

آزمون (۱): دیفرانسیل

۱. ۱. اگر a عددی حقیقی و مخالف صفر باشد، در اثبات تساوی $a(\frac{1}{a} + 3) = 3a + 1$ کدام یک از اصول

(یادآوری مفاهیم پایه)

اعداد حقیقی به کار نرفته است؟

- (۱) وجود عضو همانی جمع
(۲) وجود عضو وارون
(۳) خاصیت جابه‌جایی جمع
(۴) خاصیت توزیع پذیری ضرب روی جمع

۲. ۲. اگر $\frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{1} = \frac{b}{a}$ باشد، $a + b$ کدام است؟

(یادآوری مفاهیم پایه)

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳. ۳. با توجه به $y = 4 - \frac{1+2|x|}{|2x-1|}$ ، کمترین و بیشترین مقدار y به ترتیب از راست به چپ کدامند؟

(یادآوری مفاهیم پایه)

- (۱) وجود ندارد، ۳
(۲) ۳، وجود ندارد.
(۳) ۴ و ۵
(۴) وجود ندارد، وجود ندارد.

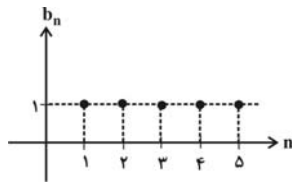
۴. ۴. اگر تمامی جواب‌های نابرابری $|x^2 - 4| < a$ در بازه‌ی $(\frac{1}{9}, \frac{2}{1})$ قرار داشته باشند، آن‌گاه مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

(یادآوری مفاهیم پایه)

- (۱) $\frac{1}{41}$ (۲) $\frac{1}{40}$ (۳) $\frac{1}{39}$ (۴) $\frac{1}{42}$

۵. ۵. اگر نمودار دنباله‌ی $\{b_n\} = \{a_n \cos(n\pi)\}_{n=1}$ مانند شکل زیر بر روی خط $y = 1$ باشد، دنباله‌ی a_n کدام می‌تواند باشد؟

(دنباله‌ها)



(۱) $\sin[(2n-1)\frac{\pi}{2}]$

(۲) $\sin(2n\pi + \frac{\pi}{4})$

(۳) $\tan[(2n+1)\frac{\pi}{4}]$

(۴) $\tan(2n\pi + \frac{\pi}{4})$

(دنباله‌ها)

۶. ۶. دنباله‌ی $a_1 = k$ و $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$ نزولی است. حدود k کدام است؟

- (۱) $k \geq -12$ (۲) $0 < k \leq 4$ (۳) $k \leq -3$ (۴) $k \geq 4$

(دنباله‌ها)

۷. ۷. کدام دنباله فقط از پایین کران دار است؟

(۱) $a_n = \frac{n^2}{3^n}$ (۲) $b_n = (\tan \frac{\pi}{3})^n$

(۳) $c_n = \tan^{-1} \sqrt{n}$ (۴) $d_n = \frac{n-n^2}{2n+1}$

۸. ۸. به ازای چه مقادیری از a ، دنباله‌ی $a_n = \left\{ \left[\sqrt{n+3} - \sqrt{n+a} \right] \right\}$ همگرا به (-1) است؟ [] نماد

(دنباله‌ها)

جزء صحیح است)

- (۱) $0 < a < 3$ (۲) $a > 3$ (۳) $a = -3$ (۴) $a = 3$

(دنباله‌ها)

۹. ۹. در دنباله‌ی $\left\{ \frac{\cos(n+1)\pi}{(n+1)} \right\}$ ، مجموع سوپریموم و اینفیموم دنباله کدام است؟

- (۱) $\frac{-1}{3}$ (۲) $\frac{-1}{2}$ (۳) $\frac{-1}{6}$ (۴) $\frac{1}{6}$

(دنباله‌ها)

۱۰. ۱۰. اگر $a_n = \begin{cases} 2n^2 + 3 & ; n \leq 1000 \\ n^2 + 1 & \\ n \sin \frac{1}{n} & ; n > 1000 \end{cases}$ و $b_n = \cos \frac{(-1)^n}{n}$ ، آنگاه دنباله‌ی $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ چگونه است؟

(۱) همگرا به ۱ است. (۲) همگرا به ۲ است. (۳) همگرا به صفر است. (۴) واگرا است.

(دنباله‌ها)

۱۱. ۱۱. دنباله‌ی $a_n = 1 + \frac{k \binom{n}{1}}{n} + \frac{k^2 \binom{n}{2}}{n^2} + \dots + \frac{k^n \binom{n}{n}}{n^n}$ به عدد e همگراست. مقدار k کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۴

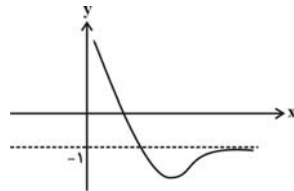
(حد)

۱۲. ۱۲. اگر $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ و $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{x-1}$ باشد، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) واگراست.

(حد)

۱۳. ۱۳. اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{f(x)} \right]$ برابر است با: []، نماد جزء صحیح



(است.)

(۱) صفر

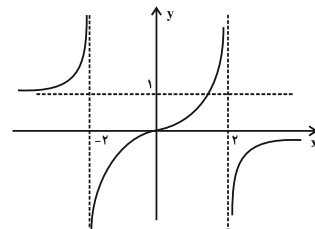
(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) وجود ندارد.

(حد)

۱۴. ۱۴. اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت زیر باشد و $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(f(a_n))$ کدام است؟



(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ∞

(حد)

۱۵. ۱۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4x}{x^2 - 4} - \left| \frac{x}{x+2} \right|$ کدام است؟

(۴) $-\infty$

(۳) ۲

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) صفر

(حد)

۱۶. ۱۶. اگر مقدار $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2|x| - 2a}{|x| + |-x|}$ ، عددی متناهی باشد، آنگاه مقدار a کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است.

(۴) ۵۴

(۳) ۲۷

(۲) ۹

(۱) ۳

(حد)

۱۷. ۱۷. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 3^x + 4^x - 1}{16^x - 1}$ ، کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۱

(حد)

۱۸. ۱۸. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x + |-x| & ; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در فاصله‌ی $(-3, 3)$ در چند نقطه حد دارد؟ []،

علامت جزء صحیح است.

(۴) بی‌شمار

(۳) ۵

(۲) ۴

(۱) صفر

۱۹ ۱۹

تابع $f(x) = [\sqrt{2} \sin x] + [\sqrt{2} \cos x]$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ چگونه است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است).

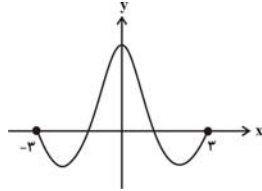
- (۱) حد ندارد. (۲) فقط از راست پیوسته است.
(۳) پیوسته است. (۴) حد دارد ولی پیوسته نیست.

(پیوستگی)

۲۰ ۲۰

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی $[-3, 3]$ به صورت زیر و برد آن $[-2, 3]$ باشد، در این صورت

نمودار تابع $y = [f(x)]$ در چند نقطه از این بازه ناپیوسته است؟ ([] نماد جزء صحیح است)



- (۱) ۱۰
(۲) ۱۱
(۳) ۱۲
(۴) ۱۳

(پیوستگی)

۲۱ ۲۱

اگر تابع $f(x) = [2\sqrt{x}]$ در بازه‌ی $(k, 8)$ دارای دو نقطه‌ی ناپیوستگی باشد، کمترین مقدار k

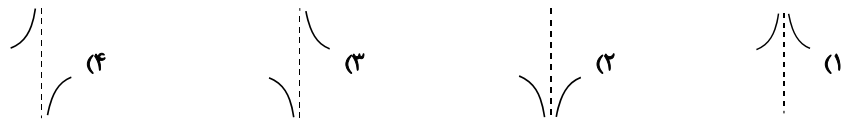
کدام است؟ ([] ، علامت جزء صحیح است).

- (۱) ۱/۵ (۲) ۲ (۳) ۲/۲۵ (۴) ۲/۵

(پیوستگی)

۲۲ ۲۲

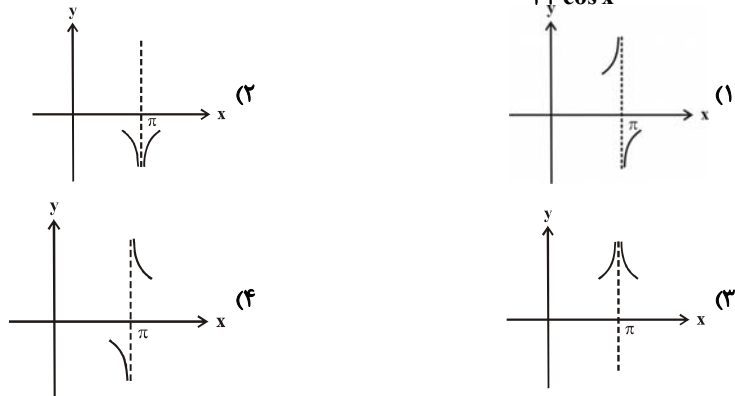
نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{x+1}{x^2+x}$ ، در نزدیکی مجانب قائم آن، به کدام صورت است؟



(مجانِب)

۲۳ ۲۳

نمودار تابع $y = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x}$ در همسایگی $x = \pi$ کدام است؟



(مجانِب)

۲۴ ۲۴

نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ در اطراف مجانب افقی خود، به کدام صورت است؟



(مجانِب)

۲۵ ۲۵

تعداد مجانب‌های تابع $y = x \left(\frac{2^x + 2}{2^x - 2} \right)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

(مجانِب)

۲۶. دو نقطه‌ی ثابت $A = (1, -1, 2)$ و $B = (-1, 1, -2)$ و نقطه‌ی متغیر M را در نظر می‌گیریم. اگر \overline{MA}

بر \overline{MB} عمود باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی M از مبدأ مختصات چند واحد است؟ (بردارها)

(۱) $\sqrt{6}$ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) $2\sqrt{3}$

۲۷. اگر $a \cdot i = a \cdot (j - k) = a \cdot (i - 2j + 3k) = 1$ ، اندازه‌ی بردار a کدام است؟ (بردارها)

(۱) $\sqrt{12}$ (۲) $\sqrt{13}$ (۳) $\sqrt{14}$ (۴) $\sqrt{15}$

۲۸. اگر $a'' = (3, -5, -2)$ ، قرینه‌ی $a = (-1, 1, 6)$ نسبت به بردار یکی b باشد، بردار b کدام است؟ (بردارها)

(۱) $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۲) $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۳) $(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{2}{3})$

۲۹. اگر a و b دو بردار ناصفر باشند به طوری که $b \cdot (a \times b) = 3(a \cdot b)^2 - |a \times b|^2$ آنگاه زاویه‌ی بین دو بردار a و b کدام می‌تواند باشد؟ (بردارها)

(۱) $\frac{\pi}{6}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

۳۰. دو بردار با تصاویر $a = (1, -2, 3)$ و $b = (2, 1, -1)$ مفروض هستند. حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار a ، b و $a \times b$ ساخته می‌شود، کدام است؟ (بردارها)

(۱) ۵۴ (۲) ۷۲ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

۳۱. قرینه‌ی مبدأ مختصات نسبت به خط به معادله‌ی $(x = 3, y = 2t - 1, z = 3 - t)$ ، نقطه‌ی (a, b, c) است. حاصل $a + b + c$ کدام است؟ (خط و صفحه)

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۳۲. m چقدر باشد تا دو خط $d: \begin{cases} x = mt + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = 2 \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$) و $d': 2x = \frac{3y - 6}{2} = \frac{z}{-1}$ متقاطع باشند؟ (خط و صفحه)

(۱) -۲ (۲) $-\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۳

۳۳. فاصله‌ی نقطه‌ی $A = (1, 2, 1)$ از فصل مشترک دو صفحه‌ی $\begin{cases} P_1: x - z = 0 \\ P_2: x + y + z = 0 \end{cases}$ ، کدام است؟ (خط و صفحه)

(۱) $\frac{\sqrt{16}}{3}$ (۲) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ (۳) $\frac{16}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{16}}{3}$

۳۴. اگر خط $\Delta: \frac{x-1}{a} = y+1 = z-1$ ، به تمامی در صفحه‌ی $P: x - y - z + b = 0$ قرار داشته باشد، $a + b$ کدام است؟ (خط و صفحه)

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۳۵. طول عمود مشترک دو خط $d_1: x+1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2}$ و $d_2: x = \frac{y-1}{-1} = z+2$ چقدر است؟ (خط و صفحه)

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۶ ۳۶. اگر طول مماس رسم شده از نقطه‌ی $A = (-1, 2)$ بر دایره‌ی به معادله‌ی $kx^2 + y^2 + 2ax - 4y = 0$ برابر $\sqrt{8}$ باشد، آنگاه a کدام است؟

(مقاطع مخروطی)

۲ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{11}{2}$ (۳) ۵ (۴)

۳۷ ۳۷. معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $(1, 1)$ که خط به معادله‌ی $x + y + 1 = 0$ روی آن وترى هم طول با شعاع دایره جدا می‌کند، به صورت $x^2 + y^2 - 2x - 2y + c = 0$ مقدار c کدام است؟

(مقاطع مخروطی)

۸ (۱) -4 (۲) ۶ (۳) -2 (۴)

۳۸ ۳۸. بر روی کدام یک از خطوط زیر، نمی‌توان نقطه‌ای یافت که مجموع فواصل آن از دو نقطه‌ی $M = (0, 3)$ و $N = (0, -1)$ ، برابر ۶ باشد؟

(مقاطع مخروطی)

۱) $x = -2$ (۲) $y = 3$ (۳) $y = -1$ (۴) $x = 3$

۳۹ ۳۹. معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آنها از نقطه‌ی $A = (1, 0)$ ، برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فاصله‌ی آن‌ها از خط $x = 2$ باشد، کدام است؟

(مقاطع مخروطی)

۱) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ (۲) $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ (۳) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ (۴) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

۴۰ ۴۰. کانون سهمی $x^2 - 4y + n = 0$ روی محور x قرار دارد. این سهمی با دایره‌ی $x^2 + y^2 = 1$ چه وضعی دارد؟

(مقاطع مخروطی)

۱) دایره سهمی را در دو نقطه قطع می‌کند. ۲) دایره داخل سهمی بوده و بر آن مماس است. ۳) دایره خارج سهمی بوده و بر آن مماس است. ۴) دایره با سهمی هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارد.

آزمون (۱): ریاضیات گسسته

۴۱ ۴۱. دنباله درج‌ات رئوس یک گراف ساده با اندازه‌ی ۷ به صورت $1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, x$ است. حاصل $2x - 3y$ کدام است؟

(گراف)

۱) -5 (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) صفر

۴۲ ۴۲. در یک گراف 5 -منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، رابطه‌ی $q = 2p + 9$ برقرار است. این گراف چند یال دارد؟

(گراف)

۱) ۱۸ (۲) ۲۷ (۳) ۴۵ (۴) ۵۱

۴۳ ۴۳. در گراف ساده‌ای $q = 15$ و $\delta = 3$ است. مرتبه‌ی گراف، چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

(گراف)

۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۴ ۴۴. گراف 2 -منتظم G از ۵ بخش جدا از هم تشکیل شده است. اگر این گراف، گراف بازه‌ها باشد، مرتبه‌ی آن کدام است؟

(گراف)

۱) ۱۰ (۲) ۱۵

۳) ۳۰ (۴) چنین گرافی وجود ندارد.

- ۴۵ (۴۵) چند گراف همبستگی از مرتبه‌ی ۶ و اندازه‌ی ۷ وجود دارد؟
- (گراف)
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۴۶ (۴۶) حاصل ضرب درجات رئوس یک درخت برابر ۴۲ است. اگر ماکزیمم درجه‌ی رئوس برابر ۷ باشد، این درخت حداقل چند رأس دارد؟
- (گراف)
- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)
- ۴۷ (۴۷) M ماتریس مجاورت گراف r -منتظم از مرتبه‌ی p است. اگر حاصلضرب درایه‌های روی قطر اصلی M^2 برابر ۶۴ باشد، حداکثر تعداد دورهای این گراف کدام است؟
- (گراف)
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۴۸ (۴۸) خارج قسمت تقسیم عدد $1-13!$ بر $13!$ کدام است؟
- (نظریه اعداد)
- ۱۲! (۱) $12!-1$ (۲) $12!+1$ (۳) $13!-11$ (۴)
- ۴۹ (۴۹) بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $A = \{n \in \mathbb{N} : 25 \mid 3^n + 4^n, n \leq 100\}$ کدام است؟
- (نظریه اعداد)
- ۱۰۰ (۱) ۹۹ (۲) ۹۸ (۳) ۹۷ (۴)
- ۵۰ (۵۰) در تقسیم a بر عدد طبیعی b ، باقیمانده ۳۴ و خارج قسمت عدد طبیعی است. چند جواب طبیعی کم‌تر از ۷۰ برای a وجود دارد؟
- (نظریه اعداد)
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۵۱ (۵۱) اگر $A = \overline{(abc)}_3 + \overline{(cba)}_7$ ، آنگاه A بر کدام یک از اعداد زیر الزاماً بخش‌پذیر نیست؟
- (نظریه اعداد)
- ۲ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴)
- ۵۲ (۵۲) در سمت راست عدد $A = (54)^{54} \times 20!$ چند صفر وجود دارد؟
- (نظریه اعداد)
- ۵۴ (۱) ۴ (۲) ۱۸ (۳) ۸ (۴)
- ۵۳ (۵۳) برای سه عدد اول و متمایز $(r > p > q)$ رابطه‌ی $pqr \mid (p^2 - q^2)$ برقرار است. مجموع این سه عدد اول در تقسیم بر ۴ چه باقیمانده‌ای دارد؟
- (نظریه اعداد)
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)
- ۵۴ (۵۴) اگر $d \neq 1$ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی a و b باشد و $ab + d = 305$ ، کوچک‌ترین مضرب مشترک a و b کدام است؟
- (نظریه اعداد)
- ۲۴ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۲ (۳) ۶۰ (۴)
- ۵۵ (۵۵) اگر a یک عدد طبیعی دلخواه باشد به گونه‌ای که $6 = (a, 24)$ و $5 = (a, 25)$ ، آنگاه $(a, 6300)$ به ازای مقادیر مختلف a ، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟
- (نظریه اعداد)
- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

آزمون (۱): فیزیک

۵۶ (۵۶) متحرکی در یک مسیر مستقیم، 300m اول مسیر را با سرعت ثابت $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ و 5 ثانیه‌ی بعد را با سرعت

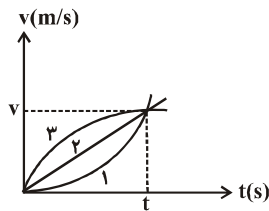
ثابت $40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در همان جهت حرکت کرده است. سرعت متوسط متحرک در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

(حرکت‌شناسی)

- (۱) ۳۰ (۲) ۲۵ (۳) ۱۷ (۴) ۳۴

۵۷ (۵۷) در شکل زیر، نمودار سرعت- زمان سه متحرک رسم شده است. چه رابطه‌ای بین سرعت‌های متوسط

(حرکت‌شناسی)



سه متحرک و بین شتاب‌های متوسط آن‌ها وجود دارد؟

- (۱) $\bar{a}_3 = \bar{a}_2 = \bar{a}_1$ و $\bar{v}_3 = \bar{v}_2 = \bar{v}_1$
 (۲) $\bar{a}_3 = \bar{a}_2 = \bar{a}_1$ و $\bar{v}_3 > \bar{v}_2 > \bar{v}_1$
 (۳) $\bar{a}_3 > \bar{a}_2 > \bar{a}_1$ و $\bar{v}_3 > \bar{v}_2 > \bar{v}_1$
 (۴) $\bar{a}_3 > \bar{a}_2 > \bar{a}_1$ و $\bar{v}_3 = \bar{v}_2 = \bar{v}_1$

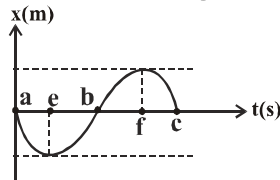
۵۸ (۵۸) اتومبیلی با شتاب ثابت روی خط راست حرکت می‌کند. اگر این اتومبیل در ثانیه‌ی پنجم حرکت خود 34m و در ثانیه‌ی ششم حرکت خود 38m را طی کند، شتاب و سرعت اولیه‌ی اتومبیل به ترتیب از راست به چپ برحسب واحدهای SI کدام است؟

(حرکت‌شناسی)

- (۱) $16, 4$ (۲) $-2, 4$ (۳) $16, 2$ (۴) $-2, 2$

۵۹ (۵۹) نمودار مکان - زمان جسمی که روی خط راست در حال حرکت است، در SI مطابق شکل زیر است. در این صورت نوع حرکت در بازه‌ی زمانی (b, c) در کدام گزینه، درست مطرح شده است؟

(حرکت‌شناسی)



- (۱) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده
 (۲) ابتدا کندشونده و سپس تندشونده
 (۳) همواره تندشونده
 (۴) همواره کندشونده

۶۰ (۶۰) در شرایط خلأ، جسمی را با سرعت $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ از ارتفاع 25m از سطح زمین در راستای قائم به طرف بالا

(حرکت‌شناسی)

پرتاب می‌کنیم. اندازه‌ی سرعت جسم هنگام برخورد به زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(۱) ۴۵ (۲) ۴۰ (۳) ۳۵ (۴) ۳۰

۶۱ (۶۱) گلوله‌ای را با سرعت اولیه‌ی $45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر 3 ثانیه بعد گلوله‌ی دیگری را با همان سرعت از همان نقطه در راستای قائم رو به بالا پرتاب کنیم، دو گلوله در چه

(حرکت‌شناسی)

ارتفاعی نسبت به نقطه‌ی پرتاب با هم تلاقی می‌کنند؟ (مقاومت هوا ناچیز است و $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

(۱) ۳۰ (۲) ۹۰ (۳) $101/25$ (۴) $11/25$

۶۲ معادله‌های حرکت در SI برای خودروی A در صفحه‌ی xOy به صورت $x_A = 4t$ و $y_A = bt$ و

برای خودروی B در همان صفحه به صورت $x_B = at^2$ و $y_B = 8$ می‌باشد. اگر دو خودرو هم‌زمان از

(حرکت‌شناسی)

یک مکان شروع به حرکت کرده باشند، در لحظه‌ی برخورد به یک‌دیگر، نسبت $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

۶۳ معادله‌های حرکت ذره‌ای در صفحه‌ی xOy (در SI) به صورت $\begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = t^2 \end{cases}$ می‌باشد. اندازه‌ی سرعت

(حرکت‌شناسی)

متوسط این ذره در بازه‌ی زمانی $t = 1s$ تا $t = 3s$ چند $\frac{m}{s}$ است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $4\sqrt{2}$ (۴) ۵

۶۴ در شرایط خلأ از لبه‌ی یک بلندی پرتابه‌ای با سرعت $5\frac{m}{s}$ در راستای افقی پرتاب می‌شود. چند ثانیه

(حرکت‌شناسی)

پس از پرتاب، سرعت آن به $13\frac{m}{s}$ می‌رسد؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

- (۱) $0/6$ (۲) $1/5$ (۳) $0/8$ (۴) $1/2$

۶۵ در شرایط خلأ، پرتابه‌ای از مبدأ مختصات تحت زاویه‌ی α نسبت به افق به طرف بالا پرتاب می‌شود و

در نقطه‌ای به مختصات $A(120m, 80m)$ بردارهای سرعت و شتاب آن بر هم عمود می‌شوند. زاویه‌ی

α چند درجه است؟

(حرکت‌شناسی)

$(\sin 37^\circ = 0/6, g = 10\frac{m}{s^2})$

- (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۳۷ (۴) ۵۳

۶۶ در شرایط خلأ، گلوله‌ای به جرم ۲۰۰ گرم با سرعت اولیه‌ی $\vec{v}_0 = 30\vec{i} + 40\vec{j}$ در SI رو به بالا پرتاب

(حرکت‌شناسی)

می‌شود. کم‌ترین مقدار انرژی جنبشی این گلوله چند ژول است؟

- (۱) ۹ (۲) ۳ (۳) ۳۰ (۴) ۹۰

۶۷ روی یک سطح افقی بدون اصطکاک، جسمی به جرم ۵kg تحت تأثیر دو نیروی افقی و ثابت

(دینامیک)

$\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ (N) و $\vec{F}_2 = 6\vec{i} + 4\vec{j}$ (N) قرار می‌گیرد. بزرگی شتاب این جسم چند متر بر مجذور

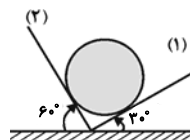
ثانیه است؟

- (۱) $3/2$ (۲) $3/2\sqrt{2}$ (۳) $1/6\sqrt{2}$ (۴) $1/6$

۶۸ یک کره‌ی فلزی به وزن $40\sqrt{3}$ نیوتون درون ناوهای با دیواره‌های صیقلی قرار دارد. نیرویی که کره‌ی

(دینامیک)

فلزی به دیواره‌ی (۱) ناوه وارد می‌کند چند نیوتون است؟



- (۱) ۴۰

- (۲) ۶۰

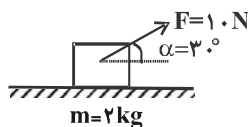
- (۳) $20\sqrt{3}$

- (۴) $30\sqrt{3}$

۶۹. در شکل زیر، جسم با سرعت ثابت در امتداد سطح افقی در حرکت است. ضریب اصطکاک

(دینامیک)

جنبشی بین جسم و سطح کدام است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)



(۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴) $\sqrt{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

۷۰. در شکل زیر، جرم هریک از حلقه‌ها ۲۰۰ گرم است و مجموعه‌ی آن‌ها با نیروی قائم $F = 9 N$ به طرف

(دینامیک)

بالا کشیده می‌شود. نیرویی که حلقه‌ی وسطی، به حلقه‌ی بالایی وارد می‌کند، چند نیوتون



است؟ ($g = 10 \frac{N}{kg}$)

(۲) $4/5$

(۱) ۶

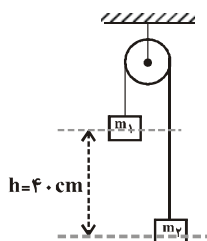
(۴) $1/5$

(۳) ۳

۷۱. در ماشین آتوود شکل زیر، وزنه‌ها از حال سکون رها می‌شوند. چند ثانیه پس از شروع حرکت، دو وزنه

(دینامیک)

هم سطح می‌شوند؟ (جرم قرقره، نخ و اصطکاک‌ها ناچیز است، $\sqrt{2} = 1/4$ ، $g = 10 \frac{N}{kg}$ ،



($m_1 = 5 kg$ و $m_2 = 3 kg$)

(۱) $0/4$

(۲) $0/5$

(۳) $0/56$

(۴) $0/7$

۷۲. جسمی به جرم ۱ kg بر روی سطح شیب‌داری به زاویه‌ی شیب 53° با شتاب ثابت $\frac{2}{5} \frac{m}{s^2}$ تند شونده به

(دینامیک)

پائین سطح می‌لغزد. نیرویی که از طرف سطح شیب‌دار بر جسم وارد می‌شود، چند نیوتون

است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$ ، $\sin 53^\circ = 0/8$)

(۴) ۱۰

(۳) ۸

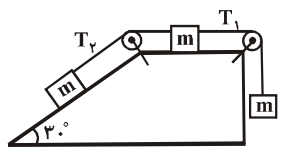
(۲) $6\sqrt{3}$

(۱) ۶

۷۳. در شکل زیر، جرم همه‌ی وزنه‌ها برابر m است. اگر از جرم نخ‌ها و قرقره‌ها و اصطکاک بین کلیه‌ی

(دینامیک)

سطوح صرف نظر شود، اختلاف نیروی کشش نخ‌های T_1 و T_2 کدام است؟



(۲) $\frac{1}{6} mg$

(۱) $\frac{2}{3} mg$

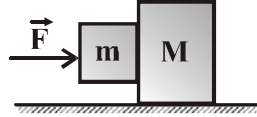
(۴) $\frac{5}{6} mg$

(۳) $\frac{1}{5} mg$

۷۴ (۷۴) در شکل مقابل دو جرم به یکدیگر تکیه دارند. ضریب اصطکاک ایستایی بین قطعه‌ها $\mu_s = 0/5$ است، ولی سطح افقی بدون اصطکاک است. کمترین مقدار نیروی افقی F چند نیوتون باشد تا از لغزیدن

جرم m بر روی جرم M جلوگیری کند؟ ($M = 40 \text{ kg}$, $m = 10 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)

(دینامیک)



۱۲۵ (۱)

۱۵۰ (۲)

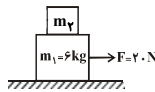
۲۰۰ (۳)

۲۵۰ (۴)

۷۵ (۷۵) در شکل زیر، بر اثر اعمال نیروی افقی F ، دو جسم با هم حرکت می‌کنند. اگر اندازه‌ی نیروی اصطکاک لغزشی بین جسم m_1 و سطح افقی، برابر 8 N باشد، بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی

بین m_1 و $m_2 = 2 \text{ kg}$ چند نیوتون است؟

(دینامیک)



۱ (۱)

۳ (۳)

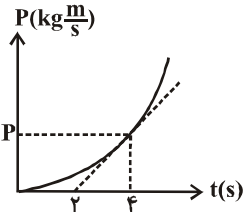
۲ (۲)

۴ (۴)

۷۶ (۷۶) نمودار تکانه‌ی جسمی بر حسب زمان، مطابق شکل زیر است. اگر در لحظه‌ی $t = 4 \text{ s}$ بزرگی برآیند

نیروهای وارد بر جسم، برابر 6 N باشد، بزرگی تکانه‌ی جسم در این لحظه چند $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ است؟

(دینامیک)



۶ (۱)

۱۲ (۲)

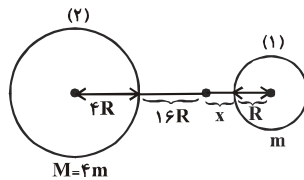
۲۴ (۳)

۳ (۴)

۷۷ (۷۷) مطابق شکل زیر، جسمی بین دو سیاره، تحت تأثیر نیروی گرانش آن دو سیاره قرار دارد. فاصله‌ی این

جسم از سطح سیاره‌ی (۱) چند برابر R باشد تا به حالت تعادل باقی بماند؟

(حرکت دایره‌ای)



۴ (۱)

۶ (۲)

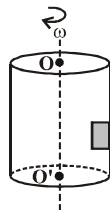
۸ (۳)

۹ (۴)

۷۸ (۷۸) مطابق شکل، استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی 10 cm حول محور قائم OO' دوران می‌کند. کمترین بسامد چرخش استوانه چند دور بر ثانیه باید باشد تا جسم کوچکی که به دیواره‌ی درونی استوانه تکیه دارد،

نسبت به آن ساکن بماند؟ (ضریب اصطکاک ایستایی جسم و بدنه‌ی استوانه $0/4$ است و $g = \pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

(حرکت دایره‌ای)



۲/۵ (۲)

۲۵ (۴)

۱ (۱)

۰/۲۵ (۳)

۷۹ ۷۹

بیشترین انرژی جنبشی که اتومبیلی به وزن 10000N می‌تواند داشته باشد وقتی که پیچی به شعاع 10m و زاویه‌ی شیب عرضی 37° را بدون لغزش دور می‌زند، برابر با چند کیلوژول است؟
($\cos 37^\circ = 0.8$)

(حرکت دایره‌ای)

۳۵ (۱) ۳۷/۵ (۲) ۳۹ (۳) ۴۰ (۴)

۸۰ ۸۰

ماهواره‌ای در فاصله‌ی R_e از سطح زمین با بسامد f به دور آن می‌چرخد. اگر این ماهواره در فاصله‌ی h' از سطح زمین قرار گیرد، بسامد چرخش آن به دور زمین $\frac{f}{\sqrt[3]{3}}$ می‌شود. h' چند برابر R_e است؟ (R_e شعاع زمین است.)

(حرکت دایره‌ای)

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۸۱ ۸۱

نسبت بیشینه‌ی شتاب یک نوسانگر ساده به بیشینه‌ی سرعت آن در SI، برابر با کدام کمیت وابسته به آن نوسانگر است؟

(حرکت نوسانی)

بسامد (۱) دوره (۲) دامنه (۳) بسامد زاویه‌ای (۴)

۸۲ ۸۲

شتاب یک نوسانگر ساده به طور مرتب در هر ثانیه ۸ بار صفر می‌شود. دوره‌ی این نوسانگر چند ثانیه است؟

(حرکت نوسانی)

۴ (۱) ۸ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴)

۸۳ ۸۳

در یک حرکت هماهنگ ساده، فاصله‌ی دو انتهای مسیر از یکدیگر 80 سانتی‌متر و اندازه‌ی سرعت نوسانگر هنگام عبور از مرکز نوسان 4π متر بر ثانیه است. این نوسانگر در هر دقیقه چند بار طول پاره خط مسیر نوسان را به طور کامل طی می‌کند؟

(حرکت نوسانی)

۱۵ (۱) ۳۰ (۲) ۴۵ (۳) ۶۰ (۴)

۸۴ ۸۴

در یک لحظه، مکان و سرعت یک نوسانگر ساده به ترتیب 2cm و $6\frac{\text{m}}{\text{s}}$ و در لحظه‌ی دیگر مکان و سرعت آن به ترتیب 3cm و $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ است. دوره‌ی این نوسانگر چند ثانیه است؟

(حرکت نوسانی)

$\frac{\pi}{400}$ (۱) $\frac{\pi}{200}$ (۲) $\frac{\pi}{50}$ (۳) $\frac{\pi}{100}$ (۴)

۸۵ ۸۵

وقتی فاصله‌ی نوسانگر ساده‌ای از وضع تعادل نصف دامنه‌ی نوسان شود، اندازه‌ی سرعت نوسانگر چند برابر بیشینه‌ی سرعت آن می‌شود؟

(حرکت نوسانی)

$\frac{1}{2}$ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

۸۶ ۸۶

نوسانگر ساده‌ای روی یک خط افقی حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر در مکان $x = +10\text{cm}$ ، بزرگی نیروی وارد بر نوسانگر برابر 10N باشد، مقدار انرژی پتانسیل نوسانگر در این لحظه، چند ژول است؟

(حرکت نوسانی)

۰/۰۵ (۱) ۰/۵ (۲) ۵ (۳) ۵۰ (۴)

۸۷ ۸۷

نوسانگری به جرم 20g در هر دقیقه 120 نوسان کامل انجام می‌دهد. اگر در هر دوره مسافت 16cm را طی کند، بیشینه‌ی نیروی وارد بر نوسانگر چند نیوتن است؟ ($\pi^2 = 10$)

(حرکت نوسانی)

۰/۶۴ (۱) ۰/۱۲۸ (۲) ۰/۲۵۶ (۳) ۰/۵۱۲ (۴)

۸۸ ۸۸

وزنه 400 گرمی را به فنری که ثابت آن K و جرم آن ناچیز است آویخته و با دامنه کم به نوسان درمی‌آوریم. وزنه‌ی چند گرمی به وزنه قبلی اضافه کنیم تا دوره نوسانات $1/5$ برابر شود؟

(حرکت نوسانی)

۲۰۰ (۱) ۵۰۰ (۲) ۶۰۰ (۳) ۹۰۰ (۴)

(حرکت نوسانی)

۸۹ اگر طول و جرم آونگ ساده‌ای را ۴ برابر کنیم، دوره‌ی آونگ چند برابر می‌شود؟

(۱) ۲ (۲) ۴

(۳) ۱۶ (۴) تغییری نمی‌کند.

۹۰ موجی در یک محیط قابل ارتعاش به وجود می‌آوریم. اگر شدت منبع ارتعاش چهار برابر شود، سرعت

انتشار موج در محیط چند برابر می‌شود؟

(موج مکانیکی)

(۱) تغییر نمی‌کند. (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

۹۱ سیمی با چگالی 8 g/cm^3 و سطح مقطع یک میلی‌متر مربع بین دو نقطه با نیروی ۳۲۰ نیوتون

کشیده شده است. سرعت انتشار موج عرضی در این سیم چند متر بر ثانیه است؟

(موج مکانیکی)

(۱) ۱۰۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۳۰۰ (۴) ۴۰۰

۹۲ اگر موجی از محیطی وارد محیطی شود که سرعت انتشار در آن‌جا کمتر باشد، بسامد آن و طول

(موج مکانیکی)

موج آن

(۱) کاهش یافته - نیز کاهش می‌یابد. (۲) کاهش یافته - ثابت می‌ماند.

(۳) ثابت مانده - افزایش می‌یابد. (۴) ثابت مانده - کاهش می‌یابد.

۹۳ معادله‌ی موجی که در یک محیط همگن منتشر می‌شود، در SI به صورت

$$u_y = 0.2 \sin(100\pi t - \pi x)$$

... متر و سرعت انتشار موج در این محیط ... متر بر ثانیه است.

(موج مکانیکی)

(۱) طولی، ۱، ۵۰ (۲) عرضی، ۱، ۵۰

(۳) طولی، ۲، ۱۰۰ (۴) عرضی، ۲، ۱۰۰

۹۴ یک موج عرضی که تابع موج آن در SI به صورت $u_y = 0.04 \sin(100\pi t - \pi x)$ است، در یک محیط

(موج مکانیکی)

همگن در حال پیشروی می‌باشد. اندازه‌ی سرعت یک ذره از محیط انتشار که در فاصله‌ی ۵ متری از

منبع موج قرار دارد، در لحظه‌ی $t = 0.05 \text{ s}$ ، چند متر بر ثانیه است؟

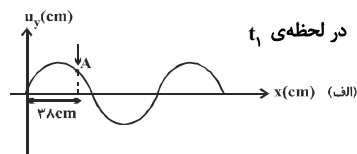
(۱) صفر (۲) ۱۰۰ (۳) 4π (۴) 40π

۹۵ شکل‌های (الف) و (ب) که در زیر رسم شده‌اند، نقش یک موج را در دو لحظه‌ی t_1 و t_2 نشان می‌دهند

(موج مکانیکی)

که در جهت مثبت محور xها منتشر می‌شوند. علامت پیکان، یک نقطه از موج را در لحظه‌های

t_1, t_2 نشان می‌دهد. اگر $t_2 - t_1 = 0.3 \text{ s}$ باشد، تابع این موج در SI کدام است؟

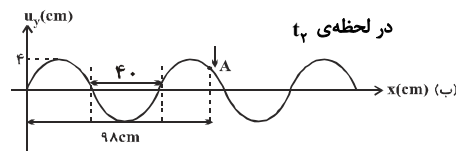


$$u_y = 0.04 \sin(50\pi t - 2/5 \pi x) \quad (1)$$

$$u_y = 0.04 \sin(50\pi t + 2/5 \pi x) \quad (2)$$

$$u_y = 4 \sin(50\pi t - 2/5 \pi x) \quad (3)$$

$$u_y = 4 \sin(50\pi t + 2/5 \pi x) \quad (4)$$



آزمون (۱): شیمی

(سینتیک)

چند مورد از مطالب زیر درست‌اند؟ ۹۶ ۹۶

- واکنش‌های بسیاری وجود دارند که در آن‌ها $\Delta G < 0$ است اما راه مناسبی برای وقوع آن‌ها وجود ندارد.
- با افزودن محلول سدیم کلرید به محلول نقره‌نیترات، رسوب سفیدرنگ نقره‌کلرید به آهستگی تشکیل می‌شود.
- جبهی قند آغشته به خاک باغچه نسبت به جبهی قند تمیز سریع‌تر و آسان‌تر می‌سوزد.
- گاز NO بسیار واکنش‌پذیرتر از گاز NO_۲ است، به همین دلیل در دمای معمولی به سرعت به گاز N_۲ و O_۲ تجزیه می‌شود.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۹۷ ۹۷ داده‌های زیر برای واکنش $\text{CaCO}_3(\text{s}) + 2\text{HCl}(\text{aq}) \rightarrow \text{CaCl}_2(\text{aq}) + \text{CO}_2(\text{g}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$

دست آمده است. سرعت متوسط مصرف HCl در فاصله‌ی زمانی بررسی شده برابر چند $\text{mol} \cdot \text{min}^{-1}$ است؟
و سرعت متوسط تولید گاز CO_۲ در ۱۰ ثانیه‌ی اول چند برابر سرعت متوسط تولید آن در ۱۰ ثانیه پنجم

(سینتیک)

است؟ (C = ۱۲, O = ۱۶ : g.mol⁻¹) (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)

زمان (ثانیه)	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
جرم مخلوط واکنش (گرم)	۶۶/۰۰	۶۵/۳۴	۶۴/۹۰	۶۴/۶۸	۶۴/۵۳	۶۴/۴۶	۶۴/۴۶
جرم کربن دی‌اکسید (گرم)	۰	۰/۶۶	۱/۱۰	-----	-----	-----	-----

۱) $9/43,4/2 \times 10^{-2}$

۲) $9/43,8/4 \times 10^{-2}$

۳) $13/2,4/2 \times 10^{-2}$

۴) $13/2,8/4 \times 10^{-2}$

۹۸ ۹۸ ۶ مول A_۲B را وارد ظرف ۲ لیتری می‌کنیم تا مطابق واکنش گازی $2A_2B \rightarrow 2A_2 + B_2$ تجزیه شود. اگر

سرعت متوسط تولید ماده B_۲ از شروع تا دقیقه دوم برابر ۰/۰۲ مول بر ثانیه باشد، کدام عبارت درست است؟

(۱) غلظت A_۲B در دقیقه دوم پس از شروع واکنش ۲/۴ مول بر لیتر است.

(۲) ۶۰ ثانیه طول می‌کشد تا حدود ۳۵ درصد از A_۲B تجزیه شده و به فراورده‌ها تبدیل شود.

(۳) سرعت واکنش با سرعت تولید ماده‌ی B_۲ و سرعت مصرف A_۲B برابر است.

(۴) در دقیقه دوم پس از شروع واکنش، نسبت تعداد مول‌های فراورده‌ها به مول‌های A_۲B برابر ۶ است.

۹۹ ۹۹ در واکنش $2AB(\text{g}) \rightarrow A_2(\text{g}) + B_2(\text{g})$ غلظت ماده‌ی AB(g) در هر لحظه [AB] از رابطه‌ی زیر

$$\frac{1}{[AB]_t} - \frac{1}{[AB]_0} = kt$$

پیروی می‌کند:

که در آن k ثابت سرعت و برابر $5 \times 10^{-4} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{s}^{-1}$ و $[AB]_0$ غلظت اولیه‌ی آن است. اگر غلظت

اولیه‌ی AB(g) برابر $4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ باشد زمان لازم برای این‌که ۹۰ درصد AB(g) تجزیه شود، چند برابر

زمان لازم برای تجزیه‌ی ۵۰ درصد از آن است؟

۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۴ (۴)

۱۰۰ ۱۰۰ مقداری گاز دی‌نیتروژن پنتوکسید را در ظرفی حرارت می‌دهیم، پس از گذشت یک و نیم دقیقه از آغاز واکنش،

۱۵ درصد آن تجزیه می‌شود. اگر سرعت تشکیل گاز اکسیژن در این بازه $0.2 \text{ mol} \cdot \text{min}^{-1}$ باشد، مقدار

اولیه‌ی گاز دی‌نیتروژن پنتوکسید چند گرم بوده است؟ (N = ۱۴, O = ۱۶ : g.mol⁻¹)

۰/۲۸۸ (۱) ۲۸/۸ (۲) ۰/۴۳۲ (۳) ۴۳/۲ (۴)

(سینتیک)

(سینتیک)

۱۰۱

از HCl تولیدی در واکنش $\text{B}_7\text{H}_7(\text{g}) + 6\text{Cl}_2(\text{g}) \rightarrow 2\text{BCl}_7(\text{g}) + 6\text{HCl}(\text{g})$ برای واکنش $2\text{Al}(\text{s}) + 6\text{HCl}(\text{aq}) \rightarrow 2\text{AlCl}_3(\text{aq}) + 3\text{H}_2(\text{g})$ استفاده می‌شود. ۶/۵ مول B_7H_7 را به همراه ۲۴/۵ مول Cl_2 وارد یک ظرف سر بسته می‌کنیم تا با هم واکنش دهند. اگر پس از مدتی مجموع مول‌های گازی برابر ۳۳ باشد و HCl آن در ظرف دیگری و در واکنش دوم در مدت دو دقیقه مصرف شود، سرعت تولید گاز هیدروژن بر

حسب $\text{mol.L}^{-1}.\text{min}^{-1}$ کدام است؟ (حجم بالای محلول در ظرف واکنش دوم، ۳ لیتر است.)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(سینتیک)

۱۰۲

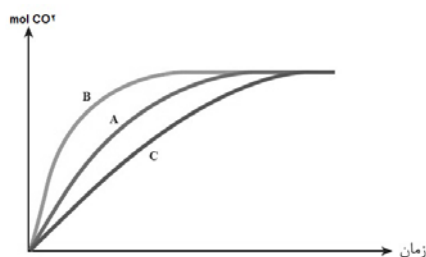
در نمودار زیر منحنی A برای واکنش کلسیم کربنات با مقدار اضافی محلول هیدروکلریک اسید 0.1 mol.L^{-1} رسم شده است. هر یک از نمودارهای B و C به ترتیب مربوط به کدام یک از شرایط زیر می‌تواند باشند؟

(۱) افزایش مقدار کلسیم کربنات - قرار دادن ظرف واکنش در آب و یخ

(۲) استفاده از محلول ۰/۲ مولار اسید - استفاده از کاتالیزگر

(۳) استفاده از کاتالیزگر - اضافه کردن مقداری آب به ظرف واکنش

(۴) قرار دادن ظرف واکنش در آب و یخ - استفاده از محلول ۰/۲ مولار اسید



(سینتیک)

در کدام موارد اثر عامل مؤثر در سرعت واکنش به درستی معرفی شده است؟

۱۰۳

(آ) بیمارانی که مشکل تنفسی دارند از کپسول اکسیژن استفاده می‌کنند - سطح تماس

(ب) حیقه‌ند آغشته به خاک باغچه سریع‌تر و آسان‌تر می‌سوزد - کاتالیزگر

(پ) اگر گرد آهن را بر روی شعله بشاشیم می‌سوزد - غلظت

(ت) گوشت در یخچال دیرتر فاسد می‌شود - دما

- ۱ - آ - ت (۲) ب - پ - ت (۳) ب - ت (۴) ب - پ

(سینتیک)

۱۰۴

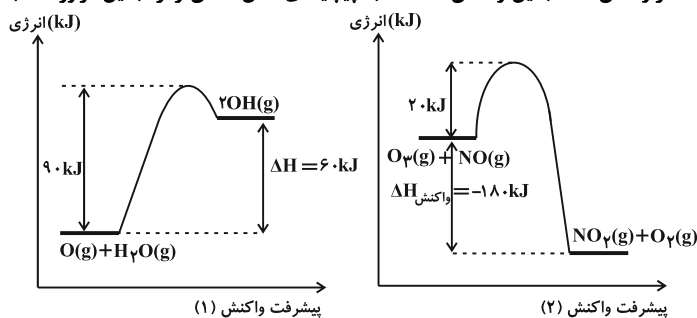
با توجه به نمودارهای «انرژی - پیشرفت واکنش» زیر کدام بیان نادرست است؟

(۱) در واکنش (۱)، اگر در حضور کاتالیزگر انرژی فعال‌سازی واکنش رفت 10% کاهش یابد، انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت همین واکنش 10% کاهش می‌یابد.

(۲) نسبت اختلاف ΔH دو واکنش به انرژی فعال‌سازی برگشت واکنش ۲، برابر $1/2$ است.

(۳) در شرایط یکسان، سرعت واکنش ۲ در جهت برگشت از سرعت واکنش ۱ در جهت رفت کم‌تر است.

(۴) در واکنش (۲) تبدیل واکنش‌دهنده‌ها به پیچیده‌ی فعال، آسان‌تر از تبدیل فراورده‌ها به پیچیده‌ی فعال است.



(سینتیک)

۱۰۵ ۱۰۵

واکنش تجزیه‌ی هیدروژن پراکسید در دو حالت a: در حضور محلول KI و b: بدون حضور محلول KI

(سینتیک)

انجام می‌گیرد. کدام مورد (موارد) از مطالب زیر صحیح است؟

(آ) انرژی فعال‌سازی واکنش رفت در حالت a کم‌تر از انرژی فعال‌سازی واکنش رفت در حالت b است.

(ب) فراورده‌ها در حالت a پایدارتر از حالت b هستند.

(پ) پیچیده فعال در حالت b پایدارتر از پیچیده فعال در حالت a است.

(ت) در دمای یکسان تغییرات انرژی آزاد گیبس در دو حالت یکسان است.

ب (۱) ۲ - آ (۲) ۳ - پ (۳) ۴ - آ (۴) ۳ - ب - پ

۱۰۶ ۱۰۶

در یک واکنش فرضی رابطه‌ی $E_a - 2E'_a = 3\Delta H$ ، برقرار است. سرعت این واکنش در جهت برگشت ... از

جهت رفت است و نسبت انرژی فعال‌سازی برگشت (E'_a) به انرژی فعال‌سازی رفت (E_a) برابر با ...

می‌باشد.

(سینتیک)

۱) کم‌تر، ۲) کم‌تر، ۳) بیش‌تر، ۴) بیش‌تر، ۳

۱۰۷ ۱۰۷

با توجه به جدول زیر که مقدار برخی از آلاینده‌ها را در گازهای خروجی از اگزوز خودروها در غیاب و در حضور

مبدل کاتالیستی نشان می‌دهد، کدام عبارت درست است؟

(سینتیک)

فرمول شیمیایی آلاینده		NO	C _x H _y	CO
مقدار آلاینده برحسب گرم به‌ازای طی یک کیلومتر	در غیاب مبدل	۱/۰۴	۱/۶۷	۵/۹۹
	در حضور مبدل	۰/۰۴	۰/۰۷	۰/۶۱

(۱) بیش‌ترین درصد کاهش توسط مبدل کاتالیستی مربوط به CO است.

(۲) در حضور مبدل کاتالیستی، آلاینده‌ی NO(g) ۹۴ درصد کاهش می‌یابد.

(۳) مبدل کاتالیستی CO را به CO_۲، C_xH_y را به CO_۲ و H_۲O و NO را به NO_۲ تبدیل می‌کند.

(۴) اگر روزانه یک میلیون خودرو فعالیت کنند و هر خودرو به‌طور میانگین ۵۰km مسافت طی کند، استفاده از

مبدل کاتالیستی از ورود ۳۹۹ تن آلاینده به هوا کره جلوگیری می‌کند.

چه تعداد از عبارتهای زیر درست هستند؟

۱۰۸ ۱۰۸

(سینتیک)

● در گازهایی که از اگزوز خودروها خارج می‌شوند، جرم CO، بیش‌تر از جرم NO است.

● فقط دو مورد از واکنش‌هایی که در مبدل‌های کاتالیستی برای حذف گازهای CO، NO و C_xH_y انجام

می‌شوند، گرماده هستند.

● مبدل‌های کاتالیستی در داخل موتور خودروها نصب می‌شوند و در آن‌ها از کاتالیزگرهای پلاتین، پالادیم و رودیم

استفاده می‌شود.

● در هر واکنشی که در مبدل‌های کاتالیستی برای حذف گاز CO انجام می‌شود، $\Delta S < 0$ است.

۱) (۱) ۲) (۲) ۳) (۳) ۴) (۴)

(سینتیک)

چند مورد از مطالب زیر درست است؟

۱۰۹ ۱۰۹

● در آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها، سهم هیدروکربن‌های سوخته‌نشده بیش‌تر از نیتروژن مونواکسید است.

● مبدل‌های کاتالیستی مورد استفاده در مسیر اگزوز خودروها، می‌توانند سبب کاهش گازهای CO، SO_۲ و NO از

گازهای خروجی شوند.

● اگر استفاده از کاتالیزگر سبب کاهش ۲۰٪ از انرژی فعال‌سازی رفت در واکنش تولید NO گردد، انرژی فعال‌سازی

برگشت بیش از ۲۰٪ کاهش می‌یابد.

● گاز آلاینده‌ای که منشأ آن کیفیت پایین سوخت فسیلی است، می‌تواند سبب تولید باران اسیدی گردد.

۱) (۱) ۲) (۲) ۳) (۳) ۴) (۴)

- ساختار پیچیده‌ی فعل در واکنش $\text{NO}_2 + \text{NO} \rightarrow \text{NO}_2 + \text{NOCl}$ به صورت $\text{O} = \text{N} \dots \text{Cl} \dots \text{N} = \text{O}$ می‌باشد.
- در واکنش تیغهی روی با محلول مس (II) سولفات کاهش شدت رنگ آبی محلول بیانگر کاهش مقدار یون‌های Cu^{2+} است.
- در واکنش کلسیم کربنات با محلول هیدروکلریک اسید در دما و فشار اتاق، با گذشت زمان سرعت تغییر مول گاز تولیدی کاهش می‌یابد.
- با استفاده از علم سینتیک می‌توان میزان پیشرفت واکنش‌ها را تحت کنترل درآورد در حالی که ترمودینامیک امکان وقوع واکنش‌ها را بررسی می‌کند.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- ۱۱۱ یکای ثابت تعادل کدام گزینه، با یکای ثابت تعادل در واکنش تجزیه‌ی $\text{CaCO}_3(\text{s})$ یکسان است؟ (واکنش

(تعادل)

گزینه‌ها را همگن گازی فرض کنید.)

- (۱) سنتز آمونیاک با گازهای مربوطه
(۲) تولید کربن دی‌اکسید و گاز هیدروژن از واکنش کربن مونواکسید و بخار آب
(۳) شکستن دی‌نیتروژن تتراکسید به نیتروژن دی‌اکسید
(۴) تشکیل متانول از CO و هیدروژن

(تعادل)

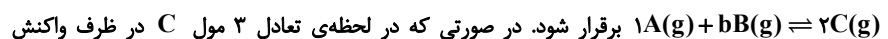
۱۱۲ چه تعداد از عبارات زیر ناصحیح است؟

- در طبیعت و آزمایشگاه اغلب واکنش‌ها به‌طور کامل پیش نمی‌روند.
● اگر ظرف حاوی گاز N_2O_4 را سرد کنیم، این گاز به گاز قهوه‌ای رنگ NO_2 تبدیل خواهد شد.
● در یک سامانه‌ی بسته، تعادل میان یک مایع با بخار آن، نمونه‌ای از تعادل فیزیکی است که حجم مایع در آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد.
● شرط برقراری تعادل در یک سامانه برابر شدن سرعت واکنش‌های رفت و برگشت و برابر شدن غلظت واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌هاست.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

- ۱۱۳ مقداری A و ۱۳ مول B را در ظرف سربسته‌ی ۵ لیتری قرار می‌دهیم تا تعادل گازی $(K = 0.5 \frac{\text{L}}{\text{mol}})$

(تعادل)



برقرار شود. در صورتی که در لحظه‌ی تعادل ۳ مول C در ظرف واکنش موجود باشد، مقدار اولیه‌ی A چند مول بوده است؟

۱) ۰/۹ ۲) ۲/۱ ۳) ۱/۸ ۴) ۲/۴

(تعادل)

- ۱۱۴ چند عبارت زیر درباره‌ی واکنش تعادلی $2A(g) + B(g) \rightleftharpoons C(g) + D(g)$ صحیح است؟

- (الف) افزایش دما باعث افزایش سرعت واکنش رفت و افزایش غلظت واکنش‌دهنده‌ها می‌شود.
(ب) کاهش حجم سیستم باعث افزایش غلظت مواد شرکت‌کننده در واکنش در تعادل جدید نسبت به تعادل اولیه می‌شود.
(پ) افزایش فشار باعث افزایش سرعت واکنش در جهت رفت و کاهش سرعت در جهت برگشت می‌شود.
(ت) کاتالیزور، ثابت سرعت واکنش رفت و برگشت را به یک میزان تغییر می‌دهد.
(ث) کاهش فشار باعث بزرگ‌تر شدن خارج قسمت واکنش نسبت به ثابت تعادل می‌شود.

۱ (۴) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۳)

۱۱۵

کدام گزینه درست است؟

(تبادل)

۱) واکنش $H_2(g)$ و $O_2(g)$ در دمای $25^\circ C$ از نظر سینتیکی مساعد است، اما به طور ترمودینامیکی کنترل می‌شود.

۲) در واکنش‌های کامل همی واکنش‌دهنده‌ها به طور کامل مصرف می‌شوند و این واکنش‌ها از لحاظ ترمودینامیکی بسیار مساعد هستند.

۳) اگر یک مول گاز نیتروژن و یک مول گاز اکسیژن مخلوط شوند ($K = 1/66 \times 10^{-3}$) تعادل در سمت چپ یا سمت واکنش‌دهنده‌ها قرار دارد.

۴) اگر مقدار ثابت تعادل یک واکنش تعادلی برابر $1.0 \times 10^8 L \cdot mol^{-1}$ باشد، با سرعت به تعادل می‌رسد.

۱۱۶

۱۸۴ گرم A را در یک ظرف ۲ لیتری وارد می‌کنیم تا تعادل گازی $2A(g) \rightleftharpoons B(g) + C(g)$ برقرار شود. در لحظه‌ی تعادل مجموع جرم B و C، ۹۲ گرم خواهد بود، اگر به این تعادل هم‌زمان ۳ مول A و ۱ مول از هر یک

(تبادل)

از فراورده‌ها اضافه شود پس از برقراری تعادل جدید مجموع مول‌ها کدام است؟ ($A = 46 g \cdot mol^{-1}$)

۴ (۱) ۹ (۲) ۱۸ (۳) ۲۱ (۴)

۱۱۷

در هنگام برقراری تعادل $CO(g) + H_2O(g) \rightleftharpoons CO_2(g) + H_2(g)$ در یک ظرف سرپسته‌ی یک لیتری، مقدار ۴ مول CO، ۵ مول H_2O ، ۶ مول CO_2 و ۲ مول H_2 را داریم. پس از اضافه‌شدن مقداری CO در دمای ثابت به مخلوط در حال تعادل و پس از برقراری تعادل جدید، ۱۰ مول فراورده در ظرف وجود دارد. چند مول CO به مخلوط افزوده شده است؟

(تبادل)

۵ / ۷۵ (۱) ۲ / ۲۵ (۲) ۳ / ۷۵ (۳) ۴ / ۲۵ (۴)

۱۱۸

هرگاه در سیستم در حال تعادل $H_2S(g) + I_2(g) \rightleftharpoons 2HI(g) + S(s)$ ، $[H_2S] = [HI] = 3 \frac{mol}{L}$ ،

(تبادل)

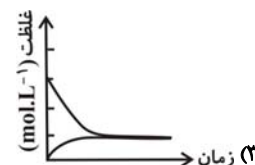
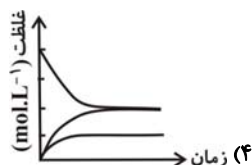
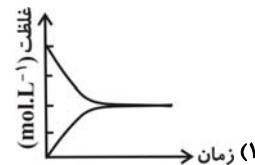
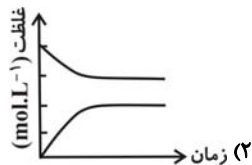
کدام گزینه خواهد بود؟ $[I_2] = 6 \frac{mol}{L}$ باشد، با خروج نیمی از $I_2(g)$ و برقراری تعادل مجدد، نسبت $\frac{[HI]}{[I_2]}$

$\sqrt{2}$ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (۴)

۱۱۹

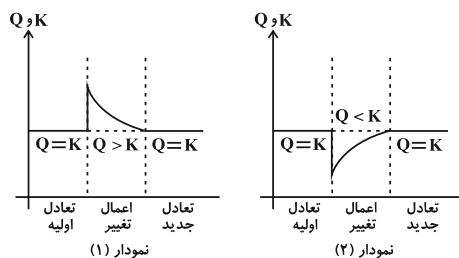
با افزایش حجم، کدام تعادل گازی زیر در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود؟

(تبادل)

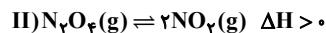
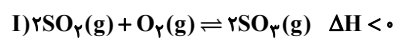


هر یک از نمودارهای زیر اثر عوامل مختلف بر تعادل را در ارتباط با K و Q برای یک تعادل نشان می‌دهد. با توجه به نمودارهای ۱ و ۲ و تعادل‌های داده شده می‌توان دریافت که نمودار (۱) اثر ... بر تعادل ... را نشان می‌دهد. (به ترتیب از راست به چپ)

(تعادل)



تعادل ... را نشان می‌دهد. (به ترتیب از راست به چپ)



(۱) افزودن SO_3 - (I) - افزایش N_2O_4 (II)

(۲) افزودن SO_2 - (I) - کاهش فشار - (II)

(۳) افزایش دما - (II) - افزایش SO_2 (I)

(۴) خارج شدن NO_2 - (II) - افزایش O_2 (I)

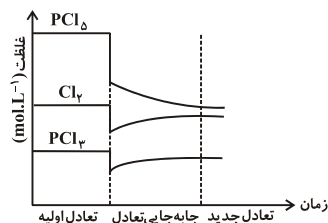
اگر حجم سامانه‌ی تعادلی $CaCO_3(s) \rightleftharpoons CaO(s) + CO_2(g)$ را در دمای ثابت کاهش دهیم، کدام ردیف از سرعت‌سنج‌ها می‌توانند وضعیت سرعت واکنش‌های رفت و برگشت را از تعادل اولیه تا زمان برقراری تعادل جدید به‌درستی نشان دهند؟

(تعادل)

شماره ردیف	تعادل جدید		لحظه‌ی اعمال تغییر		تعادل اولیه	
	سرعت برگشت	سرعت رفت	سرعت برگشت	سرعت رفت	سرعت برگشت	سرعت رفت
۱						
۲						
۳						
۴						

اگر بر اثر یک تغییر، غلظت مواد موجود در تعادل $PCl_5(g) \rightleftharpoons PCl_3(g) + Cl_2(g)$ به صورت زیر تغییر کند، کدام

(تعادل)



مطلب نادرست است؟

(۱) اندکی پس از اعمال تغییر، سرعت واکنش رفت بیش‌تر از سرعت واکنش برگشت است.

(۲) تغییر اعمال شده، افزایش حجم سامانه می‌باشد.

(۳) تعداد مول PCl_3 در تعادل جدید، کم‌تر از تعادل اولیه است.

(۴) برای رسیدن به تعادل جدید، واکنش در جهت رفت پیشرفت کرده است.

۱۲۳. کدام مطلب نادرست است؟

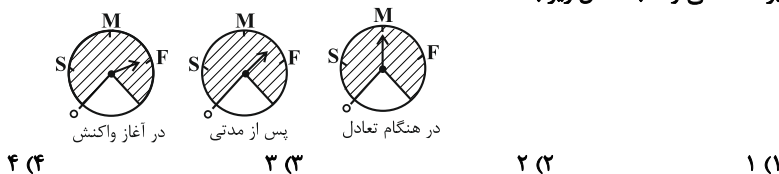
(تبادل)

- ۱) آمونیاک به‌طور عمده در تهیه‌ی مواد منفجره، پلاستیک و الیاف کاربرد دارد.
- ۲) واکنش $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ در دمای $25^\circ C$ هرگز به تعادل نمی‌رسد.
- ۳) واکنش $N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ در دمای $25^\circ C$ از لحاظ ترمودینامیکی مساعد بوده و به‌طور سینتیکی کنترل می‌شود.
- ۴) واکنش بین گازهای N_2 و H_2 در شرایط مناسب فقط تا تولید ۲۸٪ مولی آمونیاک در مخلوط پیش می‌رود.

۱۲۴. چه تعداد از عبارت‌های زیر در مورد واکنش تعادلی $2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$ درست است؟

(تبادل)

- این واکنش در مجاورت کاتالیزگر پلاتین یا وانادیم پنتوکسید، مرحله‌ی مهمی در فرآیند تولید صنعتی سولفوریک اسید است.
- پس از برقراری تعادل سرعت مصرف SO_2 با سرعت تولید SO_3 و سرعت مصرف SO_3 با سرعت تولید SO_2 برابر است.
- پس از برقراری تعادل غلظت تعادلی SO_2 و SO_3 برابر شده و $\Delta H - T \cdot \Delta S$ برابر صفر خواهد بود.
- اگر در ابتدای واکنش فقط ۲ مول SO_2 و ۲ مول SO_3 داشته باشیم، سرعت سنج‌ها برای واکنش برگشت می‌تواند به شکل زیر باشد:



۱۲۵. کدام موارد از مطالب زیر نادرست‌اند؟

(تبادل)

- آ) تنها عامل مؤثر بر ثابت تعادل دما می‌باشد.
 - ب) واکنش از دست‌دادن آب تبلور نمک‌ها بر اثر گرما، از نوع تجزیه و برگشت‌ناپذیر است.
 - پ) خارج قسمت واکنش معیاری برای تعیین جهت پیشرفت واکنش می‌باشد.
 - ت) اگر ثابت تعادل بسیار بزرگ باشد، نشان‌دهنده‌ی آن است که تعادل به‌سرعت برقرار می‌شود.
- ۱) آ، پ ۲) ب، ت ۳) آ، ب، ت ۴) ب، پ، ت

پاسخ نامہ
تشریح

$$\tan(2n+1)\frac{\pi}{4} = -1, 1, -1, 1, \dots$$

$$\tan(2n\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1, 1, 1, \dots$$

با توجه به جملات دنباله‌های بالا نتیجه می‌گیریم:

$$\{\tan((2n+1)\frac{\pi}{4}) \cos n\pi\} = 1, 1, 1, \dots$$

پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

(دیفرانسیل - صفحه‌ی ۲۳ کتاب درسی)

گزینه ۴

$$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \sqrt{a_n + 12} \leq a_n \Rightarrow a_n + 12 \leq a_n^2$$

$$a_n^2 - a_n - 12 \geq 0 \Rightarrow (a_n - 4)(a_n + 3) \geq 0$$

$$a_n \geq 4 \text{ یا } a_n \leq -3$$

واضح است که جملات دنباله غیر از احتمالاً جمله‌ی اول، همگی نامنفی‌اند. پس باید $a_n \geq 4$ باشد، یعنی $a_1 \geq 4$ ، پس $k \geq 4$.

توجه کنید که اگر جمله‌ی اول منفی باشد، دنباله صعودی خواهد بود.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۳ و ۲۴ کتاب درسی)

گزینه ۲

رفتار دنباله‌ها را می‌توان مانند رفتار توابع بررسی نمود. گزینه‌ها را تک تک بررسی می‌کنیم.

گزینه‌ی «۱»: چند جمله‌ی اول دنباله را می‌نویسیم.

$$a_n = \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64}, \dots$$

همان طور که مشاهده می‌کنید از جمله‌ی پنجم به بعد مقادیر دنباله همواره مثبت و کوچک‌تر از یک است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت همواره $0 < a_n \leq \frac{9}{8}$ پس a_n کران بالا و پایین دارد.

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Rightarrow b_n = (\sqrt{3})^n \quad \text{گزینه‌ی «۲»}$$

با در نظر گرفتن شکل نمودار $f(x) = (\sqrt{3})^x$ مشاهده می‌شود که از پایین کران دار است اما عددی مانند U یافت نمی‌شود که به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x) \leq U$ بنابراین دنباله‌ی b_n فقط از پایین کران دار است. گزینه‌ی «۳»:

با توجه به این که $\frac{\pi}{4} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ است، بنابراین به ازای هر

$$-\frac{\pi}{4} < \tan^{-1} \sqrt{n} < \frac{\pi}{4} \quad \text{مقدار طبیعی } n \text{ همواره داریم:}$$

بنابراین c_n از بالا و پایین کران دار است.

گزینه‌ی «۴»: تابع $f(x) = \frac{x-x^2}{2x+1}$ را در نظر بگیرید.

$$f'(x) = \frac{(1-2x)(1+2x) - 2(x-x^2)}{(2x+1)^2} = \frac{1-4x^2-2x+2x^2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2 + x - \frac{1}{2})}{(2x+1)^2}$$

پاسخ نامه تشریحی آزمون ۱ دیفرانسیل

گزینه ۱

در ساده کردن عبارت $a(\frac{1}{a} + 3)$ از خاصیت توزیع پذیری ضرب روی جمع استفاده می‌شود و به $(a \times \frac{1}{a}) + (a \times 3)$ خواهیم رسید.

با توجه به عضو وارون a یعنی $\frac{1}{a}$ به $1 + 3a$ و در نهایت با استفاده از خاصیت جابه‌جایی در عمل جمع به $3a + 1$ می‌رسیم. در اثبات تساوی داده شده، وجود عضو همانی جمع به کار نرفته است.

(دیفرانسیل و انتگرال - صفحه‌های ۳ و ۴ کتاب درسی)

گزینه ۴

$$0 / \lambda a = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{\lambda a - \lambda}{90} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{\lambda + a - \lambda}{90} = \frac{b}{6}$$

$$\Rightarrow a = 3(\delta b - 24) \Rightarrow a \text{ مضرب } 3 \text{ است.}$$

به ازای $a = 0, 6, 9$ جوابی برای b به دست نمی‌آید. اما به ازای $a = 3$ خواهیم داشت، $b = 5$ و بنابراین $a + b = 8$.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۷ و ۸ کتاب درسی)

گزینه ۱

با توجه به نامساوی مثلث $|a+b| \leq |a| + |b|$ داریم:

$$|2x-1| \leq |2x| + |-1| \xrightarrow{x \neq \frac{1}{2}} \rightarrow 1 \leq \frac{1+2|x|}{|2x-1|}$$

$$\Rightarrow 4-1 \geq 4 - \frac{1+2|x|}{|2x-1|} \Rightarrow y \leq 3$$

یعنی تابع $y = 4 - \frac{1+2|x|}{|2x-1|}$ دارای بیشترین مقدار ۳ است و کمترین مقدار آن وجود ندارد.

(دیفرانسیل - صفحه‌ی ۱۹ کتاب درسی)

گزینه ۳

$$|x^2 - 4| < a \Rightarrow -a < x^2 - 4 < a$$

$$\Rightarrow 4 - a < x^2 < a + 4 \xrightarrow{x > 0} \rightarrow \sqrt{4-a} < x < \sqrt{4+a}$$

بازه‌ی $(\sqrt{4-a}, \sqrt{4+a})$ وقتی زیرمجموعه‌ی بازه‌ی $(1/9, 2/1)$ است، که:

$$\begin{cases} \sqrt{4+a} \leq 2/1 \Rightarrow 4+a \leq 4/41 \Rightarrow 0 < a \leq 0/41 \\ \sqrt{4-a} \geq 1/9 \Rightarrow 4-a \geq 3/61 \Rightarrow 0 < a \leq 0/39 \end{cases}$$

اشتراک دو جواب اخیر $0 < a \leq 0/39$ است.

(دیفرانسیل - صفحه‌ی ۱۷ کتاب درسی)

گزینه ۳

$$\cos n\pi = -1, 1, -1, 1, \dots$$

$$\sin(2n-1)\frac{\pi}{4} = 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$\sin(2n\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots$$

۱۲. اگر $x \geq 1$ باشد، f' همواره منفی است بنابراین f به ازای $x \geq 1$ نزولی است. از طرفی چون درجه‌ی صورت بیش‌تر از درجه‌ی مخرج است، به اصطلاح سرعت افزایش صورت بیش‌تر از مخرج است. یعنی در دنباله‌ی $d_n = \frac{n-n^2}{2n+1}$ با افزایش n ، مقدار دنباله منفی و کوچک‌تر می‌شود. بنابراین d_n کران پایین ندارد.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۳ و ۲۴ کتاب درسی)

گزینه ۲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+3-n-a}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+a}} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3-a}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+a}} \right] = -1$$

با توجه به این که حد دنباله عبارت درون جزء صحیح صفر است برای آن‌که حد دنباله عدد -1 باشد، لازم است که حد عبارت درون جزء صحیح صفر منفی باشد و این در صورتی امکان‌پذیر است که صورت کسر منفی گردد.

$$3-a < 0 \rightarrow a > 3$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۲۷ تا ۳۷ کتاب درسی)

گزینه ۴

۹. می‌دانیم $\{\cos(n\pi)\} = \{(-1)^n\}$. بنابراین داریم:

$$\{\cos(n+1)\pi\} = \{(-1)^{n+1}\} = 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$\left\{ \frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} \right\} = \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right\} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$$

ملاحظه می‌شود که جملات دنباله به صفر نزدیک می‌شوند و

$$\text{پس: } -\frac{1}{3} \leq a_n \leq \frac{1}{2}$$

$$\inf = -\frac{1}{3}, \sup = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۴۱ و ۴۲ کتاب درسی)

گزینه ۱

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \times \frac{1}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{(-1)^n}{n} = \cos 0 = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \times 1 = 1$$

(دیفرانسیل - صفحه‌ی ۴۱ کتاب درسی)

گزینه ۱

۱۱. جمله‌ی عمومی دنباله از بسط عبارت $(1 + \frac{k}{n})^n$ به دست آمده است. بنابراین داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e \Rightarrow k = 1$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۴۵ و ۴۶ کتاب درسی)

گزینه ۳

۱۳. $f(a_n)$ را محاسبه می‌کنیم:

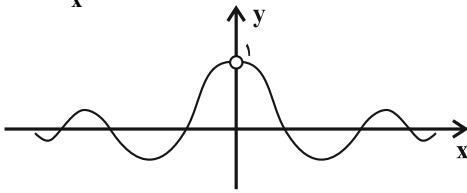
$$f(a_n) = \frac{\sin\left(1 - \frac{(-1)^n}{n} - 1\right)}{1 - \frac{(-1)^n}{n} - 1} = \frac{\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\frac{(-1)^n}{n}}$$

با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$$

ولی با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ داریم:

$$x \rightarrow 0: \frac{\sin x}{x} < 1$$



پس $\{f(a_n)\}$ به صفر همگراست.

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۵۸ تا ۶۰ کتاب درسی)

گزینه ۱

۱۴. وقتی $X \rightarrow +\infty$ می‌توان نوشت:

$$f(x) < -1 \Rightarrow -f(x) > 1 \Rightarrow 0 < -\frac{1}{f(x)} < 1$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{1}{f(x)}\right] = 0$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷ کتاب درسی)

گزینه ۱

۱۵. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$ و چون دنباله صعودی است، یعنی a_n با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می‌کند.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(f(a_n)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(دیفرانسیل - صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷ کتاب درسی)

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4x}{(x-2)(x+2)} + \frac{x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 + 2x}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

توجه: $\left|\frac{x}{x+2}\right|$ وقتی $x \rightarrow (-2)^+$ ، مقداری منفی است.

(دیفرانسیل - صفحه‌ی ۸۶ کتاب درسی)

گزینه ۳

۱۶. می‌دانیم زمانی که $x \rightarrow 3^-$ یعنی $x < 3$ می‌باشد، بنابراین $2 = |x| = -x$ می‌باشند. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3|x| - 2a}{|x| + |-x|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x^3 - a)}{(x - 3)}$$

از آن‌جا که حد، متناهی و مخرج برابر با صفر می‌شود پس عامل $x - 3$ باید در صورت نیز، وجود داشته باشد، پس حتماً باید $a = 27$ باشد.

(دیفرانسیل - صفحه‌ی ۸۶ کتاب درسی)

$$2\sqrt{k} = 2 \Rightarrow \sqrt{k} = \frac{2}{2} \Rightarrow k = 2/25$$

(دیفرانسیل - صفحه ۱۰۰ کتاب درسی)

گزینه ۳ ۲۲

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$$

$$x^2+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ (مجانب قائم)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty \Rightarrow$$

(دیفرانسیل - صفحه ۱۰۸ کتاب درسی)

گزینه ۲ ۲۳

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

(دیفرانسیل - صفحه ۱۰۹ کتاب درسی)

گزینه ۳ ۲۴

تابع f را به صورت مقابل می‌نویسیم:

$$f(x) = 1 - \sqrt{\frac{x-1+y}{x-1}} = 1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - \sqrt{1+0^-} = 1 - 1^- = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \sqrt{1+0^+} = 1 - 1^+ = 0^-$$

(دیفرانسیل - صفحه ۱۱۴ کتاب درسی)

گزینه ۲ ۲۵

$x=1$ ریشه‌ی مخرج و مجانب قائم تابع است:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x \left(\frac{2^x+2}{2^x-2} \right) = \frac{4}{0} = \infty$$

مجانب‌های مایل تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x+2}{2^x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{2^x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2^x+2)}{2^x-2} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2^x-2} = 0$$

پس $y=x$ مجانب مایل تابع در $+\infty$ است.

$$m' = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x+2}{2^x-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$b' = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2^x+2)}{2^x-2} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x \times 2^x}{2^x-2}$$

با تغییر متغیر $x = -t$ به راحتی می‌توان نشان داد $b' = 0$ می‌باشد. پس خط $y = -x$ مجانب مایل تابع در $-\infty$ است. بنابراین این تابع دارای ۳ مجانب است.

(دیفرانسیل - صفحه ۱۱۹ کتاب درسی)

گزینه ۱ ۱۷

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 3^x + 4^x - 1}{16^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x(4^x - 1) + (4^x - 1)}{(4^x - 1)(4^x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x + 1)(4^x - 1)}{(4^x - 1)(4^x + 1)} = \frac{2}{2} = 1$$

(دیفرانسیل - صفحه ۸۶ کتاب درسی)

گزینه ۱ ۱۸

تابع $y = \begin{cases} f(x) & ; x \in Q \\ g(x) & ; x \notin Q \end{cases}$ در $x=a$ حد دارد به شرطی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ برقرار باشد.

در تابع صورت سؤال، به ازای $x \notin Z$ حد دو ضابطه برابر نمی‌شود و به ازای $x \in Z$ تابع x تابع $x+[-x]$ حد ندارد. بنابراین تابع f هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

(دیفرانسیل - صفحه ۸۷ کتاب درسی)

گزینه ۴ ۱۹

$$\left\{ \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1+1=2 \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) &= \left[\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^+ + \left[\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^-\right] \right] \\ &= [1^+] + [1^-] = 1+0=1 \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x) &= \left[\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^- + \left[\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^+ \right] \right] \\ &= [1^-] + [1^+] = 0+1=1 \end{aligned} \right.$$

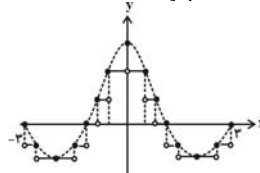
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

پس تابع f در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ حد دارد ولی پیوسته نیست.

(دیفرانسیل - صفحه ۹۹ کتاب درسی)

گزینه ۴ ۲۰

مشاهده می‌شود که این تابع در ۱۳ نقطه ناپیوسته است.



(دیفرانسیل - صفحه ۱۰۰ کتاب درسی)

گزینه ۳ ۲۱

$$k < x < 8 \xrightarrow[\text{را می‌سازیم.}]{\text{داخل براکت}} \sqrt{k} < \sqrt{x} < \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{k} < 2\sqrt{x} < 4\sqrt{2}$$

داخل براکت اگر عدد صحیح شود، f در آن نقطه ناپیوسته است.

پس بین $2\sqrt{k} = 5/6$ و $4\sqrt{2}$ باید دو عدد صحیح قرار داشته

باشد تا تابع در دو نقطه ناپیوسته باشد. پس کمترین مقدار $2\sqrt{k}$

برابر ۳ است.

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ یا } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۱۶ و ۲۵ تا ۲۸ کتاب درسی)

گزینه ۳.۳۰

با فرض $c = a \times b$ داریم:

$$|c \cdot (a \times b)| = |(a \times b) \cdot (a \times b)| = |a \times b|^2$$

$$a \times b = (-1, 7, 5) \Rightarrow |a \times b|^2 = (-1)^2 + 7^2 + 5^2 = 75$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۳۱ و ۳۲ کتاب درسی)

گزینه ۳.۳۱

نقطه‌ی متغیّر $(3, 2t-1, 3-t)$ را روی خط

$$D: (x=3, y=2t-1, z=3-t) \text{ در نظر می‌گیریم. در این}$$

صورت $u_D = (0, 2, -1)$ برای یافتن مختصات H کافی است

معادله‌ی برداری زیر را حل کنیم:

$$\overrightarrow{OH} \cdot u_D = 0 \Rightarrow (3, 2t-1, 3-t) \cdot (0, 2, -1) = 0$$

$$\Rightarrow 4t - 2 - 3 + t = 0 \Rightarrow t = 1$$

پس $H = (3, 1, 2)$ و داریم:

$$O' = 2H - O = (6, 2, 4) - (0, 0, 0) = (6, 2, 4)$$

جمع مختصات این نقطه برابر ۱۲ است.

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۳۵ تا ۳۷ کتاب درسی)

گزینه ۲.۳۲

$$d: \begin{cases} x = mt + 1 \\ y = -3t + 2, d': 2x = \frac{3y-6}{2} = \frac{z}{-1} \\ z = 2 \end{cases}$$

معادلات پارامتری d را در معادلات متقارن d' جایگذاری می‌کنیم:

$$2(mt+1) = -\frac{9t}{2} = -2 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{4}{9} \\ mt+1 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}m + 1 = -1 \Rightarrow m = -\frac{9}{2}$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۳۹ تا ۴۱ کتاب درسی)

گزینه ۴.۳۳

فصل مشترک دو صفحه را به‌دست می‌آوریم:

$$P_1: x - z = 0 \Rightarrow x = z$$

$$P_2: \text{جایگذاری در صفحه } 2x + y = 0 \Rightarrow x = \frac{-y}{2}$$

در نتیجه، معادله‌ی فصل مشترک دو صفحه برابر است با:

$$L: x = \frac{-y}{2} = z$$

حال، فاصله‌ی نقطه‌ی $A = (1, 2, 1)$ از خط $L: x = \frac{-y}{2} = z$ را

به‌دستی‌آوریم. نقطه‌ی $B = (0, 0, 0)$ را روی خط فوق در نظر می‌گیریم:

$$\rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1, -2, -1), u_L = (1, -2, 1)$$

$$\Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times u_L|}{|u_L|} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۴۳ تا ۴۶ کتاب درسی)

گزینه ۱.۲۶

مختصات نقطه‌ی M را به صورت (x, y, z) می‌گیریم.

حاصل ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر است.

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

$$\overrightarrow{MA} = (1, -1, 2) - (x, y, z) = (1-x, -1-y, 2-z)$$

$$\overrightarrow{MB} = (-1, 1, -2) - (x, y, z) = (-1-x, 1-y, -2-z)$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Rightarrow (1-x)(-1-x) - (1+y)(1-y) - (2+z)(2-z) = 0$$

$$-(1+x)(1-x) - (1+y)(1-y) - (2+z)(2-z) = 0$$

$$x^2 - 1 + y^2 - 1 + z^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{6}$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۶ و ۱۷ کتاب درسی)

گزینه ۳.۲۷

با فرض $a = a_1i + a_2j + a_3k$ داریم:

$$a \cdot j = a_2, a \cdot i = a_1$$

$$a \cdot i = a \cdot (j - k) = a \cdot (i - 2j + 3k) = 1$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 - a_3 = a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 - a_3 = 1 \\ -2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_3 = 2, a_2 = 3$$

$$|a| = \sqrt{14} \text{ و } a = (1, 3, 2)$$

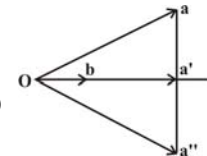
(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۹ و ۲۰ کتاب درسی)

گزینه ۴.۲۸

در شکل زیر، a' تصویر قائم بردار a بر امتداد بردار b است.

$$a'' = 2a' - a \Rightarrow a' = \frac{1}{2}(a + a'')$$

$$a' = \frac{(-1, 1, 6) + (3, -5, -2)}{2} = (1, -2, 2)$$



اما دو بردار a' و b موازی هستند، بنابراین:

$$b = ka' \Rightarrow |b| = k|a'| \Rightarrow 1 = 3k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{3}a' = \frac{1}{3}(1, -2, 2) \Rightarrow b = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۱۴ تا ۱۶ کتاب درسی)

گزینه ۲.۲۹

می‌دانیم بردار $a \times b$ بر بردارهای a و b عمود است. پس:

$$b \cdot (a \times b) = a \cdot (a \times b) = 0$$

$$|a \times b|^2 - 3(a \cdot b)^2 = 0 \Rightarrow \frac{|a \times b|^2}{(a \cdot b)^2} = 3$$

$$\left(\frac{|a||b|\sin\theta}{|a||b|\cos\theta}\right)^2 = 3 \Rightarrow \tan^2\theta = 3 \Rightarrow \tan\theta = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow R^2 = 6$$

پس معادله‌ی دایره عبارت است از:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$$

$$\Rightarrow C = -4$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵ کتاب درسی)

گزینه ۴

می‌دانیم بیضی، مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت و متمایز به نام کانون، مقدار مثبت ثابتی باشد. این مقدار ثابت برابر $2a$ (طول قطر کانونی بیضی) می‌باشد. فاصله‌ی دو کانون از یکدیگر نیز برابر $2c$ (فاصله‌ی کانونی است) اگر M و N را کانون‌های بیضی در نظر بگیریم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2c = MN = 4 \Rightarrow c = 2 \\ 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 5$$

$$\text{چون مرکز بیضی } O = \frac{M+N}{2} = (0,1)$$

چون $x_M = x_N$ ، بیضی قائم است و معادله‌ی آن به شکل زیر می‌باشد:

$$\frac{(y-1)^2}{9} + \frac{x^2}{5} = 1$$

از میان خطوط داده شده، تنها خط $x = 3$ ، بیضی را قطع نمی‌کند.

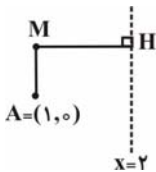
$$\xrightarrow{x=3} \frac{(y-1)^2}{9} + \frac{9}{5} = 1 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{9} = -\frac{4}{5} \text{ جواب ندارد}$$

بنابراین نقطه‌ای با مشخصات خواسته شده، روی خط $x = 3$ وجود ندارد.

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۵۵ تا ۶۴ کتاب درسی)

گزینه ۴

اگر $M = (x, y)$ نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد، آنگاه مطابق فرض داریم:



$$MA = \frac{\sqrt{2}}{2} MH \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} |x-2|$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۶۴ تا ۷۰ کتاب درسی)

گزینه ۱

برای این که خط Δ به تمامی در صفحه‌ی P واقع باشد، باید معادلات پارامتری خط Δ در معادله‌ی صفحه‌ی P صدق کند.

$$\Delta: \frac{x-1}{a} = y+1 = z-1$$

$$\Rightarrow \Delta: (x = at+1, y = t-1, z = t+1), t \in \mathbb{R}$$

$$P: x - y - z + b = 0$$

$$\Rightarrow (at+1) - (t-1) - (t+1) + b = 0$$

$$\Rightarrow (a-2)t + (b+1) = 0$$

$$\Rightarrow a=2, b=-1 \Rightarrow a+b=1$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۴۶ و ۴۷ کتاب درسی)

گزینه ۴

بردارهای هادی دو خط d_1 و d_2 را به ترتیب u_1 و u_2 نامیده و نقاط دلخواه M و N را به ترتیب روی دو خط d_1 و d_2 در نظر می‌گیریم. داریم:

$$u_1(1, 2, -2) \Rightarrow u = u_1 \times u_2 = (0, -3, -3)$$

$$M(-1, 0, 0) \Rightarrow \overline{MN} = (1, 1, -2)$$

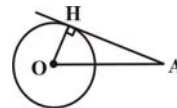
$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|\overline{MN} \cdot u|}{|u|} = \frac{|0-3+6|}{\sqrt{0+9+9}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌ی ۴۹ کتاب درسی)

گزینه ۳

$$x^2 \text{ ضرب } y^2 \Rightarrow k=1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2ax - 4y = 0$$

$$\Rightarrow (x+a)^2 + (y-2)^2 = a^2 + 4 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز: } O = (-a, 2) \\ \text{شعاع: } r = \sqrt{a^2 + 4} \end{cases}$$



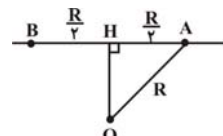
$$\Delta OAH: OA^2 = AH^2 + OH^2$$

$$\Rightarrow (-a+1)^2 = a + (a^2 + 4) \Rightarrow -2a = 11 \Rightarrow a = -\frac{11}{2}$$

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵ کتاب درسی)

گزینه ۲

مرکز دایره را با O و دو سر وتر ایجاد شده را با A و B نشان می‌دهیم. ابتدا فاصله‌ی مرکز دایره را از خط به معادله‌ی $x+y+1=0$ حساب می‌کنیم.



$$OH = \frac{|1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

اکنون با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث OAH داریم:

$$OA^2 = OH^2 + HA^2$$

۴۰.

گزینه ۲

$$x^2 - 4y + n = 0 \Rightarrow x^2 = 4(y - \frac{n}{4})$$

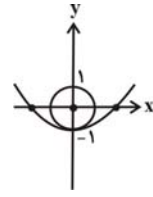
$$\Rightarrow a = 1, S = (0, \frac{n}{4}) \text{ سهمی قائم و}$$

$$\Rightarrow F = (0, \frac{n}{4} + 1) \xrightarrow{y_F = 0} \frac{n}{4} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow n = -4 \Rightarrow x^2 = 4y + 4: \text{ معادله سهمی}$$

$$\begin{cases} x^2 = 4y + 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 4y + 4 = 1$$

$$\Rightarrow (y+1)(y+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \text{ ق ق} \\ y = -3 \text{ غ ق} \end{cases}$$



مطابق نمودار، نقطه‌ی $(0, -1)$ تنها نقطه‌ی مشترک سهمی و دایره بوده و این دو شکل در این نقطه بر هم مماسند. توجه کنید که دایره داخل سهمی است.

(هندسه تحلیلی - صفحه‌های ۵۲ تا ۵۵ و ۶۴ تا ۷۰ کتاب درسی)

پاسخ‌نامه آزمون تشریحی ریاضیات گسسته ۱

۴۱.

گزینه ۴

$$(*) \quad 2 \leq y \leq x \leq 4 \text{ (دنباله درجات رئوس (نزولی))}$$

$$\sum_{i=1}^v \deg v_i = 2q \xrightarrow{q=7}$$

$$4 + x + y + 2 + 3(1) = 9 + x + y = 14$$

$$\Rightarrow x + y = 5 \xrightarrow{(*)} x = 3, y = 2 \Rightarrow 2x - 3y = 6 - 6 = 0$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۱ و ۱۴ کتاب درسی)

۴۲.

گزینه ۳

در گراف r -منتظم مرتبه‌ی p رابطه‌ی $q = \frac{pr}{p}$ برقرار است. طبق فرض داریم:

$$q = 2p + 9 \Rightarrow \frac{5p}{p} = 2p + 9 \Rightarrow p = 18$$

$$\Rightarrow q = \frac{18 \times 5}{2} = 45$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲ کتاب درسی)

۴۳.

گزینه ۳

برای به دست آوردن حداکثر p با داشتن q و δ به سراغ

$$\text{رابطه‌ی } \delta \leq \frac{2q}{p} \text{ می‌رویم:}$$

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \Rightarrow 3 \leq \frac{2(15)}{p} \Rightarrow p \leq 10 \Rightarrow p_{\max} = 10$$

از طرفی دقت کنید که برای داشتن ۱۵ یال باید حداقل ۶ رأس داشته باشیم ولی با ۶ رأس و ۱۵ یال، گراف کامل می‌شود که در

آن $\delta = 5$ خواهد بود، لذا حداقل به ۷ رأس نیاز داریم. پس $p_{\min} = 7$ ، در نتیجه تعداد رئوس این گراف یکی از مقادیر ۷، ۸، ۹ و ۱۰ می‌تواند باشد.

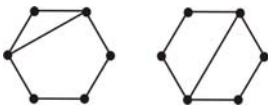
(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی)

گزینه ۲ ۴۴.

گرافی که دارای n ضلعی بدون قطر باشد ($n \geq 4$)، قطعاً گراف بازه‌ها نیست، پس یک گراف 2 -منتظم تنها در صورتی می‌تواند گراف بازه‌ها باشد که از تعدادی مثلث (گراف K_3) تشکیل شده باشد. چون گراف مورد نظر پنج بخش جدا از هم دارد، پس دارای $15 = 5 \times 3$ رأس می‌باشد.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۸ و ۱۲ کتاب درسی)

گزینه ۲ ۴۵.



هر گراف از مرتبه‌ی p که دارای دوری به طول p باشد، همیلتنی است. با این توضیح، شکل گراف مورد نظر به یکی از دو صورت زیر می‌تواند باشد، زیرا لزوماً باید دوری به طول ۶ داشته باشد.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌ی ۱۶ کتاب درسی)

گزینه ۱ ۴۶.

دو حالت وجود دارد:

الف) $42 = 7 \times 6 \times 1 \times \dots \times 1$

ب) $42 = 7 \times 3 \times 2 \times 1 \times \dots \times 1$

$$\sum \deg v_i = 2q, q = p - 1: \begin{cases} 7 + 6 + \overbrace{(1 + \dots + 1)}^{p-2} = 2(p-1) \Rightarrow p = 13 \\ 7 + 3 + 2 + \overbrace{(1 + \dots + 1)}^{p-2} = 2(p-1) \Rightarrow p = 11 \end{cases}$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۱۷ و ۱۸ کتاب درسی)

گزینه ۲ ۴۷.

تمام درایه‌های روی قطر اصلی M^2 در گراف r -منتظم برابر r است. پس:

$$\overbrace{r \times r \times \dots \times r}^p = 64 \Rightarrow r^p = 64 = 2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1$$



چون $r \leq p - 1$ پس $r = 2$ و $p = 6$ جواب است. با این شرایط دو گراف با نمودارهای روبه‌رو وجود دارد:

در این گراف، حداکثر دو دور وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۲۰ و ۲۱ کتاب درسی)

گزینه ۲ ۴۸.

همواره خارج قسمت تقسیم a بر b ، برابر است با $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ ، در نتیجه داریم:

$$q = \lfloor \frac{13! - 1}{13} \rfloor = \lfloor \frac{13!}{13} - \frac{1}{13} \rfloor = \lfloor 12! - \frac{1}{13} \rfloor = 12! - 1$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲ کتاب درسی)

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 - q^2 \mid pqr \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} p^2 - q^2 \mid r \\ (p^2 - q^2, pq) = 1 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{r, p^2 - q^2 \neq 1} r = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q) \quad (*)$$

چون r عددی اول است، پس با توجه به $(*)$ نتیجه می‌شود که $p - q = 1$ ، یعنی اعداد اول p و q متوالی‌اند؛ در نتیجه:
لذا:

$$p = 3, q = 2, r = p + q = 5$$

مجموع این سه عدد اول برابر 10 خواهد بود که در تقسیم بر 4 ، باقیمانده‌ی 2 می‌آورد.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۳۸ و ۳۹ کتاب درسی)

گزینه ۴

۵۴

می‌دانیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a'd, b = b'd \\ (a', b') = 1 \\ [a, b] = \frac{ab}{d} = a'b'd \end{array} \right.$$

پس:

$$ab + d = 305 \Rightarrow a'b'd + d = 305$$

$$\Rightarrow d(a'b'd + 1) = 5 \times 61, d \neq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 5 \\ a'b'd + 1 = 61 \Rightarrow a'b' = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [a, b] = a'b'd = 60$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳ و ۴۵ تا ۴۷ کتاب درسی)

گزینه ۴

۵۵

$$(a, 2^3 \times 3) = 2 \times 3, (a, 5^2) = 5$$

بنابراین a دارای دقیقاً یک عامل 2 و یک عامل 3 است و همچنین حداقل یک عامل 5 دارد. داریم:

$$(a, 6300) = (a, 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7) = 2 \times 3 \times 5 \times k$$

اما k می‌تواند در حالت‌های مختلف a ، برابر $1, 3, 7$ و 21 باشد. پس 4 مقدار مختلف برای $(a, 6300)$ وجود دارد.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۰ تا ۴۳ کتاب درسی)

گزینه ۳

۴۹

$$25 = 3^2 + 4^2, 25 \mid 3^n + 4^n \Rightarrow 3^2 + 4^2 \mid 3^n + 4^n$$

$$\Rightarrow \frac{n}{4} = \text{عدد طبیعی و فرد}$$

چون $n \leq 100$ ، بنابراین $n = 98$ بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی A است.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۲۸ تا ۳۰ کتاب درسی)

گزینه ۱

۵۰

$$\left. \begin{array}{l} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{array} \right\} \Rightarrow a = bq + 34 \Rightarrow 34 < b$$

پس $b \geq 35$ و $q \geq 1$ است. بنابراین a حداقل $69 = 35 + 34$ می‌تواند باشد. با این شرایط $a = 69$ تنها جواب است و فقط یک جواب داریم.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۳۰ تا ۳۲ کتاب درسی)

گزینه ۲

۵۱

$$A = (\overline{abc})_3 + (\overline{cba})_4 = (c + 3b + 9a) + (a + 7b + 49c)$$

$$= 50c + 10b + 10a = 10(\Delta c + b + a)$$

$$\Rightarrow 10 \mid A \Rightarrow A \text{ بر } 2 \text{ و } 5 \text{ و } 10 \text{ بخش‌پذیر است.}$$

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۳۲ تا ۳۴ کتاب درسی)

گزینه ۲

۵۲

$$20! = \left| \frac{20}{5} \right| + \left| \frac{20}{25} \right| + \dots = 4$$

$$20! = \left| \frac{20}{2} \right| + \left| \frac{20}{4} \right| + \left| \frac{20}{8} \right| + \left| \frac{20}{16} \right| + \left| \frac{20}{32} \right| + \dots$$

$$= 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$A = (\Delta 4)^{\Delta 4} \times 20! = (2 \times 3^3)^{\Delta 4} \times (2^{18} \times 5^4 \times M')$$

$$= (2^{\Delta 4} \times 3^{18}) \times 5^4 \times (3^{162} \times M') = 2^{72} \times 5^4 \times M''$$

$$= 10^4 \times 2^{68} \times M''$$

پس در سمت راست A ، 4 صفر وجود دارد. $(M'$ و M'' فاقد عوامل اول 2 و 5 است.)

نکته:

$$n! = \left| \frac{n}{p} \right| + \left| \frac{n}{p^2} \right| + \left| \frac{n}{p^3} \right| + \dots$$

توجه: برای پیدا کردن تعداد صفرهای سمت راست A ، توان‌های 2 و 5 را پیدا می‌کنیم. توان کوچک‌تر مشخص‌کننده‌ی تعداد صفرهاست.

(ریاضیات گسسته - صفحه‌های ۴۴ و ۴۵ کتاب درسی)

گزینه ۳

۵۳

به راحتی می‌توان نشان داد که $p^2 - q^2$ نسبت به هر دو عدد اول p و q اول است، پس $(p^2 - q^2, pq) = 1$ ؛ داریم:

پاسخ نامه تشریحی آزمون ۱ فیزیک

۵۶. گزینه ۲

سرعت متوسط برابر نسبت جابه‌جایی کل به زمان این جابه‌جایی

$$\bar{v} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\Delta x_1 + v_2 \Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$$

است، پس:

$$\bar{v} = \frac{300 + 40 \times 5}{\frac{300}{20} + 5} = \frac{500}{20} = 25 \frac{m}{s}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - صفحه‌های ۲ تا ۵ کتاب درسی)

۵۷. گزینه ۲

سطح محصور بین نمودار سرعت- زمان و محور زمان معرف جابه‌جایی است. با توجه به نمودار داریم:

$$\Delta x_3 > \Delta x_2 > \Delta x_1 \Rightarrow \frac{\Delta x_3}{\Delta t} > \frac{\Delta x_2}{\Delta t} > \frac{\Delta x_1}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_3 > \bar{v}_2 > \bar{v}_1$$

با توجه به نمودار، تغییر سرعت در بازه‌ی زمانی t_0 تا t برای هر سه متحرک یک‌سان است.

$$\Delta v_3 = \Delta v_2 = \Delta v_1 = \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \bar{a}_3 = \bar{a}_2 = \bar{a}_1$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - صفحه‌های ۲ تا ۱۷ کتاب درسی)

۵۸. گزینه ۱

در حرکت با شتاب ثابت، مسافت‌هایی که متحرک در ثانیه‌های متوالی طی می‌کند، جملات یک تصاعد حسابی با قدرنسبت a (شتاب حرکت) می‌باشند، بنابراین داریم:

$$\Delta x_6 = \Delta x_5 + a \Rightarrow 38 = 34 + a \Rightarrow a = 4 \frac{m}{s^2}$$

با استفاده از رابطه‌ی مسافت طی شده در ثانیه‌ی n ام برای متحرکی که با سرعت اولیه‌ی v_0 و شتاب ثابت a حرکت می‌کند، می‌توان نوشت:

$$\Delta x_n = \frac{1}{2} a (2n-1) + v_0 \Rightarrow \Delta x_5 = \frac{1}{2} \times 4 (2 \times 5 - 1) + v_0$$

$$\Rightarrow 34 = 18 + v_0 \Rightarrow v_0 = 16 \frac{m}{s}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ کتاب درسی)

۵۹. گزینه ۲

در بازه‌ی زمانی b تا f شیب خط مماس بر منحنی $x-t$ مثبت است و مقدار شیب در حال کاهش است، بنابراین اندازه‌ی سرعت متحرک در حال کاهش است و در این بازه‌ی زمانی حرکت متحرک کندشونده است. از طرف دیگر در بازه‌ی زمانی f تا c شیب خط مماس بر منحنی منفی است، اما اندازه‌ی شیب در حال

افزایش است، بنابراین مقدار سرعت متحرک در حال افزایش است و حرکتش تندشونده است.

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷ کتاب درسی)

۶۰. گزینه ۴

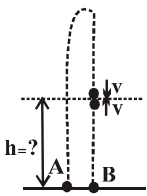
اگر جهت مثبت را به طرف بالا و مبدأ مکان را روی زمین در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \xrightarrow{y=0} y_0 = 25m$$

$$v^2 - 400 = -20(0 - 25) \Rightarrow |v| = 30 \frac{m}{s}$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱ کتاب درسی)

۶۱. گزینه ۲



با انتخاب جهت رو به بالا با علامت مثبت، معادله‌ی مکان- زمان دو گلوله را نسبت به یک مبدأ معین می‌نویسیم.

$$y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$y_B = -\frac{1}{2}g(t-3)^2 + v_0(t-3)$$

هنگامی که دو گلوله به هم می‌رسند، هم مکان می‌شوند، بنابراین داریم:

$$y_A = y_B \Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

$$= -\frac{1}{2}g(t-3)^2 + v_0(t-3)$$

به جای v_0 و g مقادیرشان را قرار می‌دهیم و از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow 5(t^2 - (t-3)^2) = 45 \times 3$$

$$\Rightarrow (t - (t-3))(t + (t-3)) = 9 \times 3$$

$$\Rightarrow 3(2t-3) = 9 \times 3 \Rightarrow 2t-3 = 9 \Rightarrow t = 6s$$

حالا با جای‌گذاری زمان در معادله‌ی y_B یا y_A مقدار h را به دست می‌آوریم:

$$h = y_A = -\frac{1}{2} \times 10 \times 6^2 + 45 \times 6 = 90m$$

(فیزیک پیش‌دانشگاهی - صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱ کتاب درسی)

۶۲. گزینه ۳

در لحظه‌ای که خودروها به هم برخورد می‌کنند، به طور هم‌زمان مکان‌های آن‌ها در راستای محورهای x و y با هم برابر می‌شوند و می‌توان نوشت: