حل کنید.

۶۸- در ضرب دو عدد مثبت که یکی از دیگری هشت واحد کوچک‌تر است، اشتباهی رخ داده است. به‌طوری‌که رقم صدگان یک واحد بزرگ‌تر شده است. برای آزمایش، عدد به‌دست آمده از ضرب را بر عدد بزرگ‌تر تقسیم کرده‌ایم، خارج‌قسمت ۲۲ و باقی‌مانده ۱۹ شده است. دو عدد را به‌دست آورید.

راهنمای حل: اعداد را به صورت x و $x-8$ در نظر بگیرید. رقم صدگان یک واحد بزرگ‌تر شده است، یعنی در حاصل‌ضرب، 100 واحد اضافی به‌دست آمده است.

۶۹- پنج عدد طبیعی متوالی را در نظر بگیرید. مجموع مربعات ۳ تای اول با مجموع مربعات دو تای آخر برابر شده است. عدد وسط را تعیین کنید.

راهنمای حل: اعداد را به صورت $x+2, x+1, x, x-1, x-2$ در نظر بگیرید و رابطه‌ی خواسته شده را بنویسید.

۷۰- در هر یک از موارد ۱ تا ۷، حاصل عبارت خواسته شده را به‌دست آورید. α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x + 3 = 0$ هستند.

۱) $\alpha^2 + \beta^2$

۲) $\alpha^3 + \beta^3$

۳) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

۴) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$

۵) $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

۶) $\alpha^3\beta + \alpha\beta^3$



جوابهای فصل اول

$$\frac{3}{4} \quad (4) \quad \frac{24}{5} \quad (3)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad -28$$

$$\frac{9}{2}(3 + \sqrt{3}) \quad -29$$

$$81 \quad -30$$

$$9 \text{ متر} \quad -31$$

$$\frac{4}{3}\pi a^2 \quad -32$$

$$(1) \quad -33$$

$$\text{خارج قسمت} = 3x^3 + 29x - 1$$

$$\text{باقی مانده} = 261x - 8$$

(2)

$$\text{خارج قسمت} = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}$$

$$\text{باقی مانده} = \frac{35}{8}$$

$$b = -2 \text{ و } a = 5 \quad -34$$

$$\frac{-7}{3} \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1) \quad -35$$

$$k = 6 \quad -36$$

$$k = 3 \quad -37$$

$$R(x) = 5x - 7 \quad -38$$

$$P(-1) = 0 \quad (2) \quad P(1) = 0 \quad (1) \quad -39$$

$$-1 \text{ و } 3 \quad (2) \quad -1 \pm \sqrt{6} \quad (1) \quad -40$$

$$b = 0 \text{ و } a = -3 \quad -41$$

$$P(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 1 \quad -42$$

$$P(-2) = 0 \quad -43$$

$$\text{ریشه‌ها: } -2 \text{ و } -\sqrt{2} \text{ و } \sqrt{2}$$

$$(2) \text{ عامل است.} \quad (1) \text{ عامل است.} \quad -44$$

$$(4) \text{ عامل است.} \quad (3) \text{ عامل نیست.} \quad -45$$

$$(1) \quad -4 \text{ و } -1 \text{ و } 1: \text{ریشه‌ها}$$

$$(2) \quad -3 \text{ و } -2 \text{ و } 2: \text{ریشه‌ها}$$

$$(3) \quad 5 \text{ و } \frac{1}{2} \text{ و } -2: \text{ریشه‌ها}$$

$$n^2 \quad (2) \quad \frac{n(n+1)}{2} \quad (1) \quad -1$$

$$168 \quad (4) \quad 5050 \quad (3)$$

$$46/75 \quad (5)$$

$$165 \quad (2) \quad 130 \quad (1) \quad -2$$

$$945 \quad -3$$

$$45223 \quad -4$$

$$-117 \quad -5$$

$$86 \quad -6$$

$$11 \quad -7$$

$$1050 \quad -8$$

$$6 \quad -9$$

$$4400 \text{ تومان} \quad -10$$

$$4260000 \quad -11$$

$$710 \text{ دانش آموز} \quad -12$$

$$11 \text{ ماه} \quad -13$$

$$15 \quad -14$$

$$-1705 \quad -15$$

$$\frac{6141}{1024} \quad (2) \quad \frac{341}{512} \quad (1) \quad -16$$

$$S_5 = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^5 \right) \quad -17$$

$$10 \quad -18$$

$$2047 \quad -19$$

$$10 \text{ جمله اول} \quad -20$$

$$176795 \text{ نفر} \quad -21$$

$$\frac{53}{27} \text{ متر} \quad -22$$

$$254 \quad -23$$

$$\frac{10}{9} (10^{100} - 1) - 100 \quad -24$$

$$\frac{65}{27} \quad -25$$

$$\frac{31a^2}{16} \quad -26$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \quad (2)$$

$$15 \quad (1) \quad -27$$

$$+ \dots + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n \quad (۳)$$

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 - \dots (-1)^n b^n \quad (۴)$$

$$(x^2 - \frac{2}{x})^5 = x^{10} - 14x^8 + 14x^6 - 28x^4 + 56x^2 - \frac{672}{x} + \frac{448}{x^3} - \frac{128}{x^5} \quad (۵)$$

$$(2x+3y)^5 = 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 540xy^4 + 243y^5 \quad (۶)$$

$$(\sqrt{x} - \frac{1}{x})^6 = x^3 - 6\sqrt{x} + \frac{6}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{x^5} \quad ۱۱۵ -۵۰$$

$$۱۵ (۲) \quad ۲۸ \cdot x^{13} (۱) -۵۱$$

$$-۱۷۶۰ (۳)$$

$$a=2 -۵۲$$

$$۲۰ (۲) \quad \binom{7}{4} (۱) -۵۳$$

$$۱۵ (۲) \quad ۴ (۱) -۵۴$$

$$۱۵ (ب) \quad ۴۰۳۲x^5 (الف) -۵۵$$

$$-۵۶$$

$$۱) (۲۵۲۰, ۵۴, ۱۲۰۰) = ۶$$

$$[۲۵۲۰, ۵۴, ۱۲۰۰] = ۷۵۶۰۰$$

$$۲) (۲۴۲, ۶۱۶, ۱۸۱۵, ۷۷) = ۱۱$$

$$[۲۴۲, ۶۱۶, ۱۸۱۵, ۷۷] = ۱۰۱۶۴۰$$

$$-۵۷$$

$$(8a^3b^2c^2, 42a^3bc^3, 3 \cdot a^2b^2c^2) = 2a^2bc^2$$

$$[8a^3b^2c^2, 42a^3bc^3, 3 \cdot a^2b^2c^2] = 84 \cdot a^3b^2c^3$$

-۵۸ بزرگ‌ترین پیمانه ۱۲ لیتری است و با ظروف ۶، ۴، ۳ و ۲ لیتری نیز می‌توان این کار را انجام داد.

-۵۹ طول یال بزرگ‌ترین مکعب ۲۰ سانتی‌متر است.

-۶۰ حداقل ۱۰۷ نفر است.

-۶۱ ۱۲ نقطه

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

(تمام مقادیر طبیعی)

(۲)

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots + a^{n-1})$$

(مقادیر طبیعی فرد)

(۳)

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - a^{n-1})$$

(مقادیر طبیعی زوج)

(۴ هیچ مقدار

(۱) -۴۷

$$x^5 + 2^5 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

(۲)

$$1 - x^6 = (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5 + x^6 + x^7)$$

$$1 - x^6 = (1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7)$$

(۳)

$$x^5 - 32y^5 = (x-2y)(x^4 + 2x^3y + 4x^2y^2 + 8xy^3 + 16y^4)$$

$$1 - a + a^2 (۱) -۴۸$$

$$-(y^6 + y^3x + y^2x^2 + yx^3 + x^6) (۲)$$

$$\frac{1-a^{n+1}}{a^n} (۳)$$

(۱) -۴۹

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

(۲)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2$$

۶۲- چرخ بزرگ ۵۶ دور و چرخ کوچک ۶۰ دور می‌زند.

۶۳- (۱) $\frac{(x-1)^2}{x+2}$ (۲)

(۳) $\frac{n^2-3n}{n^2-1}$ (۴) $\frac{4x}{(x+3)^2(x-3)}$

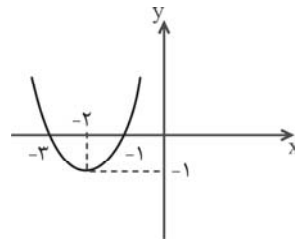
(۵) $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

۶۴- (۱) $\frac{10}{3}$ و -1 (۲) 3 و 1

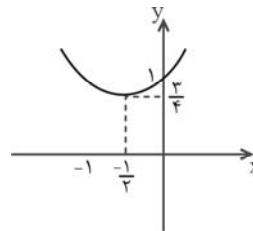
(۳) 0 و 1 و 4 (۴) صفر

(۵) 3 و $\frac{-1}{2}$

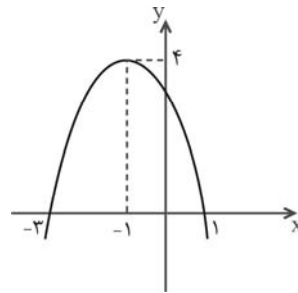
۶۵- (۱) صفرهای تابع، -1 و -3 هستند.



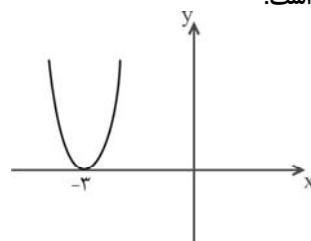
(۲) این تابع صفر ندارد.



(۳) صفرهای تابع، 1 و -3 هستند.



(۴) صفر تابع، -3 است.



۶۶- (۱) $x^2+x-6=0$ (۲) $6x^2+7x-3=0$

(۳) $x^2-2x-4=0$

۶۷- 3 یا 7 سانتی‌متر

۶۸- 19 و 27

۶۹- 12

۷۰- 43 (۱) 280 (۲)

(۳) $\frac{7}{3}$ (۴) $\frac{43}{3}$

(۵) $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$ (۶) 129

(۷) $\frac{\sqrt{37}}{3}$

۷۱- $m=12$

۷۲- $m=\frac{37}{25}$

۷۳- $m=\pm 10$

۷۴- 2 و -1 یا -2 و -1

۷۵- $26-3\sqrt{17}$

۷۶- $\frac{-5}{3}$

۷۷- 99

۷۸- 2

۷۹- (۱) فاقد ریشه

(۲) ریشه‌ی مضاعف منفی

(۳) دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت که ریشه‌ی منفی از لحاظ

قدر مطلق بزرگ‌تر است.

(۴) دو ریشه‌ی مثبت

۸۰- برحسب هر مقدار m ، معادله دارای دو ریشه‌ی

مختلف‌العلامت است که ریشه‌ی مثبت از لحاظ قدر مطلق

بزرگ‌تر است.

۸۱- -3

۸۲- هیچ مقدار m

۸۳- 1

۸۴- (۱) $-2x^2+3x+1=0$

(۲) $x^2-6x-8=0$

(۳) $x^2+7x+8=0$

۸۵- $27x^2-102x+94=0$

۸۶- $x^2+10x-27=0$