

## فصل دوم

# کار، انرژی و توان

### انرژی جنبشی

انرژی که جسم به علت داشتن حرکت دارا می‌باشد را انرژی جنبشی یا انرژی حرکتی گوئیم.  
انرژی جنبشی جسمی به جرم  $m$  که با تندی  $V$  در حال حرکت باشد از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$k = \frac{1}{2} m V^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{انرژی جنبشی بر حسب ژول (J): } k \\ \text{جرم بر حسب کیلوگرم (kg): } m \\ \text{تندی بر حسب متر بر ثانیه } \left(\frac{m}{s}\right): V \end{array} \right.$$

نکته ۱: هرچه جسم سریع‌تر حرکت کند انرژی جنبشی آن بیشتر است و هنگامی که جسم ساکن ( $V = 0$ ) است انرژی جنبشی آن صفر است.

به این نکته توجه کنید برای بیان کمیت‌های اندازه‌گیری شده در فیزیک یک عدد به تنهایی معنی ندارد.

نکته ۲: اگر تندی جسم بر حسب کیلومتر بر ساعت ( $\frac{km}{h}$ ) داده شود برای تبدیل آن به متر بر ثانیه ( $\frac{m}{s}$ ) کافیست آن را بر  $\frac{3}{6}$  تقسیم کنیم.

نکته ۳: یکای انرژی جنبشی و هر نوع دیگری از انرژی،  $kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$  است که به افتخار جیمز ژول، فیزیکدان انگلیسی، ژول (J) نامیده می‌شود.

▼ مثال ۱) شهاب سنگی به جرم  $4 \times 10^6 \text{ kg}$  و تندی  $15 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  وارد جو زمین می‌شود اگر این شهاب سنگ تقریباً با همین تندی به زمین برخورد کند انرژی جنبشی آن را بدست آورید. و با انرژی آزاد شده بوسیله یک تن TNT مقایسه کنید.

(مشابه مسأله ۲ پایان فصل کتاب درسی)

پاسخ:

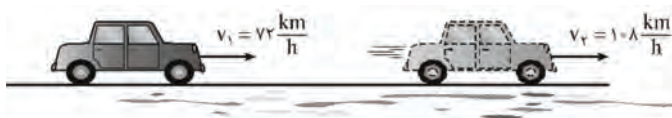
$$\begin{cases} V = 15 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 15 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ K = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^6 \times (15 \times 10^3)^2 = 450 \times 10^{12} \text{ J} \end{cases}$$

$$\frac{\text{انرژی شهاب سنگ}}{\text{انرژی آزاد شده یک تن TNT}} = \frac{450 \times 10^{12}}{4/8 \times 10^4} = 93750$$

انرژی شهاب سنگ ۹۳۷۵۰ برابر انرژی یک تن TNT است.

▼ مثال ۲) جرم خودرویی به همراه راننده‌اش ۸۰۰ کیلوگرم است. مطابق شکل تندی خودرو در نقطه از مسیری که روی آن در حال حرکت است نشان داده شده است. تغییرات انرژی جنبشی خودرو بر حسب کیلوژول کدام است؟

(مشابه تمرین ۲-۲ صفحه ۳۰ کتاب درسی)



۴۰۰ (۱)

۴۰۰۰۰۰ (۲)

۲۰۰ (۳)

۲۰۰۰۰۰ (۴)

پاسخ:

$$V_1 = \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{72}{3/6} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_2 = 108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{108}{3/6} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta k = k_2 - k_1 = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \times 800 \times (30^2 - 20^2)$$

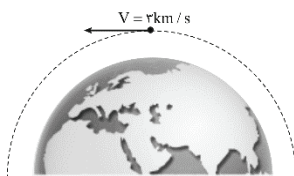
$$\Rightarrow \Delta k = 400 \times 500 = 200000 \text{ J}$$

$$\Rightarrow \Delta k = 200 \text{ kJ}$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۳) ماهواره‌ای به جرم  $20 \text{ kg}$  و با تندی ثابت  $3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  مطابق شکل به دور زمین می‌چرخد. انرژی جنبشی ماهواره بر حسب مگاژول کدام است؟

(مشابه تمرین ۲-۱ صفحه ۳۰ کتاب درسی)



۹ (۲)

۹۰ (۱)

۴۵ (۴)

$9 \times 10^7$  (۳)

پاسخ:

تندی ماهواره را بر حسب  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$  به دست می‌آوریم و سپس انرژی جنبشی را طبق رابطه  $k = \frac{1}{2} m V^2$  محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} V = 3 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ k = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} (20) (3 \times 10^3)^2 = 9 \times 10^7 \text{ J} = 90 \text{ MJ} \end{cases}$$

گزینه ۱ صحیح است.



نکته: برای مقایسه انرژی جنبشی دو جسم با جرم‌ها و تندی‌های متفاوت داریم:

$$k = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2$$

مثال ۴) نسبت انرژی جنبشی جسمی به جرم  $m$  که با تندی  $V$  در حرکت است، به انرژی جنبشی جسم دیگری که جرم آن  $2m$  و تندی

$\frac{1}{2}V$  می‌باشد، چقدر است؟

(مکمل پرسش ۱-۲ صفحه ۳۱ کتاب درسی - سراسری تجربی ۷۹)

- ۱)  $\frac{1}{4}$       ۲)  $\frac{1}{2}$       ۳) ۱      ۴) ۲

پاسخ:

انرژی جنبشی حالت اول  $k = \frac{1}{2} m V^2$  و انرژی جنبشی حالت دوم  $k' = \frac{1}{2} m' V'^2$  می‌باشد. بنابراین داریم:

$$k = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow \frac{k}{k'} = \frac{m}{m'} \times \left(\frac{V}{V'}\right)^2 \xrightarrow{m'=2m, V'=\frac{1}{2}V} \frac{k}{k'} = \frac{m}{2m} \times \left(\frac{V}{\frac{1}{2}V}\right)^2 \Rightarrow \frac{k}{k'} = \frac{1}{2} \times 4 \Rightarrow \frac{k}{k'} = 2$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۵) جسمی در مسیر مستقیم با تندی  $V$  در حال حرکت است. اگر تندی این جسم  $\frac{m}{5}$  افزایش یابد، انرژی جنبشی آن ۴۴ درصد افزایش

می‌یابد.  $V$  چند متر بر ثانیه است؟

(مکمل تمرین ۲-۳ صفحه ۳۰ کتاب درسی - فاج از کشور تجربی ۹۳)

- ۱) ۵      ۲) ۱۰      ۳) ۲۰      ۴) ۲۵

پاسخ:

$$k_2 = k_1 + \Delta k = k_1 + 0.44k_1 = 1.44k_1$$

$$k = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{m_2}{m_1} \times \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \Rightarrow 1.44 = 1 \times \left(\frac{V + \Delta}{V}\right)^2$$

$$\Rightarrow 1.2 = \frac{V + \Delta}{V} \Rightarrow 0.2V = \Delta \Rightarrow V = 25 \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ صحیح است.

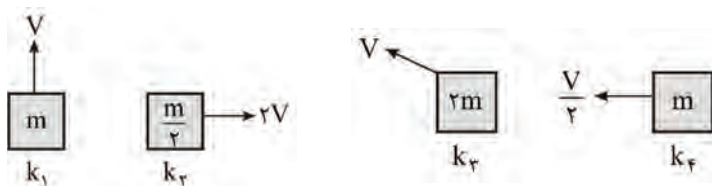


نکته: انرژی جنبشی کمیته نرده‌ای و همواره مثبت است. این کمیت تنها به جرم و تندی جسم بستگی دارد و به جهت حرکت جسم وابسته

نیست.

(مشابه پرسش ۱-۲ صفحه ۳۱ کتاب درسی)

مثال ۶) در کدام گزینه مقایسه بین انرژی جنبشی جسم‌های زیر به درستی انجام گرفته است؟



۱)  $k_2 > k_3 > k_1 > k_4$

۲)  $k_2 = k_3 > k_1 > k_4$

۳)  $k_1 > k_2 = k_3 > k_4$

۴)  $k_2 > k_3 > k_1 > k_4$

پاسخ:  برای به دست آوردن انرژی جنبشی یک متحرک فقط تندی مهم است و جهت حرکت ندارد.

$$k_v = \frac{1}{2} mV^2$$

$$k_r = \frac{1}{2} \frac{m}{r} (rV)^2 = mV^2$$

$$k_r = \frac{1}{2} (rm) V^2 = mV^2$$

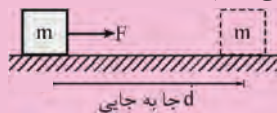
$$k_f = \frac{1}{2} (m) \left(\frac{V}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} mV^2$$

$$\Rightarrow k_r = k_r > k_v > k_f$$

گزینه ۲ صحیح است.

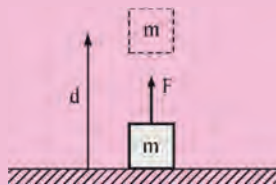
### کار انجام شده توسط نیروی ثابت

در بسیاری از فعالیت‌هایی که در طول روز انجام می‌دهیم به اجسام مختلف نیرو وارد می‌کنیم. حال ممکن است این اجسام تحت اثر نیرویی که به آن‌ها وارد می‌شود جابه‌جا شوند و یا این که سر جای خود ثابت بمانند. در این جا توجه خود را به نیروهای ثابت معطوف می‌کنیم یعنی نیروهایی که اندازه یا بزرگی آن‌ها یکسان است و در دو حالت آن را بررسی می‌کنیم:



$$W_F = Fd$$

$$\begin{cases} W : (\text{J}) & \text{کار انجام شده بر حسب ژول} \\ F : (\text{N}) & \text{اندازه‌ی نیرو بر حسب نیوتن} \\ d : (\text{m}) & \text{اندازه‌ی جابه‌جایی بر حسب متر} \end{cases}$$



$$W_F = Fd$$

نکته: کار یک کمیت نرده‌ای (عددی) است و طبق تعریف یکای آن، یک ژول، برابر است با یک نیوتن در متر.

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N.m}$$

یک ژول مقدار کاری است که نیروی یک نیوتن در جابه‌جایی نقطه اثر خود به اندازه یک متر انجام دهد.

(مرتبط با صفحه‌های ۳۲-۳۱ کتاب درسی - سراسری فارغ از کشور ۸۴)

مثال ۷) کار چه نوع کمیتی است و یکای آن در SI کدام است؟

(۲) نرده‌ای - N.m

(۱) برداری - N.m

(۴) برداری -  $\frac{\text{N}}{\text{m}}$

(۳) نرده‌ای -  $\frac{\text{N}}{\text{m}}$

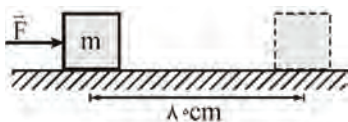
پاسخ: کار یک کمیت نرده‌ای است و با توجه به تعریف، یکای آن برابر حاصل ضرب یکای نیرو در یکای جابه‌جایی N.m است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مثال ۸) مطابق شکل مقابل نیروی افقی  $F = 50 \text{ N}$  به جسمی به جرم  $1 \text{ kg}$  که بر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد وارد می‌شود.

اگر جسم تحت اثر این نیرو به اندازه‌ی  $8 \text{ cm}$  جابه‌جا شود، کار نیروی  $F$  را محاسبه کنید.

(مشابه با مثال ۲-۲ صفحه‌ی ۳۲ و تمرین ۲-۴ صفحه‌ی ۳۳ کتاب درسی - سراسری فارغ از کشور ۸۴)



پاسخ: نیروی ثابت  $F$  و جابه‌جایی جسم  $d$  هم جهت هستند بنابراین کار نیروی  $F$  برابر است با:

$$W_F = Fd$$

$$W_F = Fd \Rightarrow W_F = 50 \times 8 \Rightarrow W_F = 400 \text{ J}$$

مثال ۹) یک قایق به جرم  $50 \text{ kg}$  روی یک دریاچه بدون اصطکاک ساکن است. در لحظه‌ای که بادی ناگهانی با نیروی ثابت  $\vec{F}$  به قایق شتابی به بزرگی  $40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  می‌دهد، این قایق در جهت این نیرو به اندازه  $8 \text{ m}$  جابجا می‌شود. کار انجام شده توسط نیروی  $\vec{F}$  چقدر است؟

(مشابه با مثال ۲-۳ صفحه ۳۳ کتاب درسی)

پاسخ: با استفاده از قانون دوم نیوتن برای مناسبه نیروی بار ( $\vec{F}$ ) داریم:

$$F = ma = 50 \times 40 \Rightarrow F = 2000 \text{ N}$$

چون نیرو و جابه‌جایی هم جهت اند بنابراین برای مناسبه کار نیروی  $F$  داریم:

$$W_F = Fd = 2000 \times 8 \Rightarrow W_F = 16000 \text{ J}$$

مثال ۱۰) جسمی بر روی یک سطح افقی تحت اثر نیروی  $F$  با تندی ثابت  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  حرکت می‌کند. اگر نیروی اصطکاک لغزشی  $200 \text{ N}$  باشد، کار نیروی

(مکمل تمرین ۲-۴ صفحه ۳۳ کتاب درسی - سراسری ترمی ۷۱)

$F$  در هر دقیقه، چند کیلوژول است؟

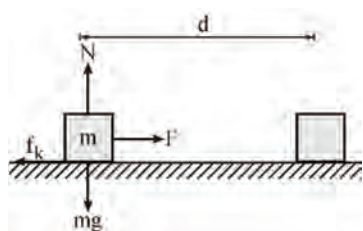
۴۸۰ (ع)

۴۸ (س)

۳ (پ)

۰/۸ (۱)

پاسخ: جسم با تندی ثابت حرکت می‌کند پس شتاب حرکت صفر است:



$$(F_{\text{برآیند}})_x = ma = 0 \Rightarrow F - f_k = 0 \Rightarrow F = f_k \Rightarrow F = 200 \text{ N}$$

$$\text{حرکت یکنواخت: } d = vt = 4 \times 60 \Rightarrow d = 240 \text{ m}$$

$$W_F = Fd \cos \theta \Rightarrow W_F = 200 \times 240 \times \cos 0 = 48000 \text{ J} \Rightarrow W_F = 48 \text{ kJ}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مثال ۱۱) جسمی به جرم  $m$ ، توسط یک نیروی ثابت  $F = 10 \text{ N}$  در راستای قائم به اندازه‌ی  $5 \text{ m}$  جابه‌جا می‌شود کار نیروی  $F$  را محاسبه کنید.

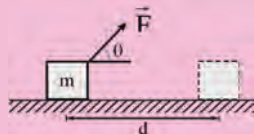
(مکمل مثال ۲-۲ صفحه ۳۲ کتاب درسی)

پاسخ: با توجه به این که نیروی  $F$  و جابه‌جایی جسم  $d$  هر دو هم جهت هستند بنابراین کار نیروی  $F$  برابر است با:

$$W_F = Fd \Rightarrow W_F = 10 \times 5 \Rightarrow W_F = 50 \text{ J}$$



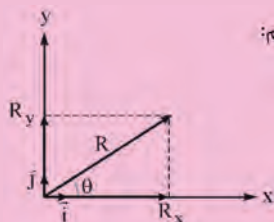
ب) حالتی که نیرو ( $F$ ) و جابه‌جایی ( $d$ ) با هم زاویه‌ی  $\theta$  می‌سازند.



یادآوری از تجزیه‌ی بردار:

اگر  $R_x$  و  $R_y$  مؤلفه‌های بردار  $\vec{R}$  روی محورهای  $x$  و  $y$  و  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  بردارهای یکه باشند، آن‌گاه داریم:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$



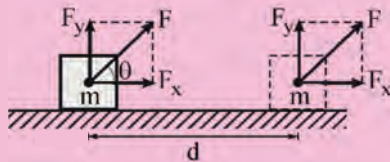
از طرفی با توجه به روابطی که برای نسبت‌های مثلثی داریم، می‌توان نوشت:

$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{R_x}{R} \Rightarrow R_x = R \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{R_y}{R} \Rightarrow R_y = R \sin \theta$$

بدین ترتیب بردار  $\vec{R}$  بر حسب مؤلفه‌های آن و بردارهای یکه  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  به صورت زیر است:

$$\vec{R} = R \cos \theta \vec{i} + R \sin \theta \vec{j}$$



مؤلفه‌ی عمودی نیرو  $(F_y = F \sin \theta)$  بر جابه‌جایی عمود است و کار روی جسم نمی‌دهد بنابراین کار انجام شده روی جسم تنها ناشی از مؤلفه‌ای از نیرو است که با جابه‌جایی موازی است  $(F \cos \theta)$  بنابراین کاری که نیروی ثابت  $\vec{F}$  به ازای جابه‌جایی  $\vec{d}$  روی جسم انجام می‌دهد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$W_F = F \cos \theta \cdot d$$

نکته: کار نیروی ثابت  $F$  مطابق رابطه‌ی  $W_F = Fd \cos \theta$ ، در یکی از سه حالت زیر می‌تواند صفر شود:

$$F = 0 \Rightarrow W_F = 0$$

(I) نیروی ثابت  $(F)$  برابر صفر باشد:

$$d = 0 \Rightarrow W_F = 0$$

(II) جابه‌جایی جسم  $(d)$  برابر صفر باشد:

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow W_F = Fd \cos 90^\circ \Rightarrow W_F = 0$$

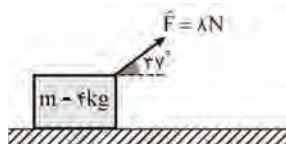
(III) نیروی  $F$  بر جابه‌جایی  $d$  عمود باشد:

نکته: اگر  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  باشد،  $\cos \theta > 0$  بوده و کار انجام شده توسط نیرو مثبت است.

نکته ۲: کار نیروی ثابت  $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$  باشد  $\cos \theta < 0$  بوده و کار انجام شده توسط نیرو منفی است.

مثال ۱۲) مطابق شکل، وزنه‌ی  $m$  روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود. کار نیروی  $F$  در هر متر جابه‌جایی چقدر است؟  $(\cos 37^\circ = 0.8)$

(مشابه مثال ۷-۴ صفحه‌ی ۳۴ کتاب درسی - فرزانگان شیراز-۸۹)



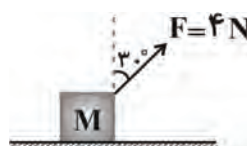
$$W_F = Fd \cos \theta$$

$$W_F = 8 \times 1 \times \cos 37^\circ \Rightarrow W_F = 8 \times 1 \times 0.8 \Rightarrow W_F = 6.4 \text{ J}$$

پاسخ: برای محاسبه‌ی کار نیروی  $F$  داریم:

مثال ۱۳) در شکل زیر، نیروی  $F = 4 \text{ N}$  وزنه‌ی  $M$  را روی سطح افقی در هر ثانیه ۲ متر جابه‌جا می‌کند، کار این نیرو در مدت ۱۰ ثانیه برابر چند ژول است؟

(مکمل مثال ۷-۴ صفحه‌ی ۳۴ کتاب درسی - آزاد ریاضی بعد از ظهر ۸۲)



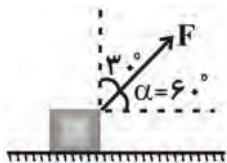
۴ (۱)

$4\sqrt{3}$  (۲)

۴۰ (۳)

$40\sqrt{3}$  (۴)

پاسخ:



$$W_F = Fd \cos \alpha = 4 \times (1.0 \times 2) \times \cos 60^\circ$$

$$W_F = 4.0 \text{ J}$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۴) بر جسم ساکنی تنها دو نیروی عمود بر هم  $F_1 = 4 \text{ N}$  و  $F_2 = 2 \text{ N}$  وارد می‌شود. پس از ۱۰ متر جابه‌جایی جسم، کار نیروی  $F_1$  چند برابر کار نیروی  $F_2$  است؟

(مکمل مثال ۶-۲ صفحه ۳۴ کتاب درسی - آزمون کانون ۹۲)

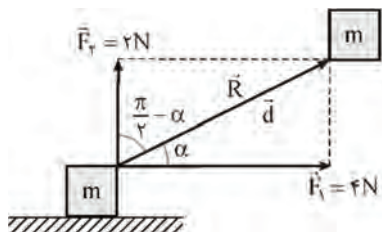
۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ:  چون جسم ساکن است بنابراین در جهت برآیند نیروهای وارد بر آن ( $\vec{R}$ ) جابه‌جا می‌شود.



$$W_F = F_1 d \cos \alpha$$

$$W_{F_1} = F_1 d \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = F_1 d \sin \alpha$$

$$\frac{W_{F_1}}{W_{F_2}} = \frac{F_1 d \cos \alpha}{F_2 d \sin \alpha} = \frac{F_1}{F_2} \cot \alpha = 2 \times 2 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = 4$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۵) جسمی به جرم ۳ kg روی سطح افقی بر حالت سکون قرار دارد. نیروی ثابت  $\vec{F} = 15\vec{i} + 20\vec{j}$  (در SI) بر جسم وارد می‌شود و جسم بر روی محور X، ۱۰ متر جابه‌جا می‌شود. کار نیروی  $\vec{F}$  در این جابه‌جایی چند ژول است؟

(مرتبط با صفحه ۳۴ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۹۳ فارغ از کشور)

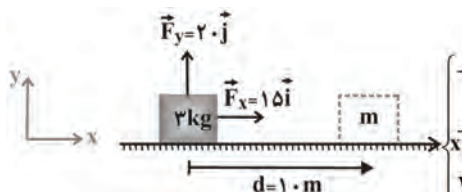
۹۰ (۴)

۱۵۰ (۳)

۲۰۰ (۲)

۲۵۰ (۱)

پاسخ:  مطابق شکل مؤلفه عمود نیرو ( $F_y$ ) بر جابه‌جایی عمود است بنابراین کار آن صفر است.  $W_{F_y} = 0$  و فقط مؤلفه افقی آن ( $F_x$ ) که در جهت جابه‌جایی به جسم وارد می‌شود، کار انجام می‌دهد:



$$\begin{cases} \rightarrow F_x \\ \rightarrow d \end{cases} \Rightarrow \theta = 0$$

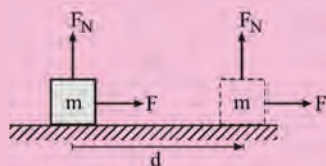
$$\begin{cases} W_F = W_{F_x} = F_x d \cos \theta = 15 \times 10 \times \cos 0 \\ W_F = 150 \text{ J} \end{cases}$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

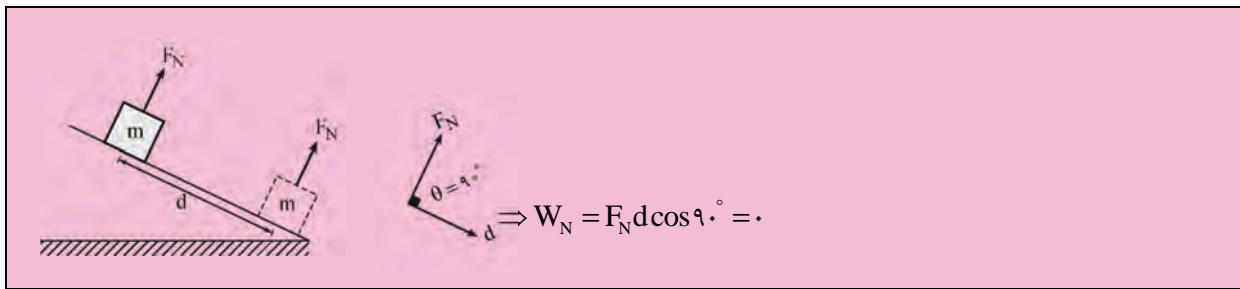
در زیر به بررسی کار برخی از نیروهای ثابت خاص می‌پردازیم:

### کار نیروی عمودی سطح ( $W_{F_N}$ )

هنگامی که یک جسم روی سطح افقی و یا یک سطح شیب‌دار حرکت می‌کند با توجه به این که نیروی عکس‌العمل عمودی سطح ( $F_N$ ) بر سطح عمود است در نتیجه می‌توان گفت زاویه بین این نیرو و جابه‌جایی  $\theta = 90^\circ$  بوده بنابراین کار آن صفر است.



$$\Rightarrow W_N = F_N d \cos 90^\circ = 0$$



▼ مثال ۱۶) جسمی به جرم  $50 \cdot g$ ، روی یک سطح افقی به وسیله نیروی  $F$  که تحت زاویه  $37^\circ$  درجه بر جسم اثر می‌کند، به اندازه‌ی ۱۰ متر با

سرعت ثابت تغییر مکان می‌یابد. کار انجام شده توسط نیروی عمودی سطح چند ژول است؟  $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

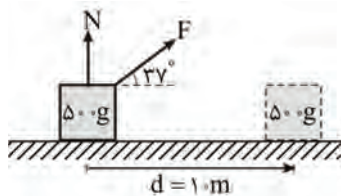
(مشابه با مثال ۲-۴ صفحه ۳۴ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۷۴ با اندکی تغییر)

صفر (۴)

۱۲ / ۵ (۳)

۲ / ۵ (۲)

۱ / ۲۵ (۱)



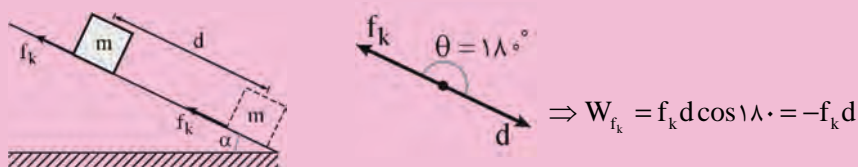
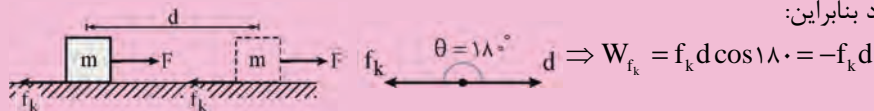
پاسخ:

با توجه به عمود بودن  $F_N$  بر  $d$ ، کار انجام شده توسط نیروی عمودی سطح  $(W_{F_N})$  برابر صفر است.

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow W_N = Nd \cos 90^\circ = 0$$

### کار نیروی اصطکاک

هنگامی که یک جسم روی یک سطح افقی و یا یک سطح شیب‌دار دارای اصطکاک حرکت می‌کند همواره نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت جسم بر آن وارد می‌شود بنابراین:



نکته: معمولاً کاری که نیروی اصطکاک انجام می‌دهد به صورت گرما تولید می‌شود و مقدار این گرما برابر قدرمطلق کار نیروی اصطکاک

است.

نکته: اندازه‌ی کار انجام شده برای غلبه بر نیروی اصطکاک برابر است با قدرمطلق کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک، از طرفی کار نیروی

اصطکاک برابر با  $W_{f_k} = -f_k d$  است در نتیجه کار مورد نیاز برای غلبه بر نیروی اصطکاک،  $(W')$  برابر است با:

$$W' = |W_{f_k}| \rightarrow W' = f_k d$$





مثال ۱۷) جسمی به جرم ۵ کیلوگرم به اندازه‌ی ۲ متر روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود. اگر نیروی اصطکاک در مقابل حرکت ۱۰ نیوتن باشد، کار

(مکمل مثال ۲-۴ صفحه‌ی ۳۴ کتاب درسی-سراسری تجربی ۷۴ با اندکی تغییر)

نیروی اصطکاک بر حسب ژول برابر است با:  $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

- ۱) -۲۰
- ۲) ۲۰
- ۳) ۱۰
- ۴) -۱۰

پاسخ: کار نیروی اصطکاک  $W_{f_k} = -f_k d$  است بنابراین داریم:

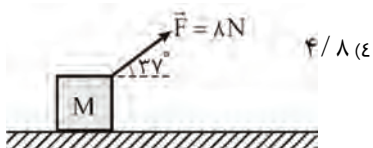
$$W_{f_k} = -f_k d = -10 \times 2 \Rightarrow W_{f_k} = -20 \text{ J}$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۸) در شکل مقابل وزنه M با سرعت ثابت روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود. کار نیروی اصطکاک در هر متر جابه‌جایی چند ژول است؟

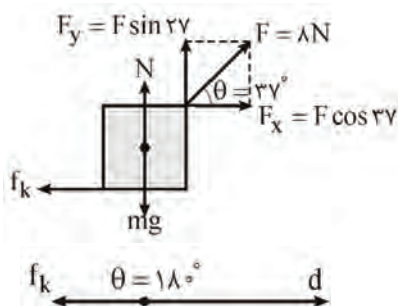
(مکمل مثال ۲-۴ صفحه‌ی ۳۴ کتاب درسی - آزاد تجربی ۸۱)

$(\cos 37^\circ = 0.8)$



- ۱) -۶ / ۴
- ۲) -۴ / ۸
- ۳) ۶ / ۴
- ۴) ۴ / ۸

پاسخ: با توجه به اینکه سرعت وزنه ثابت و در نتیجه شتاب آن صفر است، نیروی اصطکاک را از قانون دوم نیوتون با استفاده از شکل زیر تعیین می‌کنیم و سپس کار نیروی اصطکاک را از رابطه  $W_{f_k} = -f_k d$  تعیین می‌کنیم:



$$F_x = F \cos 37 = 8 \times 0.8 = 6.4 \text{ N}$$

$$F_y = F \sin 37 = 8 \times 0.6 = 4.8 \text{ N}$$

$$(F_x)_{\text{برآیند}} = ma \Rightarrow (F_x)_{\text{برآیند}} = 0 \rightarrow F_x - f_k = 0$$

$$\rightarrow 6.4 - f_k = 0 \Rightarrow f_k = 6.4 \text{ N}$$

$$W_{f_k} = -f_k d \Rightarrow W_{f_k} = -6.4 \times 1 \Rightarrow W_{f_k} = -6.4 \text{ J}$$

گزینه ۱ صحیح است.

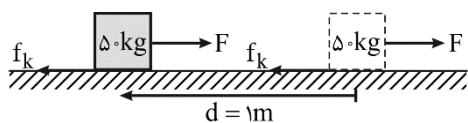
مثال ۱۹) صندوقی به جرم ۵۰ Kg با سرعت ثابت  $1 \frac{m}{s}$  توسط یک نیروی افقی روی کف اتاق کشیده می‌شود. اگر نیروی اصطکاک در مقابل حرکت

۲۰۰ نیوتن باشد، مقدار گرمایی که در هر متر جابه‌جایی جسم در اثر اصطکاک تولید می‌شود چند ژول است؟  $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

(مکمل مثال ۲-۴ صفحه‌ی ۳۴ کتاب درسی - آزمون کانون ۹۱)

- ۱) ۲۰
- ۲) ۲۰۰
- ۳) ۱۰
- ۴) ۱۰۰

پاسخ:



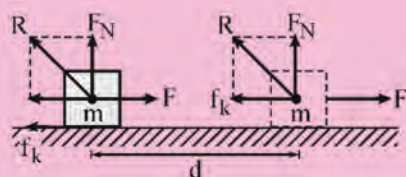
$$\begin{cases} W_{f_k} = f_k d \cos 180 = 200 \times 1 \times -1 \\ \Rightarrow W_{f_k} = -200 \text{ J} \end{cases}$$

$$|W_f| = 200 \text{ J} = \text{مقدار گرمای تولید شده}$$

گزینه ۲ صحیح است.

کار نیروی عکس العمل سطح (W<sub>R</sub>)

مطابق شکل نیروی عکس العمل سطح (R) دارای دو مؤلفه‌ی نیروی عمودی سطح F<sub>N</sub> و نیروی اصطکاک f<sub>k</sub> است، بنابراین داریم:

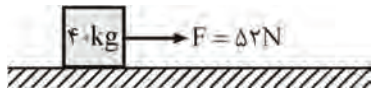


$$\begin{cases} W_R = W_{F_N} + W_{f_k} \\ W_{F_N} = 0 \\ W_{f_k} = -f_k d \Rightarrow W_R = -f_k d \end{cases}$$

$$W_R = W_{f_k} = -f_k d$$

تذکر: این رابطه برای سطح شیبدار نیز صادق است. یعنی داریم:

▼ مثال ۲۰) در مجموعه مقابل، بسته از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. اگر نیروی اصطکاک در طول مسیر برابر ۱۲N باشد کار انجام شده توسط نیروی عکس‌العمل سطح در طول ۱۵ متر جابه‌جایی جسم چند ژول است؟ (مکمل مثال ۲-۴ صفحه ۳۴ کتاب درسی سراسری ریاضی ۸۱ فارغ از کشور با الدکی تغییر)



- ۱) ۱۲۰  
۲) -۱۲۰  
۳) -۱۸۰  
۴) صفر

✓ پاسخ: کار انجام شده توسط نیروی عکس‌العمل سطح ( $W_R$ ) برابر با کار نیروی اصطکاک ( $W_{f_k}$ ) است (در واقع کار مؤلفه عمودی سطح ( $W_{f_N}$ ) صفر است).

$$\begin{cases} W_N = 0 \\ W_R = W_N + W_{f_k} \Rightarrow W_R = W_{f_k} \Rightarrow \\ f_k d \cos 180 = 12 \times 15 \times -1 \\ W_R = -180 \text{ J} \end{cases}$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۲۱) جسمی به وزن  $W$  از بالای سطح شیب‌داری به طول  $L$  که با افق زاویه  $\theta$  می‌سازد به پایین می‌لغزد. اگر سطح بدون اصطکاک باشد، کار نیروی عکس‌العمل سطح شیب‌دار در این جابه‌جایی برابر با کدام یک از مقادیر زیر خواهد بود؟ (مرتبط با مفه‌های ۳۱ تا ۳۳ کتاب درسی)

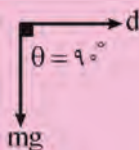
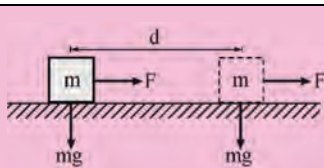
- ۱) صفر  
۲)  $W.L$   
۳)  $W.L \sin \theta$   
۴)  $W.L \cos \theta$

✓ پاسخ: کار نیروی عکس‌العمل سطح ( $W_R$ ) برابر با کار نیروی اصطکاک است (زیرا کار نیروی سطح  $W_{f_N}$  صفر است). از طرفی چون سطح شیب‌دار بدون اصطکاک است پس کار نیروی اصطکاک ( $W_{f_k}$ ) نیز صفر خواهد بود، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} W_N = 0 \\ W_{f_k} = 0 \Rightarrow W_R = W_N + W_{f_k} = 0 + 0 = 0 \\ \Rightarrow W_R = 0 \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

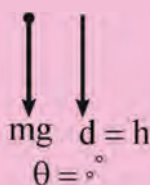
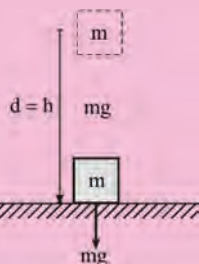
### کار نیروی وزن ( $W_{mg}$ )



الف) جسم در راستای افقی جابه‌جا شود:  
 $\Rightarrow W_{mg} = mgd \cos 90 = 0$

ب) جسم در راستای قائم جابه‌جا شود:

- جسم در راستای قائم به طرف بالا حرکت کند.



$$\theta = 180 \Rightarrow W_{mg} = mgd \cos 180 = -mgh$$

- جسم در راستای قائم به سمت پایین حرکت کند.

$$W_{mg} = mgd \cos 0 = mgh$$



مثال ۲۲) نخی را به یک وزنه‌ی یک کیلوگرمی بسته و آن را با نیروی کشش  $E$  نیوتون روی سطح افقی به اندازه‌ی یک متر جابه‌جا می‌کنیم. کار نیروی وزن در این جابه‌جایی چند ژول است؟

(مشابه مثال ۲-۱۴ صفحه‌ی ۳۴ کتاب درسی- سراسری ترمی ۷۷)

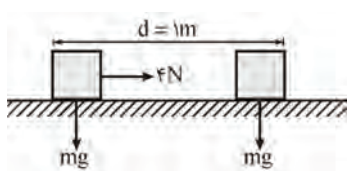
۱۹/۶ (ع)

۹/۸ (۳)

۴ (۲)

صفر (۱)

پاسخ:



$$W_{mg} = mgd \cos \theta \xrightarrow{\theta=90^\circ} W_{mg} = 0$$

کار نیروی وزن در جابه‌جایی‌های افقی صفر است.  
گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۲۳) جسمی به جرم  $1 \text{ kg}$  توسط نیروی  $F$  از روی سطح زمین به اندازه‌ی  $5 \text{ m}$  بالا برده می‌شود. کار نیروی وزن در این جابه‌جایی چند ژول است؟  $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

(مکمل تمرین ۲-۳ صفحه‌ی ۳۱ کتاب درسی)

$$g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

پاسخ: جسم به سمت بالا جابه‌جا می‌شود، بنابراین کار نیروی وزن برابر  $W_{mg} = -mgd$  است.

$$W_{mg} = -1 \times 10 \times 5 \Rightarrow W_{mg} = -50 \text{ J}$$

مثال ۲۴) شخصی به جرم  $60 \text{ kg}$  داخل آسانسور قرار دارد. آسانسور با شتاب  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  به طرف بالا شروع به حرکت می‌کند. کار نیروی وزن در صورتی که آسانسور  $10$  متر بالا بود چقدر است؟  $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

(مکمل تمرین ۲-۳ صفحه‌ی ۳۱ کتاب درسی - اندیشه‌سازان ساه- ۹۷)

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

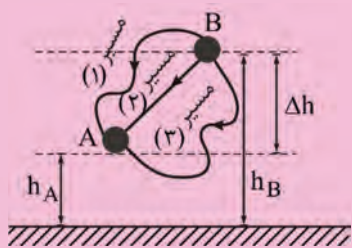
پاسخ: آسانسور به سمت بالا حرکت می‌کند بنابراین کار نیروی وزن برابر  $W_{mg} = -mgd$  است.

$$W_{mg} = -mgd \Rightarrow W_{mg} = -60 \times 10 \times 10 \Rightarrow W_{mg} = -6000 \text{ J}$$



نکته: کار نیروی وزن مستقل از مسیر حرکت است و فقط به اختلاف ارتفاع  $(\Delta h)$  دو نقطه‌ای که بین آن‌ها جابه‌جا می‌شود بستگی

دارد.

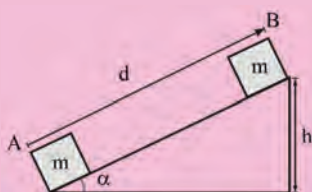


$$\begin{cases} (W_{mg})_i = (W_{mg})_f = (W_{mg})_r = mg\Delta h \\ \Delta h = h_B - h_A \end{cases}$$

تذکره: در نکته‌ی بالا اگر جسم از  $A$  به  $B$  جابه‌جا شود، آن گاه داریم:

$$(W_{mg})_i = (W_{mg})_f = (W_{mg})_r = -mg\Delta h$$

نکته: هرگاه جسمی از نقطه‌ی  $A$  تا  $B$  روی سطح شیب‌دار مطابق شکل جابه‌جا شود کار نیروی وزن برابر است با:



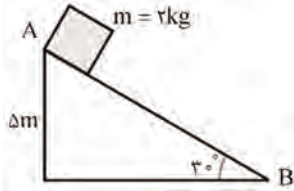
$$\begin{cases} W_{mg} = -mgh \Rightarrow W_{mg} = -mgd \sin \alpha \\ \sin \alpha = \frac{h}{d} \end{cases}$$

تذکره: اگر جسم از نقطه‌ی  $B$  تا نقطه‌ی  $A$  جابه‌جا شود داریم:

$$W_{mg} = +mgd \sin \alpha$$

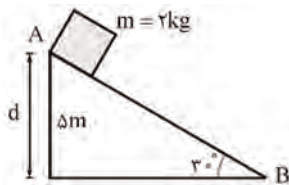
▼ **مثال ۲۵:** اگر در سطح شیب‌دار مطابق شکل، اندازه‌ی نیروی اصطکاک برابر  $۰/۱$  وزن جسم باشد و جسم از نقطه‌ی A (ارتفاع  $۵$  متر) به نقطه‌ی B برسد، کار نیروی گرانش (جاذبه) زمین روی جسم در این جابه‌جایی چند ژول است؟  $(g = ۱۰ \frac{N}{Kg})$

(مکمل تمرین ۲-۵ صفحه‌ی ۳۵ کتاب درسی - سراسری تهرانی ۷۷)



- ۴۰ (۱)  
۵۰ (۲)  
۶۰ (۳)  
۱۰۰ (۴)

☑ پاسخ:



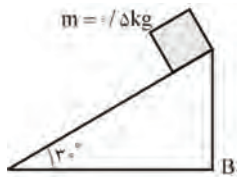
$$W_{mg} = mgh = 2 \times 10 \times 5$$

$$W_{mg} = 100 \text{ J}$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

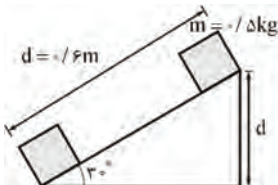
▼ **مثال ۲۶:** وزنه‌ای به جرم  $۰/۵ \text{ kg}$  روی سطح شیب‌دار شکل مقابل به اندازه‌ی  $۶۰$  سانتی‌متر به پایین می‌لغزد، کار نیروی گرانش (جاذبه) زمین در این جابه‌جایی چند ژول است؟  $(g = ۱۰ \text{ N/kg})$

(مکمل تمرین ۲-۵ صفحه‌ی ۳۵ کتاب درسی - آزاد ریاضی ۸۰)



- ۱۵ (۱)  
۱/۵ (۲)  
۳ (۳)  
۳۰ (۴)

☑ پاسخ:



$$W_{mg} = mgh = mgd \sin \alpha$$

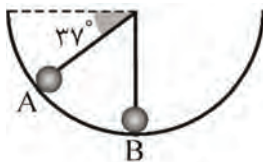
$$W_{mg} = 0.5 \times 10 \times 0.6 \times \sin 30^\circ \Rightarrow W_{mg} = 1.5 \text{ J}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

▼ **مثال ۲۷:** جسم  $m$  به جرم  $۱۰۰ \text{ g}$  درون نیم کره صیقلی به قطر  $۶۰$  سانتی‌متر به پایین می‌لغزد. کار نیروی وزن جسم از A تا B چند ژول است؟

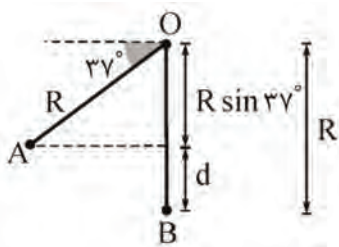
(مکمل تمرین ۲-۵ صفحه‌ی ۳۵ کتاب درسی - سراسری تهرانی ۷۸)

$$(g = ۱۰ \frac{m}{s^2}, \sin 37^\circ = 0.6)$$



- ۰/۱۲ (۱)  
۰/۱۸ (۲)  
۱/۲ (۳)  
۱/۸ (۴)

☑ پاسخ: جسم از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B به سمت پایین جابه‌جا شده است بنابراین کار نیروی وزن در این پایین آمدن جسم برابر با  $W_{mg} = mgd$  است که d جابه‌جایی عمودی جسم بین دو نقطه‌ی مورد نظر است برای محاسبه‌ی d با توجه به شکل زیر داریم:



$$d = R - R \sin 37^\circ \Rightarrow d = R(1 - \sin 37^\circ)$$

$$W_{mg} = mgd \Rightarrow W_{mg} = mgR(1 - \sin 37^\circ)$$

$$\Rightarrow W_{mg} = 0.1 \times 10 \times 0.3(1 - 0.6)$$

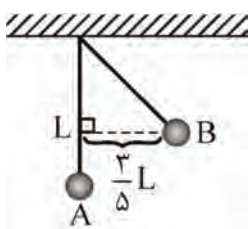
$$\Rightarrow W_{mg} = 0.3(0.4) \Rightarrow W_{mg} = 0.12 \text{ J}$$

گزینه ۱ صحیح است.

▼ مثال ۲۸) مطابق شکل زیر، گلوله‌ای به جرم ۳ kg از انتهای یک نخ سبک به طول ۲ متر آویزان است. اگر آونگ را از حالت عمودی A به نقطه‌ی

(مکمل تمرین ۲-۳ صفحه ۳۱ کتاب درسی - آزمون کانون ۹۳)

B برسانیم، کار نیروی وزن گلوله در این جابه‌جایی چند ژول می‌شود؟ ( $g = 10 \frac{N}{kg}$ )

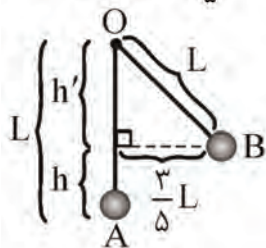


- ۱۲ (۱)
- ۱۲ (۲)
- ۳۶ (۳)
- ۳۶ (۴)

پاسخ:

کار نیروی وزن در بالا رفتن :  $\begin{cases} W_{mg} = -mgh \\ h: \text{افتلاف ارتفاع جسم بین دو نقطه‌ی } A \text{ و } B \end{cases}$

رابطه‌ی فیثاغورث:  $(\frac{3}{5}L)^2 + h^2 = L^2$



$$\Rightarrow h' = \sqrt{L^2 - \frac{9}{25}L^2} \Rightarrow h' = \frac{4L}{5}$$

$$\Rightarrow h = L - h' = L - \frac{4L}{5} \Rightarrow h = \frac{L}{5}$$

$$\Rightarrow W_{mg} = -mg \frac{L}{5} = -3 \times 10 \times \frac{2}{5} \Rightarrow W_{mg} = -12 \text{ J}$$

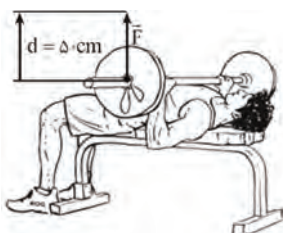
نکته: کار لازم برای غلبه بر نیروی وزن ( $W'$ ) برابر قدر مطلق کار نیروی وزن  $W_{mg}$  است.

$$W' = |W_{mg}|$$

▼ مثال ۲۹) ورزشکاری وزنه‌ای به جرم ۴۰ kg را به طور یکنواخت، ۵۰ cm بالای سر خود می‌برد (مطابق شکل). کاری که این ورزشکار روی وزنه

(مشابه تمرین ۲-۳ صفحه ۳۱ کتاب درسی)

انجام می‌دهد چند ژول است؟ (اندازه‌ی شتاب گرانشی زمین را  $9.8 \frac{N}{kg}$  در نظر بگیرید)



پاسخ: کاری که ورزشکار توسط نیروی  $F$  انجام می‌دهد صرف غلبه بر نیروی وزن و نه می‌شود؛

$$W_{mg} = -mgh = -40 \times 9.8 / 8 \times 50 \times 10^{-2} = -196 \text{ J}$$

$$W_F = |W_{mg}| = 196 \text{ J}$$

مثال ۳۰: شخصی چمدانی به جرم  $5 \text{ kg}$  را یک متر در امتداد افق و سپس یک متر در امتداد قائم حمل می‌کند. کاری که این شخص در غلبه بر وزن چمدان انجام می‌دهد تقریباً برابر است با:

(مکمل تمرین ۲-۳ صفحه ۳۱ - سراسری تمرین ۴۳)

(۴) ۱۰۰ ژول

(۳) ۵۰ ژول

(۲) ۱۰ ژول

(۱) ۵ ژول

پاسخ: کار نیروی وزن در جابه‌جایی افقی صفر است اما برای جابه‌جایی در امتداد قائم رو به بالا داریم:

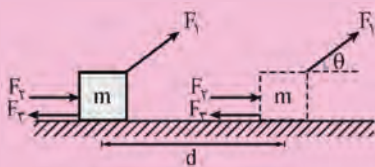
$$W_{mg} = -mgh = -5 \times 10 \times 1 = -50 \Rightarrow W_{mg} = -50 \text{ J}$$

$$W' = 50 \text{ J} \quad \text{کار لازم برای غلبه بر وزن چمدان}$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

### کار کل

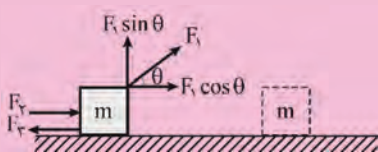
اگر به جای یک نیرو، چند نیرو به یک جسم وارد شود، برای محاسبه کار کل به یکی از دو روش زیر می‌توان عمل کرد:  
 (۱) کار انجام شده توسط هر نیرو به طور جداگانه محاسبه شود در نهایت کار کل  $(W_t)$  برابر جمع جبری کل انجام شده توسط تک تک نیروهاست.



$$W_t = W_{F_1} + W_{F_2} + \dots$$

تذکره: جمع جبری به این معناست که ممکن است کار برخی نیروها منفی شود و برای محاسبه کار کل، علامت منفی کار باید در جمع کردن در نظر گرفته شود.

(۲) ابتدا نیروهایی که در امتداد جابه‌جایی بر جسم وارد می‌شوند شناسایی شوند. سپس اندازه‌ی نیروی خالص  $(F_t)$  موازی با بردار جابه‌جایی وارد بر جسم تعیین شود و در نهایت کار کل انجام شده برابر است با:



$$F_t = F_1 + F_2 \cos \theta - F_1$$

$$W_t = F_t d$$

تذکره: نیروهایی که عمود بر جابه‌جایی هستند سهمی در محاسبه کار کل وارد شده بر جسم  $(W_t)$  نخواهند داشت.



مثال ۳۱: کشاورزی توسط تراکتور، سورت‌های پر از هیزم را در راستای یک زمین

هموار به اندازه‌ی  $235 \text{ m}$  جابه‌جا می‌کند (شکل روبرو) وزن کل سورت‌ها و بار آن

$mg = 1/47 \times 10^3$  است تراکتور نیروی ثابت  $F_1 = 4\sqrt{2} \times 10^2$  را در زاویه‌ی

$\theta = 45^\circ$  بالای افق به سورت‌ها وارد می‌کند. نیروی اصطکاک جنبشی

$f_k = 3/4 \times 10^2 \text{ N}$  است که برخلاف جهت حرکت به سورت‌ها وارد می‌شود. کار کل

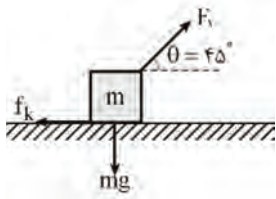
انجام شده روی سورت‌ها کدام است؟  $(\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2})$

(مشابه تمرین ۲-۶ صفحه ۳۶ کتاب درسی)



پاسخ: روش اول: در این روش کار انجام شده توسط هر نیرو را به طور جداگانه مناسبه می‌کنیم.

$$W_F = Fd \cos \theta = \sqrt{2} \times 10^2 \times 235 \times \cos 45 \Rightarrow W_F = 94000 \text{ J}$$

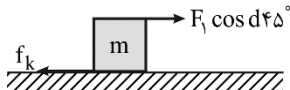


$$\left\{ \begin{array}{l} W_{mg} = mgd \cos 90 \Rightarrow W_{mg} = 0 \quad \text{کار نیروی وزن در جابه‌جایی‌های افقی صفر است.} \\ \theta = 90^\circ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{f_k} = f_k \cos \pi = -f_k d = -3/4 \times 10^2 \times 235 = -79900 \text{ J} \\ \theta = 180^\circ \end{array} \right.$$

$$W_t = W_F + W_{mg} + W_{f_k} = 94000 + 0 - 79900 \Rightarrow W_t = 14100 \text{ J}$$

روش دوم: ابتدا نیروهای را شناسایی می‌کنیم که در امتداد جابه‌جایی بر جسم وارد می‌شوند.



$$\begin{aligned} \text{انرژی نیروی قائل: } F &= F \cos 45 - f_k \\ &= 4\sqrt{2} \times 10^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3/4 \times 10^2 = 600 \text{ N} \end{aligned}$$

علامت مثبت نشان می‌دهد که نیروی قائل F در جهت جابه‌جایی است، بنابراین داریم:

$$W_t = Fd = 600 \times 235 \Rightarrow W_t = 141000 \text{ J}$$

مثال ۳۲: نیروی افقی  $F_a = 20 \text{ N}$  بر جسمی به جرم  $3 \text{ kg}$  که روی یک سطح شیبدار بدون اصطکاک به زاویه  $\theta = 30^\circ$  قرار گرفته، وارد می‌شود. اگر جسم به اندازه  $d = 0.5 \text{ m}$  جابه‌جا شود. در طول این جابه‌جایی، کار خالص انجام شده روی جسم چند ژول است؟

(مرتبط با صفحه‌های ۳۵ و ۳۶ کتاب درسی)

$$\left( \cos 30 = 0.8, \sin 30 = 0.5, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \right)$$

$$-0.5 \text{ (ع)}$$

$$-8 \text{ (ب)}$$

$$0.5 \text{ (د)}$$

$$8 \text{ (ا)}$$

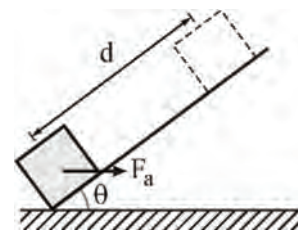
پاسخ:

کار، نیروی وزن در بالا رفتن:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{mg} = -mgh = -mgd \sin \theta = -3 \times 10 \times 0.5 \times \sin 30 \Rightarrow W_{mg} = -7.5 \text{ J} \\ \text{Diagram: } h = d \sin \theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{F_a} = F_a d \cos \theta = 20 \times 0.5 \times \cos 30 = 8 \text{ J} \\ \text{Diagram: } \theta \end{array} \right.$$

$$\text{کار کل: } W_t = W_{mg} + W_{F_a} = -7.5 + 8 \Rightarrow W_t = 0.5 \text{ J}$$



گزینه ۲ صحیح است.







▼ **مثال ۳۵** توپ فوتبالی به جرم  $0.5 \text{ kg}$  از طریق یک ضربه ایستگاهی با تندی  $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به سمت دروازه، شوت می‌شود. اگر توپ با تندی  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به تیرک دروازه برخورد کند، کار کل انجام شده روی توپ چند ژول است؟

(مشابه مثال ۶-۲ صفحه ۳۸ کتاب درسی)

✓ **پاسخ:** با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K = K_f - K_i \Rightarrow \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_i^2 = \frac{1}{2} m (V_f^2 - V_i^2) = \frac{1}{2} \times 0.5 (10^2 - 12^2) \Rightarrow W_t = -1 \text{ J}$$

علامت منفی بیانگر این است که کار کل انجام شده روی توپ، انرژی جنبشی آن را کاهش داده است.

▼ **مثال ۳۶** برای آن که تندی خودرویی از حال سکون به  $v$  برسد، باید کار کل  $W_{it}$  روی آن انجام شود. همچنین برای آن که تندی خودرو از  $v$  به

$4v$  برسد، باید کار کل  $W_{rt}$  روی آن انجام شود (شکل زیر). نسبت  $\frac{W_{it}}{W_{rt}}$  چقدر است؟



✓ **پاسخ:** طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_i = 0 \Rightarrow k_i = 0 \\ W_{it} = \Delta k = k_f - k_i = \frac{1}{2} m V_f^2 \Rightarrow W_{it} = \frac{1}{2} m V^2 \end{cases}$$

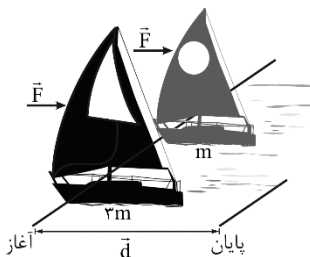
$$\begin{cases} W_{rt} = \Delta k' = k'_f - k'_i = \frac{1}{2} m V_f'^2 - \frac{1}{2} m V_i'^2 \\ = \frac{1}{2} m (4V)^2 - \frac{1}{2} m (V)^2 = \frac{1}{2} m (16V^2 - V^2) \\ = W_{rt} = \frac{15}{2} m V^2 \end{cases}$$

$$\frac{W_{it}}{W_{rt}} = \frac{\frac{1}{2} m V^2}{\frac{15}{2} m V^2} = \frac{1}{15}$$

▼ **مثال ۳۷** دو قایق مخصوص حرکت روی سطوح یخ زده مطابق شکل، دارای جرم‌های  $m$  و  $3m$  و بادبان‌های مشابه‌اند. قایق‌ها روی دریاچه‌ی

افقی و بدون اصطکاک قرار دارند و نیروی ثابت و یکسان  $\vec{F}$  با وزیدن باد به هر دو وارد می‌شود. هر دو قایق از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و از خط پایان به فاصله‌ی  $d$  می‌گذرند. نسبت تندی قایق ۲ به تندی قایق ۱ درست پس از عبور از خط پایان کدام است؟

(مشابه تمرین ۶-۲ صفحه ۳۹ کتاب درسی)



(۱)  $\sqrt{3}$

(۲)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۳) ۲

(۴)  $\frac{1}{2}$

✓ **پاسخ:** تنه‌ای نیرویی که در راستای جابه‌جایی  $(d)$  به قایق وارد می‌شود نیروی باد  $(F)$  است بنابراین فقط این نیرو کار انجام می‌دهد بنابراین طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} W_t = Fd \cos \theta = Fd \\ W_t = \Delta k = k_v - k_1 \xrightarrow[k_1=0]{V_1=0} W_t = k_v \\ \Rightarrow Fd = k_v = \frac{1}{2} m V_v^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2Fd}{m}} \end{cases}$$

$$\frac{F}{d} \xrightarrow{\text{یکسان}} \frac{V_v}{V_1} \xrightarrow{\text{قایق}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_v}} = \sqrt{\frac{m}{3m}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{V_v}{V_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

▼ مثال ۳۸) شکل‌های (الف) و (ب) دو جسم به جرم‌های  $M_1 = m$  و  $M_2 = 2m$  را نشان می‌دهند که بر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک در حالت سکون قرار گرفته‌اند اگر کار انجام شده در هر دو حالت یکسان باشد، تندی نهایی این دو جسم را با یکدیگر مقایسه کنید؟

(مشابه با مسئله ۳ پایان فصل کتاب درسی)



□ پاسخ: با توجه به این که کار انجام شده در هر دو حالت یکسان است بنابراین طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{aligned} W_t = \Delta k \Rightarrow (W_t)_{\text{الف}} = (W_t)_{\text{ب}} \Rightarrow \Delta k_{\text{الف}} = \Delta k_{\text{ب}} &\xrightarrow{(V_1)_{\text{الف}} = 0 \Rightarrow (k_1)_{\text{الف}} = 0} (k_v)_{\text{الف}} = (k_v)_{\text{ب}} \\ (V_1)_{\text{ب}} = 0 \Rightarrow (k_1)_{\text{ب}} = 0 & \\ \frac{1}{2} M_1 (V_v)_{\text{الف}}^2 = \frac{1}{2} M_2 (V_v)_{\text{ب}}^2 \Rightarrow m (V_v)_{\text{الف}}^2 = 2m (V_v)_{\text{ب}}^2 \Rightarrow (V_v)_{\text{الف}}^2 = 2 (V_v)_{\text{ب}}^2 \Rightarrow (V_v)_{\text{الف}} = \sqrt{2} (V_v)_{\text{ب}} \end{aligned}$$

▼ مثال ۳۹) جسمی به جرم  $8 \text{ kg}$  با تندی  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  روی خط راست حرکت می‌کند. چه نیرویی بر حسب نیوتون و در کدام جهت باید در راستای

حرکت به آن وارد شود، تا پس از طی مسافت  $8$  متر انرژی جنبشی آن به  $1200$  ژول برسد؟  
(۱)  $100$  و در جهت حرکت (۲)  $50$  و در جهت حرکت (۳)  $50$  و در خلاف جهت حرکت (۴)  $100$  و در خلاف جهت

□ پاسخ:

$$k_v = \frac{1}{2} m V_v^2 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^2 \Rightarrow k_1 = 400 \text{ J}, \quad k_v = 1200 \text{ J}$$

پس از طی مسافت  $8 \text{ m}$ ، انرژی جنبشی آن افزایش پیدا کرده است پس نیروی  $F$  در جهت حرکت باید به جسم وارد شود، بنابراین طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_F = k_v - k_1 \Rightarrow Fd \cos \theta = 1200 - 400 \Rightarrow F \times 8 = 800 \Rightarrow F = 100 \text{ N}$$

گزینه ۱ صحیح است.

▼ مثال ۴۰) اتومبیلی به جرم  $2$  تن در یک جاده‌ی شیب‌دار که با سطح افق زاویه‌ی  $30^\circ$  درجه می‌سازد، رو به بالا در حرکت است. اگر تندی اتومبیل در

مدت  $20$  ثانیه از  $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به  $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  برسد، کار کل در این بازه‌ی زمانی چند کیلوژول است؟  
(۱)  $140$  (۲)  $148$  (۳)  $210$  (۴)  $218$

پاسخ: طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k = k_v - k_i = \frac{1}{2} m V_v^2 - \frac{1}{2} m V_i^2 = \frac{1}{2} m (V_v^2 - V_i^2) = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^3 \times (12^2 - 2^2)$$

$$\Rightarrow W_t = 140 \times 10^3 \text{ J} = 140 \text{ kJ}$$

مثال (۴۱) ماهواره‌ها در مدارهای معین و با تندی ثابت در زمین می‌چرخند. شکل زیر حرکت ماهواره را به دور زمین مدل‌سازی کرده است. کدام گزینه نادرست است؟ (مشابه و مکمل مسئله ۹ کتاب درسی)



- ۱) تغییرات انرژی جنبشی ماهواره در طول حرکت آن صفر است.
- ۲) کار کل انجام شده روی ماهواره در طول حرکت آن صفر است.
- ۳) نیروی جاذبه گرانشی که از طرف زمین به ماهواره وارد می‌شود معادل وزن ماهواره است.
- ۴) نیروی جاذبه گرانشی که از طرف زمین به ماهواره وارد می‌شود روی آن کار انجام می‌دهد.

پاسخ: گزینه ۱؛ چون تندی حرکت ماهواره ثابت است طبق رابطه  $k = \frac{1}{2} m V^2$ ، تغییرات انرژی جنبشی آن صفر است.

گزینه ۲؛ طبق قضیه کار-انرژی جنبشی  $W = \Delta k$ ، چون تغییرات انرژی جنبشی ماهواره صفر است (تندی حرکت ثابت) بنابراین کار کل انجام شده روی ماهواره صفر است.

گزینه ۳؛ تنها نیروی وارد بر ماهواره، نیروی جاذبه گرانشی است که از طرف زمین به ماهواره وارد می‌شود و معادل وزن ماهواره است.

گزینه ۴؛ چون نیروی جاذبه گرانشی بر مسیر حرکت ماهواره عمود است کاری روی ماهواره انجام نمی‌دهد.

$$W_F = Fd \cos \theta \xrightarrow{\theta=90^\circ, \cos 90^\circ=0} W_F = 0$$

گزینه ۴ نادرست است.

مثال (۴۲) جرم یک خودروی الکتریکی به همراه راننده‌اش  $60 \text{ kg}$  است. این خودرو از موقعیت A به موقعیت B می‌رود، اگر تندی خودرو در موقعیت A برابر  $54 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  و تندی آن در موقعیت B  $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  باشد کل کار انجام شده روی این خودرو چند کیلوژول است؟ (مشابه تمرین ۸-۲ صفحه ۱۴۰ کتاب درسی)



پاسخ: طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_A = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{54}{3.6} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ W_t = \Delta k = k_B - k_A = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{1}{2} \times 60 \times (20^2 - 15^2) = 5250 \text{ J} \Rightarrow W_t = 52 / 5 \text{ kJ}$$



مثال (۴۳) شکل روبه‌رو شخصی را نشان می‌دهد که با وارد کردن نیروی ثابت  $52 \text{ N}$ ، جعبه‌ای به جرم  $4 \text{ kg}$  را از حال سکون تا ارتفاع  $150 \text{ cm}$  در امتداد قائم جابه‌جا می‌کند. تندی نهایی جعبه کدام است؟ (مشابه تمرین ۹-۲ صفحه ۱۴۰ کتاب درسی)

پاسخ: نیروها در راستای حرکت عبارتند از نیروی دست  $F_1$  و نیروی وزن  $mg$ ؛

بنابراین اندازه‌ی نیروی قائلش برابر است با:

$$F = F_1 - mg = 52 - 4 \times 10 = 12 \text{ N}$$

علامت مثبت نشان می‌دهد که نیروی قائل  $F$  در جهت جابه‌جایی است به این ترتیب داریم:

$$\Rightarrow W_t = Fd \cos 0 = Fd = 12 \times 1/5 = 18 \text{ J} \Rightarrow W_t = 18 \text{ J}$$

طبق قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی داریم:

$$V_f = 0 \Rightarrow k_f = 0$$

$$\begin{cases} W_t = \Delta k = k_f - k_i = k_f = \frac{1}{2} m V_f^2 \\ \Rightarrow 18 = \frac{1}{2} \times 4 \times V_f^2 \\ \Rightarrow V_f = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

▼ مثال ۴۴) شخصی به جرم  $75 \text{ kg}$ ، چمدانی به جرم  $10 \text{ kg}$  را از روی زمین برداشته و در داخل صندوق عقب اتومبیل خود قرار می‌دهد. اگر ارتفاع

کف صندوق عقب از سطح زمین  $1 \text{ m}$  باشد کدام گزینه نادرست است؟ ( $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ ) (مشابه تمرین ۲-۹ صفحه ۴۰ کتاب درسی)

(۱) کار نیروی وزن در این جابجایی  $10 \text{ J}$  است.

(۲) کاری که شخص برای غلبه بر نیروی وزن انجام می‌دهد برابر  $100 \text{ J}$  است.

(۳) انرژی جنبشی چمدان در این جابجایی تغییر نمی‌کند.

(۴) انرژی جنبشی چمدان در این جابجایی  $100 \text{ J}$  تغییر کرده است.

پاسخ:

$$W_{mg} = -mgh = -10 \times 10 \times 1 = -100 \text{ J}$$

گزینه ۱:

$$W' = -W = -(-100) = 100 \text{ J}$$

گزینه ۲: کار لازم برای غلبه بر نیروی وزن، قرینه کار نیروی وزن است.

گزینه ۳:

$$W_t = W_{\text{شخص}} + W_{\text{وزن}} = mgh - mgh = 0$$

$$W_t = \Delta k \Rightarrow 0 = \Delta k \Rightarrow k_f = k_i$$

گزینه ۴: چون کار کل صفر است پس طبق قضیه کار-انرژی جنبشی  $W_t = \Delta k$ ، انرژی جنبشی چمدان تغییری نمی‌کند.

گزینه ۴ نادرست است.

▼ مثال ۴۵) گلوله‌ای از ارتفاع  $20 \text{ m}$  متری سطح زمین، با تندی اولیه  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  در راستای قائم رو به پایین پرتاب می‌شود. انرژی جنبشی این گلوله بعد از  $4 \text{ m}$

متر پایین آمدن چند برابر می‌شود؟ ( $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ) و از مقاومت هوا صرف نظر شود. (مکمل مسأله ۱۵ پایان فصل کتاب درسی - فارغ از کشور تمرین ۹۶)

۶ (۴)

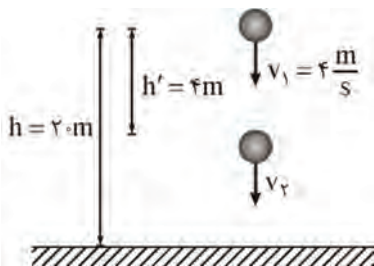
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ:  از مقاومت هوا صرف نظر شده است بنابراین تنها نیروی وزن در این جابه‌جایی کار انجام می‌دهد پس طبق قضیه کار-انرژی جنبشی

داریم:



$$W_t = \Delta k = W_{mg} = k_f - k_i$$

$$\Rightarrow mgh' = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_i^2$$

$$\Rightarrow 10 \times 4 = \frac{1}{2} V_f^2 - \frac{1}{2} \times 4^2$$

$$\Rightarrow V_f^2 = 96 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$



$$\begin{cases} k = \frac{1}{2} m V^2 \\ m_1 = m_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{96}{16} \Rightarrow k_2 = 6k_1$$

گزینه ۴ صحیح است.



▼ **مثال ۴۶** مطابق شکل سه گلوله مشابه از بالای یک ساختمان به ارتفاع  $h$  با تندی یکسان توسط یک توپ شلیک می‌شوند. گلوله اول (۱) در امتداد افقی، گلوله دوم (۲) با زاویه‌ای بالاتر از افق و گلوله سوم (۳) با زاویه‌ای زیر امتداد افق. تندی گلوله‌ها در هنگام برخورد با زمین را با یکدیگر مقایسه کنید (از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید)

(مشابه مسأله ۱۵ پایان فصل کتاب درسی)

✓ **پاسخ:** تنها نیروی وارد بر گلوله از نقطه پرتاب تا نقطه برخورد به زمین، نیروی وزن است. (زیرا از مقاومت هوا صرف نظر شده است) که برای هر سه توپ یکسان است:

$$\begin{cases} h_1 = h_2 = h_3 = h \\ (W_{mg})_1 = (W_{mg})_2 = (W_{mg})_3 = +mgh \end{cases}$$

$$(W_t)_1 = (W_t)_2 = (W_t)_3$$

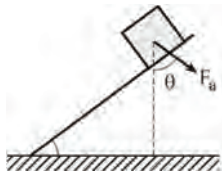
از طرفی با توجه به این که تندی اولیه برای هر سه توپ یکسان است انرژی جنبشی اولیه  $k_i$  آنها نیز یکسان است بنابراین طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} (W_t)_1 = (W_t)_2 = (W_t)_3 \\ (k_i)_1 = (k_i)_2 = (k_i)_3 \\ \Rightarrow W_t = \Delta k = k_f - k_i \Rightarrow (k_f)_1 = (k_f)_2 = (k_f)_3 \end{cases}$$

از طرفی طبق رابطه  $k = \frac{1}{2} m V^2$ ، چون جرم هر سه گلوله یکسان است پس تندی نهایی آنها نیز با هم برابر است:

$$(V_f)_1 = (V_f)_2 = (V_f)_3$$

▼ **مثال ۴۷** نیروی ثابت  $F_a$  به یک جعبه به جرم  $5 \text{ kg}$  تحت زاویه‌ی  $\theta = 37^\circ$  مطابق شکل وارد می‌شود. اگر جعبه تحت این نیرو و با تندی ثابت بر روی سطح شیبدار بدون اصطکاک تا ارتفاع عمودی  $1 \text{ m}$  جابه‌جا شود، کار انجام شده توسط  $F_a$  چند ژول است؟ (مرتبط با مفه‌های ۳۷ تا ۴۰ کتاب درسی)



$$(\sin \theta = 0.6, \sin 53^\circ = 0.4, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$$

✓ **پاسخ:** چون جعبه با تندی ثابت جابه‌جا می‌شود بنابراین تغییرات انرژی جنبشی صفر است از طرفی سطح بدون اصطکاک است پس کار نیروی اصطکاک نیز صفر است لذا طبق قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی، کار کل صفر است:

$$\begin{cases} V = \text{ثابت} \Rightarrow \Delta k = 0 \\ W_t = \Delta k = 0 \Rightarrow W_{f_k} + W_{mg} + W_{F_a} = 0 \xrightarrow{W_{f_k}=0} W_{F_a} + W_{mg} = 0 \Rightarrow W_{F_a} = -W_{mg} \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{mg} = -mgh = -5 \times 10 \times 1 = -50 \text{ J} \\ \Rightarrow W_{F_a} = -W_{mg} = -(-50) \Rightarrow W_{F_a} = 50 \text{ J} \end{cases}$$

▼ مثال ۴۸) چتربازی از ارتفاع ۸۰۰ متری از حال سکون رها می‌شود. جرم چترباز به همراه چترش ۸۰ kg است. اگر او با تندی  $5 \frac{m}{s}$  به زمین برسد،

(مشابه مثال ۲-۷ صفحه ۳۹ کتاب درسی)

کار نیروی مقاومت هوا در مسیر سقوط چند کیلوژول است؟ ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )



□ پاسخ: نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا ( $R$ ) روی چترباز کار انجام می‌دهند بنابراین طبق قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی داریم:

$$V_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$$

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_{mg} + W_R = k_2 - k_1, \quad \text{کار نیروی وزن در پایین آمدن} \quad W_{mg} = mgh$$

$$\Rightarrow mgh + W_R = \frac{1}{2} m V_2^2$$

$$\Rightarrow W_R = \frac{1}{2} \times 80 \times 5^2 - 80 \times 10 \times 800 \Rightarrow W_R = -63900 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_R = -639 \text{ kJ}$$

▼ مثال ۴۹) اتومبیلی به جرم ۶۰۰ کیلوگرم با تندی ۵۴ کیلومتر بر ساعت در حال حرکت است. اگر در اثر ترمز، اتومبیل متوقف شود، کار نیروی اصطکاک

(مرتبط با صفحه ۳۷ کتاب درسی- سراسری ریاضی ۶۹)

(بر حسب کیلوژول) کدام است؟

$$-135 \text{ (ع)}$$

$$-67 / 5 \text{ (ب)}$$

$$67 / 5 \text{ (د)}$$

$$135 \text{ (ا)}$$

□ پاسخ: در طول مسیر حرکت، نیروی اصطکاک روی اتومبیل کار انجام می‌دهد، کار نیروی وزن در پایه‌هایی‌های افقی صفر است بنابراین طبق

قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0 \\ W_{mg} = 0 \\ W_t = \Delta k \Rightarrow W_{f_k} + W_{mg} = k_2 - k_1 \\ \Rightarrow W_{f_k} = -k_1 = -\frac{1}{2} m V_1^2 \end{cases}$$

$$W_{f_k} = -\frac{1}{2} \times 600 \times \left[ \left( \frac{54}{3.6} \right)^2 \right] = -67500 \text{ J}$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -67 / 5 \text{ kJ}$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۵۰) گلوله‌ای به جرم ۲۰ گرم با تندی  $100 \frac{m}{s}$  به مانعی برخورد می‌کند و با تندی  $40 \frac{m}{s}$  از طرف دیگر آن خارج می‌شود. کار کل در این

(مکمل مثال ۲-۶ صفحه ۳۸ کتاب درسی- آزاد تجربی ۷۴)

برخورد چند ژول است؟

$$-84 \text{ (ع)}$$

$$-80 \text{ (ب)}$$

$$120 \text{ (د)}$$

$$60 \text{ (ا)}$$

□ پاسخ: طبق قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k = W_t = \frac{1}{2} m V_2^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times (40^2 - 100^2)$$

$$W_t = -84 \text{ J}$$

گزینه ۴ صحیح است.



▼ **مثال ۵۱)** گلوله‌ای به جرم ۱۰ گرم با سرعت  $10 \frac{m}{s}$  به تنه‌ی درختی برخورد می‌کند و به اندازه‌ی ۱۰ سانتی‌متر در آن فرو می‌رود و متوقف می‌شود.

(مرتبط با صفحه‌ی ۳۸ کتاب درسی - آقا مصطفی - تهران ۹۱)

الف) نیروی متوسطی که از طرف درخت به گلوله وارد می‌شود را به دست آورید.

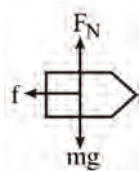
ب) با ذکر دلیل توضیح دهید چرا به این نیرو، نیروی متوسط گفته می‌شود؟

✓ **پاسخ:** نیروهای وزن  $mg$  و عمودی سطح  $F_N$  هر دو بر پایه‌یایی افقی گلوله عمود هستند ( $\theta = 90^\circ$ ) بنابراین کار آنها صفر است:  
 $W_{mg} = mgd \cos 90^\circ \Rightarrow W_{mg} = 0$  و  $W_N = F_N d \cos 90^\circ \Rightarrow W_N = 0$  کار نیروی وزن

نیروی  $f$  وارد شده بر گلوله از طرف درخت و پایه‌یایی گلوله  $d$  در فلاف جهت یکدیگرند  $\theta = 180^\circ$ ، بنابراین داریم:

$$f \text{ کار نیروی } W_f = fd \cos 180^\circ \Rightarrow W_f = -f \times 0.1$$

$$\text{کار کل } W_t = W_N + W_{mg} + W_f \Rightarrow W_t = 0 + 0 - 0.1f \Rightarrow W_t = -0.1f$$



$$\text{انرژی جنبشی اولیه: } K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow K_i = \frac{1}{2} \times 0.01 \times 10^2 \Rightarrow K_i = 0.5 \text{ J}$$

$$\text{انرژی جنبشی نهایی: } K_f = \frac{1}{2}mV_f^2 \Rightarrow K_f = 0$$

$$\Rightarrow \Delta K = K_f - K_i \Rightarrow \Delta K = 0 - 0.5 \Rightarrow \Delta K = -0.5 \text{ J}$$

حال با استفاده از قضیه کار و انرژی داریم:

$$W_t = \Delta K = -0.1f = -0.5 \Rightarrow f = 5.0 \text{ N}$$

بنابراین نیروی متوسطی که از طرف درخت به گلوله وارد می‌شود ۵۰۰ نیوتون است.

ب) نیرویی که درخت به گلوله وارد می‌کند، ثابت نیست و همان‌طور که می‌دانیم شرط استفاده از رابطه‌ی  $W_F = Fd \cos \theta$  برای مناسبه‌ی کار، ثابت بودن نیرو است، بنابراین در چنین مواردی این نیروی متغیر را با یک نیروی متوسط ولی ثابت جایگزین می‌کنیم تا بتوانیم کار آن را از رابطه‌ی بالا به سادگی مناسبه کنیم.

▼ **مثال ۵۲)** چکشی به جرم ۱۰ kg با تندی  $10 \frac{m}{s}$  به میخی برخورد می‌کند و باعث می‌شود میخ به اندازه‌ی ۲ cm درون چوبی فرو رود. نیروی متوسط وارد شده از طرف چوب بر میخ در این جابه‌جایی چند نیوتون است؟ (چکش بعد از ضربه ساکن می‌شود و از اتلاف انرژی صرف نظر شود).

(مرتبط با صفحه‌ی ۳۸ کتاب درسی - آزمون کلون ۹۳)

۲۵۰۰ (۴)

۲۰۰۰ (۳)

۲۵۰۰۰ (۲)

۲۰۰۰۰ (۱)

✓ **پاسخ:** از لحظه‌ی برخورد چکش با میخ تا لحظه‌ی فرورفتن میخ در چوب، نیروی  $F$  از طرف چوب به میخ در فلاف جهت حرکت آن وارد می‌شود بنابراین طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_f = 0 \Rightarrow k_f = 0 \\ W_t = \Delta k \Rightarrow W_F = k_f - k_i = 0 - \frac{1}{2}mV_i^2 \end{cases}$$

$$W_F = -\frac{1}{2} \times 10 \times 10^2 \Rightarrow W_F = -500 \text{ J}$$

$$W_F = -Fd \Rightarrow -500 = -F \times 2 \times 10^{-2} \Rightarrow F = 25000 \text{ N}$$

از طرفی:

گزینه ۲ صحیح است.

▼ مثال ۵۳: جسمی به جرم  $50 \cdot g$  از بالای یک ساختمان به ارتفاع  $20 \text{ m}$  از سطح زمین با تندی  $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  پرتاب می‌شود. اگر گلوله با سرعت  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

به زمین برخورد کند در طول حرکت جسم، کار نیروی مقاومت هوا چند ژول است؟  $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$  (مکمل مثال ۲-۷ صفحه ۱۳۹ کتاب درسی)

☑ پاسخ: دو نیروی وزن و مقاومت هوا در طول حرکت به جسم وارد می‌شوند.

$$\text{کار نیروی وزن در پایین آمدن} : W_{\text{mg}} = +mgh = +50 \cdot 10^{-3} \times 10 \times 20 \Rightarrow W_{\text{mg}} = +100 \text{ J}$$

اگر کار نیروی مقاومت هوا را  $W_F$  بنامیم طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_F + W_{\text{mg}} = k_r - k_i = \frac{1}{2} m (V_r^2 - V_i^2)$$

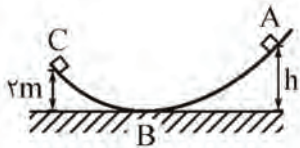
$$\Rightarrow W_F + 100 = \frac{1}{2} \times 50 \cdot 10^{-3} (10^2 - 20^2)$$

$$\Rightarrow W_F = -100 - 75 \Rightarrow W_F = -175 \text{ J}$$

▼ مثال ۵۴: جسمی به جرم  $0.8 \text{ kg}$  مطابق شکل، از نقطه A بدون تندی اولیه شروع به حرکت می‌کند و با تندی  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به نقطه C می‌رسد.

اگر اندازه‌ی کار نیروی اصطکاک در مسیر ABC برابر ۲۲ ژول و  $g = 10 \text{ N/kg}$  باشد، ارتفاع h چند متر است؟

(مکمل تمرین ۲-۸ صفحه ۴۰ کتاب درسی - آزاد تجربی ۷۸)



۲ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۳/۵ (۴)

☑ پاسخ: نیروی وزن و اصطکاک در این جابه‌جایی از نقطه A تا نقطه C، کار انجام می‌دهند بنابراین طبق قضیه کار و انرژی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_{\text{mg}} + W_{f_k} = k_C - k_A$$

$$\Rightarrow mg(h-2) + W_{f_k} = \frac{1}{2} m V_C^2 - 0$$

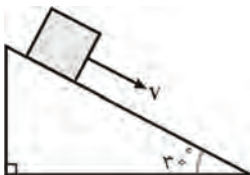
$$\Rightarrow 0.8 \times 10 \times (h-2) - 22 = \frac{1}{2} \times 0.8 \times 5^2$$

$$\Rightarrow h-2=4 \Rightarrow h=6 \text{ m}$$

گزینه ۲ صحیح است.

▼ مثال ۵۵: جسمی به جرم  $2 \text{ kg}$  را مطابق شکل با تندی اولیه  $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  تماس بر سطح رو به پایین پرتاب می‌کنیم. اگر تندی جسم پس از ۱۲ متر

جابه‌جایی روی سطح به  $8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  برسد، کار نیروی اصطکاک چند ژول است؟  $(g = 10 \text{ m/s}^2)$  (مکمل تمرین ۲-۸ صفحه ۴۰ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۸۵)



-۴۲ (۱)

-۴۵ (۲)

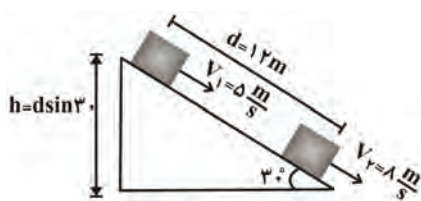
-۶۳ (۳)

-۸۱ (۴)

☑ پاسخ: نیروهای وزن و اصطکاک بر روی جسم کار انجام می‌دهند بنابراین طبق قضیه کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_{f_k} + W_{\text{mg}} = k_r - k_i, W_{\text{mg}} = mgh$$





$$\Rightarrow W_{f_k} = \frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) - mgh$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = \frac{1}{2} \times 2 \times (10^2 - 5^2) - 2 \times 10 \times 12 \times \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -81 \text{ J}$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ **مثال ۵۶:** جسمی به جرم  $2 \text{ kg}$  را از پایین سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی  $30^\circ$  درجه می‌سازد، با تندی اولیه‌ی  $\frac{5}{s} \text{ m}$  مماس با سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. جسم روی سطح به اندازه‌ی  $2 \text{ m}$  بالا می‌رود و سپس به نقطه‌ی پرتاب برمی‌گردد. کار نیروی اصطکاک در این مسیر رفت و برگشت

(مکمل تمرین ۲-۸ صفحه‌ی ۴۰ کتاب درسی - فارغ از کشور ریاضی ۸۶)

چند ژول است؟ ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ )

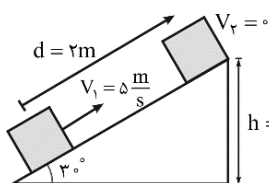
۲۰ (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

صفر (۱)

☑ **پاسخ:** قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی را برای مسیر رفت جسم می‌نویسیم، دو نیروی وزن و اصطکاک روی جسم کار انجام می‌دهند.



$$W_{\text{برآیند}} = \Delta k \Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = k_2 - k_1$$

$$-mgh + W_{f_k} = 0 - \frac{1}{2} m V_1^2$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -\frac{1}{2} \times 2 \times 5^2 + 2 \times 10 \times 1$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -5 \text{ J}$$

کار نیروی اصطکاک در مسیر برگشت هم برابر  $5 \text{ J}$  است و در نتیجه کار نیروی اصطکاک در کل مسیر رفت و برگشت برابر  $10 \text{ J}$  است. گزینه ۳ صحیح است.

### کار و انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل، کمیتی مربوط به یک سامانه (دستگاه یا سیستم) است. بنابراین وقتی دو یا چند جسم به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند به دلیل موقعیت مکانی‌شان در سامانه، انرژی پتانسیل دارند. این نوع انرژی می‌تواند به شکل‌های مختلفی، بسته به این که چه نیروهایی در سامانه وجود دارد، مانند گرانشی، کشسانی و الکتریکی در سیستم ذخیره شود.



نکته ۱: هر سامانه می‌تواند حداقل از دو جسم یا تعداد بیش‌تری از اجسام تشکیل شده باشد مانند، انرژی پتانسیل گرانشی در سامانه

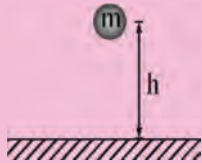
شخص-زمین، انرژی پتانسیل کشسانی در سامانه‌ی گلوله-فنر و انرژی پتانسیل الکتریکی در سامانه‌ی دو جسم باردار

نکته ۲: انرژی پتانسیل بر خلاف انرژی جنبشی که به حرکت یک جسم وابسته است، ویژگی یک سامانه است تا ویژگی یک جسم منفرد، به عبارتی دیگر انرژی پتانسیل به مکان اجسام یک سامانه نسبت به یکدیگر بستگی دارد.

نکته ۳: وقتی انرژی پتانسیل یک سامانه تغییر می‌کند به شکل‌های دیگری از انرژی تبدیل می‌شود.

## انرژی پتانسیل گرانشی

انرژی پتانسیل گرانشی سامانه‌ی متشکل از زمین و جسمی به جرم  $m$  که در ارتفاع  $h$  از سطح زمین به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$U = mgh$$

نکته: انرژی پتانسیل گرانشی، یک ویژگی مشترک جسم و زمین است و برای سامانه‌ی متشکل از این دو تعریف می‌شود و توجه کنید که رابطه  $U = mgh$  شامل هر دو ویژگی جسم ( $m$ ) و زمین (مقدار  $g$ ) است.

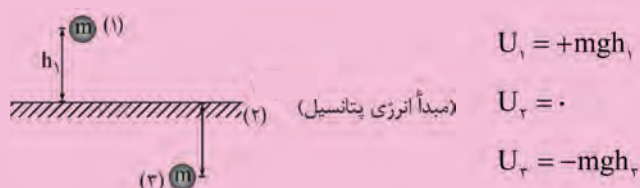
نکته: اگر گلوله به اندازه‌ی  $h$  به سمت پایین جابجا شود، انرژی پتانسیل گرانشی آن به اندازه‌ی  $mgh$  کاهش می‌یابد ( $\Delta U = -mgh$ ) و اگر به اندازه‌ی  $h$  به سمت بالا جابجا شود به اندازه‌ی  $mgh$  افزایش می‌یابد ( $\Delta U = +mgh$ ). همچنین در حالتی که جسم حرکت افقی دارد انرژی پتانسیل گرانشی آن تغییر نمی‌کند. ( $\Delta U = 0$ )



## مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی

مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی نقطه‌ای است که در آن جا  $U = 0$  ( $h = 0$ ) قرار داده می‌شود و انرژی پتانسیل گرانشی نقاط دیگر نسبت به آن نقطه سنجیده می‌شود که این نقطه کاملاً اختیاری است زیرا آن چه در فیزیک اهمیت دارد مقدار  $U$  در یک نقطه خاص نیست بلکه تنها تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی ( $\Delta U$ ) بین دو نقطه مهم است. بنابراین می‌توانیم  $U$  را در نقطه‌ای که بخواهیم برابر صفر تعریف کنیم بدون آن که تأثیری در فیزیک مسئله داشته باشد.

نکته: اگر جسم بالای مبدأ انرژی پتانسیل ( $U = 0$ ) قرار داشته باشد، انرژی پتانسیل گرانشی آن مثبت و در صورتی که زیر آن قرار گیرد انرژی پتانسیل گرانشی‌اش منفی است.





▼ **مثال ۵۷:** با صرف ۱۰ ژول انرژی، وزنه‌ای به جرم یک کیلوگرم را تا ارتفاع چند متری می‌توان بالا برد؟ ( $g = 10 \frac{N}{kg}$ )

(مکمل تمرین ۲-۱۰ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی)

☑ **پاسخ:** انرژی مصرف شده برای بالا بردن جسم، به صورت انرژی پتانسیل گرانشی در جسم ذخیره می‌شود بنابراین داریم:

$$U = mgh \Rightarrow 10 = 1 \times 10 \times h \Rightarrow h = 1m$$

▼ **مثال ۵۸:** غواصی به جرم  $70 \text{ kg}$  در حال غواصی در یک دریاچه به عمق  $60 \text{ m}$  نسبت به سطح آزاد دریاچه است. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی

این غواص در فاصله  $15 \text{ m}$  تا کف دریاچه را در دو حالت زیر بدست آورید و با مقایسه این دو حالت نتیجه‌گیری خود را توضیح دهید. ( $g = 10 \frac{N}{kg}$ )

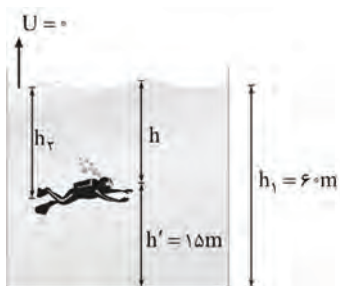
(مشابه مثال ۲-۸ صفحه ۱۴۳ کتاب درسی)

(در هر دو حالت فرض کنید غواص ابتدا در کف دریاچه بوده است)

الف) مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح آزاد دریاچه در نظر بگیرید.

ب) مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را کف دریاچه فرض کنید.

☑ **پاسخ:** الف) راه حل اول:



$$\begin{cases} h_1 = 60 \text{ m} \\ h_r = (60 - 15) = 45 \text{ m} \\ U_1 = -mgh_1 = -70 \times 10 \times 60 = -42000 \text{ J} \\ U_r = -mgh_r = -70 \times 10 \times 45 = -31500 \text{ J} \end{cases}$$

$$\Delta U = U_r - U_1 = -31500 - (-42000) \Rightarrow \Delta U = 10500 \text{ J}$$

راه حل دوم: چون غواص به سمت بالا می‌رود پس داریم:

$$\Delta U = +mgh = 70 \times 10 \times (60 - 15) \Rightarrow \Delta U = 10500 \text{ J}$$

ب) راه حل اول:



$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_r = 15 \text{ m} \\ U_1 = +mgh_1 = 0 \\ U_r = mgh_r = 70 \times 10 \times 15 = 10500 \text{ J} \end{cases}$$

$$\Delta U = U_r - U_1 = 10500 - 0 \Rightarrow \Delta U = 10500 \text{ J}$$

راه حل دوم: چون غواص به سمت بالا می‌رود پس داریم:

$$\Delta U = mg\Delta h = 70 \times 10 \times (15 - 0) \Rightarrow \Delta U = 10500 \text{ J}$$

نتیجه‌گیری: همانطور که انتظار می‌رفت، انتقاب مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی اختیاری است و تأثیری در نتیجه نهایی و فیزیک مسئله ندارد.

▼ **مثال ۵۹:** یک پسر جوان به جرم  $m_1$  و یک مرد مسن به جرم  $m_2$  ( $m_2 > m_1$ ) برای رسیدن به طبقه چهارم یک برج مسکونی دو مسیر زیر را

انتخاب می‌کنند. پسر جوان از طریق پلکان ساختمان و مرد مسن از طریق آسانسور. کدام گزینه در مورد این دو شخص در طبقه چهارم صحیح است؟

(مکمل مسئله ۱۱ پایان فصل کتاب درسی)

۱) کار نیروی وزن برای هر دو شخص یکسان است.

۲) انرژی پتانسیل گرانشی پسر جوان از مرد مسن کمتر است.

۳) انرژی پتانسیل گرانشی مرد مسن از پسر جوان کمتر است.

۴) انرژی پتانسیل گرانشی مرد مسن و پسر جوان یکسان است.

☑ **پاسخ:** با توجه به این که هر دو شخص به سمت بالا می‌روند بنابراین داریم:

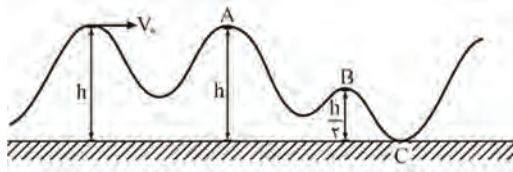
$$\Delta U = +mgh \xrightarrow{h_1=h_2, m_2>m_1} \Delta U_2 > \Delta U_1$$

$$\text{کار نیروی وزن در بالا رفتن: گزینۀ ۱} \quad W_{mg} = -mgh \xrightarrow{m_2>m_1} (W_{mg})_2 > (W_{mg})_1$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۶۰) یک قطار بازی به جرم  $m$  مطابق شکل در یک مسیر بدون اصطکاک حرکت می‌کند تا با تندی  $V_1$  به بالای نخستین تپه می‌رسد. نسبت انرژی پتانسیل گرانشی سامانه قطار - زمین در نقطه‌ی  $B$  به انرژی پتانسیل گرانشی آن در نقطه‌ی  $A$  کدام است؟

(مشابه و مکمل مسأله ۱۷ پایان فصل کتاب درسی)



- ۱)  $\frac{1}{2}$   
۲)  $\frac{1}{4}$   
۳)  $\frac{1}{3}$   
۴)  $\frac{1}{3}$

پاسخ:

$$\begin{cases} U_A = mgh \\ U_B = mg \frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{U_B}{U_A} = \frac{1}{2}$$

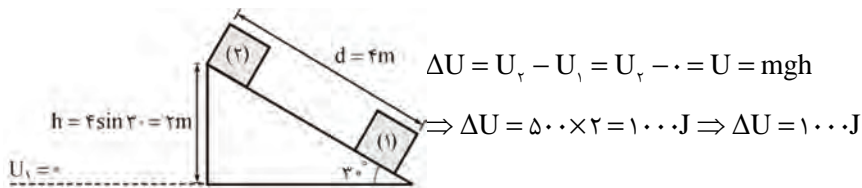
گزینه ۱ صحیح است.

▼ مثال ۶۱) جسمی به وزن ۵۰۰ نیوتون را روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی  $30^\circ$  می‌سازد بالا می‌کشیم. اگر جابه‌جایی جسم روی سطح ۴ متر باشد، افزایش انرژی پتانسیل آن چند ژول خواهد بود؟

(مکمل مثال ۲-۸ صفحه‌ی ۴۳ کتاب درسی - آزاد پزشتی ۶۷)

- ۱) ۹۸۰۰    ۲) ۲۰۰۰    ۳) ۱۰۰۰    ۴)  $۱۰۰۰\sqrt{3}$

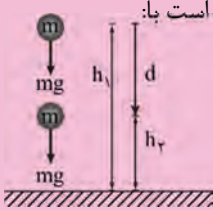
پاسخ:



گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

### کار و انرژی پتانسیل گرانشی

کار نیروی وزن بر روی جسم در حال سقوط به طرف زمین از ارتفاع  $h_1$  به ارتفاع  $h_2$  (نسبت به زمین) برابر است با:



$$\begin{cases} d = h_1 - h_2 \\ W_{mg} = mgd = mg(h_1 - h_2) \end{cases}$$

از طرفی انرژی پتانسیل گرانشی سامانه متشکل از زمین و جسمی به جرم  $m$  که در ارتفاع  $h$  از سطح زمین است بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = mgh$$

بنابراین کار نیروی وزن برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی است:

$$W_{\text{وزن}} = -\Delta U$$

تذکره: هنگامی که جسم رو به بالا حرکت می‌کند نیز رابطه  $W_{\text{وزن}} = -\Delta U$  برقرار است.



نکته ۱: هنگامی که جسم رو به زمین حرکت می‌کند ( $h$  کاهش می‌یابد) نیروی وزن جسم کار مثبت انجام می‌دهد و انرژی پتانسیل گرانشی کاهش می‌یابد. ( $\Delta U < 0$ )

نکته ۲: هنگامی که جسم رو به بالا حرکت می‌کند و از زمین دور می‌شود ( $h$  افزایش می‌یابد)، در این صورت کار انجام شده توسط نیروی وزن جسم منفی است و انرژی پتانسیل گرانشی آن افزایش می‌یابد. ( $\Delta U > 0$ )

نکته ۳: هنگامی که جسمی به جرم  $m$  توسط یک نیروی خارجی به آرامی و با تندی ثابت به اندازه  $\Delta h$  در راستای قائم جابه‌جا می‌شود (مانند جرقیل) کار انجام شده توسط نیروی خارجی ( $W_F$ ) برابر تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم است.

$$\begin{cases} W_{mg} = -mg\Delta h \\ \Delta U = -W_{mg} = -(-mg\Delta h) = mg\Delta h \end{cases} \Rightarrow W_F = mg\Delta h$$

کار نیروی وزن در بالا رفتن

▼ **مثال ۶۲** اگر جسمی به وزن  $mg$  در امتداد قائم به اندازه  $h$  به طرف پایین جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل چقدر و چگونه تغییر می‌کند؟

(مکمل تمرین ۲-۱۰ صفحه ۱۴۲ کتاب درسی - آزادگان مشهد- ۸۹)

☑ **پاسخ:** تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با منفی کار نیروی وزن:

$$\Delta U = -W_{mg}$$

از طرفی جسم به اندازه  $h = d$  به سمت پایین جابه‌جا شده است بنابراین کار نیروی وزن در همین پایین آمدن برابر است با  $mgd$ ، بنابراین داریم:

$$\Delta U = -W_{mg} = -mgd$$

در نتیجه انرژی پتانسیل جسم به اندازه  $mgd$  کاهش فواید یافت.

▼ **مثال ۶۳** موتورسواری به جرم کل  $120 \text{ kg}$  از بالای تپه‌ای، پرشی مطابق شکل روبه‌رو انجام می‌دهد. تغییرات پتانسیل گرانشی موتورسوار و کار

(مشابه و مکمل تمرین ۲-۱۴ صفحه ۱۴۴ کتاب درسی)

نیروی وزن موتورسوار در این جابه‌جایی به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟ ( $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ )



(۱)  $6600 \text{ J}$  و  $-6600 \text{ J}$

(۲)  $6600 \text{ J}$  و  $-6600 \text{ J}$

(۳)  $-66000 \text{ J}$  و  $+66000 \text{ J}$

(۴)  $66000 \text{ J}$  و  $+66000 \text{ J}$

☑ **پاسخ:** اگر جسم به اندازه  $h$  به سمت پایین جابه‌جا شود انرژی پتانسیل گرانشی آن به صورت زیر تغییر می‌کند:

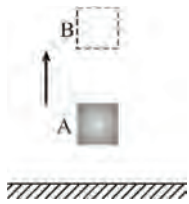
$$\Delta U = -mgh = -120 \times 10 \times (80 - 25) = -66000 \text{ J}$$

$$W_{mg} = -\Delta U \Rightarrow W_{mg} = +66000 \text{ J}$$

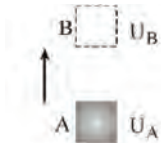
گزینه ۳ صحیح است.

▼ **مثال ۶۴** در راستای قائم جسمی به جرم  $m$  را از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B می‌بریم و کار نیروی وزن در این جابه‌جایی  $40\text{ J}$  است. اگر انرژی پتانسیل گرانشی جسم در نقطه‌ی B برابر  $60\text{ J}$  باشد، انرژی پتانسیل آن در نقطه‌ی A چند ژول است؟

- (مکمل مثال ۶۲ - ۹ - صفحه ۱۴۴ کتاب درسی)
- ۱۰۰ (۱)  
 -۱۰۰ (۲)  
 ۲۰ (۳)  
 -۲۰ (۴)



✓ پاسخ:



$$\Delta U = -W_{mg} \Rightarrow U_B - U_A = -(-40)$$

$$\Rightarrow 60 - U_A = 40 \Rightarrow U_A = 20$$

(مبدأ انرژی پتانسیل)  $U = 0$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ **مثال ۶۵** شخصی وزنه‌ای به جرم  $1\text{ کیلوگرم}$  را از سطح زمین تا ارتفاع  $2\text{ متر}$  بالا می‌برد و سپس آن را با تندی  $5\text{ متر بر ثانیه}$  پرتاب می‌کند، کار انجام شده توسط این شخص بر روی سنگ تقریباً چقدر است؟  $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

(مشابه مسئله ۸ پایان فصل کتاب درسی)

✓ پاسخ: زمین را مبدأ انرژی پتانسیل در نظر می‌گیریم  $(U_1 = 0)$  و از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم جسم ابتدا در حال سکون  $(k_1 = 0)$  پوره است.

$$W_{\text{شخص}} = \Delta U + \Delta K \Rightarrow W_{\text{شخص}} = U_2 - U_1 + k_2 - k_1$$

$$= mgh - 0 + \frac{1}{2}mV^2 - 0$$

$$\Rightarrow W_{\text{شخص}} = 1 \times 10 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 5^2 \Rightarrow W_{\text{شخص}} = 32.5\text{ J}$$

▼ **مثال ۶۶** اتومبیلی به جرم  $1000\text{ کیلوگرم}$  توسط جرثقیل از روی یک بارکش به آرامی با تندی ثابت از ارتفاع  $2\text{ متری}$  به سطح زمین انتقال می‌یابد. تغییر

(مکمل مثال ۶۲ - ۹ - صفحه ۱۴۴ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۶۲)

انرژی پتانسیل اتومبیل در این عمل برابر است با:  $(g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

- ۱) صفر  
 ۲)  $2\text{ کیلوژول}$   
 ۳)  $19.6\text{ کیلوژول}$   
 ۴)  $2000\text{ کیلوژول}$

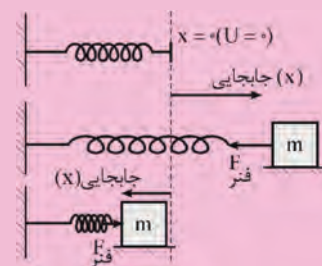
✓ پاسخ:

$$\Delta U = -mgh = -1000 \times 9.8 \times 2 \Rightarrow \Delta U = -19600\text{ J} \Rightarrow \Delta U = -19.6\text{ kJ} \Rightarrow \Delta U = 19.6\text{ kJ}$$

گزینه ۳ صحیح است.

### کار و انرژی پتانسیل کشسانی سامانه‌ی جسم - فنر

در صورتی که یک فنر از وضعیت تعادل اش  $(x = 0)$  به اندازه‌ی  $x$  فشرده یا کشیده شود نیرویی در خلاف جهت جابه‌جایی به عامل واردکننده‌ی نیرو وارد می‌شود، بنابراین کار نیروی فنر در این جابه‌جایی منفی و تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی سامانه‌ی جسم - فنر مثبت است.



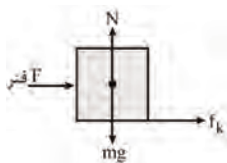
$$\Delta U = -W_{\text{فنر}}$$



▼ **مثال ۶۷** با توجه به شکل مقابل، جسمی به جرم  $2\text{ kg}$  با سرعت  $v$  روی یک سطح افقی به یک فنر برخورد کرده و آن را فشرده می‌کند. در لحظه‌ی توقف جسم، انرژی پتانسیل کشسانی فنر  $20\text{ J}$  است. اگر کار نیروی اصطکاک در این جابه‌جایی  $-29\text{ J}$  باشد، سرعت جسم در لحظه‌ی برخورد با فنر  $v$  را محاسبه کنید.

(مشابه مثال ۲-۱۱ مفهمی ۴۶ کتاب درس)

□ **پاسخ:** شکل نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و کار کل را به دست می‌آوریم. سپس تغییرات انرژی جنبشی جسم  $\Delta k$  را محاسبه می‌کنیم و در نهایت با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی  $W_t = \Delta k$ ، سرعت جسم در لحظه‌ی برخورد با فنر را تعیین می‌کنیم. کار نیروهای وزن  $mg$  و عمودی سطح  $N$  به دلیل آنکه بر جابه‌جایی افقی عمود هستند ( $\theta = 90^\circ$ ) صفر است:



$$W_{mg} = mgd \cos 90^\circ \Rightarrow W_{mg} = 0$$

$$W_{F_N} = Nd \cos 90^\circ \Rightarrow W_{F_N} = 0$$

$$W_{f_k} = -29\text{ J}$$

از طرفی چون تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی فنر  $\Delta U$  برابر با منفی کاری است که فنر روی جسم انجام می‌دهد بنابراین:

$$\Delta U_{\text{کشسانی}} = -W_{\text{فنر}} \Rightarrow W_{\text{فنر}} = -\Delta U_{\text{کشسانی}} \Rightarrow W_{\text{فنر}} = (U_f - U_i) \Rightarrow W_{\text{فنر}} = -(20 - 0) \Rightarrow W_{\text{فنر}} = -20\text{ J}$$

بنابراین کار کل برابر است با:

$$W_t = W_{mg} + W_N + W_{f_k} + W_{\text{فنر}} \Rightarrow W_{\text{برآیند}} = 0 + 0 - 20 - 29 \Rightarrow W_{\text{برآیند}} = -49\text{ J}$$

حال تغییرات انرژی جنبشی را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta K = K_f - K_i \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \rightarrow \Delta K = \frac{1}{2} \times 2(0^2 - v^2) \Rightarrow \Delta K = -v^2$$

بنابراین طبق قضیه‌ی کار و انرژی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow -49 = -v^2 \Rightarrow v = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### انرژی مکانیکی (E)

مجموع مقادیر انرژی‌های جنبشی و پتانسیل یک جسم را انرژی مکانیکی آن جسم (E) می‌نامند.

$$E = k + U$$

$$\begin{cases} k = \frac{1}{2}mV^2 \\ U = U_{\text{گرانشی}} + U_{\text{فنر}} \end{cases}$$

### اصل پایستگی انرژی مکانیکی

اگر فرض کنیم نیروهای اتلاف‌کننده‌ی انرژی (مانند مقاومت هوا و اصطکاک) در طول مسیر حرکت جسم ناچیز باشند، آن‌گاه انرژی مکانیکی جسم در تمام نقاط مسیر مقدار یکسانی خواهد داشت و پایسته می‌ماند، این نتیجه اصل پایستگی انرژی مکانیکی نام دارد.

$$E_1 = E_2$$



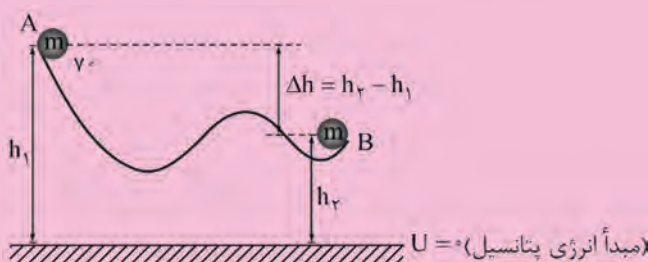
نکته ۱: بیان ریاضی دیگری از اصل پایستگی انرژی مکانیکی به صورت زیر است:

$$k_1 + U_1 = k_2 + U_2 \Rightarrow k_2 - k_1 + U_2 - U_1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta k + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta k = -\Delta U \text{ یا } |\Delta k| = |\Delta U|$$

بنابراین اگر انرژی مکانیکی پایسته باشد همواره افزایش (کاهش) انرژی جنبشی جسم با کاهش (افزایش) انرژی پتانسیل آن همواره خواهد بود.

نکته ۲: اگر یک جسم در یک سطح بدون اصطکاک مطابق شکل به اندازه  $\Delta h$  سقوط کند، اندازه‌ی تندى آن از  $V_1$  به  $\sqrt{V_1^2 + 2g\Delta h}$  خواهد رسید.



اثبات:

$$E_A = E_B \Rightarrow k_A + U_A = k_B + U_B$$

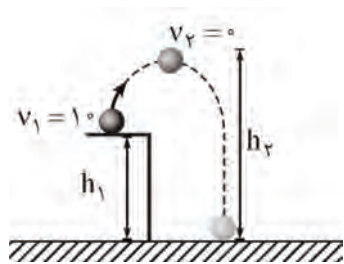
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} m V_2^2 + mgh_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2g\Delta h} \\ \Delta h = h_2 - h_1 \end{cases}$$

تذکره: اگر جسم به اندازه  $\Delta h$  بالا رود، تندى آن کاهش یافته و  $\sqrt{V_1^2 - 2g\Delta h}$  می‌رسد.

مثال ۶۸: جسمی به جرم  $5 \text{ kg}$  را از ارتفاع  $2 \text{ m}$  با سرعت  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به بالا پرتاب می‌کنیم. این جسم حداکثر تا چه ارتفاعی از سطح زمین بالا

می‌رود؟ ( $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ) و از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید. (مکمل تمرین ۲-۱۴ صفحه‌ی ۴۹ کتاب درسی - غیرانتفاعی دانش گستر مشهد - ۸۹)



پاسخ: چون حداکثر ارتفاع بالا رفتن فواسته شده بنابراین جسم تا جایی بالا می‌رود که متوقف شود ( $k_2 = 0$ ). از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است بنابراین انرژی مکانیکی جسم بین نقاط (۱) و (۲) پایسته است ( $E_1 = E_2$ ). مبدأ انرژی پتانسیل ( $U = 0$ ) را سطح زمین در نظر می‌گیریم.

بنابراین فوایم داشت:

$$(1) E_1 = K_1 + U_1 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 \Rightarrow E_1 = \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 10^2\right) + (5 \times 10 \times 2)$$

$$\Rightarrow E_1 = 35 \text{ J}$$

$$(2) E_2 = K_2 + U_2 \Rightarrow E_2 = 0 + mgh_2 \Rightarrow E_2 = 5 \times 10 \times h_2$$

$$\Rightarrow E_2 = 5h_2$$

طبق رابطه پایستگی انرژی فوایم داشت:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 35 = 5h_2 \Rightarrow h_2 = 7 \text{ m}$$





▼ **مثال ۶۹:** جسمی به جرم یک کیلوگرم در شرایط خلاء، بدون تندی اولیه از ارتفاع  $h$  رها می‌شود. اگر انرژی جنبشی آن در نیمه‌ی مسیر ۲۰ ژول

(مرتبط با مفهومی ۱۴۷ کتاب درسی-سراسری ترم ۶)

باشد، ارتفاع  $h$  چند متر است؟  $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

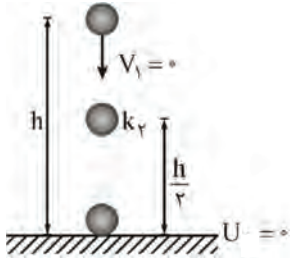
۴ (ع)

۶ (س)

۲ / ۷۵ (ز)

۱ / ۵ (۱)

✓ **پاسخ:** جسم بدون تندی اولیه رها شده است  $(V_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0)$  و از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است بنابراین انرژی مکانیکی جسم در طول مسیر پایسته است.



$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2 \Rightarrow 0 + mgh = 20 + mg \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow mg \frac{h}{2} = 20 \Rightarrow 1 \times 10 \times \frac{h}{2} = 20 \Rightarrow h = 4 \text{ m}$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ **مثال ۷۰:** جسمی به جرم  $m$  را با تندی  $\frac{m}{s}$  در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. با نادیده گرفتن اتلاف انرژی، تندی جسم در نیمه‌ی

(مکمل تمرین ۲-۱۴۹ مفهومی ۱۴۹ کتاب درسی-سراسری ریاضی ۸۸)

راه روبه بالا چند متر بر ثانیه است؟  $(g = 10 \frac{m}{s^2})$

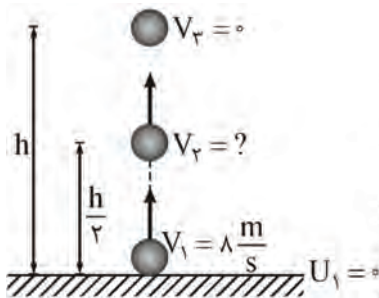
۵√۲ (ع)

۴√۲ (س)

۴ (ز)

۶ (۱)

✓ **پاسخ:** از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است، بنابراین انرژی مکانیکی جسم در طول مسیر پایسته است.



$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_1^2 + 0 = 0 + mgh \Rightarrow h = \frac{V_1^2}{2g} = \frac{\lambda^2}{2 \times 10}$$

$$\Rightarrow h = 3/2 \text{ m}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} m V_2^2 + mg \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{V_1^2 - gh} = \sqrt{\lambda^2 - 10 \times 3/2} = \sqrt{32}$$

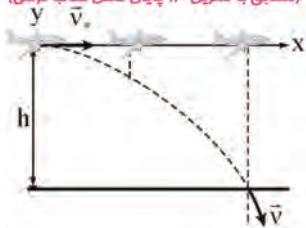
$$\Rightarrow V_2 = 4\sqrt{2} \frac{m}{s}$$

گزینه ۳ صحیح است.

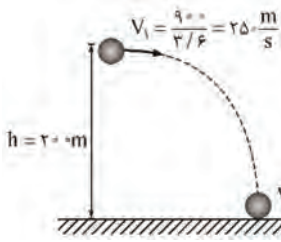
▼ **مثال ۷۱:** در شکل زیر، هواپیمای بمب‌افکنی که در ارتفاع ۲۰۰ متری با تندی  $90 \text{ km/h}$  به طور افقی پرواز می‌کند، بمبی را رها می‌کند. اگر از

مقاومت هوا صرف‌نظر شود، تندی بمب در لحظه‌ی برخورد به زمین تقریباً چند متر بر ثانیه است؟  $(g = 10 \frac{N}{kg})$

(مطابق با تمرین ۱۳ پایان فصل کتاب درسی)



با توبه به این که از مقاومت هوا صرف نظر شده است پس انرژی مکانیکی بمب در طول مسیر پایسته است.  پاسخ:



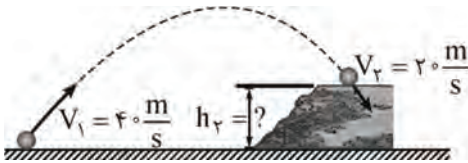
$$E_1 = E_r \Rightarrow k_1 + U_1 = k_r + U_r$$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 + mgh = \frac{1}{2} m V_r^2 + \cdot$$

$$\Rightarrow V_r = \sqrt{V_1^2 + 2gh} = \sqrt{25^2 + 2 \times 10 \times 20} \Rightarrow V_r \approx 25.8 \frac{m}{s}$$

مثال ۷۲) تویی مطابق شکل از سطح زمین با تندی  $V_1 = 40 \frac{m}{s}$  به طرف صخره‌ای پرتاب می‌شود. اگر توب با تندی  $V_r = 20 \frac{m}{s}$  به بالای صخره

برخورد کند، ارتفاع  $h_r$  را به دست آورید. مقاومت هوا را هنگام حرکت توب نادیده بگیرید. ( $g = 10 \frac{m}{s^2}$ ) (مشابه با تمرین ۲-۱۴ صفحه ۱۴۷ کتاب درسی)



با توبه به این که از مقاومت هوا صرف نظر شده است، بنابراین داریم:  پاسخ:

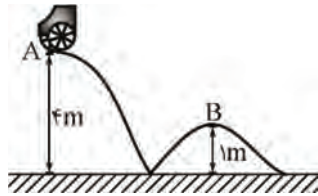
$$\begin{cases} E_1 = E_r \Rightarrow k_1 + U_1 = k_r + U_r \\ U_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow k_1 = k_r + U_r$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} m V_r^2 + mgh_r \Rightarrow \frac{1}{2} V_1^2 = \frac{1}{2} V_r^2 + gh_r$$

$$\frac{1}{2} \times (40)^2 = \frac{1}{2} \times (20)^2 + 10 \cdot h_r \Rightarrow h_r = 60 \text{ m}$$

مثال ۷۳) مطابق شکل، ارابه‌ای به جرم  $m$  از نقطه‌ی  $A$  با تندی  $2$  متر بر ثانیه می‌گذرد، تندی آن هنگام عبور از نقطه‌ی  $B$  چند متر بر ثانیه

است؟ (از اصطکاک صرف نظر شود ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )) (مشابه با مثال ۲-۱۳ صفحه ۱۴۸ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۸۴)



۴ (۱)

۸ (۲)

 $\sqrt{46}$  (۳)۴ بستگی به جرم  $m$  دارد. (۴)

پون از اصطکاک صرف نظر شده است، انرژی مکانیکی ارابه در طول مسیر پایسته است. مبدأ انرژی پتانسیل را زمین در نظر می‌گیریم:  پاسخ:

$$E_A = E_B \Rightarrow k_A + U_A = k_B + U_B$$

$$\frac{1}{2} m V_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2} m V_B^2 + mgh_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times (2)^2 + 10 \times 4 = \frac{1}{2} \times V_B^2 + 10 \times 1$$

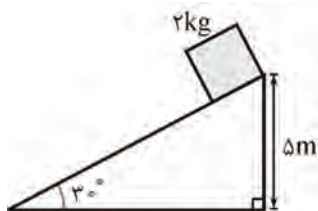
$$V_B^2 = 64 \Rightarrow V_B = 8 \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ صحیح است.



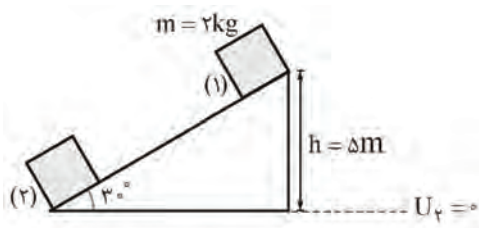
▼ **مثال ۷۴** در شکل زیر، وزنه‌ی  $2\text{ kg}$  از حال سکون به حرکت درمی‌آید. اگر اصطکاک ناچیز باشد، انرژی جنبشی وزنه در لحظه‌ی رسیدن به سطح

(مکمل پرسش ۲-۴ صفحه‌ی ۱۴۷ کتاب درسی-آزاد تهرانی ۸۰)



افقی به چند ژول می‌رسد؟  $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$

- ۱۰۰ (۱)
- ۵۰ (۲)
- ۲۰ (۳)
- ۲۰۰ (۴)



□ **پاسخ:** چون سطح بدون اصطکاک است انرژی مکانیکی وزنه در طول مسیر پایسته است.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$0 + mgh = k_2 + 0$$

$$\Rightarrow k_2 = mgh = 2 \times 10 \times 5$$

$$\Rightarrow k_2 = 100\text{ J}$$

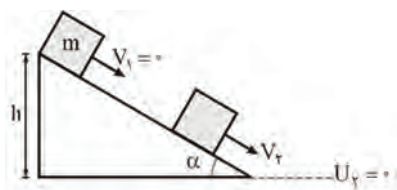
گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

▼ **مثال ۷۵** دو جسم A و B بر روی دو سطح شیب‌دار بدون اصطکاک که به ترتیب با سطح افق زوایای  $30^\circ$  و  $60^\circ$  درجه می‌سازند، از یک

ارتفاع، بدون تندی اولیه رها می‌شوند و با تندی‌های  $V_A$  و  $V_B$  به پایین سطح می‌رسند. در این صورت نسبت  $\frac{V_A}{V_B}$  برابر است با:

(مکمل مسأله ۱۲ پایان فصل کتاب درسی-سراسری ریاضی ۶۲)

- $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (۱)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (۲)
- ۱ (۳)
- $\sqrt{3}$  (۴)



□ **پاسخ:** چون از اصطکاک صرف نظر شده است انرژی مکانیکی جسم در طول مسیر پایسته است.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$\Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2} mV_2^2 + 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$$

بنابراین تندی گلوله در موقع رسیدن به پایین سطح فقط تابعی از ارتفاع سطح شیب‌دار است بنابراین برای هر دو جسم A و B که از یک ارتفاع مشخص رها می‌شوند، تندی آن‌ها در لحظه رسیدن به پایین سطح شیب‌دار یکی است.

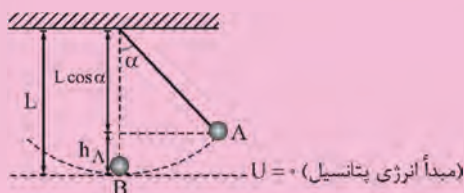
گزینه ۳ صحیح است.

نکته: در شکل مقابل گلوله‌ای به جرم  $m$ ، به ریسمانی به طول  $L$  متصل است اگر گلوله با تندی  $V_1$  از نقطه‌ی A شروع به حرکت

کند، تندی در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر گلوله از رابطه  $V = \sqrt{V_1^2 + 2gL(1 - \cos \alpha)}$  به دست می‌آید: (از مقاومت هوا صرف نظر شده

است.)

اثبات:



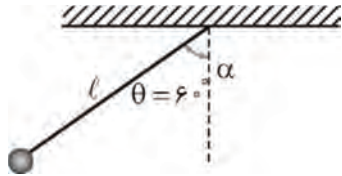
$$\begin{cases} V_B = \sqrt{V_1^2 + 2g\Delta h} \\ \Delta h = h_A = L - L \cos \alpha = L(1 - \cos \alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{V_1^2 + 2gL(1 - \cos \alpha)}$$

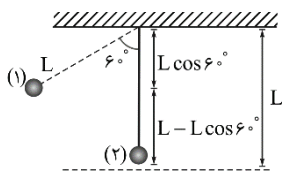
▼ **مثال ۷۶** آونگی به جرم  $۲g$  و طول  $۴cm$  را مطابق شکل مقابل به اندازه‌ی  $۶۰^\circ$  درجه از وضعیت قائم منحرف و از حال سکون رها می‌کنیم.

سرعت آونگ هنگامی که از وضعیت قائم می‌گذرد چقدر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و  $g = ۱۰ \frac{m}{s^2}$  است و  $\cos 60^\circ = ۰/۵$ )

(مکمل مسأله ۱۸ پایان فصل کتاب درسی - فریفتگان تهران - ۸۹)



□ **پاسخ:** از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است بنابراین انرژی مکانیکی مطابق شکل بین نقاط ۱ و ۲ پایسته است ( $E_1 = E_2$ ). مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی ( $U = 0$ ) را نقطه ۲ در نظر می‌گیریم بنابراین برای مناسبه سرعت آونگ در وضعیت قائم به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$h_1 = l - l \cos 60^\circ \Rightarrow h_1 = l(1 - \cos 60^\circ)$$

$$h_2 = 0 \Rightarrow U_2 = 0$$

انرژی مکانیکی آونگ در نقطه‌ی (۱):

$$E_1 = k_1 + U_1 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} m \times 0^2 + m \times g \times l(1 - \cos 60^\circ)$$

$$\Rightarrow E_1 = 0 + m g l(0/5) \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} m g l$$

انرژی مکانیکی آونگ در نقطه‌ی (۲):

$$E_2 = k_2 + U_2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + 0 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

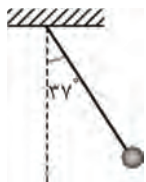
با توجه به رابطه‌ی پایستگی انرژی داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m g l = \frac{1}{2} m v_2^2 \Rightarrow v_2^2 = g l \Rightarrow v_2^2 = 10 \times 0/5 \times 4 \Rightarrow v_2 = \sqrt{0/5 \times 4} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{10}}{5} \frac{m}{s}$$

▼ **مثال ۷۷** مطابق شکل زیر، آونگی به طول  $۱/۲۵$  متر، با تندی  $v$  از وضعیت نشان داده شده (نقطه‌ی A) عبور می‌کند. کم‌ترین مقدار  $v$

چند متر بر ثانیه باشد، تا ریسمان بتواند به وضعیت افقی برسد؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود،  $g = ۱۰ \frac{m}{s^2}$  و  $\sin 37^\circ = 0/۶$ )

(مکمل مسأله ۱۸ پایان فصل کتاب درسی - سراسری تبریز ۹۶)

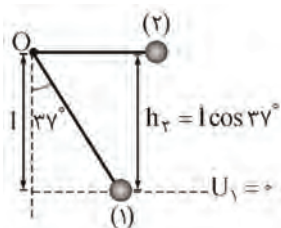


۲(۱)

۲√۵ (۲)

√۵ (۳)

۴(۴)



□ **پاسخ:** چون از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است، انرژی مکانیکی آونگ پایسته می‌ماند.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

$$\Rightarrow v^2 = v_2^2 + 2 g h_2$$



چون کم‌ترین مقدار  $V$  خواسته شده است باید فرض کنیم تندی در نقطه‌ی ۲ صفر شود و ریسمان دیگر بالاتر نرود.

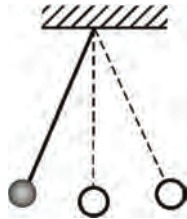
$$\Rightarrow V = \sqrt{2gh_r} = \sqrt{2gl \cos 37} = \sqrt{2 \times 10 \times 1 / 25 \times 0.8} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} \Rightarrow V = 2\sqrt{5} \frac{m}{s}$$

گزینه ۲ صحیح است.

▼ مثال ۷۸) آونگی به طول  $1/6$  متر در حال نوسان است. وقتی گلوله‌ی آونگ از پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر می‌گذرد، تندیش  $4 \text{ m/s}$  است. زاویه‌ی

راستای نخ با خط قائم وقتی گلوله به بالاترین نقطه‌ی مسیر می‌رسد، چند درجه است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$  و مقاومت هوا ناچیز است).

(مکمل مسأله ۱۸ پایان فصل کتاب درسی - فابج از کشور ریاضی ۸۷)



۴۵ (۱)

۳۰ (۲)

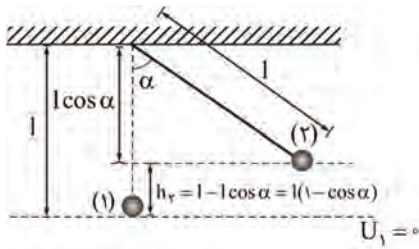
۶۰ (۳)

۹۰ (۴)

پاسخ: چون مقاومت هوا ناچیز است، انرژی مکانیکی آونگ پایسته است.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

بالاترین نقطه‌ی مسیر، مکانی است که تندی در آن یا صفر است.



$$\frac{1}{2} m V_1^2 + 0 = 0 + mgh_r$$

$$V_1^2 = 2gh_r = 2gl(1 - \cos \alpha)$$

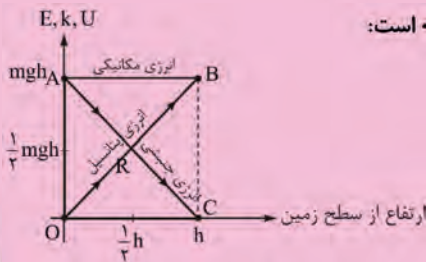
$$4^2 = 2 \times 10 \times 1/6 (1 - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

گزینه ۳ صحیح است.

نکته: نمودار تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل برای جسمی که از روی سطح زمین تا ارتفاع  $h$  جابه‌جا می‌شود در شکل مقابل رسم شده است. از روی نمودار پیداست که در حین بالا رفتن انرژی پتانسیل جسم افزایش و انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد ولی مجموع این دو

انرژی در طول حرکت پایسته (ثابت) می‌ماند. بنابراین انرژی مکانیکی در طول حرکت پایسته است:



$$E_1 = E_2$$

لحظه پرتاب از روی سطح زمین:  $O, A$

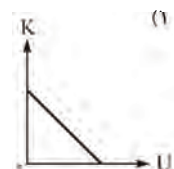
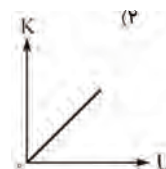
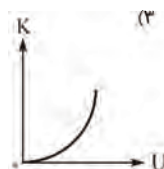
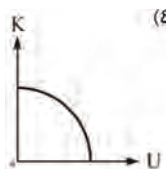
لحظه توقف در ارتفاع  $h$  از سطح زمین:  $B, C$

▼ مثال ۷۹) گلوله‌ای را با تندی اولیه‌ی  $V_0$  از سطح زمین در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر مقاومت هوا ناچیز باشد، نمودار انرژی

جنبشی گلوله ( $K$ ) بر حسب انرژی پتانسیل گرانشی آن ( $U$ ) از لحظه‌ی پرتاب تا لحظه‌ای که گلوله به حداکثر ارتفاع خود از سطح زمین می‌رسد،

(مکمل مثال ۷-۱۲ صفحه ۱۴۸ کتاب درسی - آزمون کلون ۹۳)

مطابق کدام گزینه است؟ (سطح زمین را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر بگیرید).



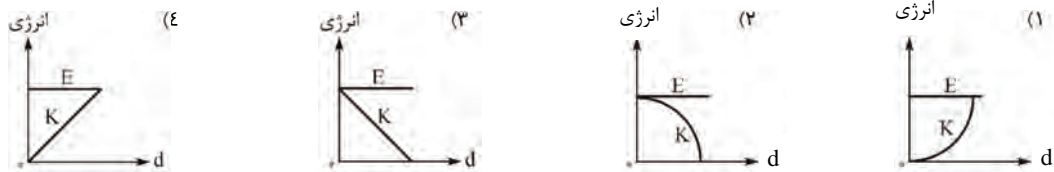
پاسخ: چون مقاومت هوا ناپیاز است بنابراین انرژی مکانیکی پایسته است:

$$E = K + U = \text{ثابت} \quad K = -U + \text{ثابت}$$

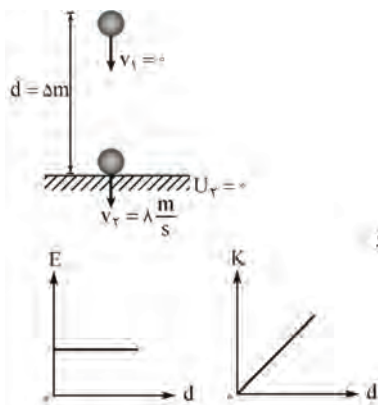
بنابراین نمودار  $K - U$  یک خط راست با شیب منفی و عرض از مبدأ مثبت است.  
گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۸۰: در شرایط خلاء، جسمی بدون تندی اولیه از ارتفاع معینی از سطح زمین رها می‌شود. نمودار تغییرات انرژی جنبشی ( $K$ ) و انرژی مکانیکی جسم ( $E$ )، بر حسب اندازه‌ی جابه‌جایی آن ( $d$ )، کدام است؟

(معمل مسأله ۱۲ پایان فصل کتاب درسی - آزمون کانون ۹۰)



پاسخ: چون مقاومت هوا وجود ندارد پس انرژی مکانیکی ( $E$ ) پایسته است (بدون تغییر می‌ماند):



$$E = \text{ثابت}$$

$$E_i = E_f \Rightarrow k_i + U_i = k_f + U_f$$

$$\Rightarrow 0 + mgd = k_f + 0 \Rightarrow k_f = mgd$$

بنابراین نمودار انرژی جنبشی ( $k_f$ ) و اندازه‌ی جابه‌جایی ( $d$ )، یک خط راست با شیب ثابت و مثبت است.

گزینه ۴ صحیح است.

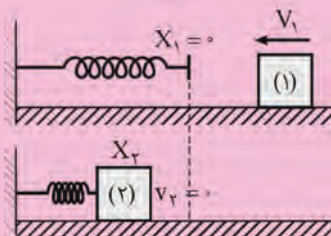
### پایستگی انرژی مکانیکی در حضور فنر

در شکل زیر جسمی را در نظر بگیرید که با تندی  $V_1$  روی یک سطح افقی بدون اصطکاک به یک فنر برخورد کرده و فنر تا جایی فشرده می‌شود که جسم برای یک لحظه ساکن شود (حداکثر فشردگی) در این صورت بیش‌ترین انرژی پتانسیل کشسانی فنر برابر است با:

$$U_{\max} = k_1$$

اثبات:

با فرض زمین به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی چون جسم روی سطح زمین جابجا می‌شود انرژی پتانسیل گرانشی آن صفر است.



$$E_i = E_f \Rightarrow k_i + U_i = k_f + U_f$$

$$\Rightarrow k_i + 0 = 0 + U_{\max}$$

$$\Rightarrow U_{\max} = k_i = \frac{1}{2} m V_1^2$$

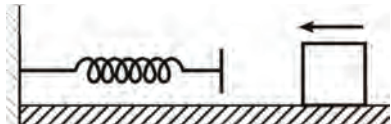
تذکره: کار نیروی فنر در این حالت برابر است با:

$$\begin{cases} W_{\text{فنر}} = -(\Delta U) = -(U_f - U_i) = -(U_{\max} - 0) = -k_1 \Rightarrow W_{\text{فنر}} = -k_1 = -\frac{1}{2} m V_1^2 \\ U_{\max} = k_1 \end{cases}$$



▼ **مثال (۸۱)** مطابق شکل، جسمی به جرم  $4 \text{ kg}$  با سرعت  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  به فنری که در وضع عادی است برخورد می‌کند، هیچ گونه اصطکاکی نداریم. در

لحظه‌ای که سرعت جسم  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  است، انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر چند ژول است؟ (مرتباً با صفحه‌های ۴۷ تا ۴۸ کتاب درسی - مدرسه - تهران)



□ **پاسخ:** نقطه (۱) را لحظه برخورد جسم با فنر و نقطه (۲) را لحظه‌ای که جسم فنر را فشرده کرده دارای سرعت  $V_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  است در نظر می‌گیریم با توجه به نبود اصطکاک انرژی مکانیکی پایسته است  $E_1 = E_2$  بنابراین برای مناسبه انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر فوایم داشت:

$$(1) \quad E_1 = K_1 + U_1 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} m V_1^2 + (U_{\text{کشسانی}})_1 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^2 + 0 \rightarrow E_1 = 200 \text{ J}$$

$$(2) \quad E_2 = K_2 + U_2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} m V_2^2 + (U_{\text{کشسانی}})_2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4^2 + (U_{\text{کشسانی}})_2$$

$$\Rightarrow E_2 = 32 + (U_{\text{کشسانی}})_2$$

با توجه به رابطه‌ی پایستگی انرژی داریم:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 200 = 32 + (U_{\text{کشسانی}})_2 \Rightarrow (U_{\text{کشسانی}})_2 = 168 \text{ J}$$

بنابراین انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر در لحظه‌ای که سرعت آن  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  است برابر  $168 \text{ J}$  است.

### سامانه منزوی

به سامانه‌ای که نه از بیرون انرژی می‌گیرد و نه به بیرون انرژی می‌دهد سامانه منزوی گفته می‌شود.

### قانون پایستگی انرژی

در یک سامانه منزوی، مجموع کل انرژی پایسته است، نمی‌توان آن را خلق یا نابود کرد بلکه فقط از یک شکل به شکل دیگر تبدیل می‌شود.

تذکر: قانون پایستگی انرژی بر اساس آزمایش‌های بی‌شماری بنا شده است و تاکنون هیچ مورد استثنایی برای آن یافته نشده است.

نکته ۱: قانون پایستگی انرژی بیانی از ثبات در طبیعت است. انرژی کل، کمیتی است که پایسته می‌ماند در حالی که کمیت‌های دیگر

می‌توانند تغییر کنند.

نکته ۲: هرچه تعداد ذرات سازنده یک جسم بیش‌تر و انرژی هر ذره آن زیادتر باشد، انرژی درونی آن نیز بیش‌تر است.

## کار و انرژی درونی - بررسی تغییرات انرژی مکانیکی در اثر نیروهای تلف‌کننده انرژی

اگر در طی مسیر حرکت جسم، نیروهای اتلافی (اصطکاک و مقاومت هوا) به جسم وارد شوند، این نیروها روی جسم کار منفی انجام می‌دهند و بخشی از انرژی مکانیکی جسم را به انرژی درونی جسم، سطح مسیر و یا هوا تبدیل می‌کنند. اگر کار نیروهای اتلافی را با  $W_f$  نشان دهیم، داریم:



$$W_f = E_2 - E_1$$

نکته ۱: در حضور نیروهای اتلافی رابطه بین  $\Delta U$  و  $\Delta k$  برابر است با:

$$E_2 - E_1 = W_f \Rightarrow (U_2 + k_2) - (U_1 + k_1) = W_f$$

$$\Rightarrow U_2 - U_1 + k_2 - k_1 = W_f \Rightarrow \Delta U + \Delta k = W_f$$

نکته ۲: با گذشت زمان، انرژی مکانیکی جسم دائماً کاهش می‌یابد و پایسته نمی‌ماند زیرا نیروهای اتلافی به جسم وارد می‌شوند.

(مرتبط با صفحه‌های ۴۹ تا ۵۰ کتاب درسی)

▼ مثال ۸۲) انرژی درونی یک جسم، ..... آن است.

- ۱) جنبشی - متناسب با سرعت
- ۲) درونی - مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ذره‌های تشکیل دهنده
- ۳) پتانسیل گرانشی - متناسب با سرعت
- ۴) مکانیکی - مجموع انرژی پتانسیل گرانشی و کشسانی

☑ پاسخ: طبق تعریف، انرژی درونی یک جسم، مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ذره‌های تشکیل دهنده آن است.

گزینه ۱: «۱» انرژی جنبشی متناسب با میزور تندی است  $k = \frac{1}{2} mV^2$ .

گزینه ۳: «۳» انرژی پتانسیل گرانشی متناسب با  $m$  و ارتفاع آن از سطح زمین است  $U = mgh$ .

گزینه ۴: «۴» انرژی مکانیکی، مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی جسم است  $E = k + U$ .  
گزینه ۲ صحیح است.

(مرتبط با صفحه‌های ۵۰ کتاب درسی - سراسری تجربی ۶۲)

▼ مثال ۸۳) جسمی که در هوا سقوط می‌کند:

- ۱) تمام انرژی مکانیکی آن به گرما تبدیل می‌شود.
- ۲) انرژی مکانیکی آن مرتباً کاهش می‌یابد.
- ۳) تمام انرژی مکانیکی آن همواره ثابت می‌ماند.
- ۴) کاهش انرژی پتانسیل آن برابر گرمایی است که تولید می‌شود.

☑ پاسخ: به علت وجود مقاومت هوا، انرژی مکانیکی جسم رفته رفته کاهش می‌یابد.

گزینه ۲ صحیح است.

▼ مثال ۸۴) کاهش انرژی پتانسیل گرانشی جسمی بر اثر سقوط از ارتفاع  $h$  برابر  $60J$  و افزایش انرژی جنبشی آن  $40J$  می‌باشد. کار نیروی

(مرتبط با صفحه‌های ۵۰ کتاب درسی مکتب شهری - ۸۸)

مقاومت هوا در این جابه‌جایی چقدر است؟





▼ **مثال ۸۷** توپی به جرم  $0.5 \text{ kg}$  مطابق شکل با تندی  $V_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  از نقطه‌ی A می‌گذرد. نیروی مقاومت هوا و نیروی اصطکاک بین سطح تماس توپ با زمین، ۱۰ درصد انرژی جنبشی توپ را تا رسیدن به نقطه‌ی B تلف می‌کنند. تندی توپ را در این نقطه به دست آورید.

(مشابه تمرین ۲-۱۵ صفحه‌ی ۵۱ کتاب درسی)



☑ **پاسخ:** قسم روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی در هر دو نقطه A و B صفر است، از طرفی مکانیکی در اثر فشار نیروهای اصطکاک تلف می‌شود:



$$\begin{cases} U_A = 0 \\ E_A = k_A + U_A = k_A = \frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 10^2 \Rightarrow E_A = 25 \text{ J} \end{cases}$$

$$W_{fk} = \frac{10}{100} \times k_A = \frac{10}{100} \times 25 = 2.5 \text{ J}$$

$$\begin{cases} W_f = E_B - E_A \\ E_B = k_B + U_B = k_B + 0 = k_B = \frac{1}{2} m V_B^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2.5 = \frac{1}{2} \times 0.5 \times V_B^2 - 25 \Rightarrow V_B = \sqrt{90} = \sqrt{9 \times 10} = 3\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

راه حل دوم:

۱۰ درصد انرژی جنبشی تلف می‌شود بنابراین ۹۰ درصد آن به نقطه B می‌رسد:

$$k_B = 0.9 k_A \Rightarrow \frac{1}{2} m V_B^2 = 0.9 \times \frac{1}{2} m V_A^2 \Rightarrow V_B^2 = 0.9 \times 10^2 \Rightarrow V_B = \sqrt{90} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3\sqrt{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

▼ **مثال ۸۸** قطاری با تندی  $54 \text{ km/h}$  در حال حرکت است. یک تکه گل به جرم  $400 \text{ g}$  را با تندی  $20 \text{ m/s}$  به طرف قطار پرت کرده و به آن می‌چسبند. اتلاف انرژی تکه گل چند ژول است؟

(مکمل تمرین ۲-۱۵ صفحه‌ی ۵۱ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۹۹)

۱۷/۵ (۴)

۳۵ (۳)

۷۰ (۲)

۱۴۰ (۱)

☑ **پاسخ:** حرکت تکه گل قبل و بعد از برخورد با قطار افقی است بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی آن در طول مسیر صفر است. از طرفی اگر کاری که باعث اتلاف انرژی می‌شود را با  $W'$  نشان دهیم، داریم:

$$W' = E_v - E_1 = k_v + U_v - k_1 - U_1 = \frac{1}{2} m V_v^2 + 0 - \frac{1}{2} m V_1^2 - 0$$

$$\Rightarrow W' = \frac{1}{2} \times 400 \times 10^{-3} \times \left(\frac{54}{3.6}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 400 \times 10^{-3} \times (20)^2$$

$$W' = 45 - 80 \Rightarrow W' = -35 \text{ J}$$

بنابراین ۳۵ J انرژی در اثر این برخورد اتلاف می‌شود.  
گزینه ۳ صحیح است.

▼ **مثال ۸۹** جسمی به جرم  $2 \text{ kg}$  روی سطح شیب‌داری که با سطح افق زاویه‌ی  $30^\circ$  می‌سازد، با تندی ثابت رو به پایین می‌لغزد. اگر در این حرکت

(مکمل مثال ۲-۱۴ صفحه‌ی ۵۰ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۹۴)

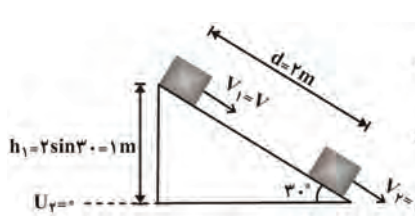
جسم به اندازه‌ی ۲ متر جابه‌جا شود، کار نیروی اصطکاک چند ژول است؟  $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

-۲۰ (۴)

-۱۰ (۳)

$-10\sqrt{3}$  (۲)

$-20\sqrt{3}$  (۱)



پاسخ: به علت وجود اصطکاک، انرژی مکانیکی جسم پایسته نیست و تغییر می‌کند.

$$W_{f_k} = E_r - E_i = (k_r + U_r) - (k_i + U_i)$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = (k_r - k_i) + (U_r - U_i) = (0 - 0) + (0 - U_i) = -U_i$$

$$W_{f_k} = -mgh_1 = -2 \times 20 \times 1 \Rightarrow W_{f_k} = -20 \text{ J}$$

گزینه ۴ صحیح است.

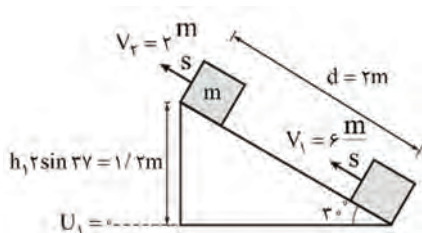
مثال ۹۰: جسمی به جرم ۱ kg با تندی اولیه  $\frac{m}{s}$  از پایین سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی  $37^\circ$  می‌سازد، به طرف بالا پرتاب می‌شود. هنگامی

که جسم روی سطح شیب‌دار ۲ متر را رو به بالا طی می‌کند، تندی‌ش به  $\frac{m}{s}$  می‌رسد. انرژی مکانیکی جسم در این جابه‌جایی چند ژول کاهش می‌یابد؟

(مکمل مثال ۲-۱۴ صفحه‌ی ۵۰ کتاب درسی - سراسری تهرانی ۹۶)  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  و  $\sin 37^\circ = 0.6$  از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.

- ۱۶ (ع)
- ۸ (۳)
- ۶ (۲)
- ۴ (۱)

پاسخ:



$$E_i = k_i + U_i = \frac{1}{2} m V_1^2 + 0 = \frac{1}{2} m V_1^2 \Rightarrow E_i = \frac{1}{2} \times 1 \times 2^2 \Rightarrow E_i = 2 \text{ J}$$

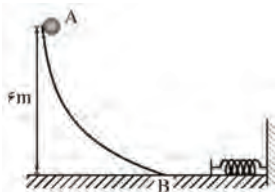
$$E_r = k_r + U_r = \frac{1}{2} m V_2^2 + mgh_r \Rightarrow E_r = \frac{1}{2} \times 1 \times 1^2 + 1 \times 10 \times 1.2 \Rightarrow E_r = 12.5 \text{ J}$$

$$\Delta E = E_r - E_i = 12.5 - 2 \Rightarrow \Delta E = 10.5 \text{ J}$$

پس انرژی مکانیکی به اندازه‌ی ۱۰.۵ J کاهش می‌یابد.  
گزینه ۱ صحیح است.

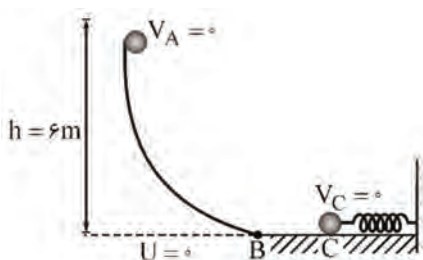
مثال ۹۱: گلوله‌ای به جرم ۲۰۰ گرم از نقطه‌ی A رها می‌شود و پس از برخورد به فنری در سطح افقی آن را متراکم می‌کند. اگر کار نیروی اصطکاک در مسیر AB برابر  $-2 \text{ J}$  باشد و سطح افقی بدون اصطکاک باشد حداکثر انرژی پتانسیل کشسانی فنر چند ژول خواهد شد؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

(مکمل مثال ۲-۱۴ صفحه‌ی ۵۰ کتاب درسی - سراسری تهرانی ۸۶)



- ۸ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۱۲ (ع)
- ۱۰ (۳)

پاسخ: حداکثر انرژی پتانسیل کشسانی فنر زمانی حاصل می‌شود که جسم در برافورد با فنر، آن را حداکثر متراکم کند یعنی تا نقطه‌ای (C) که تندی آن صفر شده و متوقف شود. با توجه به وجود اصطکاک انرژی مکانیکی گلوله پایسته نمی‌ماند.



$$E_A = k_A + U_A = 0 + mgh \Rightarrow E_A = mgh$$

$$E_C = k_C + U_C + (U_{\text{فنر}})_{\text{max}} = 0 + 0 + (U_{\text{فنر}})_{\text{max}}$$

$$W_{f_k} = E_C - E_A$$

$$\Rightarrow -2 = (U_{\text{فنر}})_{\text{max}} - 200 \times 10^{-3} \times 10 \times 6$$

$$\Rightarrow (U_{\text{فنر}})_{\text{max}} = 10 \text{ J}$$

گزینه ۳ صحیح است.

## توان

توان کمیتی است نرده‌ای و به صورت آهنگ انجام کار (یا کار انجام شده در واحد زمان) تعریف می‌شود. هنگامی که کار (W) در بازه‌ی زمانی  $\Delta t$  انجام می‌شود، کار انجام شده در واحد زمان یا توان متوسط  $\bar{P}$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \begin{cases} W : (J) & \text{کار انجام شده بر حسب ژول} \\ \Delta t : (s) & \text{بازه‌ی زمانی انجام کار بر حسب ثانیه} \\ \bar{P} : (W) & \text{توان بر حسب ژول بر ثانیه یا وات} \end{cases}$$

نکته: یکای توان در SI، وات (W) است و مطابق تعریف آن، یک وات برابر است با یک ژول بر ثانیه ( $1W = \frac{1J}{1s}$ ) یکاهای بزرگ‌تر مانند کیلووات (kW) و مگاوات (MW) نیز مرسوم است.

$$1kW = 10^3 W$$

$$1MW = 10^6 W$$

تذکره: یکای رایج و متداول برای توان خودرو اسب بخار است (horse power = hp) و هر اسب بخار برابر با ۷۴۶ وات است. تذکره: در فیزیک، سریع انجام گرفتن کار بر حسب توان توصیف می‌شود، بنابراین توان یک ماشین معیاری برای توصیف کندتر یا سریع‌تر انجام گرفتن یک کار است.

(مرتبط با صفحه‌ی ۸۵ کتاب درسی)

▼ مثال ۹۲ نیوتن متر بر ثانیه معادل با واحد کدام کمیت فیزیکی است؟

- (۱) انرژی (۲) کار (۳) توان (۴) شتاب

☑ پاسخ: طبق رابطه‌ی  $W = Fd$ ، یک نیوتن متر معادل یک ژول است. بنابراین داریم:

$$1 \frac{N \cdot m}{s} = 1 \frac{J}{s} = 1W$$

که وات واحد توان است.

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۹۳ اتومبیلی به جرم  $900 \text{ kg}$  در یک جاده‌ی افقی روی خط راست از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از  $10 \text{ s}$  تندی آن به  $\frac{72 \text{ km}}{h}$  می‌رسد. توان متوسط اتومبیل چند کیلووات است؟ (نیروی مقاوم در مقابل حرکت اتومبیل را نادیده بگیرید).

(مشابه مثال ۲-۱۵ صفحه‌ی ۸۵ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۸۱)

- ۹ (۱) ۱۸ (۲) ۳۰ (۳) ۳۶ (۴)

☑ پاسخ: چون نیروی مقاوم ناچیز است تنها نیروی موتور اتومبیل (F) کار انجام می‌دهد بنابراین طبق قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_F = \frac{1}{2} m V_f^2 - \frac{1}{2} m V_i^2 = \frac{1}{2} m (V_f^2 - V_i^2)$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2} \times 900 \cdot \left[ \left( \frac{72}{3.6} \right)^2 - 0 \right] \Rightarrow W_F = 18 \times 10^4 \text{ J}$$

$$P = \frac{W_F}{t} = \frac{18 \times 10^4}{10} \Rightarrow P = 18000 \text{ W} = 18 \text{ kW}$$

گزینه ۲ صحیح است.



▼ **مثال ۹۴** جرم یک آسانسور با محتویات آن  $600 \text{ kg}$  است و با سرعت ثابت در  $5$  دقیقه،  $40 \text{ m}$  بالا می‌رود. توان متوسط موتور آن را حساب کنید.

(مشابه مثال ۲-۱۶ صفحه ۵۲ کتاب درسی - غیردولتی کمال- ساری ۹۱)  $(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})$

□ **پاسخ:** به آسانسور در حال حرکت رو به بالا دو نیرو وارد می‌شود: یکی نیروی وزن ( $mg$ ) به سمت پایین و دیگری نیروی موتور به سمت بالا  $F$ . بنابراین ابتدا با استفاده از قضیه کار و انرژی  $W_t = \Delta K$ ، کار نیروی موتور آسانسور  $W_F$  را مناسبه کرده و سپس با توجه به رابطه  $\bar{P} = \frac{W_F}{\Delta t}$  توان موتور آسانسور را به دست می‌آوریم.

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_{mg} = -mgd \Rightarrow W_{mg} = -600 \times 10 \times 40 \Rightarrow W_{mg} = -240000 \text{ J}$$

$$W_F : \text{ کار نیروی موتور آسانسور}$$

بنابراین طبق قضیه کار و انرژی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_F + W_{mg} = \Delta K$$

با توجه به اینکه سرعت ثابت است بنابراین تغییرات انرژی جنبشی  $\Delta K = 0$  است لذا خواهیم داشت:

$$W_F + W_{mg} = 0 \Rightarrow W_F = -W_{mg} \Rightarrow W_F = -(-240000) \Rightarrow W_F = 240000 \text{ J}$$

بنابراین توان متوسط موتور آسانسور برابر است با:

$$\bar{P} = \frac{W_F}{\Delta t} \Rightarrow \bar{P} = \frac{240000}{300} \Rightarrow \bar{P} = 800 \text{ W}$$

▼ **مثال ۹۵** یک پمپ الکتریکی در هر دقیقه  $1200$  کیلوگرم آب را به سطحی به ارتفاع  $50$  متر می‌رساند. توان پمپ چند وات است؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$ )

(مکمل مثال ۲-۱۶ صفحه ۵۲ کتاب درسی - سراسری تجربی ۷۶)

$$10^2 \text{ (۱)} \quad 10^4 \text{ (۲)} \quad 240 \text{ (۳)} \quad 2400 \text{ (۴)}$$

□ **پاسخ:** کاری که پمپ انجام می‌دهد صرف غلبه بر نیروی وزن آب می‌شود:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{1200 \times 10 \times 50}{60} \Rightarrow P = 10^4 \text{ W}$$

گزینه ۲ صحیح است.

▼ **مثال ۹۶** کوهنوردی که جرمش  $60$  کیلوگرم است در مدت  $20$  دقیقه از دامنه‌ی کوهی بالا می‌رود. اگر اختلاف ارتفاع دو نقطه‌ی شروع و پایان حرکت

او  $500$  متر باشد، توان متوسط وی در غلبه بر نیروی وزنش چند وات است؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$ ) (مشابه تمرین ۲۰ پایان فصل کتاب درسی - آزاد ریاضی ۶۵)

$$1500 \text{ (۱)} \quad 1200 \text{ (۲)} \quad 250 \text{ (۳)} \quad 150 \text{ (۴)}$$

□ **پاسخ:** کاری که کوهنورد انجام می‌دهد برای غلبه بر نیروی وزن است.

$$P_{\text{شخص}} = \frac{W_{\text{شخص}}}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{60 \times 10 \times 500}{20 \times 60} \Rightarrow P_{\text{شخص}} = 250 \text{ W}$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ **مثال ۹۷** شخصی به جرم  $75$  کیلوگرم از طریق پلکان یک ساختمان  $5$  طبقه که ارتفاع هر طبقه آن  $3$  متر است، در مدت  $20$  ثانیه از طبقه همکف

به طبقه آخر ساختمان می‌رسد، توان متوسط این شخص چند کیلووات است؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$ ) (مکمل تمرین ۲۰ پایان فصل کتاب درسی - سراسری تجربی ۶۴)

$$0.562 \text{ (۱)} \quad 5/62 \text{ (۲)} \quad 56/2 \text{ (۳)} \quad 562 \text{ (۴)}$$

□ **پاسخ:** کاری که شخص انجام می‌دهد صرف غلبه بر نیروی وزن آن می‌شود:

$$P_{\text{شخص}} = \frac{W_{\text{شخص}}}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{75 \times 10 \times 5 \times 3}{20} = 562.5 \text{ W} = 0.5625 \text{ kW}$$

گزینه ۱ صحیح است.

▼ مثال ۹۸) پمپ یک ماشین آتش‌نشانی در هر یک دقیقه ۷۵ کیلوگرم آب را با تندی ۲۰ متر بر ثانیه از دهانه‌ی لوله‌ای به خارج می‌فرستد. توان مفید

(مکمل مثال ۲-۱۶ صفحه ۵۶ کتاب درسی - سراسری تمرین ۶۲)

پمپ بر حسب کیلووات برابر است با:

۱) ۲۵ / ۰      ۲) ۵۰ / ۱      ۳) ۵۰ / ۲      ۴) ۰۰ / ۳

☑ پاسخ: تغییرات انرژی جنبشی آب هنگام خروج از دهانه لوله پمپ آتش‌نشانی نتیجه کار پمپ است.

$$W_{\text{پمپ}} = \Delta k_{\text{آب}} = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow W_{\text{پمپ}} = \frac{1}{2} \times 75 \times 20^2 \Rightarrow W_{\text{پمپ}} = 15000 \text{ J}$$

$$P_{\text{پمپ}} = \frac{W_{\text{پمپ}}}{t} = \frac{15000}{60} \Rightarrow P_{\text{پمپ}} = 250 \text{ W} = 0.25 \text{ kW}$$

گزینه ۱ صحیح است.



نکته: اگر یک متحرک با تندی ثابت  $V$  در یک مسیر مستقیم حرکت کند، توان نیروی ثابت  $F$  که بر این متحرک وارد می‌شود برابر

است با:

$$\begin{cases} W = Fd \cos \theta \\ d = Vt \end{cases} \Rightarrow P = \frac{W}{t} = \frac{FVt \cos \theta}{t} \Rightarrow P = FV \cos \theta$$

که  $\theta$  زاویه‌ی بین نیروی  $F$  و جهت حرکت متحرک است.

▼ مثال ۹۹) آسانسوری با تندی ثابت، ۱۰ نفر مسافر را در مدت ۳ دقیقه به اندازه‌ی ۸۰ متر در راستای قائم بالا می‌برد. اگر جرم متوسط هر مسافر

۸۰ kg و جرم آسانسور ۱۰۰۰ kg باشد، توان متوسط موتور آسانسور چند کیلووات است؟  $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$  (مشابه تمرین ۱۹ پایان فصل کتاب درسی)

☑ پاسخ: چون تندی ثابت است پس نیرویی که آسانسور باید وارد کند برابر وزن آسانسور و مسافران داخل آن است.

$$\begin{cases} P = FV \cos \theta = mgV \cos \theta \\ V = \frac{h}{t} = \frac{80}{3 \times 60} = \frac{4}{9} \text{ m/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = (80 \times 10 + 1000) \times 10 \times \frac{4}{9} = 8000 \text{ W} \Rightarrow P = 8 \text{ kW}$$

▼ مثال ۱۰۰) هر یک از دو موتور جت یک هواپیمای مسافری بوئینگ ۷۶۷، پیشرانهای (نیرویی که به هواپیما به طرف جلو وارد می‌شود) برابر

$3 \times 10^6 \text{ N}$  ایجاد می‌کند. اگر هواپیما در هر دقیقه  $8/22 \text{ km}$  در امتداد پیشرانه حرکت کند، توان متوسط هر یک از موتورهای هواپیما چند اسب

(مشابه تمرین ۲-۱۶ صفحه ۵۶ کتاب درسی)

بخار است؟

۱) ۵hp / ۶۸

۲) ۶۸۵۰hp

۳) ۶۸۵۰۰hp

۴) ۶۸۵۰۰۰hp



پاسخ: 

$$d = V \cdot t \Rightarrow V = \frac{d}{t} = \frac{8 / 22 \times 10^3}{60} = 137 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{cases} P = FV \cos \theta = FV \cos 0 = FV = 3 / 73 \times 10^5 \times 137 \Rightarrow P = 511 / 01 \times 10^5 \text{ W} \\ \theta = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = 511 / 01 \times 10^5 \text{ W} \xrightarrow{\text{هر اسب بخار } = 746 \text{ W (hP)}} P = 6850 \cdot \text{hP}$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۱۰۱) یک موتور الکتریکی جسمی به جرم ۲۰۰ کیلوگرم را در مدت ۵۰ ثانیه در راستای قائم با تندی ثابت ۱۲ متر بر ثانیه بالا می‌برد. توان این

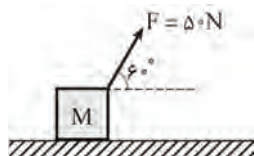
موتور چند کیلووات است؟  $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$  (مکمل تمرین ۱۹ پایان فصل کتاب درسی - آزاد غیرپزشکی ۸۹ و آزاد ریاضی ۸۴)

پاسخ:  چون تندی ثابت است، برای این کار باید نیرویی برابر با  $mg$  از طرف موتور بر جسم وارد شود و همچنین توان متوسط با توان لفظه‌ای و تندی متوسط با تندی لفظه‌ای یکی است:

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \bar{P} = \bar{F}V \cos \theta \Rightarrow P = mgV \cos 0 = 200 \times 10 \times 12 = 24000 \text{ W} \Rightarrow P = 24 \text{ kW} \end{cases}$$

▼ مثال ۱۰۲) در شکل زیر، وزنه‌ی  $M$  که اصطکاک آن با سطح ناچیز است، از حال سکون به حرکت درمی‌آید و در مدت ۵ ثانیه ۱۰ متر روی سطح

افقی جابه‌جا می‌شود. متوسط توان مفید چند وات است؟ (مکمل تمرین ۱۹ پایان فصل کتاب درسی - آزاد پزشکی ۸۲)

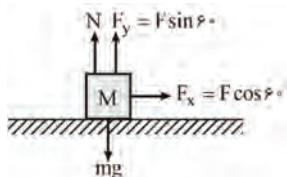


$$50\sqrt{3} \quad (1)$$

$$25\sqrt{3} \quad (2)$$

$$50 \quad (3)$$

$$25 \quad (4)$$



$$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10}{5} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \bar{P} = F\bar{V} \cos \theta \Rightarrow \bar{P} = 50 \times 2 \times \cos 60 \Rightarrow \bar{P} = 50 \text{ W}$$

پاسخ: 

گزینه ۳ صحیح است.

## بازده

هر سامانه‌ای فقط بخشی از انرژی ورودی (انرژی مصرفی سامانه) را به انرژی مورد نظر ما تبدیل می‌کند. بنابراین تنها بخشی از انرژی ورودی قابل استفاده است که به آن انرژی خروجی یا کار مفید گفته می‌شود، نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی را بازده می‌نامیم.

$$\text{بازده بر حسب درصد} = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times 100$$

تذکر: معمولاً بازده هر سامانه را بر حسب درصد بیان می‌کنند که همواره عددی کوچک‌تر از ۱۰۰ است.

نکته: بازده را به صورت نسبت توان مفید به کل کار یا توان ورودی نیز تعریف می‌کنند.

$$\text{بازده بر حسب درصد} = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{کل}}} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times 100$$



نکته: کار یا توان تلف شده از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$W_{\text{تلف شده}} = W_{\text{کل}} - W_{\text{مفید}}$$

$$P_{\text{تلف شده}} = P_{\text{کل}} - P_{\text{مفید}}$$



نکته: بازده را می‌توان به صورت‌های زیر نیز بیان کرد:

$$\text{بازده بر حسب درصد} = \frac{W_{\text{کل}} - W_{\text{تلف}}}{W_{\text{کل}}} \times 100 = \left(1 - \frac{W_{\text{تلف}}}{W_{\text{کل}}}\right) \times 100 = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{تلف}} + W_{\text{مفید}}} \times 100$$

$$\text{بازده بر حسب درصد} = \frac{P_{\text{کل}} - P_{\text{تلف}}}{P_{\text{کل}}} \times 100 = \left(1 - \frac{P_{\text{تلف}}}{P_{\text{کل}}}\right) \times 100 = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{تلف}} + P_{\text{مفید}}} \times 100$$

▼ مثال ۱۰۳) توان مصرفی یک موتور الکتریکی ۴۰۰ وات و بازده آن ۷۵٪ است. در هر دقیقه چند کیلوژول انرژی الکتریکی در آن به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟

(مکمل مثال ۲-۱۷ صفحه ۵۳ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۷۳)

۶ (ع)

۴ / ۳۲ (۳)

۴ (۲)

۱ / ۴۴ (۱)

☑ پاسخ:

$$\text{بازده} = \frac{E_{\text{مفید}}}{E_{\text{تولیدی}}} = \frac{\text{انرژی شروبی (مفید)}}{\text{انرژی تولیدی (کل)}}$$

$$E_{\text{تولیدی}} = P_{\text{تولیدی}} \times t = 400 \times 60 \Rightarrow E_{\text{تولیدی}} = 24000 \text{ J}$$

$$\Rightarrow \frac{75}{100} = \frac{E_{\text{مفید}}}{24000} \Rightarrow E_{\text{مفید}} = 18000 \text{ J}$$

$$E_{\text{گرمایی}} = E_{\text{تولیدی}} - E_{\text{مفید}} = 24000 - 18000$$

$$\Rightarrow E_{\text{گرمایی}} = 6000 \text{ J} \Rightarrow E_{\text{گرمایی}} = 6 \text{ kJ}$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ مثال ۱۰۴) توان یک تلمبه‌ی برقی ۲ کیلووات و بازده آن ۹۵٪ است. این تلمبه در هر دقیقه چند کیلوگرم آب را از عمق ۹/۵ متر بالا می‌آورد؟

(مشابه مثال ۲-۱۷ صفحه ۵۳ کتاب درسی - سراسری تجربی ۷۳)

۲۰ (ع)

۲۰۰ (۳)

۱ / ۲ × ۱۰<sup>۲</sup> (۲)۱ / ۲ × ۱۰<sup>۴</sup> (۱)

☑ پاسخ:

$$\text{بازده} = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{کل}}} \Rightarrow 0.95 = \frac{P_{\text{مفید}}}{2 \times 10^3} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = 1900 \text{ W}$$

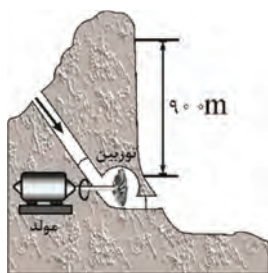
کاری که تلمبه برقی انجام می‌دهد صرف غلبه بر کار نیروی وزن می‌شود.

$$W_{\text{mg}} = -mgh \Rightarrow W_{\text{تلمبه}} = mgh = m \times 10 \times 9.5 \Rightarrow W_{\text{تلمبه}} = 95m$$

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W_{\text{تلمبه}}}{t} \Rightarrow 1900 = \frac{95m}{60} \Rightarrow m = 1200 \text{ kg} \Rightarrow 1.2 \times 10^3 \text{ kg}$$

گزینه ۲ صحیح است.





▼ **مثال ۱۰۵** آب ذخیره شده در پشت سد یک نیروگاه برق آبی، از ارتفاع ۹۰/۰ متری روی پرده‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند. با چرخش توربین، مولد می‌چرخد و انرژی الکتریکی تولید می‌شود (شکل روبه‌رو). اگر ۸۵/۰ درصد کار نیروی گرانش به انرژی مکانیکی تبدیل شود، در هر ثانیه چند متر مکعب آب باید روی توربین بریزد تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه ۲۰۰MW برسد، جرم هر متر مکعب آب را  $10^3 \text{ kg}$  در نظر بگیرید. (مشابه تمرین ۲-۱۷ صفحه ۵۴ کتاب درسی)

☑ پاسخ:

$$\text{کار نیروی وزن در پایین آمدن} \quad W_{mg} = mgh = m \times 10 \times 90 \Rightarrow W_{mg} = 900m$$

$$\text{مولد P توان ورودی به مولد} \quad P_{\text{کل}} = \frac{W_{mg}}{t} = \frac{900m}{1} \Rightarrow P_{\text{کل}} = 900m$$

$$\text{بازده} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{کل}}} \Rightarrow \frac{85}{100} = \frac{200 \times 10^6}{900m} \Rightarrow m = \frac{200 \times 10^6}{9 \times 85} = 261437 / 9 \text{ kg}$$

با توجه به این که جرم هر متر مکعب آب را برابر  $10^3$  در نظر گرفتیم بنابراین داریم:

$$m^3 \text{ حجم آب بر حسب} = \frac{261437 / 9}{10^3} = 261 / 4 \text{ m}^3$$

▼ **مثال ۱۰۶** مولد A نسبت به مولد B دارای توان کم‌تر ولی بازده بیشتر است. این بدان معنی است که مولد A نسبت به مولد B با مقدار

(مرتبط با صفحه ۵۳ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۷۲)

سوخت مساوی کار ..... انجام می‌دهد.

(۲) بیش‌تر و در زمان کم‌تر

(۱) بیش‌تر و در زمان بیش‌تر

(۴) کم‌تر و در زمان بیش‌تر

(۳) کم‌تر و در زمان کم‌تر

☑ پاسخ:

$$\text{بازده} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} = \frac{W_{\text{خروجی}}}{W_{\text{ورودی}}} \quad \frac{(W_{\text{ورودی}})_A = (W_{\text{ورودی}})_B}{(A \text{ بازدهی}) > (B \text{ بازدهی})} \Rightarrow (W_{\text{خروجی}})_A < (W_{\text{خروجی}})_B$$

از طرفی چون توان مولد A کم‌تر از مولد B است، مولد A برای انجام یک کار مشخص، زمان بیش‌تری باید صرف کند. گزینه ۳ صحیح است.

## آزمون



۱- شهاب سنگی به جرم  $4 \times 10^6 \text{ kg}$  و تندی  $15 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  وارد جو زمین می‌شود، اگر این شهاب سنگ تقریباً با همین تندی به زمین برخورد کند، انرژی جنبشی آن چند برابر انرژی آزاد شده به‌وسیله‌ی یک تن TNT است؟ (انرژی آزاد شده هر تن TNT برابر  $4/8 \times 10^9$  ژول است.)  
(مشابه پرسش و مسئله ۲ پایان فصل کتاب درسی)

۴۵۰۰۰۰ (۱)      ۸۳۷۵۰ (۲)      ۹۳۷۵۰ (۳)      ۱۰۰۰۰۰ (۴)

۲- صندوقی به جرم  $50 \text{ kg}$  با تندی ثابت  $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  توسط یک نیروی افقی روی کف اتاق کشیده می‌شود. اگر نیروی اصطکاک در مقابل حرکت ۲۰۰ نیوتن باشد، مقدار گرمایی که در هر متر جابه‌جایی جسم در اثر اصطکاک تولید می‌شود چند ژول است؟ ( $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ )  
(فرض می‌کنیم کار نیروی اصطکاک تماماً به گرما تبدیل می‌شود.)  
(مکمل مثال ۲-۴ صفحه ۳۴ کتاب درسی)

۲۰ (۱)      ۲۰۰ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۰۰ (۴)

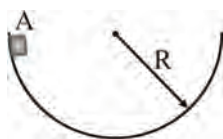
۳- یک قایق به جرم  $500 \text{ kg}$  روی یک دریاچه بدون اصطکاک ساکن است. در لحظه‌ای که بادی ناگهانی با نیروی ثابت  $\vec{F}$  به قایق شتابی به بزرگی  $40 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  می‌دهد، این قایق در جهت نیرو به اندازه‌ی  $8 \text{ m}$  جابه‌جا می‌شود. کار انجام شده توسط نیروی  $\vec{F}$  چند ژول است؟  
(مشابه مثال ۲-۳ صفحه ۳۲ کتاب درسی)

۱۶۰۰۰۰ (۱)      ۱۶۰۰۰۰ (۲)      ۱۶۰۰۰ (۳)      ۱۶۰۰ (۴)

۴- چتربازی که مجموع جرم او و چترش  $140 \text{ kg}$  است، از ارتفاع  $600$  متری سطح زمین با تندی ثابت سقوط می‌کند. کار نیروی مقاومت هوا بر روی چتر و شخص از لحظه‌ی سقوط تا لحظه‌ای که به سطح زمین می‌رسد، چند کیلوژول می‌باشد؟ ( $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ )  
(مشابه مثال ۲-۷ صفحه ۳۹ کتاب درسی - آزمون کانون ۹۳)

۶۴۰ (۱)      -۶۴۰ (۲)      ۸۴۰ (۳)      -۸۴۰ (۴)

۵- جسمی درون سطح نیم‌کره‌ای مطابق شکل، از نقطه‌ی A رها می‌شود و بعد از چند حرکت رفت و برگشت لغزشی، روی سطح در پایین سطح می‌ایستد. نسبت کار نیروی اصطکاک به کار نیروی جاذبه‌ی زمین کدام است؟  
(مکمل تمرین ۲-۸ صفحه ۴۰ کتاب درسی - سراسری ریاضی ۷۹)



-۲ (۱)

-۱ (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)



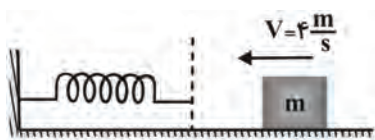
۶- یک جسم به وسیله جرثقیل به آرامی و با تندی ثابت، از سطح زمین تا ارتفاع معین بالا برده می‌شود، در این عمل:

(مکمل مثال ۲-۹ صفحه ۱۴۴ کتاب درسی)

- (۱) کار انجام شده صرف تغییر انرژی جنبشی جسم می‌شود.
- (۲) کار انجام شده به صورت انرژی پتانسیل در جسم ذخیره می‌شود.
- (۳) انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود.
- (۴) انرژی پتانسیل جسم کاهش می‌یابد.

۷- مطابق شکل، جسمی به جرم  $5 \text{ kg}$  با تندی  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  روی سطح افقی بدون اصطکاک می‌لغزد و پس از برخورد با فنری آنرا فشرده می‌کند. وقتی جسم توسط فنر به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود، تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی فنر چند ژول است؟

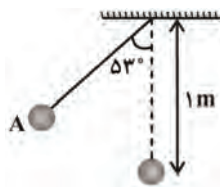
(مکمل و مشابه مثال ۲-۱۱ صفحه ۱۴۶ کتاب درسی)



- |       |       |
|-------|-------|
| ۴ (۱) | ۴ (۲) |
| ۸ (۳) | ۸ (۴) |

۸- در شکل زیر، گلوله‌ی آونگ از نقطه‌ی A رها می‌شود و با تندی  $v$  از پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر می‌گذرد. هنگامی که با تندی گلوله به  $v = \frac{\sqrt{2}}{2}$  می‌رسد، زاویه‌ی نخ با راستای قائم چند درجه است؟ (از مقاومت هوا صرف نظر شود،  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  و  $\cos 53^\circ = 0.6$ )

(مکمل مسأله‌ی ۱۸ پایان فصل کتاب درسی- سراسری ریاضی ۹۶)



- |        |
|--------|
| ۶۰ (۱) |
| ۴۵ (۲) |
| ۳۷ (۳) |
| ۳۰ (۴) |

۹- هواپیمای ایرباس A۳۲۰ به جرم  $8 \times 10^4 \text{ kg}$  در امتداد باند هواپیما از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از گذشت ۲۰ ثانیه با تندی  $360 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  از روی باند به پرواز درمی‌آید، توان موتور این هواپیما چند مگاوات است؟

(مشابه با مسأله‌ی ۲۱ پایان فصل کتاب درسی)

- |        |         |          |         |
|--------|---------|----------|---------|
| ۲۰ (۱) | ۲۰۰ (۲) | ۲۵/۹ (۳) | ۲۵۹ (۴) |
|--------|---------|----------|---------|

۱۰- یک ماشین برای بالا بردن یک جسم ۲ کیلوگرمی از سطح زمین به ارتفاع معین  $100$  ژول انرژی مصرف کرده است. اگر جسم از این ارتفاع در شرایط خلاء سقوط کند و تندی آن هنگام رسیدن به زمین  $4\sqrt{5} \text{ m/s}$  باشد، بازده ماشین کدام است؟ ( $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ )

(مکمل مثال ۲-۱۷ صفحه ۵۳ کتاب درسی- سراسری ریاضی ۷۶)

- |         |          |         |          |
|---------|----------|---------|----------|
| ۰/۷ (۱) | ۰/۷۵ (۲) | ۰/۸ (۳) | ۰/۸۵ (۴) |
|---------|----------|---------|----------|

## پاسخنامه



-۱ گزینتهی «۳»

$$\begin{cases} V = 15 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 15 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ K = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^6 \times (15 \times 10^3)^2 \\ = 450 \times 10^{12} \text{ J} \end{cases}$$

$$\frac{\text{انرژی شهاب سنگ}}{\text{انرژی آژاد شره یک تن TNT}} = \frac{450 \times 10^{12}}{4 / 8 \times 10^9} = 93750$$

-۲ گزینتهی «۲»

$$\begin{cases} W_{f_k} = f_k d \cos 180^\circ = 200 \times 1 \times (-1) \\ \Rightarrow W_{f_k} = -200 \text{ J} \end{cases}$$

$$\text{انرژی گرمای تولیدشده} = |W_f| = 200 \text{ J}$$

-۳ گزینتهی «۲»

با استفاده از قانون دوم نیوتن برای مناسبه‌ی نیروی بار ( $\vec{F}$ ) داریم:

$$F = ma = 500 \times 40 \Rightarrow F = 2 \times 10^4 \text{ N}$$

چون نیرو و جابه‌جایی هم‌جهت‌اند بنابراین برای مناسبه‌ی کار نیروی  $F$  داریم:

$$W_F = Fd = 2 \times 10^4 \times 8 \Rightarrow W_F = 16 \times 10^4 \text{ J}$$

-۴ گزینتهی «۴»

پترباز با تندی ثابت سقوط می‌کند پس تغییرات انرژی جنبشی آن صفر است از طرفی فقط نیروی وزن ( $mg$ ) و نیروی مقاومت هوا ( $R$ ) بر روی آن کار انجام می‌دهند پس طبق قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{aligned} W_{\text{برآیند}} = \Delta k &\Rightarrow W_R + W_{mg} = 0 \\ \Rightarrow W_R = -W_{mg} = -mgh &= -140 \times 10 \times 600 \\ \Rightarrow W_R = -840 \text{ kJ} \end{aligned}$$

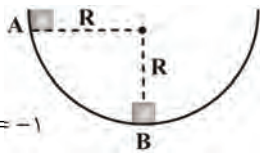
-۵ گزینتهی «۲»

در جابه‌جایی جسم از  $A$  تا  $B$ ، نیروی وزن و اصطکاک کار انجام می‌دهند بنابراین طبق قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی داریم:

$$W_{\text{برآیند}} = \Delta k \Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = k_B - k_A$$

$$\Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = 0 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow W_{f_k} = -W_{mg} \Rightarrow \frac{W_{f_k}}{W_{mg}} = -1$$



-۶ گزینتهی «۲»

چون تندی جسم تغییر نکرده، بنابراین انرژی جنبشی ثابت می‌ماند.

-۷ گزینتهی «۱»

با توجه به نبود اصطکاک از لحظه‌ی برخورد جسم با فنر تا لحظه‌ی متوقف شدن آن  $V_f = 0$ ، فقط نیروی فنر بر روی جسم کار انجام می‌دهد بنابراین برای مناسبه‌ی کار نیروی فنر طبق قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow W_t = \Delta k \\ V_f = 0 \Rightarrow k_f = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_{\text{فنر}} = k_f - k_1 = 0 - k_1 = -k_1$$

$$\Rightarrow W_{\text{فنر}} = -\frac{1}{2} m V_1^2 = -\frac{1}{2} \times 50 / 5 \times 4^2$$

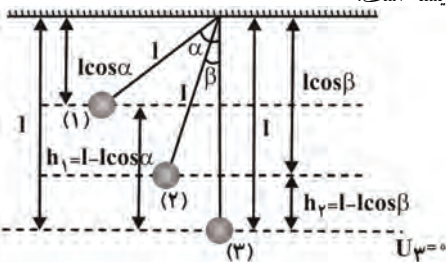
$$\Rightarrow W_{\text{فنر}} = -4 \text{ J}$$

از طرفی تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی سامانه جسم-فنر برابر منفی کار نیروی فنر بر روی جسم است:

$$\Delta U_{\text{فنر}} = -W_{\text{فنر}} \Rightarrow \Delta U = -(-4) \Rightarrow \Delta U = 4 \text{ J}$$

-۸ گزینتهی «۳»

از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است پس انرژی مکانیکی کلوه در مسیر پایسته است.





$$\Rightarrow W_t = \frac{1}{2} \times 18 \times 10^4 \times \left( \left( \frac{36}{3.6} \right)^2 - 0 \right) = 400 \times 10^6 \text{ J}$$

بنابراین توان متوسط موتور برای انجام این کار برابر است با:

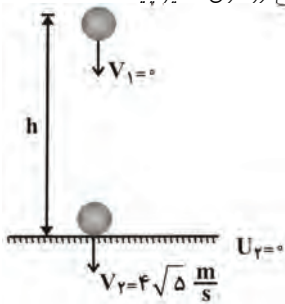
$$\bar{P} = \frac{W_t}{\Delta t} = \frac{400 \times 10^6}{20} \Rightarrow \bar{P} = 20 \times 10^6 \text{ W}$$

$$\Rightarrow \bar{P} = 20 \text{ MW}$$

۱۰- گزینه‌ی «۳»

چون جسم در شرایط فلا سقوط کرده است بنابراین از مقاومت

هوا صرف نظر شده و انرژی مکانیکی در طول مسیر پایسته است.



$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2 \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2} mV_2^2 + 0$$

$$h = \frac{V_2^2}{2g} = \frac{(4\sqrt{5})^2}{2 \times 10} \Rightarrow h = 4 \text{ m}$$

کاری که ماشین در بالا بردن جسم انجام می‌دهد ( $W'$ ) صرف

غلبه بر کار نیروی وزن می‌شود:

$$W' = mgh = 2 \times 10 \times 4 \Rightarrow W' = 80 \text{ J}$$

از طرفی کل انرژی ماشین در انجام این کار ۱۰۰ J بوده است

بنابراین داریم:

$$\text{بازده} = \frac{W'}{W} = \frac{80}{100} = 0.8$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$0 + mgh_1 = \frac{1}{2} mV_2^2 + mgh_2$$

$$\Rightarrow V_2^2 = 2gh_1 - 2gh_2 = 2g(h_1 - h_2)$$

$$V_2^2 = 2g(1 - 1 \cos \alpha - 1 + 1 \cos \beta)$$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2gl(\cos \beta - \cos \alpha)}$$

بنابراین اگر کوله‌ای را به اندازه‌ی زاویه‌ی  $\alpha$  از وضع تعادل

فارج کرده، رها کنیم تندی آن در هر لحظه از رابطه‌ی بالا به‌دست

می‌آید.

$$\begin{cases} \alpha = 53^\circ \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = V = \sqrt{2gl(\cos 0 - \cos 53^\circ)}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2 \times 10 \times 1 \times 0.4} \Rightarrow V = \sqrt{8} \text{ m/s}$$

$$\begin{cases} \alpha = 53^\circ \\ \beta = ? \\ V_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} V \end{cases} \Rightarrow V_2 = \sqrt{2gl(\cos \beta - \cos 53^\circ)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{1} = \sqrt{2 \cdot 1 (\cos \beta - 0.6)}$$

$$\Rightarrow 4 = 2 \cdot 1 (\cos \beta - 0.6) \Rightarrow \cos \beta = 0.2 + 0.6 = 0.8$$

$$\Rightarrow \beta = 37^\circ$$

۹- گزینه‌ی «۱»

طبق قضیه‌ی کار-انرژی جنبشی، کار انجام شده توسط موتور هوایما

برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است، بنابراین داریم:

$$W_t = \Delta k = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} mV_2^2 - \frac{1}{2} mV_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m(V_2^2 - V_1^2)$$