پاسخ فصل دوم

پاسخ تشریحی: فرهاد حامی

راهبرد حل تیپ (۱)
وقتی از حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ صحبت می‌کنیم فرض بر این است که تابع در همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه‌ی a تعریف شده باشد.
تذکر: حد راست تابع در $x=a$ زمانی قابل محاسبه است کـه تـابع در بازه‌ی $(a\,,\,x)$ تعریف شده باشد و حد چپ تابع در $x=a$ زمانی قابل محاسبه است که تابع در بازه‌ی $(x\,,\,a)$ تعریف شده باشد.

۶۰۴- گزینه‌ی «۱»

اگر تابعی در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آنگاه حداقل در یک همسایگی چپ یا راست نقطه‌ی a کران‌دار است.

۶۰۵- گزینه‌ی «۴»

ابتدا دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{۲\sin^۲ x}{x^۳\sin\dfrac{۱}{۲x}}$ را می‌یابیم:

$$D_f=R-\left\{x:x^۳\sin\frac{۱}{۲x}=۰\right\}$$

پس باید معادله‌ی $x^۳\sin\dfrac{۱}{۲x}=۰$ را حل کنیم:

$$x^۳\sin\frac{۱}{۲x}=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غ‌ق‌ق}\\ \sin\dfrac{۱}{۲x}=۰\Rightarrow\dfrac{۱}{۲x}=k\pi\end{cases}$$

پس $x=\dfrac{۱}{۲k\pi}$، لذا: $D_f=R-\left\{x:x=\dfrac{۱}{۲k\pi}\,,\,k\in Z\right\}$

یعنی تابع در نقاط

$$\frac{-۱}{۲\pi},\frac{-۱}{۴\pi},\frac{-۱}{۶\pi},\dots,۰,\dots,\frac{۱}{۶\pi},\frac{۱}{۴\pi},\frac{۱}{۲\pi}$$

تعریف نمی‌شود، بنابراین مـی‌بینـیم کـه هرچـه بـه سـمت صـفر نزدیـک می‌شویم، تابع در بی‌شمار نقطه تعریف نمی‌شـود. پس هـیچ همسـایگی محذوف عدد صفر یافت نمی‌شود، که این شرط لازم موجود بودن حد تابع در $x=۰$ است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲ x}{x^۳\sin\frac{۱}{۲x}}$$ معنی ندارد

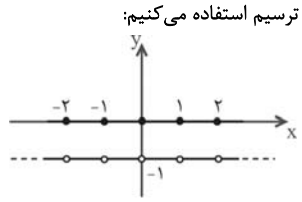
۶۰۶- گزینه‌ی «۱»

از آنجایی که تابع f در همسایگی صفر همواره مثبت است، پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{f(x)}=۱$$

۶۰۷- گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: از روش ترسیم استفاده می‌کنیم:



با توجه به نمودار در هر نقطه‌ای صحیح یا غیر صحیح تابع دارای حد -۱ است، پس:

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)+\lim_{x\to(\frac{۱}{۲})^-}f(x)=-۱+(-۱)=-۲$$

راه حل دوم: دقت می‌کنیم کـه در میـل کـردن $x\to x_۰$ عـدد صـحیح نخواهد بود، چه $x_۰$ عددی صحیح باشد چه غیرصحیح، پس:

$$\lim_{x\to ۰^+}f(x)=-۱\qquad(x\in R-Z)$$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^-}f(x)=-۱\qquad(x\in R-Z)$$

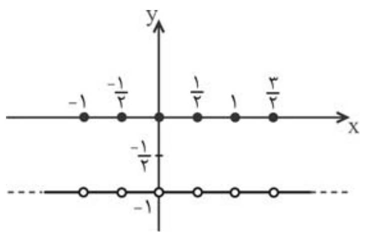
پس مجموع آن‌ها -۲ خواهد بود.

۶۰۸- گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم:

$$y=[۲x]+[-۲x]=\begin{cases}۰ & ,\quad x=\dfrac{k}{۲}\\ -۱ & ,\quad x\neq\dfrac{k}{۲}\end{cases}\qquad(k\in Z)$$

بنابراین با رسم نمودار تابع، دیده می‌شود که در هر نقطه‌ی دلخواهی حد تابع -۱ است. توجه کنید که حد تابع در یک نقطه به مقدار آن در آن نقطه ارتباطی ندارد.



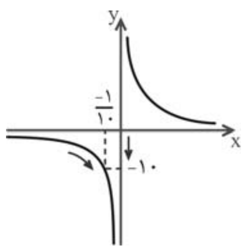
پس:

$$\lim_{x\to a}([۲x]+[-۲x])=-۱$$

۶۰۹- گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: از روش ترسیم استفاده می‌کنیم:

نمودار تابع $y=\dfrac{۱}{x}$ در زیر رسـم شـده است، در نقطه‌ی $x=\dfrac{-۱}{۱۰}$ وقتی x از سمت چپ به $\dfrac{-۱}{۱۰}$ میل می‌کند، تـابع بـا مقـادیر بـیش‌تـر از (-۱۰) به (-۱۰) نزدیک می‌شود، لذا:



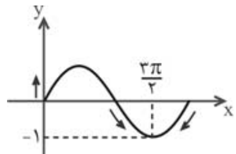
$$\lim_{x\to\left(\frac{-۱}{۱۰}\right)^-}\left[\frac{۱}{x}\right]=[(-۱۰)^+]=-۱۰$$

راه حل دوم: وقتی $x \to \left(\frac{-1}{10}\right)^-$، یعنی $x < \frac{-1}{10}$ پس $\frac{1}{x} > -10$،
لذا:

$$\left[\frac{1}{x}\right] = -10$$

۶۱۰- گزینه‌ی «۲»

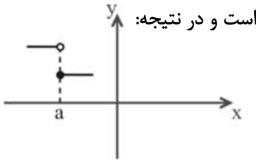
با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ در همسایگی نقطه‌ی $x = \frac{3\pi}{2}$، تابع با مقادیر بیش‌تر از (-1) به (-1) نزدیک می‌شود، لذا:



$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\left[\frac{1}{\sin x}\right] = \left[\frac{1}{(-1)^+}\right] = [-1/...] = -2$$

۶۱۱- گزینه‌ی «۴»

راه حل اول: با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [f(x)]$، اگر تابع در نقطه‌ی a حد نداشته باشد، آنگاه قدر مطلق اختلاف حد چپ و راست در این نقطه ۱ است، از آنجایی که تابع $y = x^2$ به ازای x های منفی، نزولی است پس حد چپ از حد راست بزرگتر است و در نتیجه:



$$\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) = -1$$

راه حل دوم: اگر a عددی منفی باشد، به‌طوری که $a^2 \in N$، در این صورت تابع $f(x) = [x^2]$ در $x = a$ حد ندارد (چرا؟) و داریم:

$$x \to a^+ \Rightarrow x^2 \to (a^2)^-$$
$$x \to a^- \Rightarrow x^2 \to (a^2)^+$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x) = [(a^2)^-] - [(a^2)^+]$$
$$= (a^2 - 1) - a^2 = -1$$

۶۱۲- گزینه‌ی «۳»

در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x-1}$، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D_f = [1, +\infty)$ است، پس حد راست در $x = 1$ وجود دارد:

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = \sqrt{1-1} = 0$$

در تابع با ضابطه‌ی $g(x) = \sqrt{3-x}$، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D_g = (-\infty, 3]$ است، پس حد چپ در $x = 1$ وجود دارد و از حد راست در $x = 3$ نمی‌توان صحبت کرد، لذا:

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{3-x} = \lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x} = 0$$

۶۱۳- گزینه‌ی «۳»

ابتدا دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{[x]}$ را می‌یابیم:

$$[x] = 0 \Rightarrow 0 \le x < 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

با توجه به دامنه‌ی تابع فقط همسایگی چپ $x = 0$ وجود دارد، لذا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{[x]} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{[x]} = \frac{0}{-1} = 0$$

راهبرد حل تیپ (۲)

برای اثبات عدم وجود حد به وسیله دنباله، درتوابعی که حد چپ و راست نابرابر دارند،باید دو دنباله را به گونه ای انتخاب کنیم که یکی همواره با مقادیر کمتر از نقطه به آن میل کند (دنباله صعودی اکید باشد) و دیگری همواره با مقادیر بیشتر از نقطه به آن میل کند (دنباله نزولی اکید باشد).

در دنباله ی $\{a_n\}$ که همگرا به L است، برای تشخیص این که با مقادیر بیشتر به L میل می‌کند یا کمتر، کافی است علامت عبارت $a_n - L$ را در بی‌نهایت تعیین کنیم:

$$(a_n - L) \begin{cases} > 0 & \text{(یعنی با مقادیر بیش‌تر از } L \text{ نزدیک می‌شود)} \\ < 0 & \text{(یعنی با مقادیر کم‌تر از } L \text{ نزدیک می‌شود)} \end{cases}$$

۶۱۴- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2} = 2$$

برای این‌که ببینیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود یا بیشتر، کافیست $a_n - 2$ را تشکیل دهیم:

$$(a_n - 2) = \left(\frac{2n+1}{n+2} - 2\right) = \frac{-3}{n+2}$$

از آنجایی که به ازای هر n طبیعی، $\frac{-3}{n+2}$ مقداری منفی است پس $a_n - 2 < 0$ و درنتیجه $a_n < 2$، بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ میل می‌کند.

پس:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{a_n\to 2^-} f(a_n) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x+1)[x] = (2+1)[2^-] = 3$$

۶۱۵- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+1} = 2$$

برای این‌که ببینیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود یا بیشتر، کافیست $a_n - 2$ را تشکیل دهیم:

$$(a_n - 2) = \left(\frac{4n+1}{2n+1} - 2\right) = \frac{-1}{2n+1}$$

از آنجایی که به ازای هر n طبیعی، $\frac{-1}{2n+1}$ مقداری منفی است پس $a_n - 2 < 0$ و درنتیجه $a_n < 2$، بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود.

پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{a_n\to 2^-} f(a_n) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(b + [2x]) = b + [2(2^-)]$$
$$= b + [4^-] = b + 3 = 1 \Rightarrow b = -2$$

۶۱۶- گزینه‌ی «۲»

$$\lim a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$$

از آن‌جایی‌که $a_n = 1 + \frac{1}{n}$، پس a_n با مقادیر بیش‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، لذا:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{a_n\to 1^+} f(a_n) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+[-x]}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+[-(1^+)]}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x+1} = 1$$

۶۱۷- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n-3}{n+2} = 4$$

باید ببینیم که a_n با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود یا بیشتر، بنابراین کافی است علامت (a_n-4) را بیابیم:

$$(a_n-4) = \left(\frac{4n-3}{n+2}-4\right) = \frac{-11}{n+2}$$

بنابراین a_n با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود. اما:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{a_n\to 4^-} f(a_n) = \lim_{x\to 4^-} f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{[x]-3}{x-4} = \frac{3-3}{4^- - 4} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$$

پس دنباله‌ی $f(a_n)$ همگرا به صفر است.

۶۱۸- گزینه‌ی «۱»

دامنه‌ی تابع داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$1-x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$$

از آن‌جایی که $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$، پس باید دنباله‌ای را در نظر بگیریم که با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ همگرا باشد یا با مقادیر بیشتر از (-1) به (-1) همگرا باشد، با توجه به گزینه‌ها سه گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۳)، همگرا به (۱) و گزینه‌ی (۴) همگرا به $\frac{1}{2}$ است، پس سه گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۳) را باید بررسی کنیم.

در گزینه‌ی (۱):

$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1} = \frac{n^2+1-2}{n^2+1} = 1-\frac{2}{n^2+1}$$

این دنباله با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ همگرا می‌شود و جواب است.

۶۱۹- گزینه‌ی «۴»

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2n} & , \text{زوج } n \\ \frac{-1}{2n} & , \text{فرد } n \end{cases}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left|\left[\frac{a_n}{2}\right]\right|$$

$$\text{زوج } n: \lim_{n\to\infty} \left|\left[\frac{\frac{1}{2n}}{2}\right]\right| = |[0^+]| = 0$$

$$\text{فرد } n: \lim_{n\to\infty} \left|\left[\frac{\frac{-1}{2n}}{2}\right]\right| = |[0^-]| = |-1| = 1$$

بنابراین دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا نیست.

۶۲۰- گزینه‌ی «۱»

راه حل اول:

$$f\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right) = \left[\frac{1}{3}-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right] + \left[3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{2}{3}-\frac{1}{n}\right] + \left[1-\frac{3}{n}\right]$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{n}\right] + \left[1-\frac{3}{n}\right]\right) = 0+0 = 0$$

راه حل دوم:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to \frac{1}{3}^-} f(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{3}^-} \left(\left[x+\frac{1}{3}\right] + [3x]\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\left[\frac{2}{3}-\varepsilon\right] + [1-\varepsilon]\right) = 0+0 = 0$$

راهبرد حل تیپ (۳)

به بخش «محاسبه‌ی حد توابع و قضایای حد» در درس توجه کنید.

توجه: تابع‌های دو ضابطه‌ای به شکل $f(x) = \begin{cases} h(x) & , x>a \\ g(x) & , x<a \end{cases}$ زمانی در $x=a$ حد دارند که در a حد چپ و راست آن‌ها موجود و برابر باشد، یعنی $\lim_{x\to a^+} h(x) = \lim_{x\to a^-} g(x)$.

۶۲۱- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+2a) = 1+2a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax-1) = a-1$$

پس:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) - \lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$$

$$(1+2a)-(a-1) = -1 \Rightarrow a = -3$$

۶۲۲- گزینه‌ی «۳»

برای آن‌که تابع f در نقطه‌ی $x=-1$ حد داشته باشد باید:

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^-} f(x)$$

پس:

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^+} (x+a)^2 = (a-1)^2$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to(-۱)^-}(۲x+۱) = -۱$$

لذا باید:

$$(a-۱)^۲ = -۱$$

از آن‌جایی‌که معادله‌ی بالا جواب حقیقی برای a ندارد، پس مجموعه مقادیر a، تهی است.

۶۲۳– گزینه‌ی «۲»

اگر $-۱<x<۰$ باشد، $x^۳>x$ است، بنابراین با فرض $x^۳-x=t$، وقتی $x\to ۰^-$، $t\to ۰^+$ لذا:

$$\lim_{x\to۰^-} f(x^۳-x)=\lim_{t\to۰^+} f(t)$$

بنابراین برای محاسبه‌ی حد باید از ضابطه‌ی بالا استفاده کنیم:

$$\lim_{t\to۰^+} f(t)=\lim_{x\to۰^-}\sqrt{۱-x}=۱$$

راهبرد حل تیپ (۴)

الف- در محاسبات حد توابع شامل جزء صحیح به نکات زیر توجه کنید:

(۱) $\lim_{\varepsilon\to۰^+}[\varepsilon]=۰$ و $\lim_{\varepsilon\to۰^+}[-\varepsilon]=-۱$

(۲) $[۰^+]=۰$ و $[۰^-]=-۱$ (تعریف غیر رسمی)

(۳) $[(۰^-)^n]=[۰^-]=-۱$ (n عددی فرد و مثبت)

(۴) $[n(۰^-)]=[۰^-]=-۱$ (n عددی مثبت)

ب- در محاسبه‌ی حد توابع شامل جزء صحیح دقت کنید که:

$$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد غیر صفر}}=۰ \quad \text{و} \quad \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰$$

۶۲۴– گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to۲^+} f(x)=\lim_{x\to۲^+}(x+a)[x]=(۲+a)[۲^+]=۲(۲+a)$$

$$\lim_{x\to۲^-} f(x)=\lim_{x\to۲^-}(x+a)[x]=(۲+a)[۲^-]=a+۲$$

اما:

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)-\lim_{x\to۲^-}f(x)=۳$$

$$\Rightarrow ۲(۲+a)-(۲+a)=۳\Rightarrow a+۲=۳\Rightarrow a=۱$$

۶۲۵– گزینه‌ی «۴»

به‌طور غیر رسمی وقتی $x\to۰^+$ به جای x، در تابع قرار می‌دهیم ۰^+، به طریق مشابه وقتی $x\to۰^-$ به جای x، در تابع قرار می‌دهیم ۰^-.

حد راست: $\lim_{x\to۰^+}f(x)=\lim_{x\to۰^+}([x]+\operatorname{sgn} x)$

$$=[۰^+]+\operatorname{sgn}(۰^+)=۰+۱=۱$$

حد چپ: $\lim_{x\to۰^-}f(x)=\lim_{x\to۰^-}([x]+\operatorname{sgn} x)$

$$=[۰^-]+\operatorname{sgn}(۰^-)=-۱-۱=-۲$$

حاصلضرب حد چپ و راست $=(۱)(-۲)=-۲$

۶۲۶– گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to۱^-}(x+۱)\left[\frac{۱}{x+۱}\right]=۲\times\left[\frac{۱}{۲}\right]=۲\times۰=۰$$

۶۲۷– گزینه‌ی «۳»

بررسی گزینه‌ی (۱):

$$\frac{۱}{x}-۱<\left[\frac{۱}{x}\right]<\frac{۱}{x}\xrightarrow[(\text{منفی است } x)]{\times x}۱<x\left[\frac{۱}{x}\right]<۱-x$$

$$\lim_{x\to۰^-}x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$$

طبق قضیه‌ی فشردگی حد چپ در صفر موجود است.

بررسی گزینه‌ی (۲):

$$\frac{۱}{x}-۱<\left[\frac{۱}{x}\right]<\frac{۱}{x}\xrightarrow[(\text{مثبت است } x)]{\times x}۱-x<x\left[\frac{۱}{x}\right]<۱$$

$$\lim_{x\to۰^+}x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$$

طبق قضیه‌ی فشردگی حد راست در صفر موجود است.

بررسی گزینه‌ی (۳):

$$\lim_{x\to-\infty}x\left[\frac{۱}{x}\right]=-\infty\times(-۱)=+\infty$$

بررسی گزینه‌ی (۴):

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\frac{۱}{x}\right]}{\frac{۱}{x}}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰$$

۶۲۸– گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم $\lim_{x\to۰}x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$، پس حد چپ و راست آن در $x=۰$ نیز برابر ۱ است، در نتیجه:

$$\lim_{x\to۰^+}|x|\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to۰^+}x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$$

$$\lim_{x\to۰^-}|x|\left[\frac{۱}{x}\right]=\lim_{x\to۰^-}(-x)\left[\frac{۱}{x}\right]=-\lim_{x\to۰^-}x\left[\frac{۱}{x}\right]=-۱$$

بنابراین تابع در $x=۰$ حد ندارد.

۶۲۹– گزینه‌ی «۳»

دو تابع $f(x)=\begin{cases}-۱ & , \ x>۰\\ ۱ & , \ x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۱ & , \ x>۰\\ -۱ & , \ x<۰\end{cases}$ در $x=۰$ حد ندارند ولی مجموع آنها در $x=۰$ حد دارد، بنابراین گزینه‌های ۱ حذف می‌شود، از طرفی:

$$(f-g)(x)=\begin{cases}-۱-۱ & , \ x>۰\\ ۱-(-۱) & , \ x<۰\end{cases}=\begin{cases}-۲ & , \ x>۰\\ ۲ & , \ x<۰\end{cases}$$

تابع تفاضل در صفر حد ندارد و گزینه‌ی ۲ نیز حذف می‌شود.

از طرفی اگر $f(x)=\begin{cases}۳ & , \ x>۰\\ ۵ & , \ x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & , \ x>۰\\ -۳ & , \ x<۰\end{cases}$، آن‌گاه $f+g$ در $x=۰$ حد دارد ولی:

$$f.g(x)=\begin{cases}-۳ & , \ x>۰\\ -۱۵ & , \ x<۰\end{cases}$$

که در $x=۰$ حد ندارد و گزینه‌ی (۴) نیز حذف می‌شود، بنابراین گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۶۳۰– گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to 6^+}\left(\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]\right)=\left(\left[\frac{6^+}{2}\right]+\left[\frac{6^+}{3}\right]\right)$$
$$=[3^+]+[2^+]=3+2=5$$
$$\lim_{x\to 6^-}\left(\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]\right)=\left(\left[\frac{6^-}{2}\right]+\left[\frac{6^-}{3}\right]\right)$$
$$=[3^-]+[2^-]=2+1=3$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 6^+}f(x)+\lim_{x\to 6^-}f(x)=5+3=8$$

۶۳۱– گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+}(x^2+1)[x^2-2]=(2+1)[2^+-2]=3[0^+]=3\times 0=0$$
$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-}(x^2+1)[x^2-2]=(2+1)[2^--2]$$
$$=3[0^-]=3\times(-1)=-3$$
پس مجموع حد چپ و راست -3 است.

۶۳۲– گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2x}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\right]$$
می‌دانیم اگر $x>0$، آن‌گاه $x+\frac{1}{x}>2$، لذا:
$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2x}{x^2+1}\right]=\left[\frac{2}{2^+}\right]=[1^-]=0$$

۶۳۳– گزینه‌ی «۳»

$$\left[\frac{4x^2+3}{x^2+1}\right]=\left[\frac{4(x^2+1)-1}{x^2+1}\right]=\left[4-\frac{1}{x^2+1}\right]$$
$$=4+\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]$$
در هر نقطه‌ی $a\in R$، $x^2+1\geq 1$ و $\frac{1}{x^2+1}\leq 1$ و در نتیجه $-1\leq\frac{-1}{x^2+1}<0$ است پس $\left[\frac{-1}{x^2+1}\right]=-1$ و خواهیم داشت:
$$\lim_{x\to a}\left[\frac{4x^2+3}{x^2+1}\right]=4-1=3$$
بنابراین تابع در هر نقطه‌ی دلخواهی دارای حد ۳ است.

۶۳۴– گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to 2^+}(fof)(x)=\lim_{x\to 2^+}f(f(x))$$
وقتی x با مقادیر بیش‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود، لذا:
$$x\to 2^+\Rightarrow f(x)\to 0^-$$
با جاگذاری در رابطه داریم:
$$\lim_{x\to 2^+}f(f(x))=\lim_{f(x)\to 0^-}f(f(x))$$
با انتخاب $f(x)=t$ داریم:
$$=\lim_{t\to 0^-}f(t)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=-1$$

۶۳۵– گزینه‌ی «۳»

با توجه به اثبات تست قبل، وقتی $x\to 0^+$، آنگاه $f(x)\to 1^-$، پس:
$$\lim_{x\to 0^+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to 1^-}g(f(x))=\lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^-}[x]=0$$
به طریق مشابه:
$$\lim_{x\to 0^-}g(f(x))=\lim_{f(x)\to 1^+}g(f(x))=\lim_{x\to 1^+}g(x)=\lim_{x\to 1^+}[x]=1$$
پس حد چپ و راست در $x=0$ موجود و نابرابرند.

۶۳۶– گزینه‌ی «۴»

از آن‌جایی‌که حد تابع عدد حقیقی شده است و مخرج به ازای $x=2$، صفر می‌شود، در صورتی‌که عبارت درجه‌ی دوم x^2+ax+b به ازای $x=2$، غیرصفر باشد، حد تابع بی‌نهایت خواهد شد. پس عبارت درجه‌ی دوم باید شامل یک عامل $(x-2)$ باشد. بنابراین عبارت به صورت زیر خواهد بود:
$$\lim_{x\to 2}(x+k)(x-2)\left[\frac{1}{x-2}\right]=3$$
اما $\lim_{x\to 2}(x-2)\left[\frac{1}{x-2}\right]=1$، پس:
$$\lim_{x\to 2}(x+k)=3\Rightarrow 2+k=3\Rightarrow k=1$$
لذا عبارت درجه دوم به صورت زیر است:
$$(x-2)(x+1)=x^2-x-2$$
لذا $b=-2$ و $a=-1$ بنابراین:
$$(a\,,b)=(-1\,,-2)$$

۶۳۷– گزینه‌ی «۲»

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:
$$fog(x)=f(g(x))=\left[\frac{\sin x}{x}\right]$$
باید $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ را بررسی کنیم، از آنجایی که برای هر $0<|x|<\frac{\pi}{2}$، $\sin x<x$ (به دایره‌ی مثلثاتی توجه کنید)، لذا $0<\frac{\sin x}{x}<1$ و در نتیجه:
$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=0$$
بنابراین حد چپ و راست در $x=0$ موجود و برابرند.

۶۳۸– گزینه‌ی «۱»

با توجه به قضیه‌ی فشردگی، خواهیم داشت:
$$\lim_{x\to 0}-x^2=\lim_{x\to 0}x^2=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}(f(x)-3)=0$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=3$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{f(x)}\right]=\left[\frac{-1}{3}\right]=-1$$

۶۳۹– گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم:
$$sgn(x)=\begin{cases}1 & ,x>0\\ 0 & ,x=0\\ -1 & ,x<0\end{cases}$$

اما عبارت درجه‌ی دوم x^2-3x+4 همواره مثبت است زیرا در آن، ضریب x^2 مثبت و $\Delta=9-16<0$، پس:

$$sgn(\underbrace{x^2-3x+4}_{>0})=1$$

پس تابع f تابع ثابت $f(x)=1$ است و در هر نقطه‌ی دلخواهی دارای حد ۱ است، توجه کنید که انتقال افقی بر روی حد آن اثری ندارد.

۶۴۰– گزینه‌ی «۴»

از آنجایی که $\sin\frac{1}{x-1}$ در $x=1$ حد ندارد ولی کراندار است، لذا برای آنکه تابع f در $x=1$ حد داشته باشد، باید عامل x^2-ax به ازای $x=1$ صفر شود، لذا:

$$x^2-ax\xlongequal{x=1}0\Rightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1$$

۶۴۱– گزینه‌ی «۲»

باید در $\frac{1}{2}$ ضابطه‌ی بالا و پایین برابر باشند:

$$x+a=3x+1\xrightarrow{x=\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+a=\frac{3}{2}+1\Rightarrow a=2$$

راهبرد حل تیپ (۵)

وقتی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=a$ تعریف نشده باشد ولی دارای حد L باشد، آنگاه:

الف- $x=a$ ریشه ی مشترک صورت و مخرج است.

ب- حد تابع در $x=a$ برابر L است.

۶۴۲– گزینه‌ی «۲»

با توجه به نمودار $f(0)=0$ است، پس:

$$f(0)=\frac{0+0+b}{0-1}=0\to b=0$$

لذا تابع به صورت $f(x)=\frac{4x^3+ax}{x-1}$ تبدیل می‌شود. اما با توجه به نمودار، تابع در $x=1$ تعریف نمی‌شود و در این نقطه حد دارد. چون مخرج کسر به ازای $x=1$ صفر است، باید صورت کسر نیز به ازای $x=1$، صفر شود تا عبارت به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل شود، چون اگر صورت به ازای $x=1$ صفر نشود حد تابع در این نقطه، ∞ می‌شود، لذا:

$$4x^3+ax\,|_{x=1}=0\Rightarrow 4+a=0\Rightarrow a=-4$$

بنابراین: $(a\,,\,b)=(-4\,,\,0)$

راهبرد حل تیپ (۶)

در رفع ابهام $\frac{0}{0}$، برای توابع جبری، با حذف عامل صفر شونده‌ی یکسان از صورت و مخرج، حد تابع را می‌یابیم.

الف- در صورتی که صورت و مخرج یا هر دو، از عبارت‌های اصم (گنگ) تشکیل شده باشند، آن‌ها را گویا می‌کنیم و سپس حد را با حذف عامل صفرشونده‌ی یکسان می‌یابیم.

ب- در بعضی از تست‌ها استفاده از قاعده‌ی هوپیتال کارسازتر است.

هوپیتال یک تابع کسری،کسری است کـه صورت آن مشتق صورت و مخرج آن مشتق مخرج است.

تذکر: به فرمول‌های مشتق زیر توجه کنید:

$(1)\ y=u^n\Rightarrow y'=nu'\times u^{n-1}$

$(2)\ y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(3)\ y=\sqrt[m]{u}\Rightarrow y'=\frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$

تذکر: در عبارت‌های مثلثاتی در حالت $\frac{0}{0}$ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، عامل صفرشونده را حذف می‌کنیم، در بعضی از آنها با انتقال حد به نقطه‌ی صفر مساله راحتتر حل می‌شود، در اغلب این تست‌ها استفاده از قاعده‌ی هوپیتال کارساز است.

تذکر: به فرمول‌های مشتق زیر توجه کنید:

$(1)\ y=\sin u\Rightarrow y'=u'\times\cos u$

$(2)\ y=\cos u\Rightarrow y'=-u'\times\sin u$

$(3)\ y=\tan u\Rightarrow y'=u'(1+\tan^2 u)$

$(4)\ y=\cot u\Rightarrow y'=-u'(1+\cot^2 u)$

۶۴۳– گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}\quad(\text{حد ابهام } \tfrac{0}{0} \text{ دارد})$$

راه حل اول: صورت و مخرج را در مزدوج عبارت صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{4x^2-(3-x)}{x(x+1)\times(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{4x^2+x-3}{x(x+1)\times(2x-\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(4x-3)}{x\cancel{(x+1)}(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$=\frac{-7}{-1(-4)}=\frac{-7}{4}$$

راه حل دوم: با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$HOP:\ \lim_{x\to-1}\frac{2-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}}{2x+1}=\frac{2-\frac{1}{4}}{-1}=\frac{-7}{4}$$

۶۴۴– گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}\quad(\text{حد ابهام } \tfrac{0}{0} \text{ دارد})$$

راه حل اول: با اسـتفاده از اتحـاد $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\,\sin(x-\frac{\pi}{4})$ و تبدیل $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\cancel{\cos x-\sin x}}{\cos x}}{\frac{\cancel{\sin x-\cos x}}{\sqrt{2}}}=\frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-2$$

راه حل دوم: به ازای $x=\frac{\pi}{4}$، ابهام $\frac{0}{0}$ را داریم، لذا با استفاده از قاعـده‌ی هوپیتال داریم:

$$\xlongequal{HOP}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(1+\tan^2 x)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{-(1+1)}{1}=-2$$